L'Àngela em va mirar amb uns ulls entremaliats i somrients, i es va prendre un temps per parlar. Es va aturar, em va agafar una mà amb la seva, i amb l'altra va buscar alguna cosa a la bossa. Vaig trigar poc a endevinar què feia. En efecte, va treure un tercer caramel, va obrir la mà per ensenyar-me'l, i em va dir:

— Se t'ha escapat el primer caramel... I t'has empassat el segon caramel.

Mentre deia això va moure el dit índex dues vegades, representant la suma d'u més u. Com si estigués fent-me un truc de màgia, va acostar llavors el tercer caramel.

— Quants caramels veus aquí?

— Un —li vaig respondre.

— Doncs ja ho tens. U més u és igual a u.

Després d'allò, no hi havia altra opció que riure. Avui, dies després, escric sobre això sense la menor idea ni de la utilitat, ni del significat del que va passar. Tampoc sé per què ho escric. L'única reflexió que se m'acut és que sí, que hauria d'anar més al teatre. Així que, Àngela, si estàs llegint això, fes el favor de mirar el correu. T'he enviat un enllaç amb una obra que té bona pinta. És a Barcelona, però si et ve de gust podem anar a veure-la. Ah, i no et preocupis. Aquesta vegada porto jo els caramels.

Racó biogràfic

Leonhard Euler (1707–1783): el mestre de tots nosaltres

Maria Rosa Massa-Esteve
Universitat Politècnica de Catalunya

El segle XVIII va ser un període de desenvolupament de la transmissió del coneixement científic a través de les acadèmies i de les seves publicacions, de la correspondència i dels viatges europeus de reis, emperadors i científics. Considerat un dels matemàtics més prolífics de la història, Leonhard Euler (1707–1783),(Youschkevitch, 1971; Calinger, 2015), que durant la seva vida va viatjar des de Basilea fins a Sant Petersburg, on va fer-hi dues estades i també una estada a Berlín, se'ns presenta com un dels protagonistes d'aquesta circulació del coneixement (Massa-Esteve, 2018).

De fet, Euler al llarg de 873 memòries i llibres va contribuir al desenvolupament de la hidràulica, la hidrodinàmica, la teoria dels vaixells, l'elasticitat i la mecànica dels cossos rígids, així com de la teoria de nombres, de les sèries infinites, del concepte de funció, de les funcions de variable complexa, de les equacions diferencials, del càlcul de variacions, de l'astronomia, etcètera (Gray, 1985). Les seves obres completes contenen 70 volums (unes 25.000 pàgines) i si el pes relatiu quantitatiu és considerable no ho és menys el seu pes qualitatiu.

Com exposarem més endavant, una de les contribucions més importants d'Euler a la història de les matemàtiques van ser els treballs sobre anàlisi algebraica, que van constituir els pilars del desenvolupament de l'anàlisi real dels segles posteriors.

Figura 1. Leonhard Euler (1707–1783)

La vida d'Euler

Euler va néixer el 15 d'abril de 1707, a Basilea (Suïssa), en el si d'una família vinculada a la fe calvinista, tant el seu pare com el seu avi en van ser ministres. Va entrar a la Universitat de Basilea als tretze anys i va estudiar matemàtiques amb un dels millors matemàtics de l'època, Johann Bernoulli (1667-1748). A més, Bernoulli li feia classes setmanals els dissabtes a la tarda, li recomanava textos per llegir i l'ajudava en qüestions sobre conceptes matemàtics, mètodes de demostració i resolució de problemes (figura 1).

Les primeres contribucions d'Euler són de quan tenia 19 o 20 anys. Ja l'any 1727 Euler va obtenir el segon premi en un concurs sobre temes d'investigació convocat per l'Académie des Sciences de París. En el seu treball estudiava la manera més eficient de col·locar els pals en un vaixell. Va intentar quedar-se a la Universitat de Basilea, però no ho va aconseguir (Calinger, 2015, 35). Per recomanació de Christian Wolff (1700–1782), el 1726, el president de la recentment inaugurada Acadèmia de Ciències i Arts de Sant Petersburg (figura 2), Laurent Blumenstrot (1692–1755) li va demanar a Euler que s'hi incorporés i aquest va acceptar.

