

CRONOGRAFIA

Assignatura:	INTRODUCCIÓ A LES COMUNICACIONS (ICOM)
	Classes de Teoria
Escola:	ETSETB/UPC
Quadrimestre:	Tardor del 2016
Professor:	Josep Sala
Propòsit del document:	Guia del professor

Motivació:

- nova estructuració del temari de l'assignatura ICOM (Introducció a les Comunicacions) de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona (ETSETB) de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC).
- guia textual detallada i comentada de docència pel professor.
- determinació de la temporalitat en l'exposició dels conceptes.
- detecció de punts crítics a millorar en properes edicions de l'assignatura.

DIA 1

Tema 1.1: Presentació de l'assignatura:

- Exposició del temari. Breu descripció dels Temes I, II i III i duració.
 - o Tema I: Introducció
 - o Tema II: Senyals i Sistemes Pas Banda
 - o Tema III: Sistemes de Transmissió Digital
- Avaluació de l'assignatura: control, examen parcial, examen final i laboratori. Es descriu el procediment de ponderació i la forma en que s'avalua la nota de laboratori. La nota d'avaluació continua (30 %) es determina a partir de la nota del control i de la nota de l'examen parcial, amb pesos relatius del 25 % i 75 %, respectivament. Examen final i laboratori es ponderen amb 60 % i 10 %, respectivament. La nota de teoria es determina com la de l'examen final si aquesta és superior a la ponderada amb la nota d'avaluació continua. S'exposen els criteris de convalidació de laboratori detallats a les transparències de presentació de les pràctiques de laboratori. Es dona la data del control de l'assignatura i s'avisarà en el seu moment de la data de l'examen parcial.
- Es comuniquen els horaris de consulta.
- Bibliografia de l'assignatura. Es proporciona la bibliografia habitual de Sistemes de Comunicacions:
 - o A. Bruce Carlson, Paul Crilly, "Communication Systems", McGraw-Hill Education, Febrer de 2009.
 - o John Proakis, Massoud Salehi, "Digital Communications", McGraw-Hill Education, Febrer de 2008.

Tema 1.2: Sistemes de Comunicacions Digitals Pas Banda.

- Es descriu una classificació dels sistemes de comunicacions en base a comunicacions punt a punt, punt a multipunt i multipunt a punt. Es donen exemples de cadascun. Pels dos últims es considera la ràdio-difusió de TV o els canals de baixada i pujada d'Internet per satèl.lit. S'obvien els sistemes multipunt a multipunt. Es parla molt breument de broadcast (ràdio-difusió) i accés múltiple en relació als dos últims.
- Es dona una descripció dels blocs constituents d'una cadena de comunicacions pas banda. Es remarca que es treballarà amb models de senyals i models de comportament de subsistemes sense entrar en especificitats tecnològiques. L'objectiu és dur a terme el disseny funcional de cadenes de comunicacions i tenir eines per avaluar-ne les prestacions de forma quantitativa.
- Bloc transmissor: es descriu font digital i font analògica (prenent com exemple un senyal d'àudio). Es descriu una font digital com un sistema que genera una seqüència binària. Es comenta que actualment la majoria de sistemes de comunicacions que transmeten senyals analògics, ho fan transformant aquests a seqüències binàries. Es detallen els blocs de codificació de font i codificació de canal que processen la seqüència binària

crua, s'explica breument que el bloc de codificació de font s'ocupa de la compressió de la informació, mentre que el bloc de codificació de canal s'ocupa d'afegir bits de control de paritat que ajudaran al receptor a reconstruir la seqüència binària original si es produeixen errors durant el procés de transmissió. Es menciona que la codificació de font pot ser amb pèrdues o sense pèrdues. Es menciona que a ICOM no considerarem aquests blocs en el temari. Es descriuen els blocs de modulador digital banda base i modulador pas banda, precisant que "modulació" té un significat diferent en tots dos casos. S'explica que la funció del modulador digital banda base és codificar una seqüència binària com un senyal analògic i es dóna un exemple senzill amb la modulació 2-PAM. S'introdueix el concepte de velocitat de transmissió binària i es comenta qualitativament la seva relació amb l'amplada de banda a la sortida del modulador BB. Per explicar la necessitat del modulador pas banda es parla de que en comunicacions sense fils, el transmissor haurà de generar una ona electromagnètica (EM) amb un element (antena transmissora) que es modela com un filtre pas banda. Es relaciona això amb la banda del senyal a la sortida del modulador BB, fet que justifica la necessitat d'un bloc que realitzi la transposició de freqüència necessària per traslladar el senyal BB a la banda on la antena radia eficientment.

- Bloc canal: es dóna un model de propagació basat en un raig principal (LOS) i un raig reflectit (secundari), especificant la resposta impulsional equivalent. S'utilitza per justificar la introducció d'un filtre que modela la propagació. Es menciona que aquest filtre no necessàriament és pas banda. Es menciona que l'efecte conjunt dels filtres que modelen antena transmissora + propagació + antena receptora actuen com un filtre pas banda equivalent. S'introdueix el concepte de soroll de canal com activitat radioelèctrica pròpia del medi de propagació que també és captada per l'antena receptora. S'explica com aquest efecte es modela com un senyal additiu. S'explica l'aleatorietat del senyal i s'especifica que constitueix una degradació de les comunicacions. Es remarca que la presència de soroll és un element cabdal a tenir en compte en el disseny i anàlisi de sistemes de comunicacions de qualsevol tipus.
- Bloc receptor: es descriuen els blocs com operacions "inverses" i simètriques dels blocs corresponents del receptor. S'introdueixen els conceptes de qualitat d'una seqüència binària (probabilitat d'error de bit) i de qualitat d'un senyal analògic (relació senyal a soroll). Es menciona que la cadena de comunicacions s'enfoca a la optimització de mesures d'aquest tipus en base a restriccions del sistema com la potència transmesa o la banda de transmissió. Es menciona qualitativament la relació entre les dues mesures (SNR i probabilitat d'error de bit).

Qualificació de la sessió:

- descriptiva, sense complexitat matemàtica.

DIA 2

Tema 2.1: Senyals Pas Banda Deterministes

Tema 2.1.1: Senyal Pas Banda i Equivalent Pas Baix

- Es reprèn l'exposició del dia anterior mencionant que tractarem la forma en que es realitza en transmissió la transposició de freqüència requerida en comunicacions ràdio per poder transmetre un senyal de comunicacions pas baix (banda base) a través d'una antena que té una resposta pas banda. S'estructurarà l'exposició en base a dos exemples: Exemple 1 (modulació DBL) i Exemple 2 (Modulació IQ).
- Modulació DBL (Doble Banda Lateral) o DSB (Double Side Band): es presenta l'expressió matemàtica de la modulació com la multiplicació d'un senyal d'informació pas baix (banda base) $x(t)$ per un senyal cosinus a la freqüència portadora f_c . Es dóna una referència d'amplitud màxima en freqüència de la Transformada de Fourier del senyal $x(t)$. Es defineix $X(f)$, Transformada de Fourier de $x(t)$, repassant les expressions de la Transformada de Fourier (TF) i de la Transformada Inversa de Fourier. Es repassa la propietat de modulació de la TF. S'aplica la propietat de modulació de la TF a l'expressió de la modulació DBL utilitzant la identitat d'Euler per convertir el senyal modulador cosinus en la suma de dues exponencials a freqüències $+f_c$ i $-f_c$. Es defineix el lòbul positiu en freqüència de $X(f)$ i el lòbul negatiu en freqüència de $X(f)$.
- Modulació IQ: es representa l'esquema en senyal real, utilitzant $x_I(t)$ pel canal de fase i $x_Q(t)$ pel canal de quadratura. Es menciona l'origen de la denominació quadratura, raonant sobre l'esquema que en la branca inferior (branca de quadratura) del modulador IQ, es multiplica $x_Q(t)$ per un senyal cosinus amb fase $\pi/2$, que és equivalent al senyal menys sinus a la mateixa freqüència portadora. En l'esquema es genera el senyal transmès com la combinació de totes dues branques. Utilitzant la identitat d'Euler tant pel senyal cosinus com pel senyal sinus, s'expressa el senyal transmès traient factor comú de l'exponencial complexa a freqüència positiva i de l'exponencial complexa a freqüència negativa. Això serveix de base per definir el senyal equivalent pas baix com aquell que té part real $x_I(t)$ i part imaginària $x_Q(t)$. Això ens permet expressar el senyal pas banda com una superposició del senyal equivalent pas baix modulad a freqüència $+f_c$ i del senyal equivalent pas baix conjugat modulad a freqüència $-f_c$. Fàcilment, a partir d'aquesta segona expressió pel senyal transmès, proporcionem una tercera expressió com la part real de l'equivalent pas baix modulad per una exponencial complexa a freqüència $+f_c$. Tot seguit, calculem la TF del senyal pas banda. Per això, ens cal calcular la TF del conjugat del senyal equivalent pas baix. Es va escrivint fàcilment la definició del senyal equivalent pas baix a partir dels seus senyals component i aplicant en freqüència la simetria Hermítica d'aquests senyals component. Aquest raonament ens serveix per justificar que en un senyal pas banda, la informació del senyal equivalent pas baix viatja a freqüències positives (lòbul positiu de la TF) i que el conjugat del senyal equivalent pas baix viatja a freqüències negatives. Raonem que, en general, la TF del senyal equivalent pas baix no conserva la simetria Hermítica dels seus senyals component.
- Es presenta el model en senyal complex del modulador IQ, utilitzant la notació de doble traç pels senyals complexos (línies dirigides del diagrama de blocs).
- Per l'exemple 2 (modulador IQ), es dedueix la relació en freqüència i en temps que ens permet recuperar el senyal equivalent pas baix a partir del senyal equivalent pas banda. Es veu com una transposició en freqüència seguida d'un filtrat pas baix ideal de guany

2. Es defineix l'expressió analítica del filtre rectangular pas baix ideal. Es menciona que aquestes últimes propietats seran les que utilitzarem per veure l'estructura del receptor a la sortida de l'antena (desmodulador IQ) el proper dia.

