ESCUELA SUPERIOR DE ARQUITECTURA

DE BARCELONA

CÁLCULO INTEGRAL

PROGRAMA

Lec II.-

For. redc. int. bin. $\varphi(p,q) = \int t^q (a+bt)\,dt$

$(a+bt)(a+bt)^p \cdot t^q = a(a+bt)^p t^q + b(a+bt)^p \cdot t^{q+1}$

dem. $D[(a+bt)^{p+1} t^{q+1}] = (p+1)(a+bt)^p \cdot b \cdot t^{q+1} + (q+1)(a+bt)^{p+1} t^q$

se integran los dos elimino $\varphi(p+1, q)$, elimino $\varphi(p, q+1)$ y de ellas despejo $\varphi(p+1, q)$ y $\varphi(p, q+1)$. Llamo $p+1 = p$ $q+1 = q$ $p = p-1$ $q = q-1$ sustituyo y obtengo fórmulas.

Int. elíp. $\int f(x, \sqrt{X})\,dx \rightarrow f(x, \sqrt{X}) = \frac{A + B\sqrt{X}}{C + D\sqrt{X}}$

se 3º a 4º por el cambio $x = k + 1/y$

Por cambios la reduzco a: $I_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}}$ $J_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{X}}$

$[x^m \sqrt{X}]' = m x^{m-1} \sqrt{X} + x^m \frac{X'}{2\sqrt{X}} = \frac{2m x^{m-1} X + x^m X'}{2\sqrt{X}}$ grado del numerador m+3

por tanto equivalen $\frac{A x^{m+3} + B x^{m+2} + \dots E x^{m-1}}{\sqrt{X}} + \dots$ integrando

obtengo relación entre I_m. $m = 0, 1, 2$.

Los J_n dependen de J_1 pues

$\left[\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^n}\right]' = \frac{(x-a)^n X' - 2n(x-a)^{n-1} X}{2\sqrt{X}(x-a)^{2n}}$ si a no es raíz de $X = 0$ el numerador será de 4º y lo ordeno según potencias de $(x-a)$ · me

$= A_1(x-a)^4 + B_1(x-a)^3 + \dots + D_1(x-a) + E_1$ si $E_1 \neq 0$ se anula

$\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^n} = A_1 J_{n-3} + B_1 J_{n-2} + C_1 J_{n-1} + D_1 J_n + E_1 J_{n+1}$ para $n = 1$

Reducción del polinomio a uno de los cuadrados. Sean $(a\,b\,c\,d)$ raíces de $X = 0$ formo la involución $R x_1 x_2 + S(x_1 + x_2) + T = 0$ $(ab)(cd)$ puntos conjugados, sistema deduzco R. S. T

$R = (a+b) - (c+d)$ $S = cd - ab$ $T = ab(c+d) - cd(a+b)$ los puntos dobles de la involución serán reales si $S^2 - RT > 0$ que equivale a $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d) > 0$. Esto se cumple si $a \neq b \neq c \neq d$ si son reales basta suponer $a > b$. Si dos reales y dos imag. se toma c y d complejos conjugados y lo son todos los productos imag. conjugados todos imag. se toman pares de imaginarios tendrá coef. reales y sus puntos dobles α y β verifican

$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta} \cdot \frac{x''-\alpha}{x''-\beta} = -1 \rightarrow \frac{x'-\alpha}{x'-\beta} + \frac{x''-\alpha}{x''-\beta} = 0$ y si efectuamos la

transformación homográfica $y = \frac{x-\alpha}{x-\beta} \rightarrow x = \frac{\alpha - \beta y}{1-y}$ X se

transforma en $X = \frac{Y(y)}{(1-y)^4}$ siendo $Y(y)$ un pol. de 4º cuyas raíces son

$y_1 = \frac{a-\alpha}{a-\beta}$ $y_2 = \frac{b-\alpha}{b-\beta}$ $y_3 = \frac{c-\alpha}{c-\beta}$ $y_4 = \frac{d-\alpha}{d-\beta}$ tales que $y_1 + y_2 = 0$

$y_3 + y_4 = 0$ por ser (a,b) (c,d) pares de p. conjugados de la involución considerada. La $Y(y) = 0$ tiene sus raíces dos a dos = y opuestas lo que significa que $Y(y)$ carece de términos impares; así el poli numero es bicuadrado. Por tanto los cuatro integrales $I_0\, I_1\, I_2\, J_1$ se pueden transformar en otros en que $X = Ax^4 + Bx^2 + C$ entonces $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}$ es racional visto anteriormente como se ve por el cambio $x^2 = t$

L. Gelpí Vintró

Arg.