Figura 2. Acadèmia de les Ciències i Arts de Sant Petersburg

Aquesta acadèmia de Sant Petersburg va ser projectada durant molts anys per Pere el Gran (1672–1725), quan va viatjar per Europa amb l'objectiu de familiaritzar-se amb les invencions i els nous desenvolupaments de la Il·lustració europea. Un document amb el projecte d'aquesta acadèmia va ser presentat al Senat de Rússia per Pere el Gran el gener del 1724. Allà s'especificava que hi hauria tres departaments, un de ciències matemàtiques, un de física i química experimentals i, seguint l'Acadèmia de Berlín, fundada per Leibniz el 1700, un tercer d'humanitats. Encara que Pere el Gran va morir el gener del 1725, a finals d'aquest mateix any la seva vídua Caterina I la va inaugurar (Gouzévitch i Gouzévitch, 2008; Schulze, 1985; Gordin, 2000).

Més tard, el 5 d'abril del 1727, Euler va abandonar Basilea per incorporar-se a l'Acadèmia de Sant Petersburg i va romandre allà durant 14 anys impartint classes i col·laborant en l'organització (Calinger, 1996). Entre els científics que van arribar a l'acadèmia entre el juny i el desembre del 1725 hi havia: Jacob Hermann (1678–1733), Joseph-Nicolas Delisle (1688–1768), Christian Goldbach (1690–1764), Georg Bernhard Bülfinger(1693-1750), Friedrich Christoph Mayer (1697–1729), Nicolas Bernoulli (1695–1726), i Daniel Bernoulli (1700–1782). Aquests acadèmics eren obligats a trobar-se cada setmana per presentar i debatre temes científics molt diversos, que abastaven des de la forma de la Terra fins a si les creences cartesianes, newtonianes i wolffianes que hi havia vida a la Lluna es podien confirmar (Massa-Esteve, 2017). Els acadèmics havien de publicar els seus resultats i contribucions en les actes de l'Acadèmia titulades *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*. De fet, Euler participava activament en aquestes trobades i en els projectes que el Govern encomanava a l'acadèmia per trobar solucions a problemes tecnològics, com ara el disseny de mapes, o bé la construcció de vaixells, encara que les seves principals contribucions van ser en matemàtiques: anàlisi, teoria de nombres i mecànica. Així, el 1741 ja tenia preparats uns 90 treballs dels quals en va publicar 55, inclosos dos volums de mecànica.

D'aquesta primera etapa assenyalarem dos fets, el seu matrimoni a finals del 1733 amb Katharina Gsell, filla del pintor suís G. Gsell, amb qui va tenir tretze fills, cinc dels quals van morir essent infants, i, a més, que a causa d'unes febres, Euler va perdre l'ull dret el 1738.

A la mort d'Anna Leopoldovna, regenta d'Ivan VI, el 1740, i en veure el seu futur incert (a causa, possiblement, de la seva condició d'estranger), el 1741, Euler va acceptar la invitació de Frederic II el Gran de Prússia per incorporar-se a l'Acadèmia de Ciències de Berlín (figura 3).

En arribar a Berlín, el país es trobava enmig d'una gran crisi i Euler va haver de donar classes particulars per mantenir la seva família. Així ho va fer amb la princesa Filippina Von Schwendt (dama de la noblesa parenta del rei Frederic) i aquestes lliçons, més endavant, van ser publicades a Rússia en tres volums, el primer el 1768 i el darrer el 1772, amb el títol: *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie.* Aquesta obra, considerada una de les primeres obres de divulgació científica, va tenir molt d'èxit i se'n van fer dotze edicions en el francès original, nou en anglès, sis en alemany, quatre en rus i dues en suec. També n'hi ha d'italianes, espanyoles i daneses (Massa-Esteve, 2007).

Figura 3. Entrada de l'antiga Acadèmia de Ciències de Berlín

Encara que Euler a Berlín treballava per a les dues Acadèmies (la de Sant Petersburg i la de Berlín), el 1744 esdevingué el promotor de la transformació, junt amb Maupertuis, que n'era el president, de l'antiga Societat de Ciències de Berlín en la Reial Acadèmia de Ciències i Belles Arts de Berlín. Euler va ser nomenat director de la classe de matemàtiques d'aquesta acadèmia i membre del seu comitè directiu; al mateix temps que dirigia la biblioteca, formava part de la comissió de revisió de publicació dels treballs científics.

Durant aquest període, Euler va incrementar considerablement la varietat de les seves investigacions. Va competir amb Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783) i amb Daniel Bernoulli per establir els fonaments de la física matemàtica i va ser també protagonista de rellevants discussions amb Clairaut i D'Alembert sobre la teoria dels moviments de la Lluna i dels planetes. Alhora, Euler va elaborar la teoria del moviment dels sòlids, va crear l'aparell matemàtic de la hidrodinàmica, va desenvolupar amb èxit la geometria diferencial de superfícies, i va estudiar intensivament òptica, electricitat i magnetisme. Euler va prendre part en molts debats i discussions sobre diverses temàtiques científiques i filosòfiques, com ara sobre les *monadologies* de Leibniz i de Wolff, el principi de mínima acció de Maupertuis, els logaritmes dels nombres negatius, la solució de l'equació de la corda vibrant, etcètera. Al llarg de la seva estada a Berlín va preparar no menys de 380 treballs, dels quals se'n van publicar 275, incloent-hi diversos llibres d'extensió considerable.

