



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
BARCELONATECH

---

Escola Superior d'Enginyeries Industrial,  
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

---

# Resolució numèrica de les equacions de *Navier-Stokes*

---

*Treball de Final de Grau: Memòria  
Grau en Enginyeria en Vehicls Aeroespacials*

*Estudiant : Mario Luna López*

*Director: Assensi Oliva Llena*

*Codirector: Carles-David Pérez Segarra*

*Data: 10 de juny de 2018*



## ***Resum***

Aquest document és un estudi sobre la resolució computacional de les equacions governants en la dinàmica de fluids mitjançant mètodes numèrics (CFD). Així, es resolen diferents problemes típics que suposen la introducció de nous conceptes per teixir un coneixement sobre la temàtica des del punt de vista acadèmic.

Els problemes tractats bàsicament són de conducció de calor, de l'equació de convecció-difusió, i de les equacions de *Navier-Stokes*. Aquests es resoldran mitjançant la implementació de codis propis en el llenguatge de programació C++.

Els codis es verificaran comparant els resultats de les simulacions amb dades de referència de la literatura científica.

## *Agraïments*

En primera instància, m'agradaria agrair el suport rebut pels directors d'aquest treball, els doctors Assensi Oliva Llena i Carles-David Pérez Segarra, per la guia que m'han ofert durant la realització d'aquest projecte, així com al Jordi Chiva per l'ajuda rebuda en resoldre els problemes que apareixien en els meus codis.

Al llarg de la carrera, han estat molts professors i companys que m'han transmès la seva passió, i de ben segur la seva influència ha estat notable perquè jo m'interessés per la temàtica del CFD; i en últim estadi, el personal del CTTC en els diversos seminaris en què he pogut aprendre encara més.

Tanmateix, vull agrair a la meva família i a les amigues i amics que m'han donat el seu suport emocional i de tot tipus quan ha calgut.

## Índex

<b><u>RESUM</u></b> .....	<b>3</b>
<b><u>AGRAÏMENTS</u></b> .....	<b>4</b>
<b><u>1 INTRODUCCIÓ</u></b> .....	<b>10</b>
1.1 OBJECTIU.....	10
1.2 ABAST .....	10
1.3 REQUERIMENTS .....	10
1.4 JUSTIFICACIÓ I ESTAT DE L'ART .....	11
<b><u>2 INTRODUCCIÓ TEÒRICA</u></b> .....	<b>13</b>
2.1 EQUACIONS I MALLES.....	13
2.2 CONDICIONS DE CONTORN .....	15
2.3 SOLVERS .....	15
2.3.1 MÈTODE GAUSS-SEIDEL.....	16
2.3.2 MÈTODE LINE-BY-LINE .....	16
2.4 ESTRATÈGIA DE RESOLUCIÓ .....	18
<b><u>3 CAPÍTOL I: EQUACIÓ DE CONDUCCIÓ DE CALOR</u></b> .....	<b>19</b>
3.1 INTRODUCCIÓ TEÒRICA.....	19
3.2 INTRODUCCIÓ DEL CAS.....	20
3.3 DISCRETITZACIÓ DEL DOMINI .....	21
3.4 DISCRETITZACIÓ DE LES EQUACIONS.....	22
3.5 ESTUDIS PER VERIFICAR EL CODI .....	25
3.6 ESTUDIS NUMÈRICS.....	26
3.7 ESTUDIS FÍSICS .....	28
<b><u>4 CAPÍTOL II: EQUACIÓ DE LA CONVECCIÓ-DIFUSIÓ</u></b> .....	<b>33</b>
4.1 INTRODUCCIÓ TEÒRICA.....	33
4.2 FORMULACIÓ GENERAL .....	34
4.3 EQUACIÓ DE DISCRETITZACIÓ .....	35
4.4 CAS I: FLUX UNIDIMENSIONAL AMB VARIACIÓ DE LA VARIABLE EN LA MATEIXA DIRECCIÓ DEL FLUX.....	38
4.4.1 INTRODUCCIÓ .....	38
4.4.2 RESULTATS.....	39
4.5 CAS II: FLUX UNIDIMENSIONAL AMB VARIACIÓ DE LA VARIABLE EN DIRECCIÓ PERPENDICULAR AL FLUX .....	40
4.5.1 INTRODUCCIÓ .....	40
4.5.2 RESULTATS .....	41
4.6 CAS III: FLUX DIAGONAL .....	41
4.6.1 INTRODUCCIÓ .....	41
4.6.2 RESULTATS I ESTUDI .....	42
4.7 CAS IV: FLUX SOLENOÏDAL .....	45
4.7.1 INTRODUCCIÓ .....	45
4.7.2 RESULTATS I ESTUDI .....	46
4.8 COMPARATIVA DE SOLVERS .....	50



<b>5</b>	<b><u>CAPÍTOL III: EQUACIONS DE NAVIER-STOKES</u></b>	<b>51</b>
5.1	INTRODUCCIÓ TEÒRICA.....	51
5.2	AVALUACIÓ DELS PASSOS.....	53
5.3	INTRODUCCIÓ CAS: <i>DRIVEN-CAVITY</i> .....	56
5.4	ESQUEMES DE CONVECCIÓ-DIFUSIÓ.....	57
5.5	ESTUDI DE CONVERGÈNCIA.....	57
5.6	CAS A: REYNOLDS 100 .....	58
5.7	CAS B: REYNOLDS 1000.....	61
5.8	CAS C: REYNOLDS 3200 .....	62
5.9	CAS D: REYNOLDS 5000 .....	64
5.10	OPTIMITZACIÓ DEL CODI .....	66
<b>6</b>	<b><u>CONCLUSIONS I LÍNIES FUTURES</u></b> .....	<b>67</b>
<b>7</b>	<b><u>BIBLIOGRAFIA</u></b> .....	<b>68</b>



## Índex de taules

<b>TAULA 3.1: PROPIETATS FÍSQUES DELS MATERIALS. ....</b>	<b>20</b>
<b>TAULA 3.3: CONDICIONS DE CONTORN DELS COSTATS. ....</b>	<b>20</b>
<b>TAULA 4.1: FUNCió <math>A(P)</math> PER DIFERENTS ESQUEMES. [1] .....</b>	<b>38</b>

## Índex de figures

FIGURA 2.1: ESQUEMA DE LA DISPOSICIÓ DELS NODES.....	14
FIGURA 2.2: PRÀCTICA DE NODES CENTRATS. [1] .....	14
FIGURA 2.3: PRÀCTICA DE CARES CENTRADES. [1] .....	15
FIGURA 2.4: ESQUEMA LÍNIA <i>LINE-BY-LINE</i> . [1] .....	17
FIGURA 2.5: ORGANIGRAMA DE L'ALGORITME. ....	18
FIGURA 3.1: ESQUEMA DEL CAS DE 4 MATERIALS.....	20
FIGURA 3.2: ESQUEMA DE LA DISCRETITZACIÓ DEL DOMINI.....	21
FIGURA 3.3: MAPA DELS NODES.....	22
FIGURA 3.4: MAPA DE TEMPERATURES PER $T = 5000$ S.....	25
FIGURA 3.5: MAPA DE TEMPERATURES PER $T = 5000$ S DEL GUIÓ. [2].....	26
FIGURA 3.6: NÚMERO D'ITERACIONS EN FUNCIÓ DEL FACTOR DE RELAXACIÓ.....	27
FIGURA 3.7: MAPA DE TEMPERATURES DONATS $24$ °C INICIALS.....	28
FIGURA 3.8: MAPA DE TEMPERATURES PER $Q = 240.00$ W/M.....	29
FIGURA 3.9: MAPA DE TEMPERATURES PER $A = 27$ W/M <sup>2</sup> K.....	29
FIGURA 3.10: MAPA DE TEMPERATURES PER ISOTERMA INFERIOR $T = 30$ °C.....	30
FIGURA 3.11: MAPA DE TEMPERATURES PER ISOTERMA INFERIOR $T = 16$ °C. ....	30
FIGURA 3.12: MAPA TEMPERATURES AMB DOBLE PENDENT TEMPS.....	31
FIGURA 3.13: MAPA TEMPERATURES AMB MEITAT PENDENT TEMPS.....	31
FIGURA 3.14: MAPES DE TEMPERATURA PER CONDUCTIVITATS DIFERENTS. ....	32
FIGURA 4.1: : ESQUEMA DEL FLUX TOTAL QUE TRAVESSA LA CARA D'UN VOLUM DE CONTROL ENTRE DOS NODES. [1].....	34
FIGURA 4.2: VOLUM DE CONTROL PER LA SITUACIÓ 2-D. [1].....	35
FIGURA 4.3: FLUX UNIDIMENSIONAL AMB VARIACIÓ DE LA VARIABLE EN LA DIRECCIÓ DEL FLUX. [4] 38	
FIGURA 4.4: RESULTATS PER PECLLET 1.....	39
FIGURA 4.5: RESULTATS PER PECLLET -10. ....	39
FIGURA 4.6: FLUX UNIDIMENSIONAL AMB VARIACIÓ DE LA VARIABLE EN DIRECCIÓ PERPENDICULAR AL FLUX. [4].....	40
FIGURA 4.7: RESULTATS DEL 2N CAS. ....	41
FIGURA 4.8: CAS DE FLUX DIAGONAL. [4].....	41
FIGURA 4.9: SOLUCIÓ DEL FLUX DIAGONAL PER MALLA DE 100X100 I PECLLET D'1. ....	42
FIGURA 4.10: SOLUCIÓ DEL FLUX DIAGONAL PER MALLA DE 100X100 I PECLLET DE 100.....	43
FIGURA 4.11: SOLUCIÓ DEL FLUX DIAGONAL PER MALLA DE 100X100 I PECLLET D'1 M.....	43
FIGURA 4.12: SOLUCIÓ DEL FLUX DIAGONAL PER MALLA DE 500X500 I PECLLET D'1M.....	44
FIGURA 4.13: SOLUCIÓ DEL FLUX DIAGONAL PER MALLA DE 1000X1000 I PECLLET D'1 M.....	44
FIGURA 4.14: ESQUEMA DEL PROBLEMA DE FLUX SOLENOÏDAL. [4].....	45
FIGURA 4.15: PERFIL DE LA VARIABLE A L'ENTRADA.....	46
FIGURA 4.16: RESULTATS A LA SORTIDA DEL FLUX SOLENOÏDAL PER $\rho\Gamma = 10$ .....	46
FIGURA 4.17: MAPA DE LA VARIABLE GENERAL PER $\rho\Gamma = 10$ .....	47
FIGURA 4.18: RESULTATS A LA SORTIDA DEL FLUX SOLENOÏDAL PER $\rho\Gamma = 1000$ . ....	47
FIGURA 4.19: MAPA DE LA VARIABLE GENERAL PER $\rho\Gamma = 1000$ . ....	48
FIGURA 4.20: RESULTATS A LA SORTIDA DEL FLUX SOLENOÏDAL PER $\rho\Gamma = 1000000$ . ....	48
FIGURA 4.21: MAPA DE LA VARIABLE GENERAL PER $\rho\Gamma = 1000000$ . ....	49
FIGURA 4.22: LÍNIES DE CORRENT DEL FLUX SOLENOÏDAL.....	49
FIGURA 4.23: COMPARATIVA ENTRE ELS <i>SOLVERS</i> DE <i>GAUSS-SEIDEL</i> I <i>LINE-BY-LINE</i> .....	50
FIGURA 5.1: MALLA DESPLAÇADA. [5] .....	53
FIGURA 5.2: ESQUEMA DEL CAS TRACTAT. [5] .....	56
FIGURA 5.3: ERROR COMPUTAT EN L'ESTUDI DE CONVERGÈNCIA.....	57
FIGURA 5.4: TEMPS DE SIMULACIÓ EN L'ESTUDI DE CONVERGÈNCIA. ....	58
FIGURA 5.5: MAPA DE PRESSIONS. ....	58
FIGURA 5.6: PERFIL DE VELOCITATS $U$ EN LA LÍNIA CENTRAL PER REYNOLDS 100. ....	59
FIGURA 5.7: PERFIL DE VELOCITATS $V$ EN LA LÍNIA CENTRAL PER REYNOLDS 100. ....	59
FIGURA 5.8: MAPA DEL MÒDUL DE LA VELOCITAT PER REYNOLDS 100. ....	60
FIGURA 5.9: LÍNIES DE CORRENT PER REYNOLDS 100.....	60
FIGURA 5.10: PERFIL DE VELOCITATS $U$ EN LA LÍNIA CENTRAL PER REYNOLDS 1000. ....	61
FIGURA 5.11: PERFIL DE VELOCITATS $V$ EN LA LÍNIA CENTRAL PER REYNOLDS 1000. ....	61
FIGURA 5.12: MAPA DEL MÒDUL DE LA VELOCITAT PER REYNOLDS 1000. ....	62





<b>FIGURA 5.13: LÍNIES DE CORRENT PER REYNOLDS 1000.....</b>	<b>62</b>
<b>FIGURA 5.14: PERFIL DE VELOCITATS <math>U</math> EN LA LÍNIA CENTRAL PER REYNOLDS 3200. ....</b>	<b>63</b>
<b>FIGURA 5.15: PERFIL DE VELOCITATS <math>V</math> EN LA LÍNIA CENTRAL PER REYNOLDS 3200. ....</b>	<b>63</b>
<b>FIGURA 5.16: MAPA DEL MÒDUL DE LA VELOCITAT PER REYNOLDS 3200. ....</b>	<b>64</b>
<b>FIGURA 5.17: LÍNIES DE CORRENT PER REYNOLDS 3200.....</b>	<b>64</b>
<b>FIGURA 5.18: DIFERÈNCIA PER REYNOLDS 5000 I MALLA 50X50.....</b>	<b>65</b>
<b>FIGURA 5.19: DIFERÈNCIA PER REYNOLDS 5000 I MALLA 80X80.....</b>	<b>65</b>

# 1 Introducció

## 1.1 Objectiu

L'objectiu principal d'aquest estudi és entendre i aprendre en el camp de la resolució numèrica de les equacions fonamentals de la dinàmica de fluids computacional i de transferència de calor i massa (CFD & HT).

Per això, les simulacions que es faran seran amb codis propis implementats per l'estudiant. És aquí on rau el pes de l'estudi, en què caldrà estudiar com resoldre les equacions dels problemes proposats.