Qualificació de la sessió:

- matemàtica, dificultat mitjana.

DIA 3

Tema 2.1: Senyals Pas Banda Deterministes

Tema 2.1.2: Modulació/Desmodulació I&Q i Model Equivalent de Canal

- Es representa el modulador I&Q a nivell de senyal real i de senyal complex i es recupera l'expressió que permet obtenir l'equivalent pas baix del senyal pas banda. S'utilitza aquesta expressió per descriure l'estructura del receptor a nivell de senyal real i de senyal complex. Es descriu el funcionament del receptor a nivell espectral: es veu com s'opera amb els lòbuls a freqüències positives i negatives del senyal pas banda per generar els components de fase i de quadratura a la sortida del receptor. Es veu com el senyal de fase s'obté sumant directament tots dos lòbuls del senyal pas banda un cop traslladats a banda base, mentre que per obtenir el senyal de quadratura combinem tots dos lòbuls de forma diferent: efectuem la resta i un gir de fase per un factor "j". S'utilitza aquest fet per relacionar-ho amb la simetria o manca de simetria al voltant de la freqüència portadora quan desactivem o activem el senyal de quadratura, respectivament. Es veu com per absència del senyal de quadratura, la combinació de tots dos lòbuls espectrals dóna zero.
- Passem a parlar de models equivalents de canal: resulta complex simular efectes introduïts pel canal sobre el senyal equivalent pas baix si operem amb tota la cadena pas banda. Per tant, ens interessa disposar de models que no involucrin la manipulació de senyals pas banda, atès que ens preocupen únicament els senyals banda base. Per tant, introduïm l'anàlisi de models equivalents de canal utilitzant un canal ideal sense soroll que només incorpora els efectes d'atenuació de canal i retard de propagació. Definim el factor L_c d'atenuació de potència del canal i representem el model en funció d'aquest paràmetre. Avaluem l'equivalent pas baix a la sortida del canal (del senyal pas banda $y(t)$), atès que és aquest equivalent pas baix el que recuperarà el desmodulador de quadratura. Operem directament amb l'expressió 3 que representa un senyal pas banda en termes del senyal equivalent pas baix i per substitució directe dels efectes del canal, realitzem l'identificació del model de l'equivalent pas baix a la sortida del canal en termes de l'equivalent pas baix a la seva entrada (en transmissió). Aquest model: atenuació més gir de fase (exponencial complex) més retard, ens permet relacionar el retard del canal amb el gir de fase equivalent experimentat a la sortida del desmodulador I&Q (suposat síncron en fase amb el modulador I&Q del transmissor). S'observa com, suposat conegut el retard de propagació, queda determinat el gir de fase que hem d'aplicar al senyal recuperat per restaurar el senyal d'informació. Es raona que el senyal es considera recuperat en condicions ideals si els únics efectes experimentats són un retard i una atenuació. No obstant, un gir de fase resulta un problema. Es posa un exemple amb un senyal DBL on el senyal d'informació és un to pur a una determinada amplitud, fase i freqüència. Queda pendent per la propera classe veure com podem corregir aquesta fase canviant també la fase dels mescladors de recepció.

Qualificació de la sessió:

- matemàtica, dificultat mitjana. S'hauria de lligar més amb les equacions vistes a la última sessió (expressions dels lòbuls del senyal pas banda en termes dels component de fase i quadratura).

DIA 4

Tema 2.1: Senyals Pas Banda Deterministes

Tema 2.1.2: Modulació/Desmodulació I&Q i Model Equivalent de Canal

- Es reprèn la classe del dia anterior amb un breu resum sobre la compensació en recepció del retard de canal utilitzant un factor complex en banda base i es demana com exercici pel dia següent trobar amb quina fase s'ha de corregir l'oscil·lador de portadora en recepció per aconseguir el mateix efecte. Es remarca que el model de la sessió anterior efectua un processament en banda base, mentre que el model que es demana analitzar ara efectua el processament directament en pas banda.
- Es procedeix tot seguit a analitzar un model més general en que la resposta del canal de comunicacions es modela amb un filtre pas banda. Es planteja la resposta impulsional del filtre pas banda de canal en els mateixos termes que els senyals pas banda en transmissió i recepció: definint un senyal equivalent pas baix. Es cercarà per tant el model equivalent banda base d'aquest sistema de comunicacions pas banda. Partim de l'equació de convolució que ens relaciona l'entrada i la sortida d'un filtre i l'apliquem en aquest context introduïnt dins de l'integral de convolució les expressions pas banda de $h_c(t)$ i de $s(t)$ en termes dels seus equivalents pas baix (utilitzem les expressions basades en la part real del senyal analític). Llavors, apliquem la propietat matemàtica que ens dóna el producte de les parts reals de dos nombres complexos z_1 i z_2 en termes de les parts reals dels productes z_1 (conjugat)* z_2 i z_1 * z_2 . Veiem doncs que ens surten dos termes. Reorganitzant factors i traient fora de l'integral de convolució l'exponencial complex que no depèn de la variable d'integració temporal, ens és possible realitzar una identificació d'un dels components amb un senyal equivalent pas baix. Per l'altre component, veiem que la convolució parcial corresponent ens dóna un senyal idènticament nul degut a que estem multiplicant en freqüència dues Transformades de Fourier que tenen un suport freqüencial disjunt. A partir del component que no s'ha anul·lat podem identificar clarament l'equivalent pas baix que cerquem per la sortida del desmodulador I&Q: veiem que dóna $\frac{1}{2}$ per la convolució entre l'equivalent pas baix de la resposta impulsional del canal i l'equivalent pas baix del senyal a l'entrada del canal. Hem obtingut per tant el model equivalent banda base del canal com una operació de filtratge.
- Fem un exemple amb un canal amb propagació multi-camí (dos camins amb retards diferents i guany d'amplitud diferents, combinat amb filtres pas banda ideals per modelar l'efecte de les antenes transmissora i receptora). L'objectiu és per tant identificar l'equivalent pas baix de la resposta impulsional d'aquest canal. A aquest efecte, determinem la resposta en freqüència de l'equivalent pas baix utilitzant la teoria que s'havia desenvolupat en sessions anteriors. Dibuixem les resposta en freqüència de les antenes i en donem la seva expressió analítica utilitzant un pols rectangular en freqüència. Trobem l'equivalent pas baix de la resposta impulsional del canal desplaçant en freqüència el lòbul de freqüències positives de la resposta pas banda del canal. Raonem que aplicat sobre els senyals pas baix considerats, el filtrat no introdueix cap distorsió en freqüència. Finalment, expressem un model banda base amb dos camins de propagació, on a més a més dels efectes de guany i retard que tenia el model pas banda, ara es pot apreciar també un efecte de gir per una fase constant $2\pi \cdot \text{retard} \cdot f_c$ que depèn del retard de cada camí. Es raona per tant que la combinació d'aquests dos camins genera efectes de selectivitat en freqüència que caldrà compensar. Es descriu

breument un filtre de compensació de la propagació multicamí o filtre equalitzador que realitzarà aquesta funció.

- Es recorda que els alumnes han de dur fets per la propera sessió els exercicis 1 i 2 del Tema II de la col.lecció de problemes. Es resoldran a classe.

Qualificació de la sessió:

- Matemàtica, dificultat mitjana. Ens hem ajudat de gràfics per il.lustrar diagrames de blocs i representació dels espectres.

DIA 5

Tema 2.1: Senyals Pas Banda Deterministes

- Es resolen els exercicis 1 i 2 del Tema II. En l'exercici 1 s'apliquen mètodes diferents en cadascun dels apartats per trobar els senyals equivalents pas baix i escollir la freqüència f_c de referència

Tema 2.2: Processos aleatoris pas banda

Tema 2.2.1: Repàs de conceptes de probabilitat.

- Es fa una descripció breu de Variables Aleatòries Discretes (VAD) i Variables Aleatòries Continues (VAC). Per VAD es defineix realització d'una VAD com resultat d'un experiment i s'explica el concepte d'esperança estadística com l'omitjanament sobre diferents experiments. Es remarca que només ens cal la distribució de probabilitats i el valor de l'alfabet per determinar el valor esperat de la variable i que per tant no cal realitzar infinits experiments.
- Per una VAC es defineixen les funcions de distribució de probabilitat i de densitat de probabilitat. S'enuncien les propietats de la funció de distribució sense demostració: no decreixent, definida entre 0 i 1 i que permet calcular la probabilitat en un interval simplement restant els valors de la funció de distribució avaluada en els extrems de l'interval. Es fa un exemple gràfic amb dues funcions de distribució i les seves corresponents funcions de densitat (amb alta dispersió de valors i baixa dispersió de valors). S'enuncia com calcular el valor esperat d'una VAC i es relaciona amb l'expressió corresponent enunciada per VAD. Es mencionen els paral·lelismes i es parla de que aquestes expressions seran útils pel càlcul de potències de senyals en cadenes de comunicacions.

Qualificació de la sessió:

- Matemàtica, dificultat baixa. Ha resultat més elaborada la part dels exercicis.

DIA 6

Tema 2.1: Senyals Pas Banda Deterministes

Tema 2.2: Processos aleatoris pas banda

Tema 2.2.1: Repàs de conceptes de probabilitat.