El 1759, Maupertuis va morir i Euler va esdevenir la figura de referència a l'acadèmia sota la supervisió del rei Frederic II el Gran. Les diferències entre el rei i Euler eren evidents, tant en el caràcter com en la manera d'entendre i valorar la ciència. El rei estimava la poesia i li semblaven poc pràctiques les matemàtiques; diuen que a Euler l'anomenava «ciclopi matemàtic». Quan el 1763 Euler va saber que el rei pensava nomenar D'Alembert president de l'acadèmia, va escriure a Sant Petersburg i Caterina II la Gran li va fer una oferta per tornar-hi. De fet, D'Alembert no va acceptar, però altres conflictes de tipus financer, durant el 1765, entre Euler i el rei, el van decidir a anar-se'n i el 9 de juliol de 1766 va abandonar Berlín.

En el seu retorn a Sant Petersburg va ser rebut amb grans honors, tot i que en arribar-hi va perdre totes les seves possessions en un incendi i, poc temps després, el 1773 va morir la seva dona. Tanmateix, tres anys més tard es va casar amb la seva cunyada.

En la seva segona estada a Sant Petersburg, l'acompanyaven tres dels seus fills. Un d'ells, Johann Albrecht, va esdevenir acadèmic, va ocupar la càtedra de física i, a partir del 1769, va ser nomenat secretari permanent de l'acadèmia.

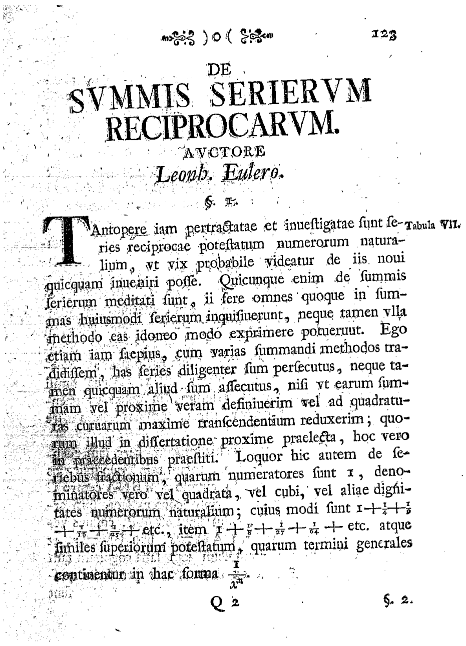
Poc temps després d'instal·lar-se de nou a Sant Petersburg, una malaltia va deixar Euler completament cec, no podia llegir i escrivia amb guix en una pissarra amb grans lletres. Malgrat la ceguesa, les seves activitats científiques no van cessar. La seva memòria era fantàstica i tenia molts ajudants, entre els quals els seus fills, i alguns deixebles i acadèmics que ell convidava. Tot sovint, dictava els seus treballs, però la majoria de les vegades s'establia una discussió i Euler desenvolupava les seves idees, calculava mentalment taules i donava exemples. Els articles d'Euler de la segona estada a Sant Petersburg eren breus per causa de la ceguesa. Tot i això, va escriure diversos llibres amb l'ajuda del seu fill Albrecht i alguns acadèmics.

Euler va continuar participant amb altres activitats a l'Acadèmia de Sant Petersburg. Junt amb el seu fill, era membre de la comissió que dirigia aquesta entitat, encara que el 1774 van deixar-ho a causa de les seves diferències amb Orlov, que n'era el president. Va treballar fins a l'últim dia de la seva vida. Era el 18 de setembre de 1783, Euler va fer classe de matemàtiques als seus nets. Després va fer uns càlculs a la pissarra i més tard es va reunir amb Lexell i Fuss per discutir sobre el planeta Urà, que s'acabava de descobrir. A les cinc de la tarda es va asseure i va dir: «M'estic morint». Efectivament, a les set de la tarda d'aquell mateix dia moria Euler, el gran geni de les matemàtiques. Immediatament després de la seva mort va rebre molts homenatges per part de l'Acadèmia de Sant Petersburg, de l'Académie de Sciences de París i de la comunitat científica europea. Les seves restes mortals es troben a Sant Petersburg.