B- 17 - 10-47

I Bernoulli $y' + Xy + X_1 y^n = 0$

$\frac{1}{y^{n-1}} = z$ $\quad y = t^{\frac{1}{1-n}}$

Riccati: $y' = cy^2 + x^m$ $\qquad y = y_1 + \frac{1}{t}$

Lagrange $\quad y = x\varphi(y') + \psi(y')$

$y' = t$ $\quad y = x\varphi(t) + \psi(t)$ derivo rispetto a x

derivo rispetto a x y ottengo una lineare in t que integrata dà $x = f(t, c)$

Clairaut $\quad y = xy' + \psi(y')$ $\qquad y' = t$

ESCUELA SUPERIOR DE ARQUITECTURA
DE BARCELONA

CÁLCULO INTEGRAL

PROGRAMA

ESCUELA SUPERIOR DE ARQUITECTURA
DE BARCELONA. **-CÁLCULO INTEGRAL-**

PROGRAMA

Toda

LECCION 1.ª

Integral superior e integral inferior de una función. — Integral definida. — Condición de integrabilidad. — Propiedades de la integral definida. — Tipos importantes de funciones integrales. — Teoremas de la media. — La función integral: sus propiedades. — Funciones primitivas; su relación con la integral definida. — Método de cálculo de las integrales definidas. — Interpretaciones geométrica y física de la integral definida.

LECCION 2.ª

Métodos generales de integración: Integración por partes; integración por cambio de variable. — Integración de funciones racionales por cambio de variable y por el método de Hermite. — Integración de funciones irracionales de los siguientes tipos:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\right) dx$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{mx + n}\right) dx$$

siendo R símbolo de una función racional. — Diferenciales binomias: casos de integrabilidad; fórmulas de reducción. — Integrales elípticas: reducción de integrales irracionales a elípticas. — Integración de funciones trascendentes de los tipos siguientes:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx \qquad \int R(e^{kx})\, dx$$

Fórmulas de reducción. para reducir | $R(P(x)\, e^{kx})\, dx$

$u = P(x)$

LECCION 3.ª

Cálculo de áreas planas en coordenadas cartesianas y polares. — Longitud de un arco de curva plana y alabeada. — Ejemplos: Areas limitadas por arcos de elipse, hipérbola o parábola. — Longitud de la cicloide.

LECCION 4.ª

Cálculo aproximado de integrales: Fórmulas de los trapecios, de Simpson y de Poncelet. — Intégrafo. — Planímetro de Amsler.

LECCION 5.ª

Series uniformemente convergentes: sus propiedades. — Condición de convergencia uniforme. — Integración por series. — Caso de las series de potencias. — Aplicación al cálculo de las integrales

$$\int e^{-x^2}\, dx \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{Log} x}$$

y a las integrales elípticas.

LECCION 6.ª

periodica

Series trigonométricas. — Desarrollo de una función en serie de Fourier: Cálculo de los coeficientes. — Condiciones de Dirichlet para que una función sea desarrollable en serie de Fourier. — Ejemplos. — Análisis armónico.

f(x) acotada e integrable

$S(a_p \cos px + b_p \operatorname{sen} px)$ uniformemente converg. en $[-\pi, \pi]$

LECCION 7.ª

Toda imp

Integrales curvilíneas, dobles y triples. — Definición y propiedades. — Condiciones de integrabilidad. — Clases importantes de funciones integrables.—Métodos de cálculo.

LECCION 8.ª

Cálculo de áreas planas mediante integrales curvilíneas. — Areas y volúmenes de superficies de revolución.