- Es continua amb la definició de potència d'una variable aleatòria. Es defineix com l'amentjanament sobre diferents experiments o realitzacions del quadrat de cada realització de la variable. S'enuncia com es fa el càlcul a través de la funció de densitat de probabilitat de la variable aleatòria i es compara amb l'expressió que es tenia per la mitja de la variable aleatòria. Alternativament, es parla de com es pot calcular la potència si es disposa de la funció de densitat de probabilitat del quadrat de la variable aleatòria i es calcula com la mitja d'una variable aleatòria. Aquestes dues formes de calcular la potència serveixen com introducció pel càlcul de l'esperança d'una funció d'una variable aleatòria. Mencionem la nomenclatura de moments de primer i segon ordre en relació a la mitja i potència d'una variable aleatòria.
- S'enuncia el Teorema Fonamental de l'Esperança pel càlcul del valor esperat de la funció d'una variable aleatòria. Seguint el raonament anterior, apliquem una funció $g()$ a una variable aleatòria X per obtenir una variable aleatòria Y . Discutim com calcular la magnitud estadística objectiva a partir de la funció de densitat de X (entrada de la funció) i de la funció de densitat de Y (sortida de la funció). Comentem que és més senzill fer-ho de la primera forma.
- Definim ara la funció de densitat de probabilitat conjunta i el concepte d'independència estadística. Justifiquem la independència de forma intuïtiva, raonant que un conjunt de variables aleatòries són conjuntament independents quan els resultats d'una no tenen cap influència sobre els resultats de les altres. Enunciem que quan totes les variables aleatòries són independents entre elles, llavors i només llavors la funció de densitat de probabilitat conjunta factoritza en les distribucions marginals (individuals) de cada variable aleatòria.
- Enunciem el Teorema Fonamental de l'Esperança pel càlcul del valor esperat d'una funció de M variables aleatòries.
- Enunciem tres propietats bàsiques de l'operador esperança que ens serviran en senyals de comunicacions pel càlcul de potències: 1) esperança d'un factor determinista per una variable aleatòria (el factor determinista és un terme comú a tots els experiments o realitzacions de la VA); 2) esperança de la suma de dues variables aleatòries; 3) esperança del producte de dues funcions uni-variades de dues variables aleatòries independents.
- Introduïm la definició de senyal aleatori i procés estocàstic. Definim eix temporal en variable " t " continua i eix estadístic (sobre els experiments o realitzacions) en variable " i " discreta. Definim mitja instantània, mitja temporal (d'una realització) i mitja d'un senyal aleatori. Definim potència instantània, potència amittjanada temporal (d'una realització) i potència amittjanada d'un senyal aleatori.
- Posem dos exemples de càlcul de mitges i potències de senyals aleatoris. Utilitzem un context de comunicacions per fer-ho intuïtiu. Definim un sensor de temperatures com a font d'informació que posteriorment es modula per ser transmesa a través d'una antena de ràdio-comunicacions (resposta pas banda) a partir d'una modulació del valor de la mesura com amplitud d'un senyal cosinus a una freqüència portadora. Pintem a la pissarra el resultat d'un parell de realitzacions, dibuixant prèviament la funció de

densitat de probabilitat (rectangular) que utilitzem per modelar el comportament estadístic de la informació (mesura de temperatura). En el segon exemple introduïm també un terme de fase al cosinus, independent de la informació i modelat amb una funció de densitat uniforme en $[0, 2\pi]$. Raonem que en comunicacions quan parlem de potència a la sortida d'un transmissor, en interessa un paràmetre independent de la realització particular de la informació: per tant hem de treballar amb mitjans estadístics i calcular la potència instantània i la potència del senyal aleatori que se'ns defineix. Veiem doncs com un senyal aleatori en comunicacions es defineix a partir de variables aleatòries. Resolem el càlcul de la mitja instantània del procés i deixem la resolució de la resta de l'exemple 1 i de tot l'exemple 2 perquè els estudiants el resolguin a casa pel proper dia, en el que s'acabarà la resolució a la pissarra.

Qualificació de la sessió:

- Matemàtica, dificultat baixa, il·lustrada amb exemples en entorns de comunicacions.

DIA 7

Tema 2.2: Processos aleatoris pas banda

- Calculem la funció d'autocorrelació i d'autocorrelació amitjanada temporal pel senyal aleatori de l'exemple 1 (senyal cosinus amb amplitud aleatòria). Determinem que la funció d'autocorrelació es pot expressar com la suma d'un terme estacionari més un terme ciclo-estacionari, aplicant la propietat del producte de dos cosinus. Recalculem la potència instantània i comprovem que ens donava com en la sessió anterior (sessió 5) per l'exemple 1. Calculem l'autocorrelació amitjanada temporal i raonem que el terme ciclo-estacionari aporta contribució nul·la a l'autocorrelació. Dibuixem l'autocorrelació i veiem que està continguda en una franja $+P_A/2$ a $-P_A/2$ i que es repeteix de forma periòdica. Per tant el senyal es classifica com a ciclo-estacionari. Introduïm una propietat de l'autocorrelació amitjanada (temporal): el seu mòdul és sempre menor o igual que l'autocorrelació amitjanada avaluada en $\tau=0$. Es demana demostrar per casa aquesta propietat. Es presenta també la propietat equivalent per l'autocorrelació instantània, es demana demostrar que és menor o igual que la mitja geomètrica de les potències instantànies avaluades en $t+\tau$ i en t . Ho demostrarem a classe més endavant a través de la desigualtat d'Schwarz. Calculem l'espectre de densitat de potència i veiem que ens dona dues deltes que contribueixen amb potència $P_A/4$ cadascuna a la potència total $P_A/2$. Verifiquem la propietat que l'àrea sota l'espectre de densitat de potència ens dona la potència.
- Presentem l'estructura d'un senyal digital banda base (modulació PM amb símbols complexos). Es posa un exemple amb un senyal 4 PAM de com es codifica una seqüència binària en un senyal digital utilitzant modulació PAM amb pols rectangular. Es menciona que la seqüència de símbols es modela com variables aleatòries tal com es fa per la seqüència de bits. Es defineix el pols de conformació.
- Sobre l'exemple anterior es calcula l'autocorrelació instantània i l'autocorrelació amitjanada. Es defineix com a terme d'interès l'autocorrelació determinista del pols i es parla de com s'utilitza per calcular l'energia del pols. Es parla de l'espectre de densitat d'energia del pols (mòdul quadrat de la Transformada de Fourier del pols de conformació temporal) i es relaciona a través del Teorema de Parseval amb el càlcul de l'energia del pols en el domini temporal. Es defineix també la funció d'autocorrelació discreta dels símbols. Es donen diferents expressions per l'autocorrelació amitjanada en termes de l'autocorrelació determinista del pols i de l'autocorrelació dels símbols (passa a variable t en funció de deltes). S'expressa l'autocorrelació amitjanada com una convolució entre l'autocorrelació determinista i la dels símbols. Es dona l'expressió de l'espectre de densitat de potència en termes del producte d'un espectre periòdic (correlació discreta dels símbols) i espectre de densitat d'energia del pols.
- Com exemple s'agafa una seqüència de símbols independent idènticament distribuïts i de mitja zero i es calcula la seva potència en el domini temporal: producte de potència dels símbols per energia del pols i normalitzat pel temps de símbol. Es dona l'expressió analítica de l'autocorrelació dels símbols com la potència dels símbols per la delta discreta. Es calcula també per aquest cas l'espectre de densitat de potència del senyal PAM.

DIA 8

Tema 2.2: Processos aleatoris pas banda

- Acabem l'exposició del dia anterior: utilitzem la transformada de Fourier del pols rectangular per dibuixar l'espectre de densitat de potència d'una modulació PAM amb pols rectangular (banda base). Discutim que degut a la discontinuïtat del pols apareixen lòbuls secundaris en espectre que poden injectar potència en bandes adjacents a la banda efectiva del senyal (lòbul principal de l'espectre). Comentem que ens interessa, entre altres coses, poder avaluar espectres de densitat de potència a la sortida de filtres, atès que els filtres són blocs constituents importants en la cadena de comunicacions.
- Plantegem el càlcul de la mitja del senyal a la sortida d'un filtre, de les correlacions creuades amitjanades entrada-sortida i sortida-entrada d'un filtre i de l'autocorrelació amitjanada a la sortida del filtre. Efectuem únicament el càlcul de l'última i deixem com exercici per casa (donant el resultat) el càlcul de les dues primeres. Donem també l'expressió per l'espectre de densitat de potència a la sortida del filtre.
- Fem el càlcul de l'autocorrelació amitjanada d'un senyal aleatori amb dues components cosinus a freqüències diferents, amb amplituds aleatòries independents i totes dues de mitja zero. Donem l'autocorrelació amitjanada i dibuixem l'espectre de densitat de potència (DEP) a l'entrada d'un filtre real. Calculem la potència d'entrada del filtre. Utilitzant el càlcul anterior de la DEP a la sortida del filtre, representem la DEP de sortida remarcant com cada contribució de potència a una determinada freqüència queda multiplicada pel mòdul quadrat de la resposta freqüencial del filtre. Donem l'expressió de la potència de sortida suposant que el filtre és real i que per tant la seva resposta freqüencial té simetria Hermítica.
- Pintem un modulador I&Q i el modulador equivalent banda base a la seva entrada. Donem l'expressió dels símbols complexos i discutim breument el paper del codificador de símbol complex d'una seqüència binària posant l'exemple clàssic de la codificació de Gray. Plantegem el càlcul de l'espectre de densitat de potència a la sortida del transmissor. Donem l'expressió de l'autocorrelació i de l'autocorrelació amitjanada del senyal pas banda transmès identificant les parts estacionària i ciclo-estacionària (a la freqüència portadora). Es veu com la component ciclo-estacionària queda anul·lada quan avaluem l'autocorrelació amitjanada, en el cas en que l'equivalent pas baix sigui estacionari. En cas de que l'equivalent pas baix sigui ciclo-estacionari donem també l'expressió de l'auto-correlació amitjanada (pràcticament la mateixa, en funció ara de l'autocorrelació amitjanada de l'equivalent pas baix enlloc de l'autocorrelació estacionària de l'equivalent pas baix).