Les contribucions d'Euler

En els seus treballs, Euler presentava les matemàtiques connectades amb les aplicacions a altres ciències, a problemes tecnològics i a la vida pública. Les seves contribucions abracen els coneixements de les matemàtiques pures i les matemàtiques mixtes, que es troben a la classificació de les matemàtiques del 1754 de l'*Encyclopédie* de D'Alembert. Els enciclopedistes havien recollit les idees i la classificació de les matemàtiques feta per Francis Bacon el 1605 en matemàtiques pures: la geometria i l'aritmètica; i, en matemàtiques mixtes: la perspectiva, la música, l'astronomia, la cosmografia, l'arquitectura, l'enginyeria, etc. (Massa-Esteve *et al.*, 2011). Per aquest motiu no ens ha d'estranyar que Euler, com a bon il·lustrat, treballés en un gran ventall de temàtiques que avui identifiquem com a diferents disciplines o, fins i tot, com a disciplines independents de les matemàtiques.

Així, ja l'any 1727, va escriure primer una memòria sobre el so (Knobloch, 2008) i tres textos: un sobre les trajectòries recíproques en la geometria diferencial, un segon sobre la tautòcrona en la mecànica i un tercer sobre l'elasticitat de l'aire.


)o(123

DE

SVMMIS SERIERVM RECIPROCARVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Tantopere iam pertractatae et inueſtigatae ſunt ſeries reciprocae poteſtatum numerorum naturalium, vt vix probabile videatur de iis noui quicquam inueniri poſſe. Quicunque enim de ſummis ſerierum meditati ſunt, ii fere omnes quoque in ſummas huiusmodi ſerierum inquiſiuerunt, neque tamen vlla methodo eas idoneo modo exprimere potuerunt. Ego etiam iam ſaepius, cum varias ſummandi methodos tradidiſſem, has ſeries diligenter ſum perſecutus, neque tamen quicquam aliud ſum aſſecutus, niſi vt earum ſummam vel proxime veram definiuerim vel ad quadraturas curuarum maxime tranſcendentium reduxerim; quorum illud in diſſertatione proxime praelecta, hoc vero in praecedentibus praeſtiti. Loquor hic autem de ſeriebus fractionum, quarum numeratores ſunt 1, denominatores vero vel quadrata, vel cubi, vel aliae dignitates numerorum naturalium; cuius modi ſunt $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc., item $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+$ etc. atque ſimiles ſuperiorum poteſtatum, quarum termini generales continentur in hac forma $\frac{1}{x^n}$. Tabula VII.

Q 2 §. 2.

Figura 4. Portada de *Summis serierum reciprocarum* (1735)

En la seva primera estada a Sant Petersburg va tractar amb sèries infinites, com ara l'integral Beta (1729), els sumatoris de sèries infinites (1735) i el problema de Basilea (1735) (Calinger, 1996). A la correspondència d'Oldenburg trobem una carta del 26 de febrer de 1673 de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) que expressava el seu interès en el treball de sèries de Pietro Mengoli (1626/27-1686). Oldenburg li va contestar (6 de març de 1673) reenviant una carta de John Collins en què l'autor explicava que Mengoli havia trobat la suma de sèries infinites amb els números figurats en el denominador i, a més, la demostració de la divergència de la sèrie harmònica. Tanmateix, Mengoli no havia estat capaç de trobar la suma infinita dels recíprocs dels números quadrats que és el que ara s'anomena «problema de Basilea». Euler va trobar i demostrar la solució, a la tardor del 1735, una sisena part de pi al quadrat, i li va comunicar al seu amic Daniel Bernoulli (figura 4).

Euler va publicar els seus dos volums de mecànica: *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* (1736) i també va solucionar el problema dels Ponts de Konisberg (1735–pub. 1741).

En la seva estada a Berlín va escriure una monografia sobre el càlcul de variacions (1744) (Fraser, 1994); un treball fonamental sobre el càlcul d'òrbites (1745); un treball sobre artilleria i balística (1745); un llibre d'anàlisi que va esdevenir fonamental per al desenvolupament de l'anàlisi: *Introductio in Analysin infinitorum* (1748) (figura 5), com després explicarem; un tractat sobre vaixells i navegació, preparat ja en una versió anterior a Sant Petersburg (1749); la seva primera teoria del moviment de la Lluna (1753); un volum de càlcul diferencial: *Institutiones calculi differentialis* (1755), i, finalment, el tractat sobre la mecànica de sòlids: *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1765).