## 1.2 Abast

L'abast d'aquest estudi es resumeix en els següents punts:

- Breu introducció a la història i evolució de la recerca en el camp de la resolució numèrica dels problemes de dinàmica de fluids.
- Estudi de les diferents tècniques i mètodes emprats en el camp de la dinàmica de fluids computacional (CFD, de l'anglès *Computational Fluid Dynamics*).
- Estudi i discretització de problemes de conducció de calor en condicions transitòries.
- Estudi i discretització de l'equació genèrica de convecció-difusió.
- Estudi i discretització de les equacions de *Navier-Stokes*.

## 1.3 Requeriments

A fi d'assolir adientment l'objectiu d'aquest estudi, es marquen uns requeriments que es resumeixen en els següents punts:

- Implementació de codis propis en el llenguatge de programació de C++ per resoldre els diferents problemes proposats en aquest estudi. Els codis cal que estiguin implementats d'una manera entenedora.
- Validació i verificació dels codis emprant estudis i dades de referència.
- Els codis han de poder executar-se en un ordinador de prestacions normals.

## 1.4 Justificació i estat de l'art

Les equacions de *Navier-Stokes* són un conjunt d'equacions diferencials en derivades parcials (EDPs) que descriuen la dinàmica dels fluids. Aquestes equacions també s'anomenen equacions de conservació de la massa, quantitat de moviment (*momentum*, en anglès) i energia, i es presenten a continuació:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} \right) = -\nabla p + \nabla \bar{\boldsymbol{\tau}} + \rho \bar{\mathbf{g}} \quad (1.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla e \right) = \nabla (\lambda \nabla T) - \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla p + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{\tau}} + \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{g}} + \phi \quad (1.3)$$

La solució d'aquestes, bàsicament, és un camp de velocitats en què s'especifica aquesta variable per cada punt i instant de temps.

El seu comportament no lineal, donat pel terme convectiu, i l'acoblament entre aquestes EDPs, ha fet que històricament la cerca d'una solució analítica general hagi fracassat. A més, la no-linealitat i impredictibilitat dels fenòmens físics que s'intenten descriure fa que el coneixement en aquest àmbit de recerca sigui limitat. En particular, el fenomen de la turbulència es considera com un dels grans problemes sense resoldre de la física.

La resolució d'aquestes equacions és de gran interès científic i enginyeril, ja que descriuen problemes físics tals com el flux d'aire a través de l'ala d'un avió o els corrents atmosfèrics. Sense aquest coneixement, l'ésser humà no podria viatjar en avions.

És per aquest motiu que s'han dedicat grans esforços per encarar la problemàtica, i una de les vies ha estat la resolució numèrica. Aquesta via, però, requereix de potència computacional, sobretot si es vol simular el fenomen físic en tota la seva complexitat. És per això que l'evolució en la ciència computacional ha marcat l'evolució de les simulacions numèriques, i en els inicis del segle passat la via de l'experimentació amb túnels de vent era molt més emprada.

Afortunadament, la ciència computacional ha avançat molt en els darrers anys i el CFD és actualment una eina molt emprada per les empreses dels sectors aeronàutic i automobilístic, entre d'altres. En aquesta línia, alguns experiments que calia dur a terme amb un pressupost elevat per la instrumentació i els túnels de vent, avui dia es poden simular i obtenir resultats acurats.



Tot i així, en molts problemes d'aplicació les solucions obtingudes són aproximades ja que a dia d'avui encara és impossible solucionar tot el problema en la seva complexitat com fa el DNS (*Direct Numerical Simulation*), en què es resol tot l'espectre espacial i temporal, atès que la potència i temps computacional són massa grans per emprar-ho en casos pràctics amb geometries complexes.

La tendència a l'alça del desenvolupament del CFD i l'encara desconeixement existent són els factors que justifiquen l'interès de l'estudiant a realitzar aquest estudi com un primer pas en aquest món de recerca.

## 2 Introducció teòrica

El CFD compta amb diversos mètodes emprats, com són el Mètode d'Elements Finites (FEM), el Mètode de Diferències Finites (FDM), el Mètode de Volums Finites (FVM), els Mètodes Espectrals, etc.

D'altra banda, independentment del mètode emprat, el CFD consta bàsicament de 3 parts:

1. Pre-procés: És on es defineix la geometria, on es divideix el domini en volums finits (malla), on s'implementen les equacions a resoldre (que solen linealitzar-se), i on s'introdueixen les condicions de contorn i les condicions inicials.
2. Simulació: És quan el programa resol el problema proposat fent ús del codi implementat. Es produeixen els càlculs necessaris i es fa ús d'un *solver* (solucionador, algoritme que resol les equacions, usualment de manera iterativa).
3. Post-procés: És quan la solució és impresa pel programa i es pot visualitzar i realitzar altres càlculs per fer una anàlisi dels resultats.

En aquest estudi, el mètode emprat serà el Mètode de Volums Finites.

### 2.1 Equacions i malles

Tal i com es comentava, les equacions a resoldre es linealitzaran de manera que quedarien de la següent forma general:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b_P \quad (2.1)$$

Seguint la nomenclatura,  $a_x$  són els coeficients de cada node,  $\phi_x$  és el valor de la variable que es resol en cada node,  $b_P$  és el terme independent del node tractat  $P$ , i els nodes dels voltants són els nodes *east E*, *west W*, *north N* i *south S*.

En la Figura 2.1 es pot veure un esquema sobre la malla amb aquesta nomenclatura.

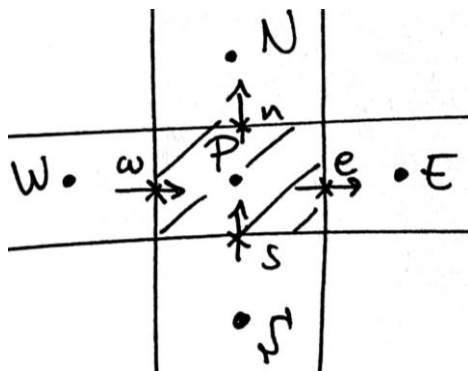


Figura 2.1: Esquema de la disposició dels nodes.

En aquest esquema es pot observar com les cares del volum de control del node P, tenen el nom dels nodes del voltant, respectivament, però en minúscula.

Si es passen els termes dels nodes dels voltants a l'esquerra de l'equació (2.1), es pot reescriure com:

$$a_P \phi_P - a_E \phi_E - a_W \phi_W - a_N \phi_N - a_S \phi_S = b_P \quad (2.2)$$

I en la forma en què està escrita aquesta equació (2.2), es pot definir el sistema d'equacions lineals amb notació matricial:

$$a \cdot \phi = b \quad (2.3)$$

Quant a la creació de la malla, hi ha dues pràctiques molt emprades que són:

- Nodes centrats: El domini es divideix en volums de controls i els nodes es col·loquen al mig d'aquests, de manera que queden centrats.
- Cares centrades: Es divideix el domini en elements on es col·loquen els nodes, i posteriorment es generen els volums de control, on les cares d'aquests queden enmig dels nodes.

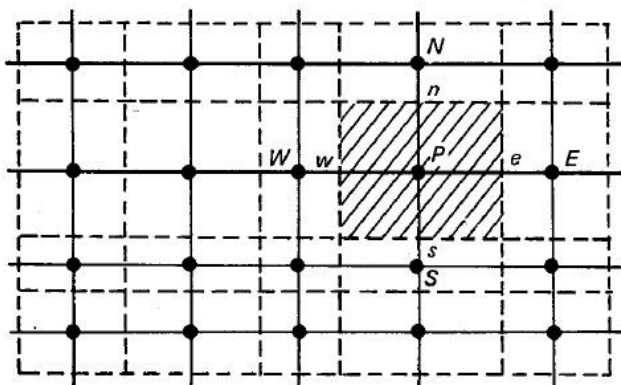


Figura 2.2: Pràctica de nodes centrats. [1]

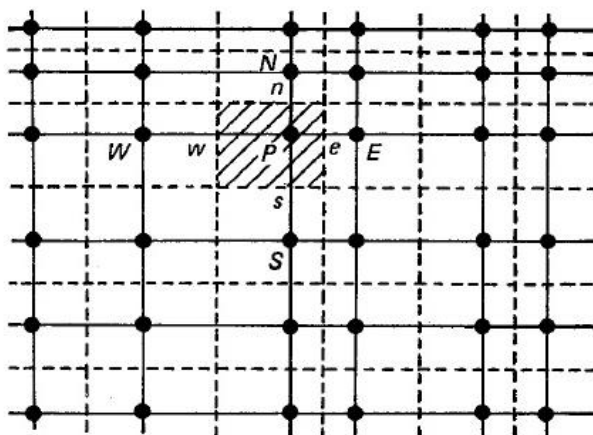


Figura 2.3: Pràctica de cares centrades. [1]

Com es pot observar, només per la 1a pràctica de nodes centrats es pot assegurar que el node conté la variable més representativa del volum de control, ja que el node queda en el centre del volum de control. És per això que la pràctica emprada en tots els casos que es tractaran serà aquesta.

## 2.2 Condicions de contorn

Les dues condicions de contorn típiques són:

- Dirichlet: el valor de la variable  $s$  específica en el contorn.

$$\phi_P = c \quad (2.4)$$

- Neumann: el valor de la derivada  $s$  específica en el contorn.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = k \quad (2.5)$$

On  $c$  i  $k$  són valors coneguts especificats en el problema.

## 2.3 Solvers

El *solver* és l'algoritme o funció del codi que, donades unes equacions amb tots els coeficients especificats, resol el sistema.

Els mètodes emprats seran iteratius; això vol dir que es parteix d'un mapa suposat de la variable i es va iterant fins arribar a una solució amb un error de precisió menyspreable imposat.

Els *solvers* desenvolupats en aquest estudi han estat, en primera instància el mètode de *Gauss-Seidel*, i més endavant a partir del cas del Capítol II, el mètode del *Line-by-Line*.

### 2.3.1 Mètode Gauss-Seidel

Aquest mètode és un mètode de punt per punt (*point-by-point*), en què es resol el problema per aquesta via.

Cada equació de la forma (2.1) es resol aïllant la variable en el node tractat  $P$ :

$$\phi_P = (a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + b_P)/a_P \quad (2.6)$$

Així, el valor de la variable en el node  $P$  s'obté com a combinació lineal dels nodes del voltant, que tenen un valor suposat o l'últim calculat.

D'aquesta manera, un cop que s'han visitat tots els nodes, s'ha finalitzat la iteració, i es comprova si la màxima diferència entre el valor suposat i calculat és major a la precisió escollida, és a dir, l'error admissible. Si la solució encara no és suficientment precisa, es torna a iterar amb els valors calculats en l'última iteració, que passen a ser els que se suposen en la iteració actual.

### 2.3.2 Mètode Line-by-Line

#### TDMA

Per explicar aquest mètode, cal explicar prèviament el mètode del TDMA, de l'anglès, *Tri-Diagonal Matrix Algorithm*, un mètode que requereix d'una matriu de coeficients  $a$  tri-diagonal:

$$\begin{pmatrix} a_P[1] & -a_E[1] & 0 & 0 & \dots \\ -a_W[2] & a_P[2] & -a_E[2] & 0 & \dots \\ 0 & -a_W[3] & a_P[3] & -a_E[3] & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Com es pot comprovar, pel requeriment de la tri-diagonalitat de la matriu, els coeficients que hi apareixen dels nodes dels voltants tan sols són *east* o *west*, fet que implica que el mètode del TDMA sigui aplicable només a casos unidimensionals.

Aquest mètode no és iteratiu sinó de resolució directa. Es basa en 2 passos:

1. Evaluació de  $i=1$  a  $N$  dels coeficients  $P$  i  $R$ :

$$P[i] = \frac{a_E[i]}{a_P[i] - a_W[i] \cdot P[i-1]} \quad (2.8)$$

$$R[i] = \frac{b_P[i] + a_W[i] \cdot R[i-1]}{a_P[i] - a_W[i] \cdot P[i-1]} \quad (2.9)$$



2. Obtenció dels valors de la variable de  $i=N$  a  $1$ :

$$\phi[i] = P[i] \cdot T[i + 1] + R[i] \quad (2.10)$$

### Line-by-Line

El mètode de línia per línia és una combinació dels mètodes de *Gauss-Seidel* i TDMA.

La idea és que, per exemple, per un problema bidimensional com els que es tractaran en aquest estudi, es pugui resoldre el problema línia per línia, on els nodes del voltant que no formen part de la línia queden congelats.

A partir de l'equació general (2.1), aquesta es pot reescriure com:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b_P^* \quad (2.11)$$

On:

$$b_P^* = b_P + a_N \phi_N + a_S \phi_S \quad (2.12)$$

És a dir, que els nodes que no formen part de la línia es congelen i passen a formar part del terme independent. En aquest exemple, es resoldria la línia en direcció  $x$  ja que hi formen part els nodes *east* i *west*, mentre que els *south* i *north* estarien congelats. Un cop resolta aquesta línia, es passaria a la següent.

Els valors emprats en la resolució, tal i com fa el *Gauss-Seidel*, serien els suposats o últims calculats.

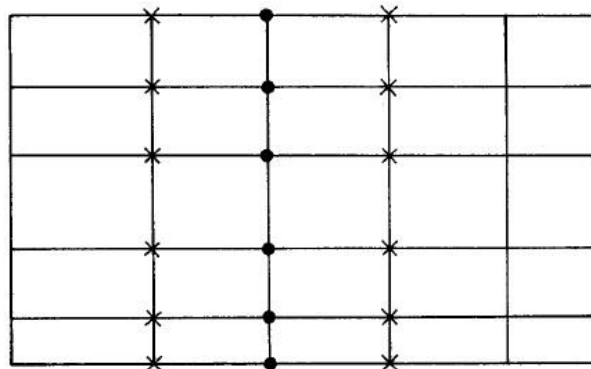


Figura 2.4: Esquema línia *Line-by-Line*. [1]

En la Figura 2.4 anterior, es troba l'esquema d'aquesta metodologia, on els nodes principals de la línia estan marcats per punts, i els nodes dels voltants marcats per creus estan congelats i formen part del nou terme independent.

Amb aquesta metodologia, és convenient escombrar en un sentit i després en l'altre; és a dir, per exemple, primer d'esquerra a dreta i després de dalt a baix.