LECCION 9.ª

Aplicaciones de las integrales dobles. — Cálculo de volúmenes. — Volumen del elipsoide. — Cálculo de áreas de superficies curvas. — Aplicación al área de la esfera y del elipsoide de revolución.

LECCION 10 Imp.

Fórmulas de Green, Stokes y Ostrogradsky. — Condición para que una integral cur-

S. $dy\,dz = \cos\alpha\, ds$ $\cos\beta\, dS = dx\,dz$ $\cos\gamma\, dS = dx\,dy$

vilínea no dependa más que de los límites de su campo.

LECCION 11

Integrales entre límites infinitos e integrales cuya función subintegral se hace indefinida en uno o más puntos del intervalo de integración. — Criterios de convergencia de estas integrales. — Ejemplos. — Integrales de Fresnel.

LECCION 12

Integrales dependientes de un parámetro. — Propiedades. — Derivación bajo el signo integral. — Aplicaciones al cálculo de funciones primitivas y de integrales definidas. — Integración bajo el signo integral. — Integrales eulerianas.

$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi/2$

$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx =$

$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx \qquad 1-\cos x = 2 \operatorname{sen}^2 x/2$

$\int_b^{b+\beta} f(x, u+h)\, dx \; (T. V. M.) = \beta f(b+\theta\beta, u+h)$

LECCION 13

Concepto de ecuación diferencial y de sistema de ecuaciones diferenciales. — Reducción de una ecuación diferencial de orden *n* a un sistema de ecuaciones de primer orden. — Existencia de la integral. — Significación geométrica.

LECCION 14

Ecuaciones diferenciales de primer orden. — Casos elementales de integración: variables separables, homogéneas, reductibles a homogéneas, lineales, Bernouilli, Riccati, Lagrange, Clairaut. — Teoría del factor integrante.

LECCION 15

Aplicaciones geométricas. — Problema de

las trayectorias ortogonales y oblicuas. — Ejemplos.

LECCION 16

Métodos de integración aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden. — Método del desarrollo en serie. — Método de Euler. — Método de Runge.

LECCION 17

Integración de la ecuación $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$

Integración de ecuaciones que no contengan la variable independiente o la variable función. — Ecuaciones homogéneas en la variable función y sus derivadas y en x, y, y sus diferenciales. — Ejemplos.

y variable independ.

$y' = t$

$y = ue^t$ falta la x

$y = e^t$ ... falta la t

(Cauchy) $y = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt + P_{n-1}(x)$ — grado n-1

reemplazo f(x) cambiando x por t

$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}e^t - u\frac{de^t}{dx}$

Divido por $4a^2b$
multiplico por $-y$
cambio $\begin{cases} x^2 = u \\ y^2 = v \end{cases}$
sale tipo Clairaut.
$y = xy' + \psi(y')$

$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$

LECCION 18

Aplicaciones geométricas. — Líneas de curvatura de una superficie. — Caso del elipsoide y del hiperboloide.

$$\frac{dx + p(pdx + qdy)}{rdx + sdy} = \frac{dy + q(pdx + qdy)}{sdx + tdy}$$

$f(x\,y\,z) = 0$
$z = \varphi(x\,y)$ q de esta se obtiene $p, q \quad r\ s\ t$

$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Imp. LECCION 19

Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes. — Ecuación característica; caso en que tenga raíces múltiples o imaginarias. — Ecuaciones diferenciales lineales completas. — Casos fáciles de integración.

Imp. LECCION 20

Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables. — Ecuación de Euler.

$ax + b = e^t$

$$\frac{dy}{dx} = ae^{-t}\frac{dy}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a^3e^{-3t}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right]$$

Imp. **LECCION 21**

Sistemas de ecuaciones diferenciales. — Su reducción a sistemas de primer orden. — Integrales primeras. — Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. → normales

Imp. - **LECCION 22**

Ecuaciones de primer orden entre derivadas parciales. — Método de las características. — Aplicación a las ecuaciones diferenciales de las superficies cilíndricas, cónicas y de revolución.

sistema lin. (homog.) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ \frac{dy}{dt} + a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ \frac{dz}{dt} + a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$

21 - ultima. Si x_1, y_1, z_1 int. partic. [illegible]
suma de 2 int. part. tamb. es int.
sist. in. gen. n int. part. mult. por constantes arb. y determinante
nulo debe ser $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$

resolución de un sistema normal se reduce al calculo de un sistema int. fundamental.