De la seva segona estada a Sant Petersburg destaquem les 775 pàgines de *Theoria motuum lunae...* (1772), que van ser completades amb l'ajuda del seu fill Albrecht, i els acadèmics Krafft i Lexell, que se citen en el títol del llibre. Krafft també el va ajudar en els tres volums de *Dioptrica* (1769–1771). Tot i això va publicar els tres volums d'*Institutiones calculi integralis* (1768–1770), les principals parts de la qual ja havia acabat a Berlín. També va publicar una versió abreujada de *Scientia navalis. Théorie complète de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux* (1773), que va ser traduïda a l'anglès, italià i rus, i que li va proporcionar grans sumes de diners dels governs rus i francès. Fuss, jove suís, convidat per Euler, el va ajudar a preparar l'obra *Éclaircissements sur les établissements publics...* (1776), que va ser molt influent en el desenvolupament de les assegurances: moltes companyies empraven els seus mètodes de solució i les seves taules.

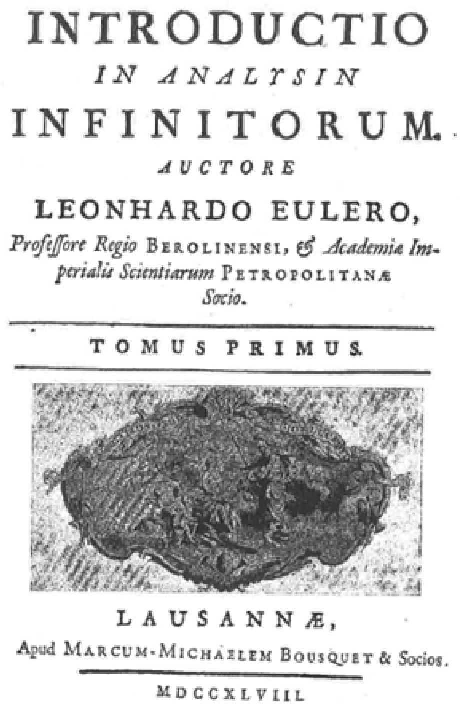

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

Figura 5. Portada de la *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748)

Euler era un creador, en les seves contribucions va intentar obrir nous camps, i així va donar a conèixer nous símbols, com ara el nombre *e* per representar la base dels logaritmes, el nombre i per representar els complexos, la lletra F i els parèntesis per a les funcions; també va donar noves definicions, noves fórmules, nous polinomis (anomenats «d'Euler»), integrals eulerianes, línies d'Euler, etcètera. No obstant això, les seves contribucions van ser decisives sobretot en tres àrees: en el càlcul de diverses variables, especialment aplicat a la física amb la introducció de les equacions amb derivades parcials; en la teoria i aplicació de les equacions diferencials ordinàries i, finalment, en l'ús dels mètodes analítics i procediments algebraics en diferents parts de la matemàtica (Ferraro, 2010; Fraser, 1989).

L'anàlisi algebraica: la contribució d'Euler

La publicació l'any 1591 de l'obra *In Artem Analyticen Isagoge* de François Viète (1540-1603) va ser un dels punts clau per al desenvolupament dels procediments algebraics en la matemàtica. Viète va introduir a la seva obra una nova àlgebra emprant la seva logística especiosa, on els símbols d'aquesta art analítica (o àlgebra) poden ser emprats per representar no només nombres, com en els treballs precedents del Renaixement, sinó també valors de qualsevol magnitud, ja siguin longituds, superfícies, volums o angles. Els procediments analítics li permetien afirmar que amb aquestes eines podia solucionar tots tipus de problemes. Amb la difusió dels treballs de Viète, molts altres autors van començar a considerar la utilitat del llenguatge simbòlic i dels procediments algebraics per resoldre tot tipus de problemes i per obtenir nous resultats (Massa-Esteve, 2006). Aquest procés d'algebrització de les matemàtiques va ser desenvolupat primerament amb la creació de la geometria analítica a través de les obres de René Descartes (1596–1650) i Pierre de Fermat (1601–1655), i amb les contribucions al càlcul diferencial a través dels treballs d'Isaac Newton (1642–1727) i Leibniz.

Més tard, en el segle d'Euler, ja es va treballar per difondre i estudiar aquests treballs, tot aplicant els procediments analítics per construir nous teoremes, nous objectes, noves regles i nous mètodes. Així, figures com Daniel Bernoulli, D'Alembert, Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Pierre-Simon Laplace (1749–1827) i el mateix Euler van anar perfeccionant els mètodes analítics i els van utilitzar per solucionar satisfactòriament problemes celestes i terrestres. De fet, es pot afirmar que amb els desenvolupaments analítics dels seus treballs, aquest grup d'autors van posar els fonaments per a la creació d'una nova branca de les matemàtiques anomenada «anàlisi».