Cal comentar que, a fi que la informació es transmeti amb més rapidesa, cal començar escombrant en contorns on la condició de contorn sigui de *Dirichlet*. Això és perquè el valor en aquells nodes ja és conegut perquè és dada, i així es resol més ràpidament el problema.

## 2.4 Estratègia de resolució

Per resoldre els problemes dels casos que es plantejaran, caldrà implementar un algorisme bàsic, que depenent del cas tindrà més o menys passos però que bàsicament seguiran el mateix organigrama (veure Figura 2.5). Aquest algorisme s'explica a continuació:

- 1) El primer pas és l'**entrada de dades**. Les dades físiques que s'introdueixen són la geometria, les propietats dels materials o els fluids, les condicions de contorn i inicials, entre d'altres. Les dades numèriques introduïdes són, per exemple, el número de nodes interns, el paràmetre de l'esquema numèric, la precisió dels càlculs, entre d'altres.
- 2) Els **càlculs previs** calculen, per exemple, la posició dels nodes, la posició de les cares dels volums de control, la distància entre nodes, les superfícies, els volums, etc.
- 3) El **mapa inicial** assigna el valor de les variables inicials o suposades a les matrius de les variables.
- 4) El càlcul dels **coeficients de discretització** es realitza segons el valor dels coeficients que resulten de discretitzar les diverses equacions.
- 5) El **solver** emprat és el mètode **Gauss-Seidel** o **Line-by-Line**, que calcula les variables amb valors suposats. Un cop calculades, es comprova que les diferències entre les variables calculades i suposades siguin prou petites; és a dir, que es compleixi el criteri de convergència. En cas contrari, en *Gauss-Seidel*, s'aplica un factor de relaxació per minimitzar les iteracions necessàries per assolir la convergència.

- 6) Es comprova si cal un **nou time-step** (no s'hagi arribat al temps de simulació desitjat). En cas de necessitar-ho, es torna a repetir el procés actualitzant el mapa de la variable anterior amb el recentment calculat (salt temporal).

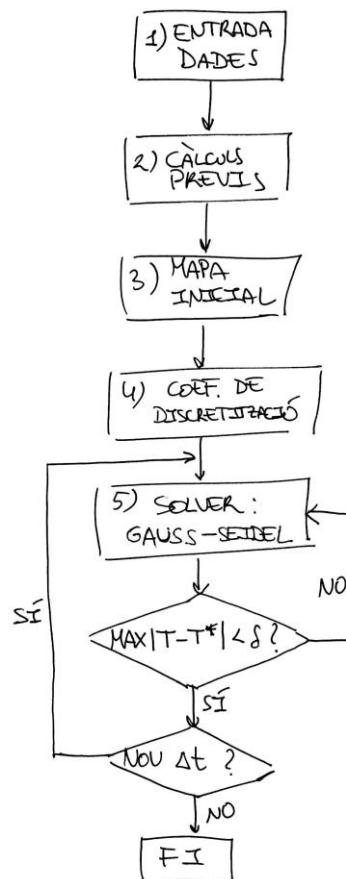


Figura 2.5: Organigrama de l'algorisme.

Cal notar que en cas de ser transitori, hi ha termes com el  $b_p$  que es tornaran a calcular després de cada pas de temps ja que depenen de la variables en l'instant anterior. És per això que, al respondre positivament que cal un nou *time-step*, l'algorisme marca que cal anar entre el pas 4) i 5), ja que només cal recalculer una part del pas 4).

## 3 Capítol I: Equació de conducció de calor

### 3.1 Introducció teòrica

L'equació de la conducció de calor és l'equació governant en molts processos de transferència de calor. El fenomen es produeix en materials sòlids o alguns fluids sense moviment, en què es transfereix calor a causa d'una diferència de temperatures.

La simplicitat d'aquest cas fa que sigui un punt de partida òptim per començar a formular un coneixement sobre les equacions que es tractaran en els següents capítols, ja que contemplar les similituds entre la transferència de calor i la transferència de *momentum* i concebre la velocitat, en alguns aspectes, de manera anàloga a la temperatura, ajuda a l'enteniment dels fenòmens que es desenvoluparan posteriorment.

La calor es transfereix de zones amb major a menor temperatura, és per això que el gradient de temperatures és negatiu. La conducció de calor està determinada per la Llei de Fourier:

$$q_n = -\lambda \frac{dT}{dn} \quad (3.1)$$

on  $q_n$  és el flux de calor en direcció  $n$  per unitat de superfície ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) i  $\lambda$  és la conductivitat tèrmica.

A fi de provar el coneixement adquirit sobre aquest fenomen, s'analitzarà un cas de conducció de calor proposat pel CTTC que es pot trobar en [2].

### 3.2 Introducció del cas

El cas tracta bàsicament d'una secció rectangular composta per quatre materials diferents (vegeu Figura 3.1). Es pren com a direcció  $x$  la direcció horitzontal i com a direcció  $y$  la direcció vertical. Les diferents distàncies  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  i  $L_5$  conformen les distàncies particulars del problema.

Les diferents propietats dels materials es mostren a la Taula 3.1. Cada costat té una condició de contorn diferent, descrites a la Taula 3.2.

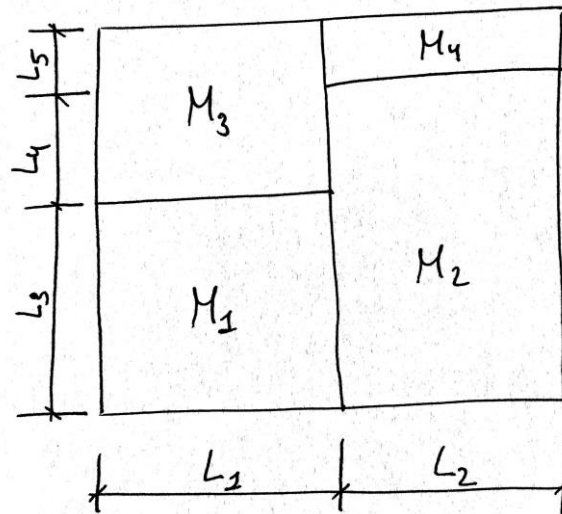


Figura 3.1: Esquema del cas de 4 materials.

Taula 3.1: Propietats físiques dels materials. [2]

	$\rho[\text{kg}/\text{m}^3]$	$c_p[\text{J}/\text{kgK}]$	$k[\text{W}/\text{mK}]$
$M_1$	1500.00	750.00	170.00
$M_2$	1600.00	770.00	140.00
$M_3$	1900.00	810.00	200.00
$M_4$	2500.00	930.00	140.00

Taula 3.2: Condicions de contorn dels costats.

Costat	Condicció de contorn
Inferior	Isoterma a $T = 23.00 \text{ } ^\circ\text{C}$
Superior	Flux de calor uniforme $Q = 60.00 \text{ W}/\text{m}$
Esquerre	En contacte amb un fluid a $T_g = 33 \text{ } ^\circ\text{C}$ i coef. transf. calor $9.00 \text{ W}/\text{m}^2\text{K}$
Dret	Temperatura uniforme $T = 8.00 + 0.005t \text{ } ^\circ\text{C}$ (on $t$ és el temps en segons)

### 3.3 Discretització del domini

Per tal d'obtenir el mapa de temperatures del domini per un instant donat de temps, cal discretitzar el domini en volums de control suficientment petits talment les propietats (en aquest cas, la temperatura) romanguin constants en aquell instant de temps i no variïn dins d'aquest. La variable calculada, la temperatura, es captarà col·locant-hi un node en el centre del volum de control, tal i com es comentava anteriorment.

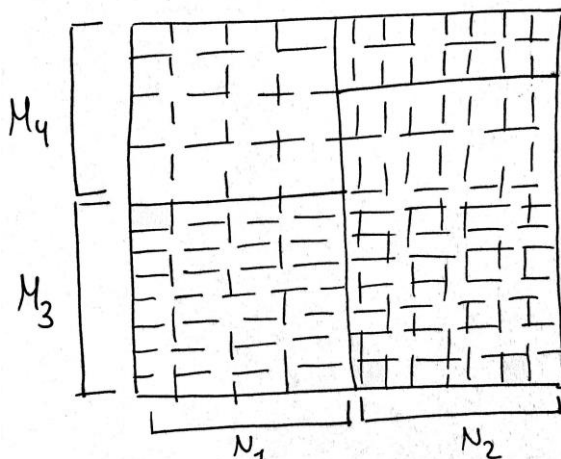


Figura 3.2: Esquema de la discretització del domini.

A la Figura 3.2 es mostra la pràctica emprada per a construir la malla del problema.

Els elements  $N_1$ ,  $N_2$  són el número de nodes interns o volums de control en què es divideix el problema en la direcció  $x$ , on  $N_1$  correspon a  $0 < x < L_1$  i  $N_2$  a  $L_1 < x < L_1 + L_2$ . A més, a l'extrem esquerre i dret es col·loquen 2 nodes més per captar les condicions de contorn. El mateix passa en la direcció  $y$ , on els elements  $M_3$ ,  $M_4$  són el número de nodes interns o volums de control en què es divideix el problema en la direcció  $y$ , on  $M_3$  correspon a  $0 < y < L_3$  i  $M_4$  a  $L_3 < y < L_3 + L_4 + L_5$ . A més, a dalt i avall es col·loquen 2 nodes més per captar les condicions de contorn.

D'aquesta manera, es poden diferenciar els nodes interns, els col·locats a les condicions de contorn, i els dels vèrtexs del rectangle.

El fet de triar diversos números d'elements en direcció  $x$  i  $y$  fa possible densificar la malla allà on es creu que caldrà una malla més densa. Si no es fes així i s'emprés una malla uniforme, caldria augmentar la densitat de malla en tot el domini a causa de la necessitat de només una zona, densificant malla on no cal i malbaratant potència computacional i augmentant el temps de càlcul.

Aquesta divisió s'ha triat de manera que es pugui densificar la malla en la part inferior del material 2, ja que per les condicions de contorn donades, sembla ser la zona on es forcin uns gradients de temperatura més grans. Aquesta tria també ve donada per la pista que s'ofereix en el guió del cas ([2]), on es mostra el mapa de temperatures a un instant donat, i es pot verificar que es compleix aquesta deducció per la tria de la malla.

En relació a la densificació de malla, no obstant, es troba un inconvenient. Per tal de dur-la a terme, es tria el número de volums de control o nodes en trams de l'eix horitzontal i

vertical. Aquesta pràctica fa que, tot i densificar la malla en la zona desitjada, també fa que es densifiqui més la malla en altres zones. Per exemple, els elements  $M_3$  es trien en l'escala vertical, fent que la zona de  $0 < x < L_1$  també es vegi afectada. Aquest fenomen, no obstant, no s'optimitzarà doncs fer que només en una zona s'hi densifiqués la malla faria que als voltants hi corresponguessin més d'un volum de control intern per cada volum de control extern a l'hora de veure la calor transferida entre aquests. En altres paraules, la malla serà estructurada i en tot aquest estudi no s'empraran malles no estructurades.

En la Figura 3.3 es mostra el mapa dels nodes per  $N_1=10$ ,  $N_2=20$ ,  $M_3=30$  i  $M_4=10$ . Es pot comprovar com l'esquema de la Figura 3.2 intentava representar aquesta malla desigual.

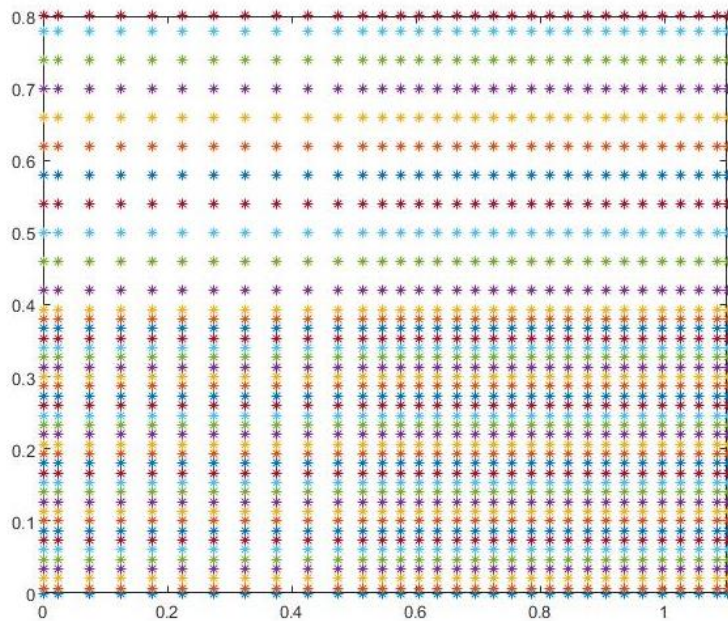


Figura 3.3: Mapa dels nodes.

### 3.4 Discretització de les equacions

L'equació governant del problema és l'equació de l'energia per sòlids, transitòria, bidimensional, amb propietats físiques constants i sense fonts internes:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

El procés de discretització es considera conegut, només caldria integrar-la.

### 1) Nodes interns

L'equació de discretització dels nodes interns és la següent:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b_P \quad (3.3)$$

On:

$$a_E = \beta \lambda_e \frac{S_e}{dPE} \quad (3.4)$$

$$a_W = \beta \lambda_w \frac{S_w}{dPW} \quad (3.5)$$

$$a_N = \beta \lambda_n \frac{S_n}{dPN} \quad (3.6)$$

$$a_S = \beta \lambda_s \frac{S_s}{dPS} \quad (3.7)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\rho V c}{\Delta t} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} b_P = T_P^0 & \left( \frac{\rho V c}{\Delta t} - (1 - \beta) \left( \lambda_w \frac{S_w}{dPW} + \lambda_e \frac{S_e}{dPE} + \lambda_s \frac{S_s}{dPS} + \lambda_n \frac{S_n}{dPN} \right) \right) \\ & + T_W^0 (1 - \beta) \lambda_w \frac{S_w}{dPW} + T_E^0 (1 - \beta) \lambda_e \frac{S_e}{dPE} \\ & + T_S^0 (1 - \beta) \lambda_s \frac{S_s}{dPS} + T_N^0 (1 - \beta) \lambda_n \frac{S_n}{dPN} \end{aligned} \quad (3.9)$$

On  $\beta$  imposa l'esquema numèric d'integració temporal (endavant s'estudiarà),  $S$  són les superfícies de les cares dels volums de control,  $dPE$  és la distància entre els nodes,  $V$  és el volum del volum de control,  $\Delta t$  és el *time-step* d'integració. Cal notar que les temperatures en l'instant actual no porten cap superíndex, mentre que les de l'instant anterior porten el superíndex 0.