Reducción del orden. (sistemas normales el orden = nº de ecuaciones) [illegible] cambio $x = x_1 X \quad y = y_1 X + Y \quad z = z_1 X + Z$. [illegible] y luego despejando $\frac{dX}{dt}$. Si hay 2 int. part. $(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2)$ cambio $\begin{cases} x = x_1X + x_2Y \\ y = y_1X + y_2Y \\ z = z_1X + z_2Y + Z \end{cases}$

Resolución para las constantes. cambio $x = \alpha e^{rt}$ $y = \beta e^{rt}$ $z = \gamma e^{rt}$

det. caract. es: $\delta(r) = \begin{vmatrix} (r+a_1) & b_1 & c_1 \\ a_2 & (r+b_2) & c_2 \\ a_3 & b_3 & (r+c_3) \end{vmatrix} = 0$

sist. lineales completos en general. Lagrange e int. part.

Dirichlet

a) $f(x)$ monótona o divide en intervalos en número finito abiertos en que se cumple

b) $f(x)$ no posee más que puntos de discontinuidad regulares

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_p \cos py + b_p \operatorname{sen} py) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac12 + \sum_1^n \cos p(y-x)\right] dx$$

$$\frac12 + \cos\beta + \cos 2\beta + \cdots \cos n\beta = \frac{\operatorname{sen}\frac12(2n+1)\beta}{2\operatorname{sen}\frac12\beta} \; ; \; S_n = \frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,\frac{\operatorname{sen}\frac12(2n+1)(y-x)}{2\operatorname{sen}\frac12(y-x)}$$

$y-x = 2t$ x = constante.

$$S_n = \frac1\pi \int_{-\frac12(\pi+x)}^{\frac12(\pi-x)} f(x+2t)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)t}{\operatorname{sen} t}\,dt \qquad I_n = \int_a^b f(t)\,\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\,dt \qquad I_n = \int_0^\lambda =$$

Sabemos $\lambda>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{n\lambda}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \pi/2$ $t = nt'$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\lambda}\frac{\operatorname{sen} nt}{t}\,dt = \pi/2$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \frac{\operatorname{sen} nt}{t}\,dt = 0$ si $\varphi(t)$ pos. y decr. en (a,b) $I = \int_a^b \varphi(t)\frac{\operatorname{sen} nt}{t}\,dt = \varphi(a)\int_a^c \frac{\operatorname{sen} nt}{t}\,dt$

$\int_a^b \frac{\operatorname{sen} nt}{t} = \frac1a\int_a^\mu \operatorname{sen} nt\,dt = \frac{1}{na}(\cos na - \cos n\mu)$ $|I| < \frac{2\varphi(a)}{na}$ $n\to\infty$ $= 0$

cualquiera que sea $\beta>0$ $\int_0^\lambda \varphi(t)\frac{\operatorname{sen} nt}{t}\,dt = \int_0^\beta + \int_\beta^\lambda$ para β suficientemente pequeño la 1ª difiere $\varphi(+0)\int_0^\beta \frac{\operatorname{sen} nt}{t}\,dt$ que para $n\to\infty$ $= \varphi(+0)\pi/2$ y la 2ª $\to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\lambda \varphi(t)\frac{\operatorname{sen} nt}{t} = \frac\pi2\varphi(+0)$ Si $f(t)$ es pos. y decrece $\varphi(t) = f(t)\frac{t}{\operatorname{sen} t}$ también lo es. Sustituyendo $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\lambda f(t)\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\,dt = \frac\pi2 f(+0)$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\,dt = 0$

si $\varphi(t)$ no es monótona en $(0,\lambda)$ se divide en intervalos $(0\lambda_1)(\lambda_1\lambda_2)\cdots$