Es poden esmentar algunes evidències a les contribucions d'Euler a l'anàlisi; així, en la seva primera estada a Sant Petersburg, per exemple, les seves contribucions a les sèries infinites que emprava per calcular les integrals Beta (1729) i alguns exemples d'equacions a la mecànica (1736); però el més important van ser les contribucions a la resolució d'equacions sistemàticament sumariades per Euler en el seu famós llibre sobre la introducció a la teoria de funcions (1748), en la seva obra sobre diferenciació (1755), en la d'integració (1768–1770), així com en l'àlgebra (1770).

A tall d'exemple, adjuntem alguns dels seus raonaments en deduir el valor de la integral Beta B(3/2,3/2) en un text que va presentar a l'Acadèmia de Sant Petersburg el 1729, i que va publicar el 1730 a Comentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, titulat «De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt».

(«Sobre les progressions transcendents», és a dir, aquelles que els termes generals de les quals no es poden expressar algebraicament) (Dutka, 1991; Delshams & Massa-Esteve, 2008).

En aquest text, Euler, a través de 29 apartats, vol trobar el terme general d'una progressió formada pels termes, $1, 2, 6, 24, \ldots$, és a dir, $n!$, i remarca la seva preocupació, ja que sap que no es pot expressar algebraicament per a tots els valors de n. Donats $a_1, a_2, a_3, \ldots$, trobar el «terme general» per a nosaltres vol dir trobar l'expressió (funció) $f(x)$, tal que $a_n = f(n)$ de tal manera que el valor an pot ser extrapolat per valors no enters de n: $a_x = f(x)$.

Vegeu com Euler raona que és possible que el terme general d'aquesta progressió no tingui només termes algebraics, sinó també termes que depenen de quadratures (expressió emprada per designar el que avui anomenem «àrees» o «integrals definides»).

> «Jo havia suposat prèviament que el terme general de les sèries $1, 2, 6, 24 \ldots$, podia ser donat, si no algebraicament, com a mínim exponencialment. Però, després d'haver vist que alguns termes intermedis depenen de la quadratura del cercle, vaig reconèixer que ni quantitats exponencials ni algebraiques són adequades per expressar-ho. Per al terme general d'aquesta progressió s'han d'incloure altres quantitats que depenen de la quadratura del cercle o d'altres quadratures, però que no poden ser representades per

cap fórmula algebraica o exponencial. Em preguntava de quina manera les fórmules diferencials serien apropiades per expressar el terme general de la progressió. Un terme general ha de tenir n per substituir i trobar els termes. Però una fórmula diferencial ha de contenir alguna quantitat variable. No té sentit prendre n, n no és la variable d'integració, sinó que, després que la fórmula hagi estat integrada, n hauria de servir per a la formació de la progressió.» (Euler, 1730, 39)

Pel que fa al procediment analític en aquest cas, podem constatar la facilitat d'Euler en el seu ús de l'infinit i també remarcar com calcula amb les sèries infinites de manera formidable (Ferraro, 2007). Així comença calculant la Beta integral amb el desenvolupament de la fórmula del binomi obtenint un producte infinit. Vegeu aquests desenvolupaments a Delshams & Massa-Esteve (2008).

$$\int_0^1 x^e dx(1-x)^n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n}{(e+1)\cdot(e+2)\cdots(e+n+1)}.$$

El tractament de la idea d'interpolació en l'obra d'Euler és també original. De fet, Euler no calculava ni interpolava deduint una generalització a partir dels càlculs fets cas per cas, sinó que més aviat buscava una expressió general algebraica on poder manipular i trobar tots els termes, inclosos els termes intermedis (Delshams & Massa-Esteve, 2008; Massa-Esteve & Delshams, 2009).

Euler també va eliminar gradualment l'evidència geomètrica en les seves proposicions del càlcul integral. Es pot observar que Euler calculava un gran nombre d'integrals definides que corresponien a quadratures (àrees) de figures geomètriques, i en cap cas dibuixava la figura que estava quadrant. A més, tampoc no descrivia de manera retòrica els elements que permetrien dibuixar la figura geomètrica que quadrava.

Mitjançant procediments analítics, no geomètrics, va buscar la relació entre els exponents de les expressions algebraiques de les figures que quadrava i els valors de la quadratura. D'aquesta manera, establia una classificació de les integrals que permetia demostrar al mateix temps moltes propietats de cada tipus, sense necessitat de fer-ho cas per cas. (Capobianco *et al.*, 2017; Delshams&Massa-Esteve, 2008).