Aquesta equació (3.3) relaciona linealment la temperatura del node tractat  $P$  amb la temperatura dels nodes que l'envolten mitjançant uns coeficients de discretització i un terme independent, tal i com feia l'equació general (2.1).

Quant a les conductivitats tèrmiques, s'emprarà la mitjana harmònica en tots els càlculs ja que es tracta de nodes centrats amb canvis de material:

$$\lambda_e = \frac{dPE}{\frac{dPE}{\lambda_P} + \frac{dPE}{\lambda_E}} \quad (3.10)$$

## **2) Nodes contorn inferior**

Els nodes del contorn inferior no tenen una equació de discretització ja que la seva temperatura ja és coneguda: es tracta d'una isoterma de 23 °C.

Altrament, es podria imposar que els coeficients dels nodes dels voltants són nuls, el propi és 1 i el terme independent seria igual a la temperatura donada.

## **3) Nodes contorn superior**

L'equació de discretització dels nodes del contorn superior és la següent:

$$a_P T_P = a_S T_S + b_P \quad (3.11)$$

$$a_S = \frac{\lambda_S}{dPS} \quad (3.12)$$

$$a_P = a_S \quad (3.13)$$

$$b_P = \dot{q}_{flux} \quad (3.14)$$

Aquesta equació (3.11) relaciona la temperatura dels nodes del contorn superior amb els inferiors interns, i no hi relaciona nodes del contorn entre si ja que entre ells no hi ha transferència de calor.

Sorgeix, bàsicament, de fer un balanç de calor entre el flux de calor conegut del contorn i la conducció de calor interior.

## **4) Nodes contorn esquerre**

L'equació de discretització dels nodes del contorn esquerre és la següent:

$$a_P T_P = a_E T_E + b_P \quad (3.15)$$

$$a_E = \frac{\lambda_e}{dPE} \quad (3.16)$$

$$a_P = a_E + \alpha_g \quad (3.17)$$

$$b_P = \alpha_g T_g \quad (3.18)$$

Aquesta equació (3.15) relaciona la temperatura dels nodes del contorn esquerre amb els drets interns, i no hi relaciona nodes del contorn entre si ja que entre ells no hi ha transferència de calor.



Sorgeix, bàsicament, de fer un balanç de calor entre la convecció natural del contorn i la conducció de calor interior.

#### **4) Nodes contorn dret**

Els nodes del contorn dret no tenen una equació de discretització ja que la seva temperatura ja és coneguda per a un instant donat de temps, segons l'equació donada. Altrament, es podria imposar que els coeficients dels nodes dels voltants són nuls, el propi és 1 i el terme independent seria igual a la temperatura donada en cada instant de temps.

#### **5) Nodes als vèrtexs**

Els nodes als vèrtexs són irrelevantes, ja que no hi ha superfície de transferència de calor, i la temperatura que se'ls hi assignarà serà la mitjana entre els dos nodes més propers a aquests. Aquesta pràctica només es realitzarà de manera que a l'imprimir el mapa de temperatures doni un valor raonable, però no afectarà en la resolució del problema.

### **3.5 Estudis per verificar el codi**

A continuació es detallen diversos estudis per verificar que el codi està lliure d'errors.

Primer, cal contemplar que es tracta d'un cas de conducció de calor bidimensional en règim transitori. Per tant, es desconeix cap solució analítica per comparar-lo.

D'aquesta manera, el guió de la pràctica proporcionava una pista, que és el mapa de temperatures per a l'instant de temps de 5 000 s. Així, es va demanar al programa implementat que imprimís per pantalla els resultats de les temperatures calculades per a aquest mateix instant de temps. El resultat es pot veure a la Figura 3.4, mentre que a la Figura 3.5 es mostra la pista proporcionada al guió per comparar els resultats.

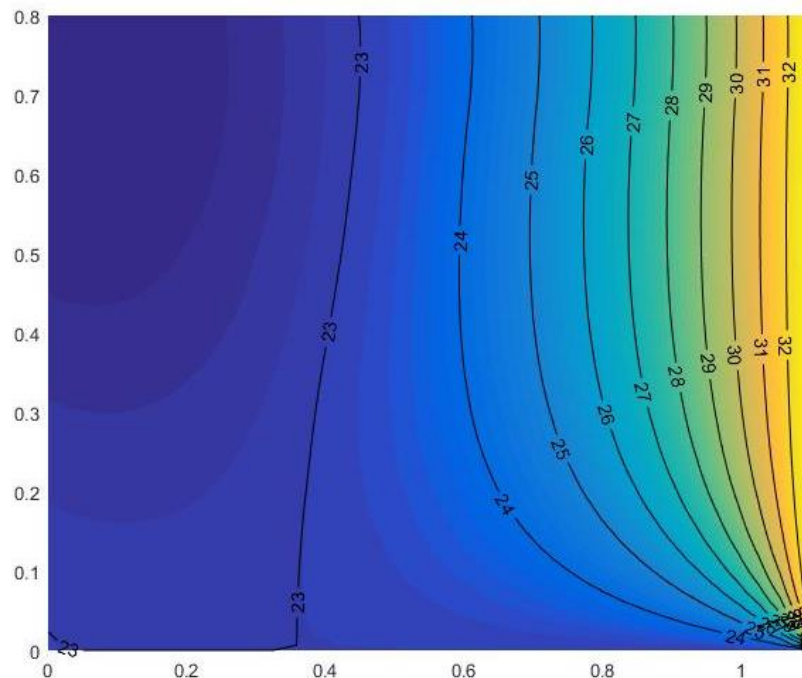


Figura 3.4: Mapa de temperatures per  $t = 5000$  s.

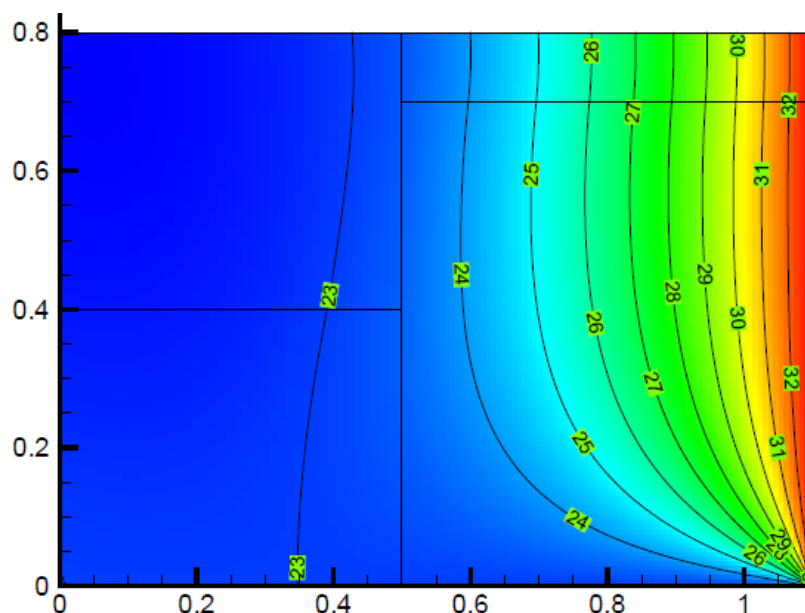


Figura 3.5: Mapa de temperatures per  $t = 5000$  s del guió. [2]

Tal i com es pot observar, els resultats obtinguts són molt bons, ja que el mapa de temperatures obtingut és idèntic al que es proporcionava com a pista al guió.

Una altra manera de verificar el bon càlcul del codi és implementar el càlcul del residu. El residu és bàsicament el resultat de passar tota l'equació de discretització a una banda de la igualtat. El resultat, teòricament, ha de ser 0.

Així, es va calcular el residu per les equacions de discretització a l'instant  $t = 5000$  s. Una acció permetia treure per pantalla el valor màxim dels residus calculats. El resultat va ser que el màxim valor dels residus era menor a  $10^{-6}$ , i la majoria eren de menor ordre ( $10^{-8} \div 10^{-10}$ ). Per tant, els resultats són acceptables i acurats.

### 3.6 Estudis numèrics

A continuació es detallen diversos estudis de tipus numèrics.

Quant a la malla, es creu que els valors triats són suficientment adients per resoldre el problema.

Quant a factors de relaxació, s'han emprat per reduir les iteracions necessàries per assolir la convergència en el mètode iteratiu Gauss-Seidel. S'ha realitzat un estudi per la resolució del primer instant de temps. La Figura 3.6 mostra el número d'iteracions necessàries en funció del factor de relaxació aplicat.

Es pot veure com el factor de relaxació més adient és al voltant de 1.2. És aquest valor, doncs, el que s'ha fixat per resoldre el problema transitori.

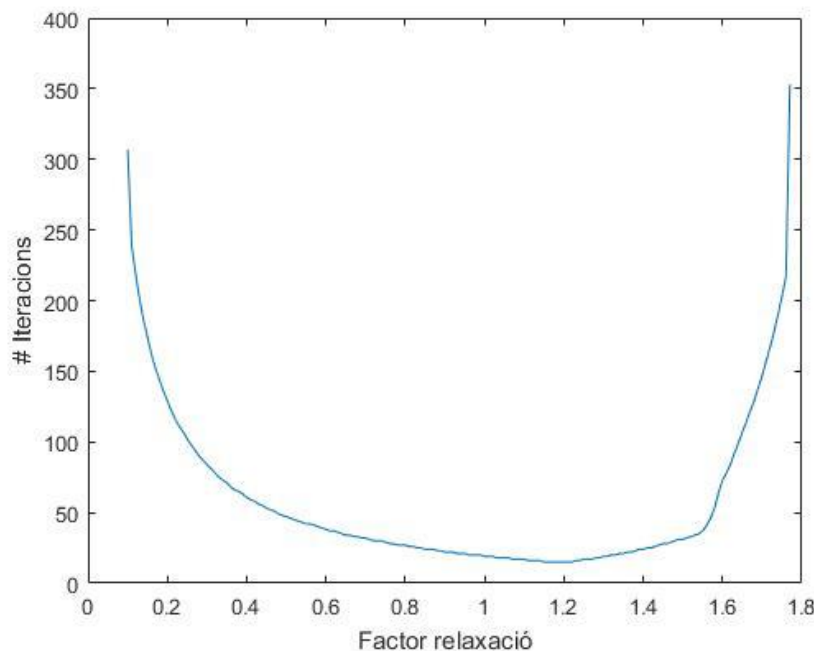


Figura 3.6: Número d'iteracions en funció del factor de relaxació.

El codi del programa està implementat de manera que es pugui triar l'esquema numèric desitjat. Per  $\beta=0$  es tracta d'esquema explícit, per  $\beta=0.5$  es tracta de Crank-Nicolson i per  $\beta=1$  es tracta d'esquema implícit.

Els càlculs realitzats s'han dut a terme amb l'esquema implícit. Això es deu a que l'esquema explícit té una limitació sobre el *time-step*, ha de ser menor a un valor ja que si no es tindria problemes al resoldre el problema. Amb Crank-Nicolson també es pot donar aquest fet (vegeu [1]).

En canvi, per l'esquema implícit no existeix aquest problema. El problema d'aquests 2 esquemes anteriors és que el coeficient  $b_p$  es pugui fer negatiu. Això aniria en contra de la regla 2 que s'exposa al llibre *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* [1], on enuncia que els coeficients cal que siguin del mateix signe (es prenen positius per conveniència). Aquestes regles cal complir-les per poder obtenir resultats amb sentit físic.

A part, s'ha pogut comprovar com que Crank-Nicolson és un esquema més precís que els altres per un mateix *time-step* donat. En aquesta línia, al disminuir l'increment de temps a la meitat, per implícit l'error es redueix a la meitat mentre que per Crank-Nicolson la reducció és quadràtica.

Quant al *solver*, s'ha resolt el problema amb el mètode iteratiu *Gauss-Seidel*, ja que aleshores no s'havia desenvolupat correctament el mètode *Line-by-Line* (en el 2n capítol es farà una comparativa).

No obstant, fent ús del mètode Gauss-Seidel i de factors de relaxació adient, s'ha aconseguit reduir el cost computacional resolent el problema amb només 15 iteracions per assolir la convergència amb una precisió de  $10^{-8}$ .

### 3.7 Estudis físics

A continuació es detallen diversos estudis de tipus físic.

Primer, es pot estudiar com varia la solució si es canvien les condicions inicials. En comptes de 8 °C inicialment, s'ha fixat que el camp de temperatures inicial és de 24 °C, tres cops el proposat en l'escala Celsius. El resultat es mostra a la Figura 3.7.

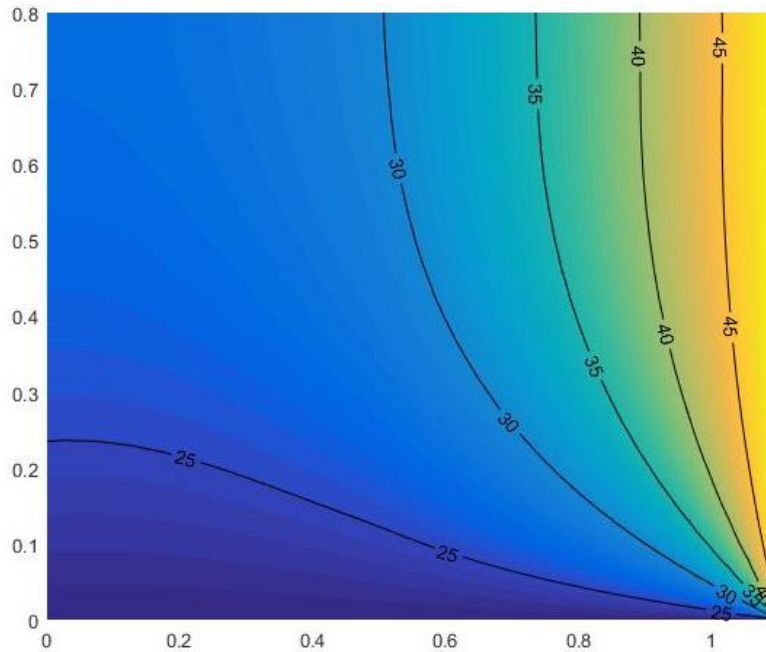


Figura 3.7: Mapa de temperatures donats 24 °C inicials.