DIA 9

Tema 2.2: Processos aleatoris pas banda

- Es reproduïx l'expressió general de la funció d'autocorrelació instantània del senyal pas banda en termes de la funció d'autocorrelació instantània del senyal equivalent pas baix i ens fixem en el segon terme associat al doble de la freqüència portadora. Es consideren les condicions sota les quals aquest segon terme s'anul·la, la qual cosa ens permet definir els senyals circularment simètrics. Es plantegen llavors les condicions que han de verificar tant les autocorrelacions dels components de fase quadratura (han de ser iguals), com les condicions que ha de verificar la correlació creuada entre els components de fase i de quadratura. Es presenta el cas particular en que els senyals circularment simètrics també són estacionaris i es veu com queden definides les dues condicions anteriors: en particular, la correlació creuada ha de verificar simetria senar en el desplaçament temporal τ .
- Tot seguit, escrivim l'expressió general per l'autocorrelació mitjanada d'un senyal pas banda en termes de les autocorrelacions mitjanades dels components de fase i quadratura i de la correlació creuada mitjanada. Es determina a partir d'aquesta expressió la fórmula que ens permet calcular la potència del senyal pas banda a partir de la semi-suma de les potències dels components de fase i de quadratura. Es remarca que aquesta és una expressió general. Es veu que la potència P_s és també la meitat de la potència del senyal equivalent pas baix.
- Es calcula l'espectre de densitat de potència del senyal pas banda a partir de l'espectre de densitat de potència de l'equivalent pas baix. Es veu com per simetries de la transformada de Fourier es generen els lòbuls espectrals a freqüències positives i negatives. Es presenta un exemple de càlcul on els senyals de fase i de quadratura tenen un espectre pas baix de forma triangular i rectangular, respectivament. S'especifica que tots dos senyals són independents i de mitja zero. Es donen els nivells espectrals de cadascun en termes de la banda del senyal i de la seva potència individual. S'efectua el càlcul de la potència del senyal pas banda i es calcula l'espectre de densitat de potència de l'equivalent pas baix per després passar a calcular l'espectre de densitat de potència del senyal pas banda. Es menciona que senyals que no compleixin la propietat de simetria circular (circularment simètrics) donen lloc a espectres asimètrics al voltant de la freqüència portadora (es menciona l'espectre de la ja obsoleta televisió analògica).
- Es fa una comparativa entre com s'obté el senyal equivalent pas baix a partir del senyal pas banda (a nivell temporal, pel cas de senyals aleatoris sense transformada de Fourier definida i pel cas contrari, a nivell espectral, per senyals que si tenen definida transformada de Fourier) i entre com s'obté l'espectre de densitat de potència del senyal equivalent pas baix a partir del lòbul a freqüències positives de l'espectre de densitat de potència del senyal pas banda. Es remarca la diferència entre els factors 2 i 4 en tots dos casos i es dóna importància al fet de no confondre's per la importància que té en l'avaluació de prestacions dels sistemes de comunicacions.

DIA 10

Tema 2.2: Processos aleatoris pas banda

- S'introdueix un model de comunicacions banda base amb atenuació, retard i soroll additiu per il·lustrar les propietats del soroll en comunicacions. Es considera un receptor que és un filtre ideal ajustat a la banda del senyal o de banda superior a aquesta. Es defineix la relació senyal a soroll a la sortida del filtre, distingint el terme de senyal útil del terme de soroll de sortida del filtre. Es fa el càlcul de la relació senyal a soroll en funció de la potència de transmissió, de l'atenuació del canal, de la densitat espectral de soroll (suposada uniforme) i de la banda del filtre. Es fa notar que la relació senyal a soroll (SNR) disminueix quan obrim la banda.
- Es defineixen les propietats del soroll: a) el soroll és estadísticament independent del senyal; b) el soroll es estacionari, de mitja zero; c) el soroll té autocorrelació impulsiva i espectre de densitat de potència uniforme. S'il·lustra aquest últim concepte raonant que és una idealització: el soroll tèrmic real en ràdio-comunicacions té un espectre de potència finita i que disminueix en freqüència al voltant d'1 THz. En les bandes ràdio es pot idealitzar com uniforme. A tots els efectes acabem filtrant i el que ens interessa és la potència de soroll a la sortida del filtre, a partir de la qual s'avaluen les prestacions dels sistemes de comunicacions.
- S'especifica també que el soroll té una estadística Gaussiana. Es proporciona l'expressió de la seva densitat de probabilitat i gràficament es presenten dues densitats de probabilitat: una estreta i alta i una altra ampla i baixa, en relació al paràmetre potència de soroll. Es dibuixa l'aspecte d'una realització del procés aleatori en tots dos casos, associant potència de soroll alta a obrir la banda del receptor i potència de soroll baixa a disminuir la banda del receptor (amb la limitació de banda mínima ajustada a la banda del senyal). Es veu com en la realització associada a potència menor, el senyal de soroll varia més lentament en temps. Es menciona que amplituds més elevades de soroll són menys freqüents.
- Es passa a deduir els espectres de densitat de potència de soroll en la cadena de recepció. Abans de tot, es demostra que a la sortida del desmodulador I&Q tenim un senyal de soroll estacionari i circularment simètric quan el senyal de soroll en el punt de recepció és estacionari. Es defineix el senyal analític i s'expressa en termes de part real (senyal pas banda) i part imaginària (Transformada de Hilbert, en termes d'una operació de filtrat). Això últim serveix per justificar que el senyal analític és estacionari. S'expressa l'equivalent pas baix del soroll en el punt de recepció (sortida del filtre pas banda ideal en el frontal del receptor) en termes del seu senyal analític: es calculen l'autocorrelació de l'equivalent pas baix i la correlació creuada entre ell i el seu conjugat per demostrar en el primer cas l'estacionarietat de l'equivalent pas baix i en el segon cas la seva característica de simetria circular de les correlacions. Es raona que en el segon cas, com el senyal equivalent pas baix no pot generar estadístiques de segon ordre al doble de la freqüència portadora, queda com a única solució que l'equivalent pas baix sigui circularment simètric.
- Utilitzant la teoria del dia anterior, es relaciona l'espectre de l'equivalent pas baix amb l'espectre del soroll pas banda en el punt de recepció. Es demostra la igualtat entre els espectres de densitat de potència de la branca de fase i de la branca de quadratura. A partir de la propietat de circularitat simètrica de les correlacions també es demostra com queda la densitat espectral de potència de l'equivalent pas baix del soroll en termes de l'espectre creuat (anti-Hermitic: imaginari pur i de part imaginària de simetria senar).

Utilitzant l'espectre de densitat de potència del soroll pas banda dividit en espectre a freqüències positives i negatives es demostra gràficament com s'obtenen els espectres del soroll de fase i del soroll de quadratura (suma) i l'espectre creuat (diferència).

DIA 11

Tema 2.2: Processos aleatoris pas banda

- Es fa un exemple de càlcul de relacions senyal a soroll en recepció (sortida del filtre pas banda frontal de recepció) i a la sortida del desmodulador I&Q per un senyal constituït per la suma de dues senyals banda base multiplexades en freqüència a portadores f_1 i f_2 , amb fases θ_1 i θ_2 , respectivament. Cada portadora diferent es transmet per emissores diferents (diferents localitzacions) i està afectada per la seva atenuació i pel seu retard específic. Considerant que els senyals d'informació (equivalents banda base) respectivament tenen la mateixa banda B_x , mostrem com configurar el receptor per recuperar tots dos senyals: especifiquem el filtre pas banda de recepció perquè permeti passar totes dues portadores, especifiquem quan ha de valdre la freqüència i fase del mesclador en recepció per recuperar de forma coherent cadascun dels dos senyals i especifiquem el filtre pas baix del desmodulador I&Q. Per fer el càlcul de l'espectre de densitat de potència del soroll a la sortida del desmodulador I&Q, realitzem primer el càlcul de l'espectre de densitat de potència del soroll en el punt de recepció (espectre pas banda) i calculem la relació senyal a soroll en aquest punt (amb una banda prou ampla per contenir totes dues emissores). Hem considerat que tots dos senyals banda base són independents i de mitja zero. Tot seguit ens centrem en el senyal a freqüència f_1 i considerem la resta de components (soroll pas banda en recepció i senyal 2) com si fossin tots dos soroll: és vàlid atès que són tots dos aleatoris i incorrelats. Això ens permet aplicar la teoria que coneixem per determinar l'espectre de soroll equivalent en banda base a partir de la suma dels components espectrals pas banda a freqüències positives i negatives. Tot seguit fem el càlcul de la relació senyal a soroll a la sortida del desmodulador I&Q. Utilitzem la nomenclatura de referir-nos a potències de senyal amb la majúscula S i a potències de soroll amb la majúscula N .

Tema 3: Sistemes de Transmissió Digital

Tema 3.1: Modulador Digital Pas Banda (PB) i Banda Base.

- Expliquem la codificació de símbol PB i BB. Comencem per la codificació de símbol BB i donem l'expressió de les modulacions M-PAM. Presentem l'estructura de la modulació, destaquem la codificació de símbol i la conformació de pols, donant l'expressió general de la forma d'ona. Expliquem el paper de la codificació de símbol de forma gràfica a partir de la constel.lació, i com una taula de consulta. Definim les etiquetes binàries de cada símbol i com actua el procés de codificació. Definim les velocitat de transmissió de símbol i de transmissió de bit. Definim el nombre de bits per símbol pels codificadors sense memòria i per aquests relacionem les velocitat de símbol i les velocitats de bit. Parlem de que en els codificadors amb memòria aquesta fórmula pot canviar, atès que el que és rellevant és el nombre de bits nous transmesos per cada símbol nou generat.
- Passem als sistemes de comunicacions pas banda i presentem l'estructura del modulador equivalent banda base (codificador de símbol complex i conformació de pols) que es posa a l'entrada del modulador I&Q. Introduïm els símbols complexos construïts a partir dels símbols en el canal de fase i en el canal de quadratura. Proporcionem els exemples de les modulacions M-ASK i M-PSK, utilitzant en aquestes últimes l'expressió genèrica per generar els seus símbols a partir d'un índex discret de 1 fins a M (nombre de símbols de la constel.lació). Es descriuen amb tot detall les

constel.lacions BPSK, QPSK i 8-PSK. Es descriu també la codificació de Gray com a mètode d'etiquetat dels símbols.

DIA 12

Tema 3: Sistemes de Transmissió Digital

Tema 3.1: Modulador Digital Pas Banda (PB) i Banda Base.