Euler considerava l'anàlisi algebraica una part de les matemàtiques, ja que els seus procediments facilitaven la generalització i la comprensió de les solucions dels problemes de corbes i dels problemes de mecànica, a través de l'establiment d'equacions i funcions que a més analitzava amb procediments infinits. Efectivament, Euler va desenvolupar una teoria analítica de funcions i una teoria analítica d'integració. Realment, les contribucions d'Euler a l'anàlisi algebraica van esdevenir el llegat més important, ja que van constituir el punt de partida per a la construcció de l'anàlisi real. Així, el 1786 quan Euler ja havia mort, Condorcet ja emfasitzava aquest punt en el seu elogi: «I un no podrà evitar de mirar l'obra d'Euler com la revolució que ha tornat l'anàlisi algebraica un mètode lluminós, universal, aplicable a tot i fins i tot fàcil». (Condorcet, 1786).

Algunes reflexions

A l'edat de 20 anys, Euler va arribar a treballar en una dinàmica acadèmia creada per Pere el Gran. Allà va aprendre i al mateix temps va millorar el seu coneixement mitjançant les interaccions amb els altres acadèmics, com ara Hermann, Bernoulli, Delisle i Goldbach. A més, l'acadèmia li va donar la gran oportunitat de fer recerca i ampliar el ventall de temes d'investigació. És important assenyalar que les trobades setmanals a l'acadèmia per debatre temes científics i les seves corresponents publicacions van donar lloc a una extraordinària quantitat de material per a la investigació i el progrés del coneixement científic.

La contribució d'Euler es pot veure com la materialització del projecte de Pere el Gran. L'esperit d'Euler, combinant utilitat i prestigi, és l'encarnació de l'ideal de Pere el Gran i Caterina II, que va ser heretat per la Rússia de la Il·lustració. Euler pot considerar-se un focus de connexió entre la ciència europea i Rússia, un dels actors principals en la transferència i difusió del coneixement que, per la seva mobilitat, les seves xarxes professionals a tot Europa i la seva fama, va facilitar el moviment d'idees i especialment va ser essencial per al desenvolupament de l'anàlisi.

Euler va ser un creador de nocions i mètodes clau dins les matemàtiques pures i mixtes, encara que en molts casos el seu valor ha estat reconegut molts anys després de la seva mort. Efectivament, molts treballs matemàtics, sobretot d'anàlisi, desenvolupats en el segle XIX es van fonamentar en els resultats obtinguts anteriorment per Euler. Així, el 1950, el reconegut historiador de la matemàtica Carl B. Boyer afirmava en la seva ponència del Congrés Internacional de Matemàtics de Massachussets que l'obra *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) d'Euler va ser el llibre més important pel desenvolupament de l'anàlisi de l'era moderna, equiparable amb el rol desenvolupat pels *Elements* d'Euclides en la geometria i amb el rol de l'obra de Mohamed Ben-Musa al-Khwarizmi en l'àlgebra.

Euler va ser un gran mestre i un magnífic divulgador. Quan exposava ho feia amb senzillesa i explicava el camí recorregut fent observacions sobre els intents tant si eren fructífers com si no ho eren. Així, per calcular B(3/2,3/2) Euler raona com farà la demostració, més endavant mostra un camí amb el qual no troba la solució i també en raona els motius. Llegir Euler és aprendre, no únicament amb el desenvolupament dels seus resultats, sinó també en llegir les seves explicacions i raonaments quan el camí que emprèn no és profitós (Massa-Esteve, 2007). De fet, les seves obres actualment es troben accessibles en línia (vegeu referència); així doncs, el nostre millor suggeriment pot ser, seguint les paraules de Laplace: «Llegiu Euler, ell és el mestre de tots nosaltres».

Referències

[1] R. Calinger. «Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727-1741)». *Historia Mathematica* 23 (1996), 121–166.

[2] R. Calinger. *Leonhard Euler: mathematical genius in the Enlightenment*. Princeton: Princeton University Press (2015).

[3] G. Capobianco, M.R. Enea i G. Ferraro. «Geometry and Analysis in Euler's integral calculus». *Archive for History of Exact Sciences* 71 (2017), num. 1, 1–38.

[4] M.J.A. Condorcet. «Éloge de M. Euler». A: *Histoire de l'Académie Royale des sciences pour l'année 1783*. París: Imprimerie Royale (1786), 37-68.

[5] A. Delshams i M.R. Massa-Esteve. «Consideracions al voltant de la funció Beta a l'obra de Leonhard Euler (1707-1783)». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria* IX (2008), 59–82.