Tal i com es pot veure, les temperatures són molt majors, com era d'esperar per una temperatura inicial més gran, i es pot veure com la isoterma de 25 °C es corba molt més horitzontalment. Cal comentar que la temperatura inicial de la condició de contorn dreta transitòria també s'ha fixat a 24 °C inicialment, i que per això ha anat pujant.

Per altra banda, també es pot estudiar com varia la solució si canviem les condicions de contorn.

#### 1) CC Superior

S'ha variat el valor donat de la condició de contorn superior  $Q = 60 \text{ .00W/m}$  fins a  $Q = 240 \text{ .00W/m}$ . S'ha augmentat 4 cops ja que amb menys el mapa de temperatures era molt semblant. El resultat es veu a la Figura 3.8.

Tot i variar tant la condició de contorn, el mapa no es veu molt afectat, només la isoterma de 23 °C s'ha desplaçat una mica a l'esquerra.

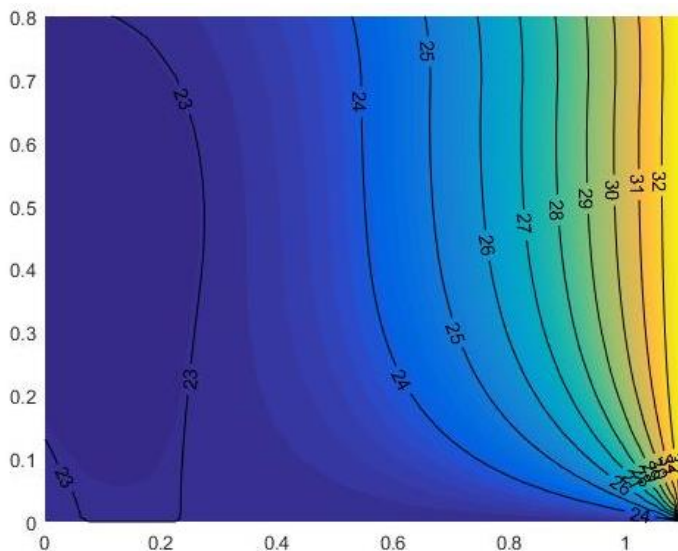


Figura 3.8: Mapa de temperatures per  $Q = 240.00 \text{ W/m}$ .

## 2) CC Esquerra

S'ha variat el valor donat del coeficient superficial de transferència de calor, augmentant-lo de  $9 \text{ W/m}^2\text{K}$  a  $27 \text{ W/m}^2\text{K}$ , tres vegades més gran. El resultat es veu a la Figura 3.9.

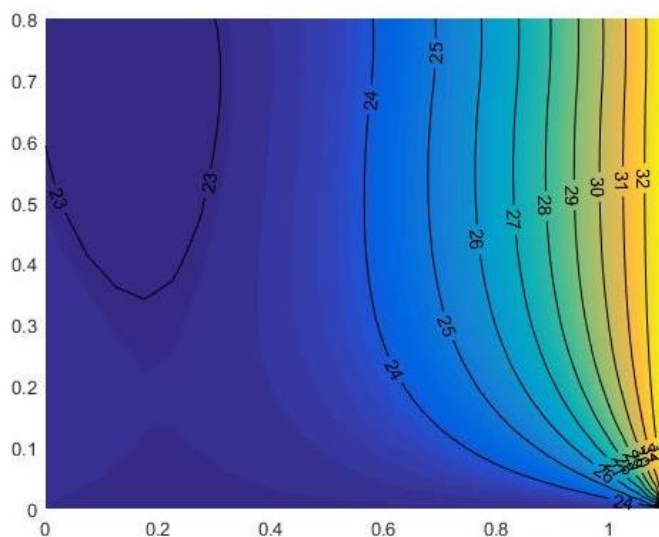


Figura 3.9: Mapa de temperatures per  $\alpha = 27 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

En aquest cas, la isoterma de  $23 \text{ }^\circ\text{C}$  pren una forma més peculiar ja que està directament afectada per la variació en la condició de contorn esquerra.

## 3) CC Inferior

S'ha variat el valor de la condició de contorn de la isoterma inferior. S'han calculat els casos en què la temperatura és de  $\pm 7 \text{ }^\circ\text{C}$ . Els resultats obtinguts es mostren a la Figura 3.10 i a la Figura 3.11.

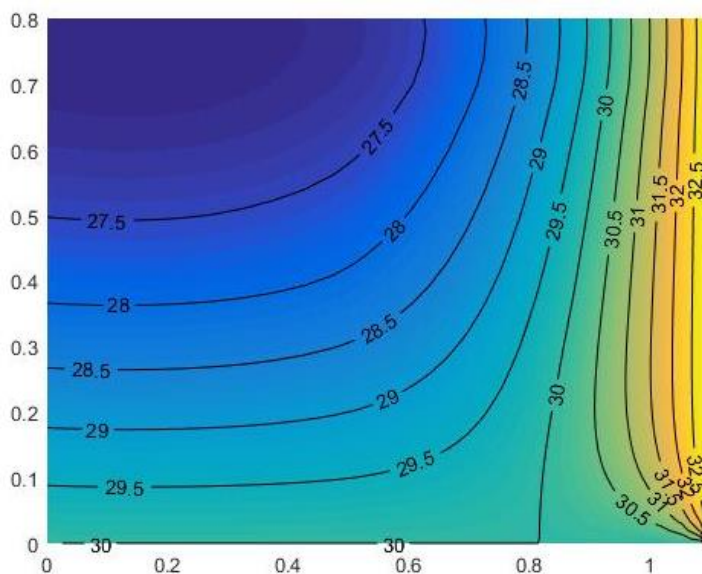


Figura 3.10: Mapa de temperatures per isoterma inferior  $T = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

En aquest cas a l'augmentar la temperatura de la isoterma inferior, el mapa de temperatures canvia molt, apareixent-hi noves isoterms de més altes temperatures a zones on hi havia temperatures més baixes. Es pot observar com a la part superior dreta es forcen uns fluxos de calors notables a causa de la proximitat de les isoterms.

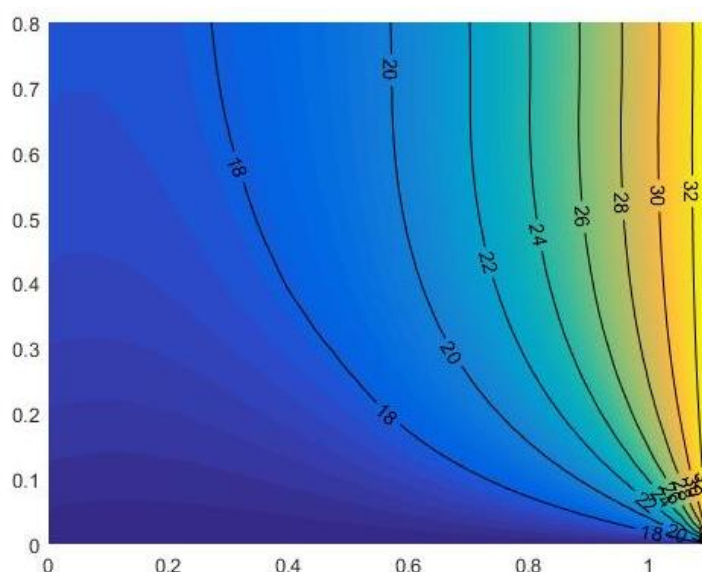


Figura 3.11: Mapa de temperatures per isoterma inferior  $T = 16\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

En aquest cas al disminuir la temperatura, no canvia el mapa de temperatures tant com en el cas anterior, però sí que hi apareixen més isoterms provocades per la baixa temperatura, i que hi acaben produint gradients de temperatura més alts en la zona inferior dreta, amb els conseqüents fluxos de calor.

#### 4) CC Dreta

Per tal de variar la condició de contorn dreta, l'únic que es pot canviar és el pendent de la funció lineal entre la temperatura i el temps. Així, s'ha doblat el pendent, de 0.005 a 0.01, i també s'ha fet la meitat, amb 0.0025. Els resultats es mostren a la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** i a la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

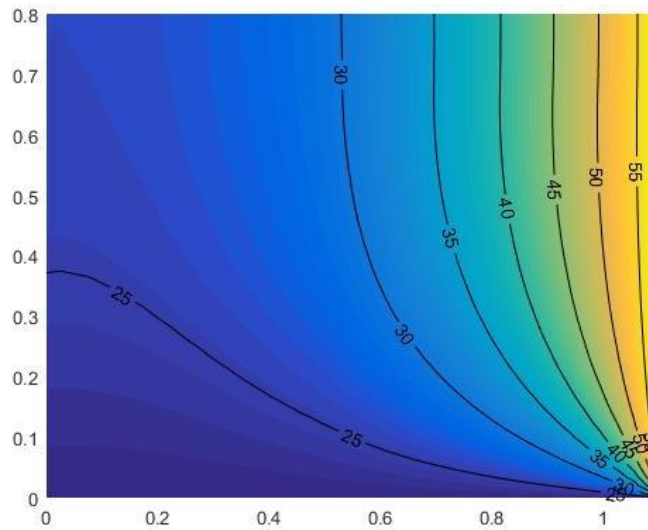


Figura 3.12: Mapa temperatures amb doble pendent temps.

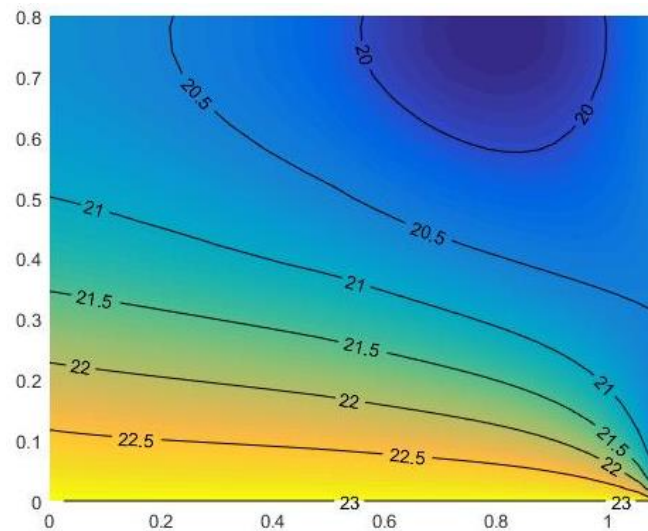


Figura 3.13: Mapa temperatures amb meitat pendent temps.

Tal i com es pot apreciar, a l'augmentar al doble el pendent, la paret dreta arriba al temps de la simulació de 5 000 s amb una temperatura molt alta respecte a la del cas proposat. Just al contrari, al disminuir a la meitat el pendent, la paret dreta arriba al temps especificat amb una temperatura molt baixa respecte a la del cas plantejat. Els mapes de temperatura, són, en conseqüència, bastant diferents del cas plantejat.

Un cop estudiades les variacions de les 4 condicions de contorn possibles, s'arriba a la conclusió que els grans canvis sobre els mapes de temperatures resultants es donen quan es varia el valor d'una isoterma dada. Pel cas de la convecció natural i el flux de calor donat, per variacions no exagerades, el resultat acaba sent similar.

Un altre estudi físic que es pot realitzar es variant algunes propietats físiques dels materials. En aquest cas, s'ha decidit variar les conductivitats tèrmiques per veure'n l'efecte i si hi havia més calor transferida.

Només s'han variat les conductivitats tèrmiques dels materials de la dreta, que són els que presentaven més canvis de temperatura. El resultat és mostra a la Figura 3.14.

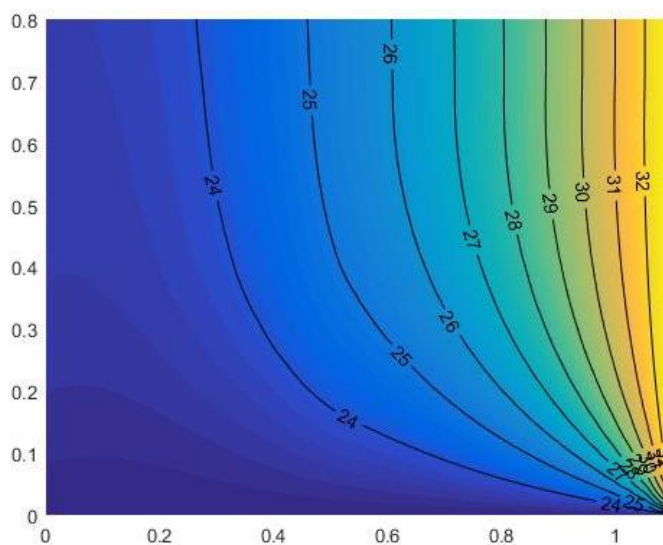


Figura 3.14: Mapes de temperatura per conductivitats diferents.

Tal i com es pot apreciar, les isoterms s'han eixamplat, ergo no hi ha gradients de temperatura tan grans. Aquest és un resultat correcte ja que dona a entendre que com la conductivitat ha pujat, es transfereix més calor que redistribueix més les temperatures.



## 4 Capítol II: Equació de la convecció-difusió

### 4.1 Introducció teòrica

La formulació del tema anterior pot ser emprada per aquest capítol de manera preliminar, només cal afegir el terme de la convecció, fenomen creat pel moviment del fluid.

La formulació de l'equació de discretització és anàloga, doncs, a la del cas de conducció de calor, atès que la variable de temperatura  $T$  i la constant de conductivitat tèrmica  $\lambda$  són homòlogues a la variable general  $\phi$  i el seu coeficient de difusió  $\Gamma$ .

D'aquesta manera, l'objectiu de l'estudi de l'equació de convecció-difusió és obtenir la distribució de la variable general  $\phi$  donat el camp de velocitats i les propietats del fluid. Aquesta variable general podria representar, per exemple, la temperatura en cada punt.

Tot i que l'únic terme nou és el de convecció, la seva formulació no és directa ni banal. Per obtenir resultats amb sentit físic, cal estudiar amb cura com formular la discretització d'aquest terme, el qual està lligat al terme de difusió. És per això que anomenem l'equació següent com equació de la convecció-difusió:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\vec{v}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S \quad (4.1)$$

on el 1r terme és el transitori, el 2n el convectiu, el 3r el difusiu i el 4t el terme font.