- Donem l'expressió general analítica dels símbols de la constel.lació M-QAM en la que M és una potència sencera de quatre de manera que completa la retícula rectangular en la que es situen els símbols. Es menciona que s'utilitzen totes les potències de 2 entre 4 i 1024 per construir les modulacions M-QAM que apareixen en diferents estàndards de comunicacions. Es menciona que aquelles M que no són potències exactes de 4 es construeixen amb retícules incompletes. Es fa referència a Internet perquè consultin la forma de les diferents constel.lacions.
- Es descriuen les constel.lacions M-APSK de de 2, 3 i 4 anells, corresponents als $M = 16, 32$ i 64 , respectivament. S'utilitza la notació $(4+12)$ -APSK, $(4+12+16)$ -APSK i $(4+12+16+32)$ -APSK per referir-nos a cadascuna en termes dels símbols que conté cada anell. Es menciona que les relacions dels radis dels anells estan pre-definides i poden ser més d'una. Es menciona que aquestes constel.lacions són les més modernes i que es van començar a utilitzar en radio-difusió de televisió digital per satèl.lit.
- Es descriu la conformació de pols. Es menciona que els polsos limitats en temps no estan limitats en banda. Es discuteix que si volem tenir polsos limitats en banda, això implica que perdem la limitació en temps del pols i que en conseqüència apareixen cues que interfereixen en símbols anteriors i posteriors. Per tant, caldrà dissenyar acuradament els polsos per facilitar la descodificació dels símbols en el receptor sense perdre prestacions.
- Passem a analitzar l'espectre de densitat de potència en banda base. En haver-lo vist en el tema anterior, ens definim els pseudo-símbols en els qual hem restat la mitja. En base a això definim la covariança de la seqüència de símbols. Suposem sempre estadística estacionària atès que estem utilitzant símbols independents idènticament distribuïts (i.i.d.).
- Utilitzant la covariança dels símbols, distingim la part continua i la part discontinua de l'espectre, on hem utilitzat la identitat del tren de deltes en el terme associat al mòdul quadrat de la mitja dels símbols. Mencionem que els espectres associats als símbols són periòdics en freqüència. Veiem doncs que en la part discontinua de l'espectre ens apareixen deltes espectrals que poden utilitzar-se per assistir al receptor en la sincronització de freqüència.
- Posem un problema pel proper dia: especifiquem una seqüència de bits i.i.d. però no equiprobables sobre modulació 2-PAM i donem les característiques dels polsos NRZ i RZ (amb 50% cicle de treball). Es demana que els estudiants calculin i dibuixin a casa els espectres de densitat de potència, indicant les freqüències i nivells més significatius en el dibuix. Es demana que calculin també la potència del senyal.

DIA 13

Tema 3: Sistemes de Transmissió Digital

Tema 3.1: Modulador Digital Pas Banda (PB) i Banda Base.

- Es resol el problema del dia anterior: es determina l'espectre de densitat de potència per símbols i.i.d. no equiprobables. S'utilitzen polsos NRZ i polsos RZ amb cicle de treball del 50 %. Es dóna una sola expressió pel pols parametritzada per la duració del pols i per l'energia del pols. Es veu com en el cas dels polsos NRZ, la part continua de l'espectre és proporcional a una sinc al quadrat amb nuls a múltiples sencers de la velocitat de símbol i que la part discontinua de l'espectre ens dóna una única delta centrada a zero degut a que els nuls de la transformada de Fourier del pols anul·len la resta de possibles deltes a múltiples sencers de la velocitat de símbol. Es comenta que el desequilibri entre les probabilitats dels dos símbols activa o desactiva la presència de l'espectre discontinu. Pel cas de polsos RZ amb cicle de treball 50 % es veu com els nuls de la sinc quadrat queden a múltiples parells de la velocitat de símbol. Es comenta que a idèntica energia de pols, l'altura de la part discontinua de l'espectre és la meitat que en el cas NRZ i que l'amplada de banda efectiva és el doble. Es veu com ara en l'espectre discontinu s'activen totes les deltes situades a múltiples sencers de la velocitat de símbol (apart de la mateixa delta situada a $f=0$). Es comenta que en aquests dos casos, el càlcul de la potència s'hauria de fer en el domini temporal i no en el domini espectral, degut a la dificultat de realitzar les integrals corresponents.
- Per la propera setmana es planteja el càlcul de l'espectre de densitat de potència amb modulació bipolar com un exemple de codificació amb memòria.
- Es planteja la codificació correlativa com la concatenació d'un codificador sense memòria (ex. M-polar, M-unipolar) i tot seguit un filtre discret. Es comenta que a la sortida del filtre discret canviarà la constel·lació i la distribució de probabilitat dels símbols (es posa el sistema duobinari com exemple). Es comenta que canviarà també la funció d'autocorrelació de la seqüència de símbols i la mitja dels símbols codificats. Es dóna l'expressió genèrica dels símbols codificats a partir de la resposta impulsional discreta del filtre, com una convolució discreta. Es comenta que caldrà calcular ara la funció d'autocorrelació a la sortida del filtre i la mitja a la sortida del filtre, per poder calcular posteriorment l'espectre de densitat de potència associat als símbols codificats (amb memòria). Es dóna l'expressió de la mitja a la sortida del filtre i de la funció d'autocorrelació a la sortida del filtre, mencionant que és equivalent en el domini discret al que ja s'havia vist pel cas de filtres continus. Es deixen pel proper dies els desenvolupaments matemàtics del càlcul de la funció d'autocorrelació a la sortida del filtre discret.

DIA 14

Tema 3: Sistemes de Transmissió Digital

Tema 3.1: Modulador Digital Pas Banda (PB) i Banda Base.

- Es desenvolupa l'espectre de densitat de potència per una modulació PAM digital pas banda. Es combina l'espectre de densitat de potència del senyal pas banda amb l'expressió de la DEP d'un senyal PAM banda base. Es considera el cas de conformació per pols rectangular, discutint que és una aproximació suficientment bona si considerem una banda prou gran com perquè les cues de la sinc en freqüència de la transformada de Fourier del pols rectangular hagin disminuït suficientment. Es considera per tant una portadora molt per sobre de la velocitat de símbol.
- Es defineix l'energia (esperada) de símbol i de bit i es proporciona el valor màxim de la DEP en termes de l'energia de símbol. Es menciona que sempre és proporcional a Es.

Tema 3.2: Desmodulador Digital Pas Banda (PB) i Banda Base (BB).

- Es desenvolupa una cadena de comunicacions BB amb una atenuació de canal, un retard de canal i soroll AWGN. Es proporciona l'estructura del receptor com un filtre de detecció i un mostrejador. Es considera un pols de conformació genèric $p(t)$ i que es transmet un sol símbol en l'instant k_0 . S'obté l'expressió del senyal útil i del soroll en el punt d'observació del símbol transmès després del mostrejador. Es defineix la relació senyal a soroll (SNR) de detecció en el punt (D) de detecció. Es calcula la potència del terme de senyal útil, fent els càlculs en el domini freqüencial. Es fa el càlcul de la potència del soroll també en el domini freqüencial (aplicant estacionarietat a la sortida d'un filtre). A la vista de la forma que pren el quocient SNR, es menciona que hem d'optimitzar-lo respecte $H(f)$, la resposta freqüencial del filtre de detecció. S'escriu la desigualtat d'Schwarz en freqüència sobre unes distribucions en freqüència $A(f)$ i $B(f)$ i es proporciona la condició sota la qual es converteix en igualtat ($A(f)$ proporcional a $B(f)$). Es relacionen $A(f)$ i $B(f)$ amb $H(f)$ i $P(f)$ i s'aplica la relació d'igualtat entre $A(f)$ i $B(f)$ per trobar la $H(f)$ òptima en termes de $P(f)$ i dels paràmetres t_k_0 (instant d'observació), t_d (retard del canal) i $k_0 \cdot T_s$. S'obtenen les expressions en temps pel filtre adaptat com $p^{*}(-t)$ pel cas de polsos no causals (simetria parell) i pel cas de polsos causals: $p^{*}(T_s - t)$ (cas de pols rectangular). Es proporciona en cada cas l'expressió dels instants de mostreig: $t_k_0 = t_d + k_0 \cdot T_s$ i $t_k_0 = t_d + (k_0 + 1) \cdot T_s$.
- Es fa un exemple gràfic prenent un pols rectangular amb $t_d = T_s/2$ i amplitud $\sqrt{E_p/T_s}$. En l'exemple gràfic es representa el senyal transmès, el senyal rebut sense soroll a la sortida del canal (afectat per atenuació de canal i retard), la resposta impulsional del filtre adaptat i el senyal a la sortida del filtre adaptat. Es veu com mostrejant en $t_k_0 = t_d + (k_0 + 1) \cdot T_s$, coincidim amb el màxim del pols triangular a la sortida del filtre adaptat, que és lògic atès que volíem maximitzar la SNR.
- Es relaciona el pols a la sortida del filtre adaptat amb l'autocorrelació determinista del pols de conformació, i s'utilitza la propietat que el seu màxim és l'energia de pols.
- Es calcula també la potència de soroll en detecció quan utilitzem el filtre adaptat: $N_0 \cdot E_p/2$.

DIA 15

Tema 3: Sistemes de Transmissió Digital

Tema 3.2: Desmodulador Digital Pas Banda (PB) i Banda Base (BB).