[6] J. Dutka. «The Early History of the Factorial Function». *Archive for History of Exact Sciences* 43 (1991), num. 3, 225–249.

[7] L. Euler. «De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt».(1730/31). A: *Opera Omnia*, sèrie 1, vol. XIV, 1–24. A *Comentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (1738), 5, 36–57, E019.

[8] G. Ferraro. *The rise and the Development of the Theory of Series in the 18th and early 19th centuries*. Series: Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer (2007).

[9] G. Ferraro. «Euler's Analytical Program». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria* XI (2010), 175–198.

[10] C.G. Fraser. «The Calculus as Algebraic Analysis: Some Observations on Mathematical Analysis in the 18th Century». *Archive for History of Exact Sciences* 39 (1989), 317–335.

[11] C.G. Fraser. «The origins of Euler's variational calculus». *Archive for History of Exact Sciences* 47 (1994), num. 2, 103–141.

[12] M.D. Gordin. «The Importation of Being Earnest: The Early St. Petersburg Academy of Sciences». *Isis* 91 (2000), num- 1, 1–31.

[13] I. Gouzévitch i D. Gouzévitch. «Introducing mathematics, building an empire: Russia under Peter I». A: Robson-Stedall (eds.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*. Nova York: Oxford University Press (2008), 353–373.

[14] J. Gray. «Leonhard Euler: 1707-1783». *Janus-Revue Internationales de l'histoire des sciences, de la médecine, de la pharmacie et de la technique* LXXII (1-3) (1985), 171–192.

[15] E. Knobloch. «Euler transgressing límits: The infinite and music theory». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria* IX (2008), 9-24.

[16] M.R. Massa-Esteve. «Algebra and Geometry in Pietro Mengoli (1625–1686)». *Historia Mathematica* 33 (2006), 82–112.

[17] M.R. Massa-Esteve. «Leonhard Euler (1707–1783): l'home, el creador i el mestre». *Mètode* 55 (2007), 35–38.

[18] M.R. Massa-Esteve. «Sankt-Peterburgskaja Akademija Nauk ot Petra I do Ekateriny II:and Leonard Ejler». A: *Petro primo Catharina secunda; Dva monarha, dev epohi -preemstvennost', razvitie, reformy*. Evropejskij Dom (2017), 190–202.

[19] M.R. Massa-Esteve. «The circulation of scientific knowledge in Euler's first stage at Saint Petersburg Academy of Sciences». A: F. d'Angelo (ed.), *The scientific dialogue linking America, Asia and Europe between the 12th and the 20th Century. Theories and techniques travelling in space and time*. Napoli: Viaggiatori (2018), 262–276.

[20] M.R. Massa-Esteve i A. Delshams. «Euler's Beta integral in Pietro Mengoli's works». *Archive for History of Exact Sciences* 63 (2009), 325–356.

[21] M.R. Massa-Esteve, A. Roca-Rosell i C. Puig-Pla. «Mixed mathematics in engineering education in Spain: Pedro Lucuce's course at the Barcelona Royal Military Academy of Mathematics in the eighteenth century». *Engineering Studies* 3 (2011), num. 3, 233–253.

[22] L. Schulze. «The Russification of the St. Petersburg Academy of Sciences and Arts in the eighteenth century». *British of Journal of History of Sciences* 18 (1985), 305–335.

[23] A.P. Youschkevitch. «Leonhard Euler». A: C.C. Gillispie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's 9 (1971–1991), 467–484.

Les obres d'Euler en línia: `http://www.math.dartmouth.edu/~euler/` o bé The Euler Archive.

Problemes

Juanjo Rué
Universitat Politècnica de Catalunya

Torna a passar el període de bon temps i, sense adonar-nos-en, ja ens tornem a plantar enmig del fred. I no hi ha res millor per suportar el fred i la pluja que estar amb una xocolata calenta i un bon problema matemàtic per treballar! Aquí en presentem uns quants amb els quals creiem que, modestament, podem oferir una estona ben agradable de pensar i de treballar en allò que tant ens agrada a tots: les matemàtiques.

Passem, doncs, al material matemàtic. Comencem pels agraïments a tots els que han contribuit a aquesta entrega plantejant problemes de tota mena: a Miquel Amengual i a Joaquim Nadal (des de Cala Figuera i Llagostera, respectivament), tots dos amb problemes geomètrics molt interessants i entretinguts; a José Luis Díaz-Barrero, des de Barcelona, amb una de les seves desigualtats i, finalment, a Xavier Ros-Oton, des de Zuric. A la redacció en guardem uns quants més per a la propera. . . i no dubteu que qualsevol problema interessant serà més que benvingut en aquestes pàgines.