Per altra banda, cal tenir en compte que el camp fluid donat ha de satisfer l'equació de la continuïtat:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \quad (4.2)$$

la qual no és més que l'equació de la convecció-difusió amb  $\phi=1$  i  $S=0$ .

## 4.2 Formulació general

El complet desenvolupament del terme convectiu i els diferents esquemes de resolució no es durà a terme en aquest document ja que es troben desenvolupats per Patankar [1] i el manuscrit del CTTC [3]. A continuació es desenvoluparan breument conceptes necessaris per entendre bàsicament els paràmetres que intervenen en l'equació de discretització.

Considerant flux unidimensional, estacionari i sense fonts, és útil definir el flux  $J$  total que travessa la cara d'un volum de control, i que contempla el flux convectiu i el flux difusiu, respectivament:

$$J = \rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx} \quad (4.3)$$

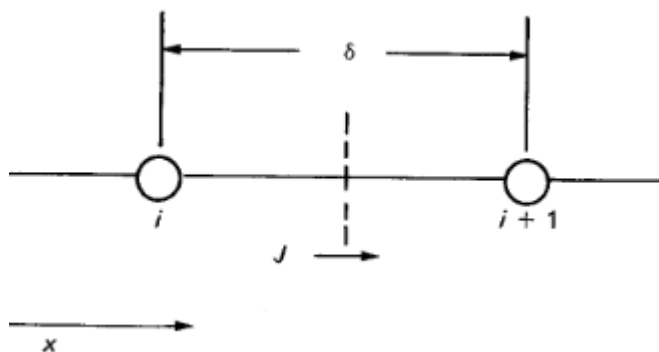


Figura 4.1: : Esquema del flux total que travessa la cara d'un volum de control entre dos nodes. [1]

Abans de seguir amb aquest desenvolupament cal definir dues variables, la força convectiva  $F$  i la conductància de la difusivitat  $D$ :

$$F \equiv \rho u \quad (4.4)$$

$$D \equiv \frac{\Gamma}{\delta} \quad (4.5)$$

D'aquestes dues últimes equacions, es pot extreure el número adimensional de Peclet:

$$P \equiv \frac{F}{D} = \frac{\rho u \delta}{\Gamma} \quad (4.6)$$

El número de Peclet és la relació entre la força convectiva i difusiva. Quan aquest número s'aproxima a 0, tenim un problema amb una difusió quasi bé pura, mentre que quan el Peclet és molt gran, el valor de les variables en un node ve determinat majoritàriament

pels valors que presenten el node aigües amunt, mentre que la influència del node aigües avall és quasi bé nul·la.

Tornant al desenvolupament del flux total que travessa la cara d'un volum de control entre dos nodes, es pot redefinir:

$$J^* = \frac{J\delta}{\Gamma} = P\phi - \frac{d\phi}{d(x/\delta)} \quad (4.7)$$

on el valor de  $\phi$  a la cara serà algun tipus de mitjana ponderada entre  $\phi_i$  i  $\phi_{i+1}$ , mentre que el gradient serà múltiple de  $\phi_{i+1} - \phi_i$ . Tenint en compte aquests aspectes i agrupant termes:

$$J^* = B\phi_i - A\phi_{i+1} \quad (4.8)$$

on  $A$  i  $B$  són coeficients adimensionals que són funció del número de Peclet  $P$ , cadascun associat al node corresponent. És possible escriure tot en termes del coeficient  $A$  mitjançant relacions amb el coeficient  $B$ , i així es farà d'ara en endavant, ja que ambdós depenen únicament del número de Peclet.

### 4.3 Equació de discretització

Tenint en compte la definició del flux  $J$  que travessa les cares d'un volum de control donat, és possible discretitzar l'equació de convecció-difusió per dues dimensions i règim transitori amb termes font.

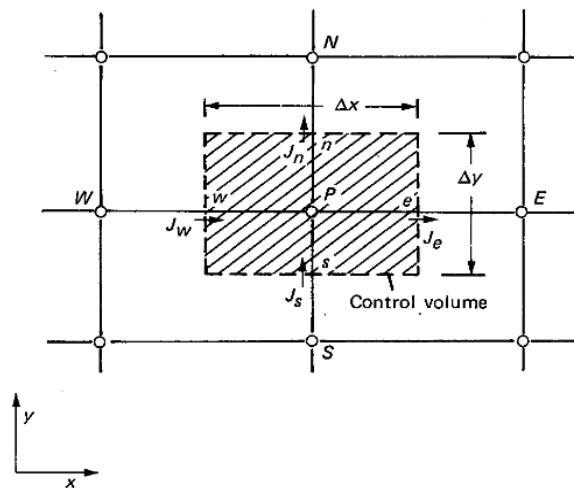


Figura 4.2: Volum de control per la situació 2-D. [1]

L'equació de discretització obtinguda i els coeficients es presenten a continuació:

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + b \quad (4.9)$$

on:

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \quad (4.10)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \quad (4.11)$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \quad (4.12)$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \quad (4.13)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} - S_P \Delta x \Delta y \quad (4.14)$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^0 \phi_P^0 \quad (4.15)$$

i, on:

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{dPE} \quad (4.16)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{dPW} \quad (4.17)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{dPN} \quad (4.18)$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{dPS} \quad (4.19)$$

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y \quad (4.20)$$

$$F_w = (\rho u)_w \Delta y \quad (4.21)$$

$$F_n = (\rho v)_n \Delta x \quad (4.22)$$

$$F_s = (\rho v)_s \Delta y \quad (4.23)$$

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad (4.24)$$

$$P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad (4.25)$$

$$P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad (4.26)$$

$$P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (4.27)$$

on cal tenir en compte que:

- Els subíndexs  $E$  i  $e$  indiquen al node  $i$  a la cara est, respectivament.
- L'operador  $\max(a,b)$  proporciona el valor màxim entre dos valors.
- Les variables amb el superíndex  $0$  indiquen el valor de la variable en l'instant immediatament anterior, mentre que les que no en tenen indiquen que el seu valor és el corresponent a l'instant  $t$  tractat.
- El terme font està linealitzat de la forma  $S_p \phi_p + S_C$ . A més, el terme  $S_p$  cal que sigui negatiu per assegurar que el coeficient  $a_p$  sigui del mateix signe que els altres (positius).
- La superfície travessada per una cara és de valor " $\Delta x \cdot 1$ " o " $\Delta y \cdot 1$ ", mentre que el volum del volum de control és de valor " $\Delta x \Delta y \cdot 1$ ", ja que es considera profunditat unitat.
- La variable  $dPE$  indica la distància entre els nodes  $P$  i  $E$ , per exemple.
- El coeficient  $A(|P|)$  és el coeficient del node  $i+1$  abans exposat, i que depèn del Peclet local a la cara corresponent. La tria de la funció és el que determinarà l'esquema que s'emprarà per a resoldre l'esquema. Aquests esquemes es poden trobar a la Taula 4.1.

Taula 4.1: Funció  $A(P)$  per diferents esquemes. [1]

Scheme	Formula for $A( P )$
Central difference	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybrid	$[[0, 1 - 0.5 P ]]$
Power law	$[[0, (1 - 0.1 P )^5]]$
Exponential (exact)	$ P  / [\exp( P ) - 1]$

D'acord amb els esquemes que recomana Patankar [1], els esquemes emprats en els següents casos seran el *Power-Law* i l'*Exponential*. Aquest últim és la solució exacta, mentre que el primer és l'aproximació quadràtica de la solució exacta.

## 4.4 Cas I: Flux unidimensional amb variació de la variable en la mateixa direcció del flux

### 4.4.1 Introducció

El cas plantejat es troba representat a la Figura 4.3.

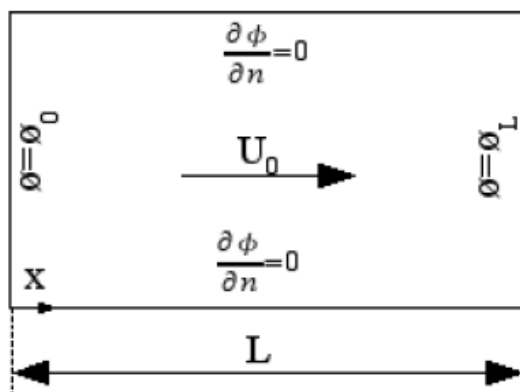


Figura 4.3: Flux unidimensional amb variació de la variable en la direcció del flux. [4]

El camp de velocitats és el següent:

$$u(x, y) = U_0 \quad (4.28)$$

$$v(x, y) = 0 \quad (4.29)$$

Per aquest cas estacionari es coneix la solució analítica, que no depèn del valor de la velocitat:

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(Px/L) - 1}{\exp(P) - 1} \quad (4.30)$$

#### 4.4.2 Resultats

Aquí es presenten els resultats de la simulació d'aquest 1r cas.

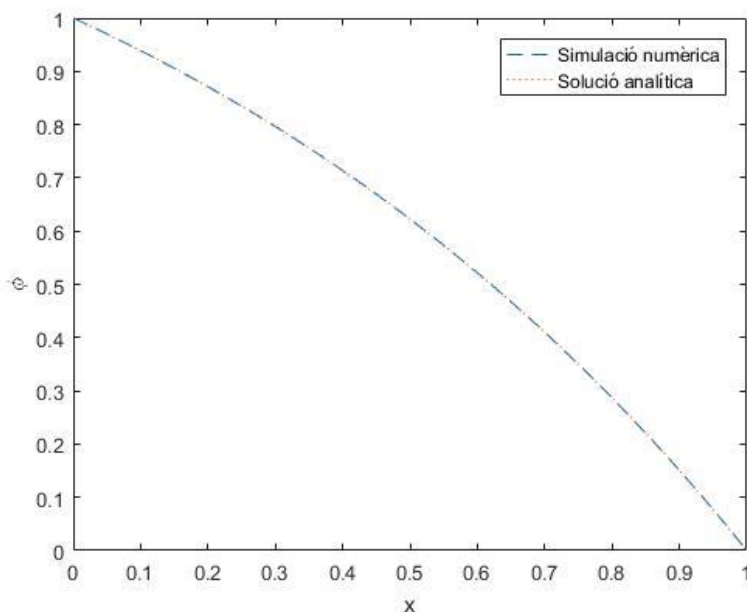


Figura 4.4: Resultats per Peclet 1.

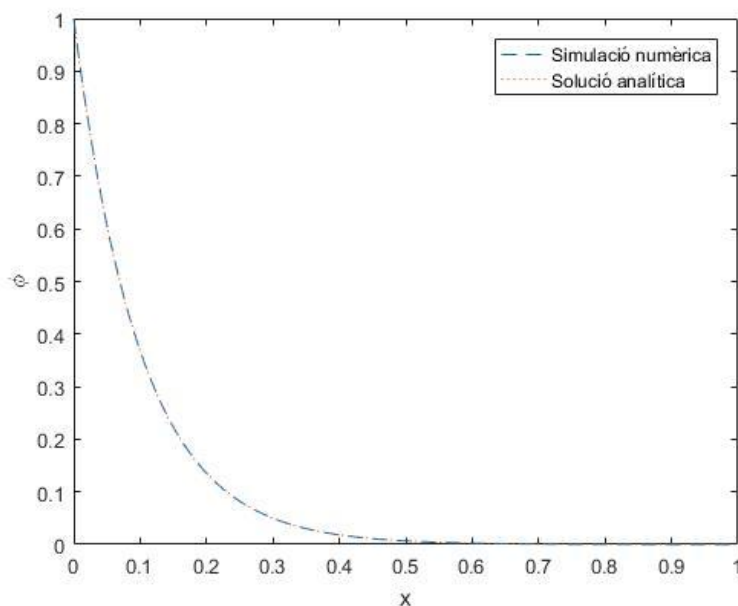


Figura 4.5: Resultats per Peclet -10.

Tal i com es pot apreciar, per diferents números de Peclet la simulació numèrica és idèntica a l'analítica. Això és perquè s'ha emprat l'esquema *Power-law*, que és l'aproximació polinòmica de la solució exacta exponencial.

Com es pot observar a la Figura 4.4, per Peclets baixos, la solució en tot el domini va variant entre el valor imposat a l'entrada i a la sortida,  $\Phi_0 = 1$  i  $\Phi_L = 0$ , respectivament. No obstant, en la Figura 4.5 de Peclet=-10, és un valor alt de signe negatiu, per la qual cosa el valor tendeix a ser el valor de l'extrem dret, ja que la convecció va en el sentit oposat a l'eix  $x$ .

## 4.5 Cas II: Flux unidimensional amb variació de la variable en direcció perpendicular al flux

### 4.5.1 Introducció

El cas plantejat es troba representat a la Figura 4.6

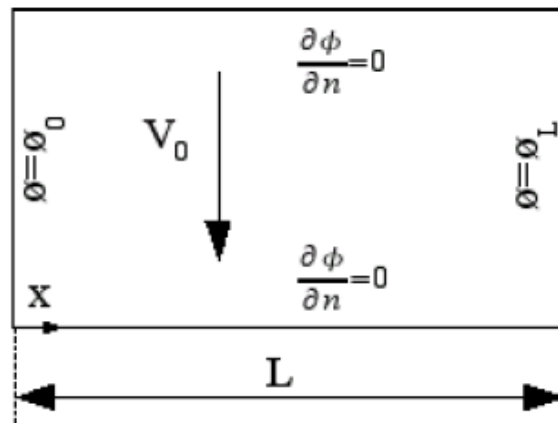


Figura 4.6: Flux unidimensional amb variació de la variable en direcció perpendicular al flux. [4]

El camp de velocitats és el següent:

$$u(x, y) = 0 \quad (4.31)$$

$$v(x, y) = V_0 \quad (4.32)$$

Per aquest cas es coneix la solució analítica, que no depèn del valor de la velocitat ni del Peclet:

$$\phi = \phi_0 + \frac{\phi_L - \phi_0}{L} x \quad (4.33)$$



## 4.5.2 Resultats

Aquí es presenten els resultats de la simulació d'aquest 2n cas.