- Per un canal ideal sense soroll es desenvolupa el model de canal discret equivalent per veure l'origen de la interferència inter-simbòlica (ISI) deguda únicament al pols de conformació. Partint de l'expressió del senyal PAM banda base, s'atenua, es retarda t_d i es filtra pel filtre adaptat (model no-causal) en el receptor, mostrejant a $t_k = t_d + k_0 \cdot T_s$. Es formula l'expressió de les observacions de símbol en termes de la convolució discreta entre la seqüència de símbols i la versió mostrejada de l'autocorrelació determinista del pols: $R_p[k] = R_p(kT_s)$, escalada per $1/\sqrt{L_c}$ (atenuació del canal). Es destaca que pel símbol d'interès tenim sempre $R_p[0] = E_p$ (energia del pols), mentre que pels altres símbols tenim $|R_p[k]| \leq E_p$. Es diferencia el terme d'ISI (símbols diferents del símbol d'interès) i símbols interferents, la potència combinada dels quals podria ser superior a la potència del símbol d'interès en la observació $y[k_0]$. Es posa un exemple utilitzant un pols rectangular de duració superior al temps de símbol: apareix un símbol interferent anterior i un símbol interferent posterior.
- Definida la ISI, es menciona que ens interessa trobar polsos de conformació tals que la seva autocorrelació determinista passi per zero en múltiples no nuls del temps de símbol. Aquests polsos hauran de ser també polsos de banda limitada per no introduir interferència en sistemes de comunicacions adjacents en banda. Aquests polsos $R_p(t)$ s'anomenen polsos de Nyquist i els seus corresponents $p(t)$ polsos arrel quadrada de Nyquist. Es comenta que de les dues condicions que han de complir aquests polsos: 1) ISI nul·la (condició en domini temporal) i 2) banda limitada (condició en domini freqüencial), passarem la primera condició a domini freqüencial per efectuar el disseny de la plantilla de l'espectre de densitat d'energia $S_p(f)$ del pols (Transformada de Fourier de $R_p(t)$). Per tant, partim del tren de deltes equi-espaiades al temps de símbol i multipliquem per $R_p(t)$, el resultat és proporcional a $\delta(t)$. Fent transformada de Fourier (la T.F. d'un tren de deltes és també un tren de deltes equi-espaiades en freqüència a $r_s = 1/T_s$), trobem fàcilment la condició d'ISI nul·la en el domini freqüencial.
- Posem un exemple de plantilla agafant un pols triangular en freqüència. Veiem com amb una primera elecció errònia amb $r_s = 2B_p$, no aconseguim complir la condició d'ISI nul·la, mentre que escollint $r_s = B_p$ (banda del pols), aconseguim que la superposició de totes les rèpliques desplaçades de la freqüència doni un valor independent de la freqüència. Això ens permet calcular fàcilment la $R_p(t)$ com una sinc quadrat en el domini temporal que s'anul·la en múltiples no nuls del temps de símbol. El problema per aquest exemple és que el pols $p(t)$ no és calculable. Per tant passem a analitzar la següent família de polsos on si podem calcular $p(t)$.
- Dibuixem la plantilla del polsos cosinus alçat on destaquem tots els nivells i freqüències significatius. Definim el factor de roll-off i dibuixem les $S_p(f)$ per roll-off $a=0$ (pols rectangular en freqüència, intermig (cosinus alçat amb tram uniforme) i $a=1$ (cosinus alçat sense tram uniforme). Donem l'expressió analítica de $S_p(f)$. Tot seguit, proporcionem l'expressió analítica per $R_p(t)$ distingint el factor sinc (que força els creuaments per zero en múltiples no nuls de T_s) del segon factor que ens genera una dependència $1/t^3$ en $p(t)$ (per $|t| \gg T_s$) per roll-offs no nuls. Donem també l'expressió corresponent per $p(t)$ (pols arrel quadrada de cosinus alçat). Comentem la importància d'aquests polsos que s'utilitzen àmpliament en sistemes de comunicacions.

DIA 16

Tema 3: Sistemes de Transmissió Digital

Tema 3.3: Canal Discret Equivalent.

- Es representa la cadena de comunicacions banda base amb modulacions M-PAM i el receptor basat en filtre adaptat, mostrejant a $tk_0 = td + k_0 * T_s$ (model no-causal). S'utilitza un model de canal amb soroll Gaussià blanc additiu i amb resposta impulsional de canal $h_c(t)$. Es pretén obtenir el model discret equivalent de la cadena de comunicacions des de la sortida del codificador de símbol fins l'observació a l'instant òptim de mostreig a la sortida del filtre adaptat. Es desenvolupa el model matemàtic del senyal $y(t)$ a la sortida del filtre adaptat, en termes de $R_p(t)$ (autocorrelació determinista del pols arrel quadrada de Nyquist) i de la resposta impulsional del canal. Es defineix $R_c(t) = R_p(t)$ convolucionat amb $h_c(t)$ (autocorrelació filtrada del pols de conformació). Per un canal no equiparable a un canal ideal (atenuació, retard i soroll additiu Gaussià blanc), la definició del retard de canal t_d perd el seu sentit degut a la distorsió freqüencial introduïda per $h_c(t)$. Es redefineix t_d introduint una mesura de qualitat: la SINR, on en el denominador apareix sumada a la potència de soroll la potència de la interferència inter-simbòlica. Per tant, s'utilitza aquell t_d que optimitza la SINR(t_d). Es dona l'expressió matemàtica de SINR(t_d) tenint en compte símbols i.i.d. Es dibuixen un parell d'exemples per la $R_c(t)$, tenint en compte un canal que introdueix un segon camí de propagació a $T_s/2$. Es demana que els estudiants desenvolupin per casa un tercer exemple i efectuin el càlcul del t_d òptim. Per finalitzar el model de canal discret equivalent, es proporciona el valor de la potència del soroll equivalent.
- Pel canal $h_c(t)$ anterior es considera una modulació 2-PAM i es representa la constel.lació en recepció degut al símbol útil, al símbol interferent i al soroll. Es menciona que la ISI provoca un desdoblament a dos o més punts del símbol transmès (en funció de la constel.lació utilitzada i de la duració temporal de la ISI). Apart, cadascun d'aquests símbols presenta una dispersió deguda a les mostres de soroll.
- Reprenent un exercici enunciat en una sessió anterior, es fa el càlcul de l'autocorrelació de símbols per la modulació bipolar (codificació amb memòria) i es veu com la codificació de símbol permet fer una conformació de la resposta freqüencial del pols de conformació.

DIA 17

Tema 3: Sistemes de Transmissió Digital

Tema 3.3: Canal Discret Equivalent PB

- Es representa l'esquema de la cadena completa de comunicacions digitals pas banda basades en polsos de conformació. S'identifiquen cadascun dels blocs: (des)modulador banda base i (des)modulador I&Q. Es considera un canal selectiu en freqüència i amb soroll Gaussià blanc i additiu. Es comença l'anàlisi sense considerar el soroll, ens fixem únicament en la part determinista deguda al filtre de canal. Construïm el filtre pas banda combinant el filtre que ens modela la propagació i el filtre pas banda frontal del receptor. Determinem el seu equivalent pas baix i amb aquest construïm el model equivalent banda base entre l'entrada del modulador I&Q i la sortida del desmodulador I&Q. Afegim ara el modulador digital i el desmodulador digital i repetim l'anàlisi de la sessió anterior per trobar el filtre discret equivalent entre la seqüència de símbols en transmissió i les observacions de símbol (suposem el model no-causal del pols de conformació i del filtre adaptat). Dibueixem l'esquema final i introduïm el concepte d'equalitzador com a element responsable de la mitigació dels efectes de la interferència inter-simbòlica.
- Considerem ara un model amb soroll de canal. Reproduïm el model del Tema II per trobar els espectres de densitat de potència de soroll a la sortida del desmodulador I&Q. A partir d'aquests models calculem ara el model de soroll a la sortida del filtre adaptat. Per una banda calculem la potència del soroll de sortida. Per l'altra banda calculem la correlació creuada entre mostres de soroll diferents, d'un mateix canal. Destaquem que aquestes mostres de soroll són independents, de mitja zero i Gaussianes. Proporcionem el càlcul de les correlacions a partir de l'autocorrelació determinista del pols de conformació (considerada pols de Nyquist). Representem ara el model complet discret equivalent banda base amb soroll i recuperem el concepte d'equalització. Escrivim el model de senyal a la sortida de l'equalitzador, identificant el terme útil, el terme d'ISI i el terme de soroll. Mencionem que la funció de l'equalitzador és garantir (sempre que les condicions de l'escenari de comunicacions ho permetin) que la potència del terme útil és suficientment més gran que la potència combinada dels termes d'ISI i de soroll.

DIA 18

Tema 3: Sistemes de Transmissió Digital

Tema 3.3: Equalització

- Es resol el problema 1 del control de comunicacions (1 hora llarga).
- Es desenvolupa l'equalització per forçador de zeros. Es presenta breument el model discret equivalent junt amb la caracterització de soroll per definir el model de senyal. Es defineix un filtre equivalent de canal de longitud finita d' L coeficients. Es defineix un filtre equalitzador discret de longitud finita Q coeficients, de manera que la longitud final de la convolució ha de ser de $L+Q-1$ coeficients. Es pretén forçar que la combinació de tots dos filtres sigui el més semblant possible a una delta retardada d'amplitud λ de manera que tinguem una interferència inter-simbòlica residual. Es menciona que qualsevol equalitzador ha de mitigar la ISI però també tenir en compte la potència de soroll: cal fer un disseny que garanteixi que la potència conjunta de ISI + soroll respecte de la potència de senyal útil (observació del símbol d'interès) sigui el més favorable possible. Passem a representar la convolució entre el filtre de canal i el filtre equalitzador amb un producte matriu-vector, on en la matriu (matriu de Hankel) introduïm els coeficients de la resposta impulsional equivalent del canal i en el vector introduïm els coeficients de l'equalitzador. Per tant, en el vector resultat del producte matriu-vector apareixerà un dels components igual a λ en la posició equivalent al retard amb el que efectuem l'observació del símbol d'interès. La resta de coeficients al voltant d'aquest els forçarem a zero. Com, evidentment, tenim més equacions que incògnites, l'elecció del retard serà crítica per les prestacions finals de l'equalitzador. Proporcionem l'equació de càlcul dels coeficients del forçador de zeros seleccionant la sub-matriu adequada de la matriu de canal (la que conté l'element diagonal major si la ISI és moderada): el vector de coeficients de l'equalitzador s'expressa com aquesta matriu inversa producte la resposta impulsional que volem forçar a la sortida de l'equalitzador (equivaldrà a una de les files de la matriu inversa de canal). Amb aquest procediment, aquells coeficients que quedin fora de la finestra temporal seleccionada a la sortida de l'equalitzador, no donaran una resposta conjunta zero però esperarem que siguin suficientment petits: caldrà utilitzar un nombre de coeficients suficientment gran per l'equalitzador.
- Passem a comentar en quines condicions funcionarà raonablement bé un forçador de zeros: en aquells casos en que la resposta freqüencial equivalent tinguin variacions petites respecte la seva mitja. En cas contrari, com que el forçador de zeros tendeix a efectuar una inversió de canal, la presència d'esvaïments profunds en la resposta de canal tendeix a amplificar el soroll a la sortida de l'equalitzador en aquella banda de freqüències. Aquest efecte degrada la qualitat del senyal (SINR) que pot proporcionar l'equalitzador. Per aquesta raó, a la pràctica s'utilitzen altres estratègies d'equalització més avançades que el forçador de zeros, però que permeten un tractament conjunt de ISI + soroll. Aquestes estratègies es veuran en assignatures posteriors.