Descomponemos en 2 intervalos $(0, \frac12(\pi-x))$ $(-\frac12(\pi+x), 0)$

$$S_n = \frac1\pi\int_0^{\frac12(\pi-x)} f(x+2t)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)t}{\operatorname{sen} t}\,dt + \frac1\pi\int_0^{\frac12(\pi+x)} f(x-2t)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)t}{\operatorname{sen} t}\,dt \quad \text{si } -\pi<x<\pi$$

y $0<\frac12(\pi-x)<\pi$ y $0<\frac12(\pi+x)<\pi$ y si $f(x)$ satisface a) $f(x+2t)$ $f(x-2t)$ lo satisfacen en $(0,\frac12(\pi-x))$ y $(0,\frac12(\pi+x))$ por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac12[f(x+0) - f(x-0)]$

Esto prueba la convergencia de la serie de Fourier y da el límite.

si para un x es $f(x+0) = f(x-0)$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = f(x)$ por b)

Para $x=\pi$ obtengo $S_n = \frac1\pi\int_0^{\pi/2} f(\pi-2t)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)t}{\operatorname{sen} t}\,dt + \frac1\pi\int_{\pi/2}^{\pi} f(\pi-2t)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)}{\operatorname{sen} t}\,dt$

la 1ª para $n\to\infty$ tiende a $\frac12 f(\pi-0)$ y la 2ª cambiando t en $(\pi-t)$

$\int_0^{\pi/2} f(-\pi+2t)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)t}{\operatorname{sen} t}\,dt$ $n\to\infty$ $= \frac\pi2 f(-\pi+0)$

análogamente para $-\pi$ por tanto en los extremos del intervalo

la $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac12[f(\pi-0) + f(-\pi+0)]$

green. $\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_L (P\,dx + Q\,dy)$

stokes $\iint_{(S)} f(xyz)\,dx\,dy = \iint_{(A)} f(x\,y\,\varphi(x\,y))\,dx\,dy$

$\iint_{(S)} f(xyz) \cos\gamma\, d\sigma = \iint_{(A)} f(x\,y\,\varphi(x\,y))\,dx\,dy$

$\int_C P(xyz)\,dx = \int_{C_1} P(x\,y\,\varphi(x\,y))\,dx$ ← aplico green.

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}$

$\iint_S \left[\frac{\partial P}{\partial z} dx\,dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy\right] = \int_C P(x\,y\,z)\,dx.$

También

$\iint_S \left[\frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy\,dz\right] = \int_C Q(x\,y\,z)\,dy$

$\iint_S \left[\frac{\partial R}{\partial y} dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x} dx\,dz\right] = \int_C R(x\,y\,z)\,dz$ sumando.

Ostrogradsky. $I_1 = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz \xrightarrow{} \iint_{(S)} f(xyz)\,dx\,dy$

$\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_{(S)} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy)$

Lec 12 $\varphi'(u) = \int_a^b f'_u(x,u)\,dx + f[b(u),u]\,b'(u) - f[a(u),u]\,a'(u)$

I. r. Euleriana. $B(p\,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad \Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} e^{-x}\,dx.$

a la $\frac{q-1}{p}\int x^p (1-x)^{q-2}\,dx$ haciendo $x^p = x^{p-1}[1-(1-x)]$

cuando los exponentes son números naturales

considero la función $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\,dx$ hago $z = p+q$ $\quad y = \frac{x}{1+t}$

t = parámetro obtengo $\Gamma(p+q) = (1+t)^{p+q} \int_0^\infty e^{-(1+t)y}\, y^{(p+q)}\,dy$

Haciendo $x = \frac{t}{1+t}$ en la $B(p,q)$ tengo $B(p,q) \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}$

$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p+q)}\,dt \int_0^\infty e^{-(1+t)y}\, y^{(p+q)-1}\,dy$ como entre lím constantes se puede invertir el orden.

$B(p,q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty y^{(p+q)-1}\,dy \int_0^\infty t^{p-1} e^{-(1+t)y}\,dt = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty y^{(p+q)-1} e^{-y}\,dy \int_0^\infty t^{p-1} e^{-ty}\,dt$

la integral interior $\frac{1}{y^p}\Gamma(p)$ como se deduce de $\Gamma(z)$ cambiando x en ty. $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty y^{q-1} e^{-y}\,dy = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$