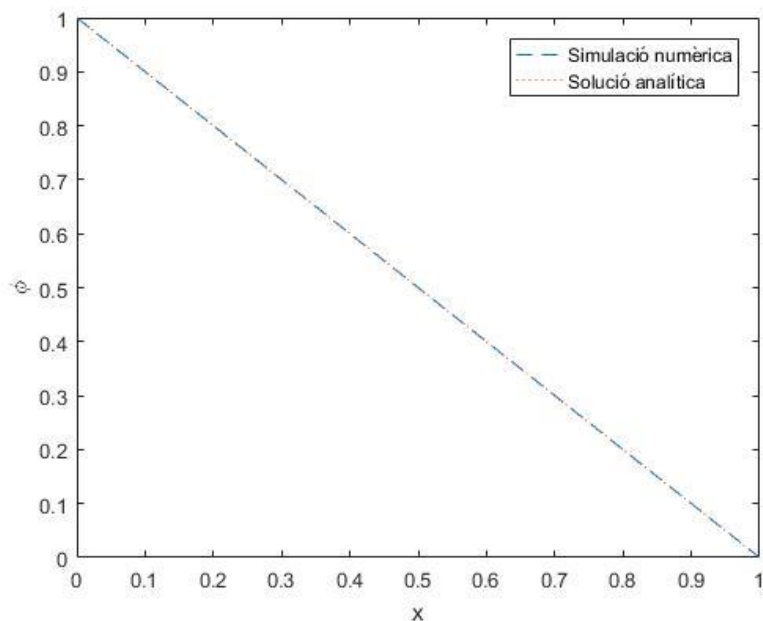


Figura 4.7: Resultats del 2n cas.

Tal i com es pot apreciar, la simulació és idèntica als valors obtinguts amb la solució analítica.

## 4.6 Cas III: Flux diagonal

### 4.6.1 Introducció

Aquest cas tracta d'un flux contingut en la diagonal del domini rectangular, i es troba representat a la Figura 4.8.

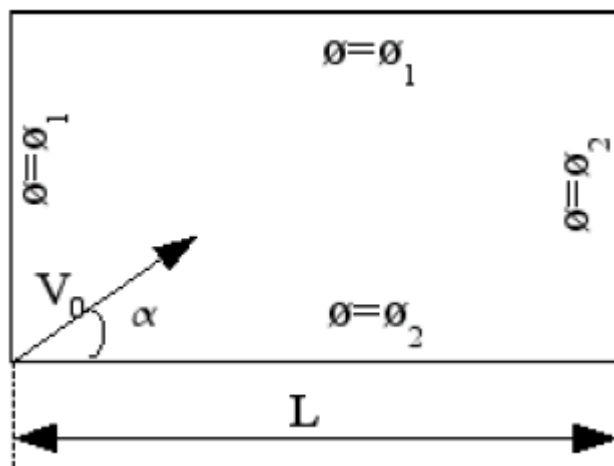


Figura 4.8: Cas de flux diagonal. [4]

El camp de velocitats és el següent:

$$u(x, y) = V_0 \cdot \cos \alpha \quad (4.34)$$

$$v(x, y) = V_0 \cdot \sin \alpha \quad (4.35)$$

Per les condicions de contorn donades a la Figura 4.8 i un número de Peclet total infinit, es coneix la solució. Aquesta és  $\phi = \phi_1$  per sobre de la diagonal i  $\phi = \phi_2$  per sota de la diagonal.

Cal comentar que la solució és molt sensible a la mida de la malla, ja que per malles bastes es cometten errors per l'aparició de la falsa difusió.

A [1] es pot trobar una equació proposada per avaluar la falsa difusió per un cas bidimensional:

$$\Gamma_{false} = \frac{\rho |\bar{v}| \cdot \Delta x \Delta y \cdot \sin 2\alpha}{4(\Delta y \cdot \sin^3 \alpha + \Delta x \cdot \cos^3 \alpha)} \quad (4.36)$$

#### 4.6.2 Resultats i estudi

A continuació es presenten els resultats i es fa un estudi del problema del cas proposat de flux diagonal.

Les següents figures mostren el mapa de la variable general  $\phi$  per una malla de 100x100 per diferents números de Peclet. En concret, la Figura 4.9 mostra la solució per un Peclet de 1, la Figura 4.10 per un Peclet de 100 i la Figura 4.11 per un Peclet d'1 milió.

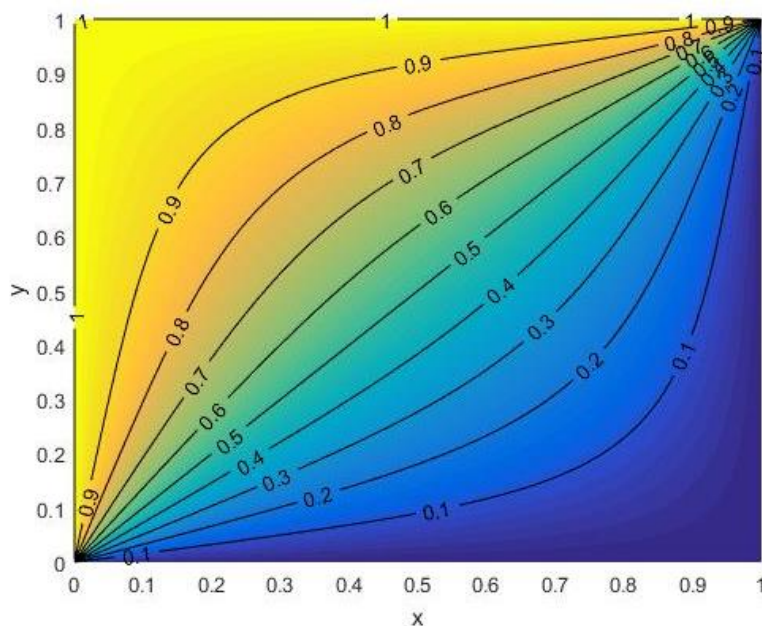


Figura 4.9: Solució del flux diagonal per malla de 100x100 i Peclet d'1.

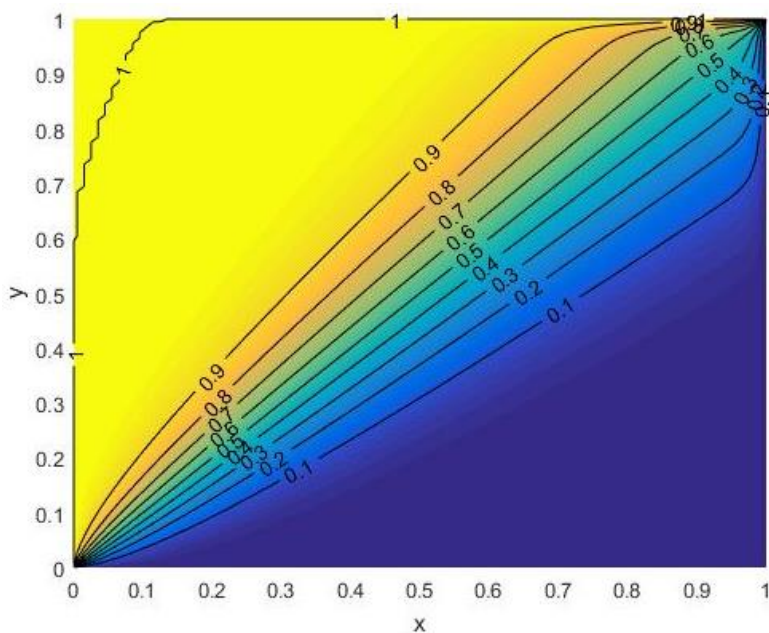


Figura 4.10: Solució del flux diagonal per malla de 100x100 i Peclet de 100.

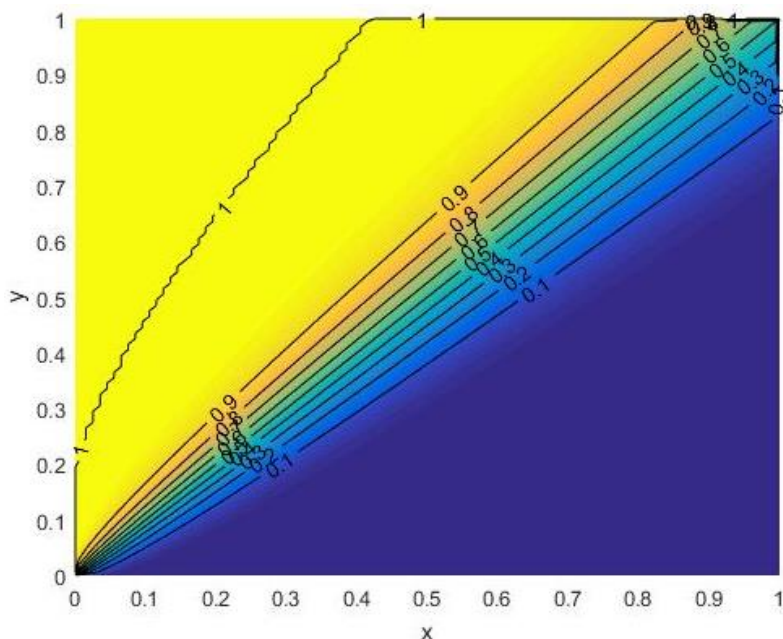


Figura 4.11: Solució del flux diagonal per malla de 100x100 i Peclet d'1 M.

Tal i com es pot comprovar en aquestes solucions, per una mateixa malla, a l'augmentar el Peclet la falsa difusió disminueix i s'apropa a la solució real en què per sobre de la diagonal el valor de la variable és 1 i per sota és 0.

El següent estudi que es farà per veure que les simulacions amb el codi aporten resultats raonables físicament, serà de manera inversa a la que s'ha fet anteriorment. Les següent figures mostren el mapa de la variable general  $\phi$  per un mateix número de Peclet d'1 milió per diferents mides de malla. En concret, la ja mostrada anteriorment Figura 4.11 mostra la solució per un una malla de 100x100, la Figura 4.12 per una malla de 500x500 i la Figura 4.13 per una malla de 1000x1000.

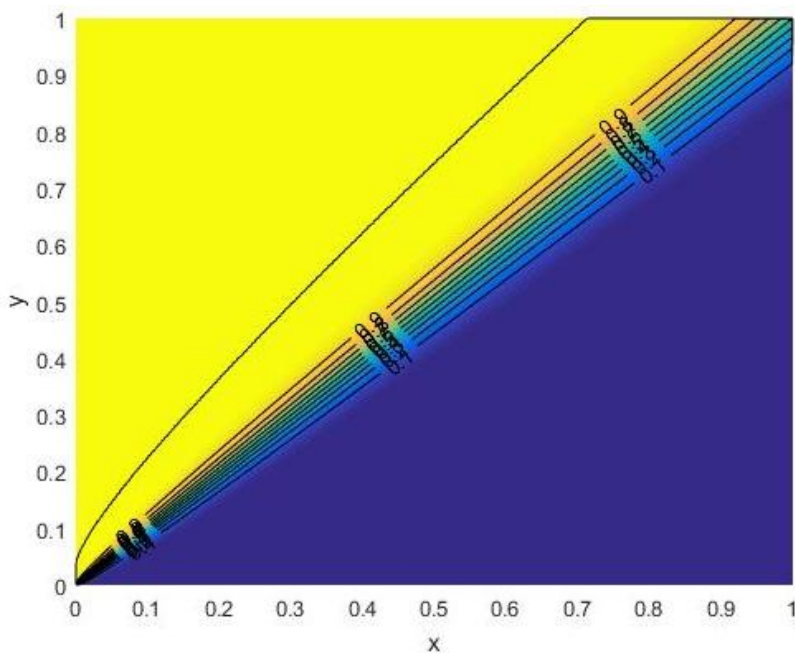


Figura 4.12: Solució del flux diagonal per malla de 500x500 i Peclet d'1M.

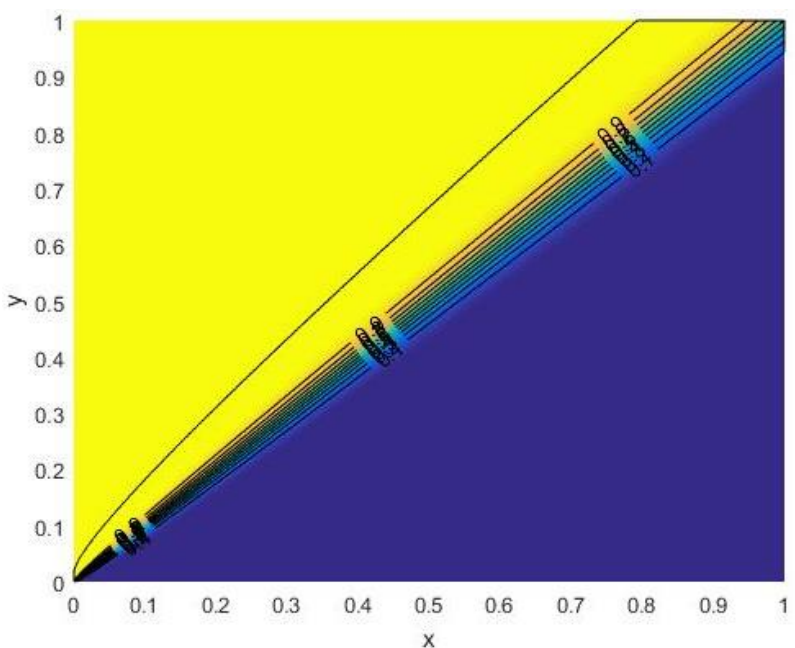


Figura 4.13: Solució del flux diagonal per malla de 1000x1000 i Peclet d'1 M.

Tal i com es pot comprovar, a l'augmentar la malla també es redueix el fenomen de la falsa difusió.

Finalment, es va simular, com en l'últim cas, una malla de 1000x1000 però en comptes de amb un Peclet de  $1e6$ , es va utilitzar un Peclet de  $1e12$ .

Els resultats van millorar lleugerament, i la imatge obtinguda és millor però molt similar a la de la Figura 4.13.

## 4.7 Cas IV: Flux solenoïdal

### 4.7.1 Introducció

Aquest cas també s'anomena *Smith-Hutton* ja que van ser els que van proposar aquest cas en què el flux segueix una trajectòria solenoïdal. Aquest cas es troba representat en la Fig.