DIA 19

Tema 3: Sistemes de Transmissió Digital

Tema 3.4: Probabilitat d'error de símbol

- S'exposa el Canal Discret Equivalent (CDE) per Banda Base (BB) pel canal ideal (atenuació més retard més soroll): $y[k] = \beta a[k] + n_{eq}[k]$. Es dona el valor de l'escalar $\beta = E_p / \sqrt{L_c}$ (relació energia de pols a atenuació de canal en amplitud) del símbol útil i el valor de potència del soroll equivalent. S'exposa també el CDE per Pas Banda (PB): $y[k] = \beta a[k] + n_{eq}[k]$, on ara les seqüències indicades poden ser complexes. Es caracteritza completament l'estadística del terme de soroll. Es planteja que sobre l'observació $y[k]$ a la sortida del filtre adaptat caldrà decidir quin símbol $a[k]$ s'ha transmès: observem que només es disposa de l'equació d'observació de símbol, però que (considerant β conegut), tant $a[k]$ com $n_{eq}[k]$ són valors desconeguts: existirà més d'una solució possible. Per tant haurem d'escollir aquella solució (el parell $(a[k], n_{eq}[k])$) amb major probabilitat. Ens definim un criteri de qualitat de la decisió: la probabilitat d'error de símbol o bé la probabilitat d'error de bit. Mencionem que la probabilitat d'error de bit és més difícil de derivar i que ens centrarem en la probabilitat d'error de símbol. Per tant, cercarem quin és el decisor de símbol que minimitza aquesta probabilitat. En conseqüència: plantejem el criteri MAP on apareixen les probabilitats a priori dels símbols (probabilitat amb que es transmet un símbol determinat de la constel.lació en transmissió). Distingim entre constel.lació en transmissió i constel.lació en recepció (escalada pel factor β , sense tenir en compte el terme de soroll). Es desenvolupa el criteri MAP fins arribar a un criteri de que minimitza la distància quadràtica de l'observació al símbols de la constel.lació en recepció més un terme on apareixen les probabilitats a priori dels símbols. Atès que la gran majoria de vegades tenim símbols equiprobables, el criteri MAP es redueix al criteri de mínima distància Euclidea. Es planteja també el criteri ML (Maximum Likelihood, Màxima Versemblança) i es veu que sempre es redueix al criteri de mínima distància encara que els símbols no siguin equiprobables.
- Representem i proporcionem l'expressió analítica de la funció de densitat de probabilitat de l'observació condicionada al símbol transmès que apareix en el criteri MAP, com una Gaussiana centrada en els símbols en recepció. Pel cas de la modulació 4-PAM de símbols equiprobables com a cas particular veiem les quatre combinacions possibles de símbol transmès i soroll que ens porten a una observació $y[k]$ determinada: veiem com el criteri de mínima distància escull com hipòtesi més probable el parell $(a[k], n_{eq}[k])$ associat al soroll $n_{eq}[k]$ de valor absolut menor. Posem això en el context de la funció de densitat de probabilitat del soroll: sorolls de mòdul menor són més probables.
- A partir del criteri de mínima distància s'exposa el concepte de regió de decisió i es representen pel cas 4-PAM i símbols equiprobables. Es proporciona el càlcul genèric de la probabilitat d'error de símbol $p(e_s)$ com el sumatori de les probabilitats d'error de símbol condicionades a un símbol transmès a_i ($p(e_s | a_i)$) producte la probabilitat a priori p_i corresponent. Pel cas de símbols equiprobables es redueix a la mitja de les probabilitats $p(e_s | a_i)$. Es comenta el criteri d'elecció de símbol aleatori en l'event de probabilitat zero en que l'observació cau justament en la frontera entre dues regions de decisió.

- Es posa com problema per casa el càlcul del decisor i de la probabilitat d'error de símbol de la modulació 2-PAM. En no haver introduït encara la funció Q , es requereix deixar la probabilitat d'error de símbol expressada en termes d'una integral el més simple possible. Es resoldrà aquest cas en la propera sessió de teoria.

DIA 20

Tema 3: Sistemes de Transmissió Digital

Tema 3.4: Probabilitat d'error de símbol: exemples 2-PAM i 4-PAM

- En aquesta sessió s'analitza el detector MAP i la probabilitat d'error de símbol i de bit associada a una modulació 2-PAM i bits i.i.d. equiprobables. Es representa el model de la cadena de comunicacions i el Canal Discret Equivalent (CDE) associat. Es representen les constel.lacions en transmissió i en recepció (observacions de símbol) quan s'utilitza un pols arrel quadrada de Nyquist (amb canal ideal: atenuació, retard i soroll Gaussià blanc). Es recorda que sota aquestes condicions el criteri MAP equival a un criteri de mínima distància Euclídea entre les observacions de símbol i la constel.lació en recepció. Partint de l'expressió general de la probabilitat d'error es planteja el càlcul de $p(e_s|a_1)$ i de $p(e_s|a_2)$, les probabilitats d'error condicionades a la transmissió de cada símbol de la constel.lació. Es fa una representació gràfica acompanyada de les expressions analítiques de la funció de densitat de probabilitat de l'observació condicionada a la transmissió dels símbols: en base a la frontera entre totes dues regions de decisió, es planteja el càlcul de $p(e_s|a_1)$ com l'àrea sota la funció de densitat de probabilitat condicionada (eix d'observacions). Es planteja el càlcul equivalent i representació gràfica sobre l'eix de soroll. Es procedeix al càlcul de la probabilitat d'error i es defineix la funció $Q(\cdot)$. Tot seguit, es planteja el càlcul de $p(e_s|a_2)$ de forma més concisa i es raona que per simetries de la constel.lació proporciona el mateix resultat. Finalment, s'expressa la probabilitat d'error com $Q(d/(2\sigma))$, on hem definit "d" com la distància (mínima) entre els dos símbols de la constel.lació: "d/2" constitueix la distància del símbol de la constel.lació en recepció a la frontera de decisió.
- Passem a considerar l'etapa de transmissió per expressar el quocient " $d/(2\sigma)$ " en termes de l'energia promig de símbol i energia promig de bit. Partim de l'equació de la potència transmesa i relacionem l'energia de pols E_p amb l'energia de bit. Utilitzem que " $d/2 = E_p/\sqrt{L_c}$ ". Utilitzem que " $\sigma = (N_0/2) \cdot E_p$ " i expressem el quocient " $d/(2\sigma) = \sqrt{2 \cdot E_b/N_0}$ ", on $E_b = E_b^{(RX)}$ constitueix l'energia promig de bit a l'entrada del receptor.
- Representem el \log_{10} de la probabilitat d'error de símbol (i de bit) en termes de la relació E_b/N_0 (mencionem que la podem interpretar com la SNR de bit). Comparem la corba amb la corresponent a una modulació X (fictícia), per definir punt de treball i guany d' E_b/N_0 .
- Passem a calcular la probabilitat d'error de símbol per 4-PAM. Mencionem que en aquest cas sortirà diferent de la de bit. Plantegem el càlcul de les probabilitats $p(e_s|a_i)$ pels 4 símbols de la constel.lació i per consideracions de simetria les reduïm únicament al càlcul de dues probabilitats associades, respectivament, als símbols externs i interns de la constel.lació 4-PAM. Prèviament, hem dibuixat les constel.lacions en transmissió i recepció per 4-PAM, junt amb les fronteres de la regió de decisió. Veiem que pel càlcul de les probabilitats d'error associades als símbols externs, ja disposem del càlcul efectuat per 2-PAM. Només ens cal doncs calcular una probabilitat. Veiem que pels símbols externs hem de computar l'àrea sota les dues cues de la f.d.p. Gaussiana del soroll. Amb tot això, proporcionem el càlcul final de la probabilitat d'error de símbol: $p(e_s) = (3/2) \cdot Q(d/(2\sigma))$. Deixem com problema per casa expressar el quocient " $d/(2\sigma)$ " en termes de la relació " E_b/N_0 ". Es resoldrà el proper dia de classe.

DIA 21

Tema 3: Sistemes de Transmissió Digital

Tema 3.4: Probabilitat d'error de símbol: exemples 2-PAM i 4-PAM

Continuant la sessió anterior, s'expressa (tant per 2-PAM com per 4-PAM) el quocient $d/(2\sigma)$ en termes de la E_b/N_0 utilitzant l'equació de la potència transmesa: (i) es calcula l'energia de símbol i de bit en transmissió a partir de l'expressió de la potència transmesa per modulacions banda base amb pols de conformació; (ii) es calcula l'energia de símbol i de bit en recepció introduïnt el factor d'atenuació de canal L_c en el denominador; (iii) s'expressa el quocient $d/(2\sigma)$ mitjançant una arrel quadrada de manera que el seu argument resulti proporcional a l'energia de bit i establim també la relació entre l'energia de bit i la distància d entre símbols veïns en recepció a la sortida del filtre adaptat en l'instant òptim; (iv) deixem finalment la relació $d/(2\sigma)$ expressada en termes de la E_b/N_0 a l'entrada del receptor.

Proporcionem l'expressió final de la probabilitat d'error de símbol i de bit per 2-PAM, mencionant que són idèntiques atès que cada símbol es pot codificar amb només 1 bit. Es dona la codificació de Gray de la modulació 2-PAM. Mencionem que en el cas general, les probabilitats d'error de símbol i de bit no coincideixen degut a l'etiquetat binari dels símbols de la constel·lació. Centrant-nos en el cas 4-PAM, es raona que a E_b/N_0 prou elevada els events d'error de símbol que dominen la probabilitat d'error es donen cap als símbols veïns, fet que justifica un etiquetat intel·ligent dels símbols per disminuir la probabilitat d'error de bit. Es menciona que depenent de l'aplicació pot ser més rellevant la probabilitat d'error de paraula o de bloc més que la probabilitat d'error de símbol o de bit. No obstant, totes disminueixen en augmentar la relació E_b/N_0 en recepció.

Es demana per casa la generalització de la probabilitat d'error pel cas general de M-PAM. Tot seguit es passen a estudiar les expressions per les probabilitats d'error més típiques pel cas de modulacions digitals pas banda.

Tema 3.5: Probabilitats d'error de símbol: exemples BPSK, QPSK i 16-QAM.

Considerem ara el cas de modulacions digitals pas banda. Comencem pel cas BPSK. Raonem que en aquest cas, tot i utilitzar un desmodulador I&Q, si el receptor està sincronitzant en fase amb el senyal útil rebut, cal únicament observar el canal de fase. Raonem com, segons el criteri de Mínima Distància (dibuixem les regions de decisió), la component de quadratura no resulta rellevant en la detecció de símbol. Seguim idèntic procediment a l'observat en el cas banda base, tant per determinar la probabilitat d'error en termes de la relació $d/(2\sigma)$ (on ara, σ és la desviació estàndard del soroll en el canal de fase), com per determinar la relació entre $d/(2\sigma)$ i la E_b/N_0 a l'entrada del receptor. Observem idèntica expressió a l'obtinguda pel cas 2-PAM. Passem tot seguit a considerar les modulacions complexes: exemples QPSK i 16-QAM. Continuem amb el cas QPSK. Dibuixem les regions de decisió per QPSK segons el criteri de Mínima Distància (detecció MAP i símbols equiprobables). Introduïm ara un nou mètode de càlcul de la probabilitat d'error de símbol, especialment útil en el cas de constel·lacions complexes (2D): la probabilitat de no-error. Expressem primer la probabilitat d'error de símbol en termes de les probabilitats d'error individuals i per

cada probabilitat parcial (individual), calculem la seva probabilitat de no-error. Pe càlcul de les probabilitats de no-error utilitzem el fet de que els components de soroll en els canals de fase i quadratura són estadísticament independents. Expressem cada probabilitat parcial de no-error com el producte de dos factors, expressat cadascun en termes de la funció $Q()$, determinant en el procés quins són els intervals de valors de cada terme de soroll que impliquen un no-error. Desfem el càlcul i obtenim les probabilitats d'error de símbol parcials i a partir d'aquí la probabilitat global d'error de símbol. Veiem com ara en l'expressió de la probabilitat d'error de símbol apareixen termes quadràtics de la funció $Q()$. Mencionem que quan la relació E_b/N_0 sigui prou elevada aquests termes seran irrelevantes enfront els termes lineals.

Proporcionem la codificació Gray per la constel.lació QPSK i utilitzant el detector de símbol òptim avaluem la probabilitat d'error de bit corresponent. Veiem com en aquest cas les probabilitats d'error de símbol i de bit no coincideixen: aquesta serà la tònica general. Comentem també que la probabilitat d'error de bit coincideix amb la de les modulacions 2-PAM i BPSK. Comentem també que la probabilitat d'error de bit de la modulació QPSK no codificada constitueix un estàndard de referència en la comparativa de probabilitats d'error. Procedim a fer ara el càlcul de la relació $d/(2*\sigma)$ que apareix a l'argument de la funció $Q()$ en termes de la relació E_b/N_0 i fem una representació gràfica a la pissarra en eixos logarítmics de la probabilitat d'error en termes de la relació E_b/N_0 en recepció expressada en dB.

DIA 22

Tema 3.5: Probabilitats d'error de símbol: exemples BPSK, QPSK i 16-QAM.

Continuem amb l'anàlisi de les probabilitats d'error per la modulació 16-QAM. Procedim a representar les regions de decisió i plantejem l'expressió de la probabilitat d'error de símbol en termes de les probabilitats parcials. Plantejem les probabilitats parcials de no-erros i veiem com les 16 en principi necessaris es poden reduir al càlcul de només 3 probabilitats parcials gràcies a les simetries entre les diferents regions de decisió. Veiem que hi ha regions de decisió de 3 formes diferents (deixant apart localització i orientació): les regions dels 4 símbols interns (forma quadrada), les regions dels 4 símbols dels vèrtex (forma de quadrant) i les regions dels 8 símbols externs (forma de banda semi-infinita). En tots els 3 casos, cada probabilitat de no-erros es pot expressar com el producte de dos factors associats a que la component de fase i de quadratura del soroll no provoquin que l'observació de símbol a la sortida dels filtres adaptats respectius surti de la regió de decisió sota anàlisi. Amb les 3 probabilitats parcials calculades, obtenim la probabilitat d'error de símbol final. Veiem que, idènticament al cas QPSK, ara apareixen termes quadràtics en l'expressió, però que seran irrellevants per E_b/N_0 prou altes. De fet es menciona que actualment, gràcies a les tècniques més recents de codificació de canal, és possible treballar a relacions E_b/N_0 bastant reduïdes. Passem al càlcul de la probabilitat d'error de bit. Per constel.lacions prou grans i considerant un etiquetat intel.ligent dels símbols, proporcionem la probabilitat d'error de bit com el quocient entre la probabilitat d'error de símbol i el nombre de símbols de la constel.lació. Aquesta aproximació es basa en considerar que quan es produeix un error de símbol, amb molta probabilitat aquest es dona cap a un dels símbols més immediatament propers, l'etiqueta binària del qual només difereix en un símbol respecte el símbol d'interès. Idènticament a tots els casos anteriors, es realitza el càlcul del quocient $d/(2 \cdot \sigma)$ en termes de la relació E_b/N_0 .

Es proporciona l'expressió de la probabilitat d'error de símbol pel cas general de constel.lacions M-QAM completes (M és potència sencera de 4) i es demana als estudiants que la resolguin per casa (es proporcionen expressions matemàtiques d'ajut com la suma de quadrats de nombre sencers consecutius).

Tema 3.6: Cota de la Unió.

Per constel.lacions més complexes introduïm la cota de la unió. Es raona que el càlcul exacte de la probabilitat d'error de símbol utilitzant el criteri MAP generalment condueix a geometries complicades de les regions de decisió. Aquest fet provoca que les integrals que expressen les probabilitats d'error siguin complicades de determinar i el seu resultat difícil d'interpretar des d'un punt de vista intuïtiu. En conseqüència, és habitual recórrer a cotes superiors de la probabilitat d'error que resultin senzilles de calcular i que aportin intuïció sobre les prestacions del detector de símbol. Es presenta la cota de la unió com un mètode que permet obtenir una expressió senzilla en termes de les probabilitats d'error de símbol dos a dos. Descriuim en la primera part de l'exposició com es construeixen en general les regions de decisió òptimes utilitzant totes les parelles possibles de símbol i veiem en la segona part com afitar les probabilitats d'error parcials d'un símbol determinat a partir d'aquestes.

Primera part: per determinar les fronteres entre les regions de decisió en el cas 2D (pla complex o pla I-Q) prenem un símbol qualsevol d'entre els símbols de la constel.lació a l'entrada del detector, s_k , i per cadascun de la resta de símbols s_i (i diferent de k) determinem el punt mig del segment que els uneix. En tal punt tracem una perpendicular que divideix el pla I-Q en dos semiespais. A cada banda tenim totes el lloc geomètric de totes aquelles observacions més properes al símbol corresponent de cada semiespai (s_k o bé s_i). Efectuem aquest procediment per tots els i diferents de k. En cada cas anomenem $S_i(k)$ al semiespai que conté el símbol s_i quan el símbol de referència és s_k . Llavors, la regió de decisió associada al símbol s_k es construeix com la corresponent a la regió del pla I-Q complementària a la unió de totes les regions $S_i(k)$. Repetim aquest procediment per tots els símbols s_k de la constel.lació i obtenim les regions de decisió buscades.

Segona part: en aquesta part acotem superiorment la probabilitat d'error parcial quan es transmet el símbol s_k . Considerem un event $e_i(k)$ definit com aquell en que l'observació complexa quan es transmet el símbol s_k passa a la regió $S_i(k)$ degut al soroll. Sigui y_k la observació (variable aleatòria) corresponent. Un resultat de teoria de probabilitat estableix que per dos events A i B tenim les següents relacions entre les seves probabilitats: $p(A \text{ unió } B) + p(A \text{ intersecció } B) = p(A) + p(B)$. Aquest resultat, de simple justificació intuïtiva, permet una generalització de la forma $p(\text{unió de } A_i) \leq \text{sumatori de } p(A_i)$. En conseqüència, això ens permet establir que $p(\text{unió de } S_i(k)) = p(\text{error de símbol quan es transmet } s_k) \leq \text{sumatori de } p(S_i(k))$. Cadascuna de la probabilitats $p(S_i(k))$ es pot expressar fàcilment mitjançant la funció $Q()$ i la relació corresponent $d(i,k)/(2\sigma)$, on $d(i,k)$ és al distància Euclidea entre tots dos símbols s_i i s_k . Tal relació condueix a un sumatori ponderat senzill de funcions $Q()$ de diferents argument que afiten les probabilitats d'error de símbol i en conseqüència la probabilitat global d'error de símbol.

Apliquem l'expressió de la cota de la unió a les probabilitats d'error de símbol corresponents als casos QPSK i 16-QAM dels que disposem de l'expressió exacta. Veiem com en la cota de la unió no apareixen termes quadràtics de la funció $Q()$. Validem el resultat teòric per aquests dos casos.

La resta de dies es resolen problemes de la col.lecció i exàmens finals.