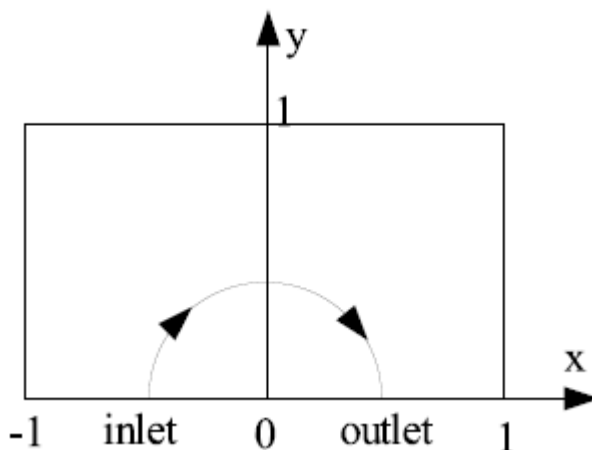


Figura 4.14: Esquema del problema de flux solenoïdal. [4]

El camp de velocitats és el següent:

$$u(x, y) = 2y(1 - x^2) \quad (4.37)$$

$$v(x, y) = -2x(1 - y^2) \quad (4.38)$$

I quant a les condicions de contorn, només la de la sortida és de *Neumann* mentre que la resta tenen una condició de *Dirichlet*.

A la sortida:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (4.39)$$

Mentre que a l'entrada:

$$\phi = 1 + \tanh((2x + 1)\alpha) \quad (4.40)$$

I per la resta de contorns:

$$\phi = 1 - \tanh(\alpha) \quad (4.41)$$

On  $\alpha$  és una constant sense sentit físic de valor 10.

El perfil de la variable  $\phi$  a l'entrada es representa en la Figura 4.15.

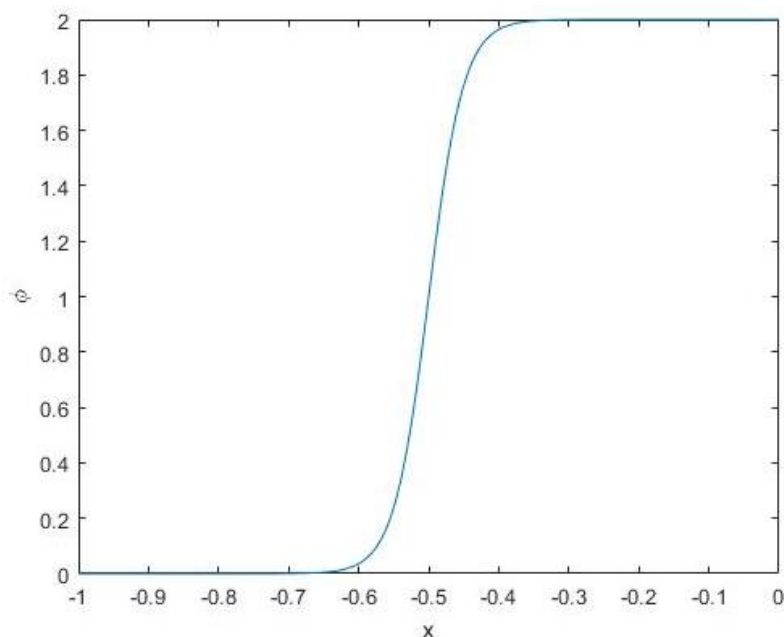


Figura 4.15: Perfil de la variable a l'entrada.

#### 4.7.2 Resultats i estudi

A continuació es mostren els resultats obtinguts.

El guió del CTTC ([4]) ofereix una sèrie de resultats per diferents valors de la relació  $\rho/\Gamma$ . Aquests resultats s'empraran com a referència per comparar amb els resultats obtinguts a les simulacions.

Primer es tractarà el cas de  $\rho/\Gamma = 10$ .

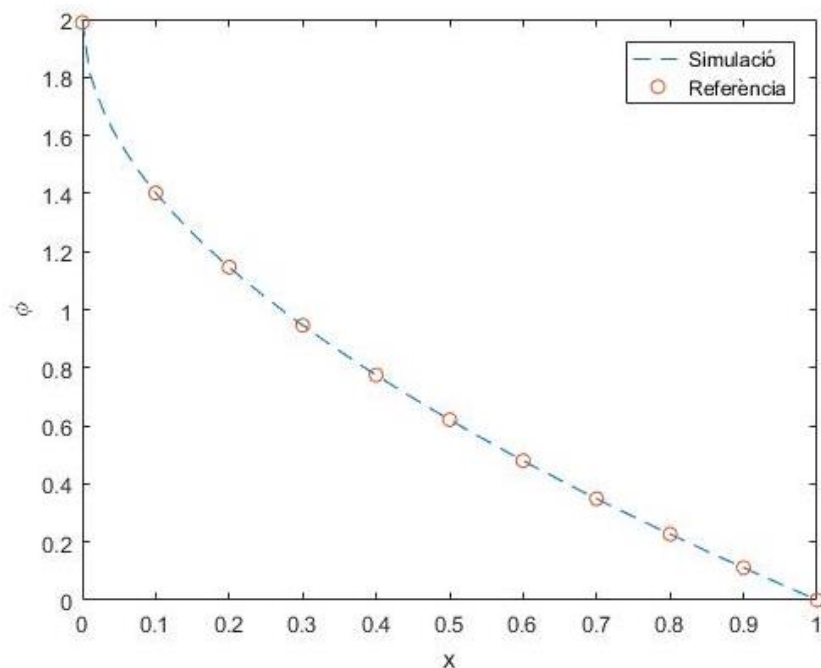


Figura 4.16: Resultats a la sortida del flux solenoïdal per  $\rho/\Gamma = 10$ .

Com es pot observar a la Figura 4.16, la simulació és idèntica als valors de referència. En aquest cas, per mides de malla petites, la simulació igualment dona valors molt propers donat que en aquest cas hi ha un predomini de la difusió.

En la Figura 4.17 es pot observar el mapa de la variable general.

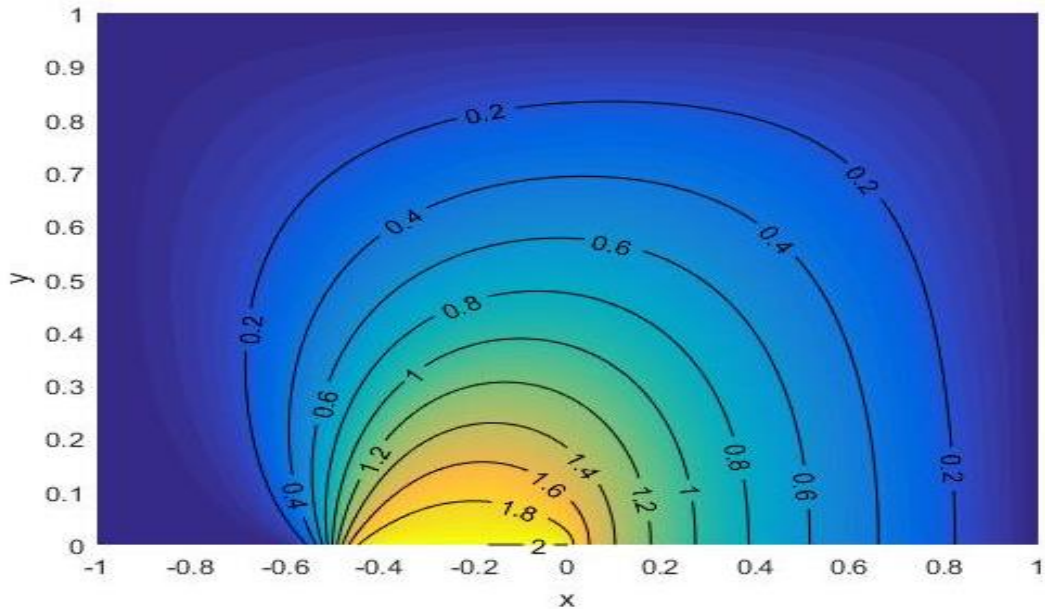


Figura 4.17: Mapa de la variable general per  $\rho/\Gamma = 10$ .

Ara es tractarà el cas de  $\rho/\Gamma = 1\ 000$ .

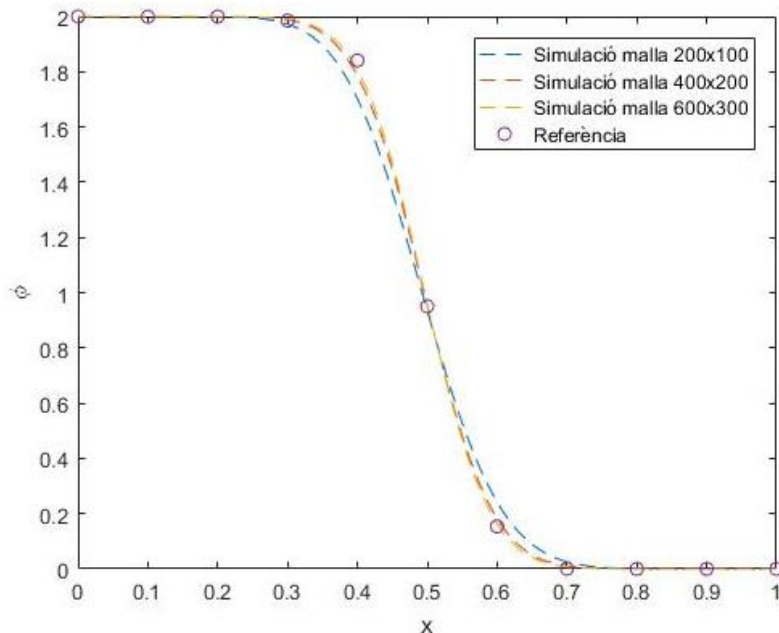


Figura 4.18: Resultats a la sortida del flux solenoïdal per  $\rho/\Gamma = 1\ 000$ .

En aquest cas, com es pot observar a la Figura 4.18, la mida de la malla sí importa. Hi ha cert error però a mesura que s'augmenta la malla s'aprecia com la solució obtinguda s'aproxima cada cop més a la solució de referència.

A la Figura 4.19 es pot observar el mapa de la variable general.

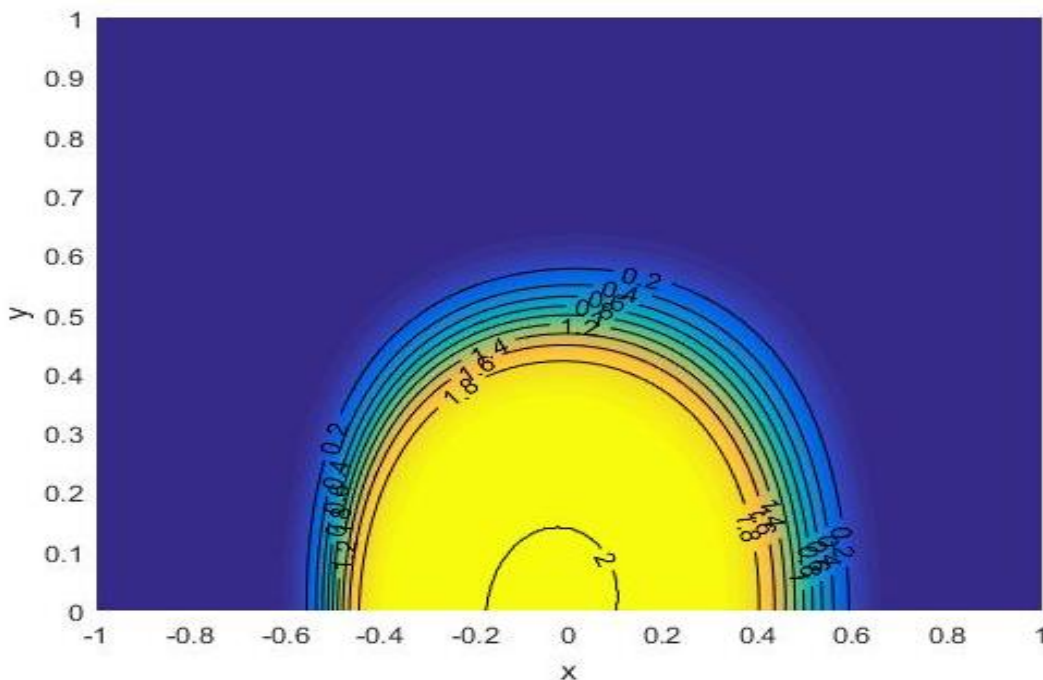


Figura 4.19: Mapa de la variable general per  $\rho/\Gamma = 1\,000$ .

Finalment es tractarà el cas de  $\rho/\Gamma = 1\,000\,000$ .

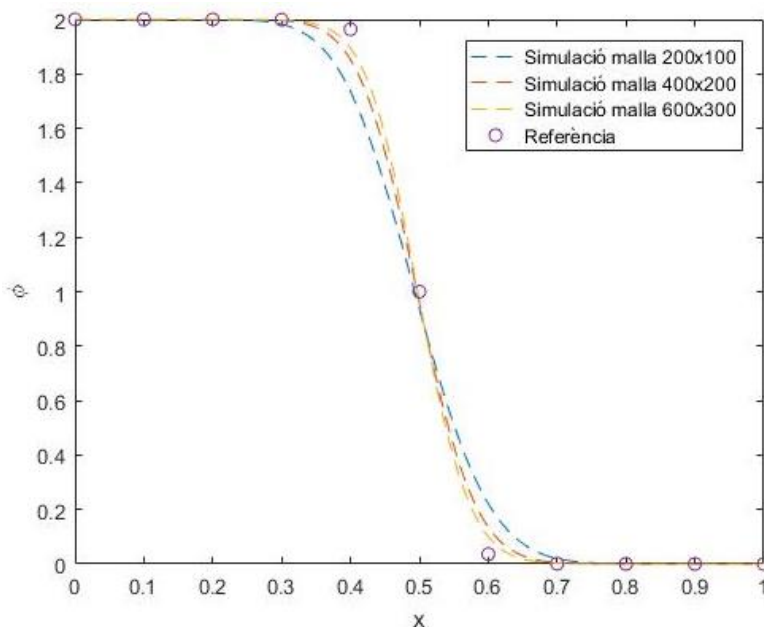


Figura 4.20: Resultats a la sortida del flux solenoïdal per  $\rho/\Gamma = 1\,000\,000$ .

En aquest últim cas succeeix igual que en l'anterior: la mida de la malla importa i a mesura que s'augmenta la solució s'apropa cada vegada més a la de referència.

A la Figura 4.21 es pot observar el mapa de la variable general.



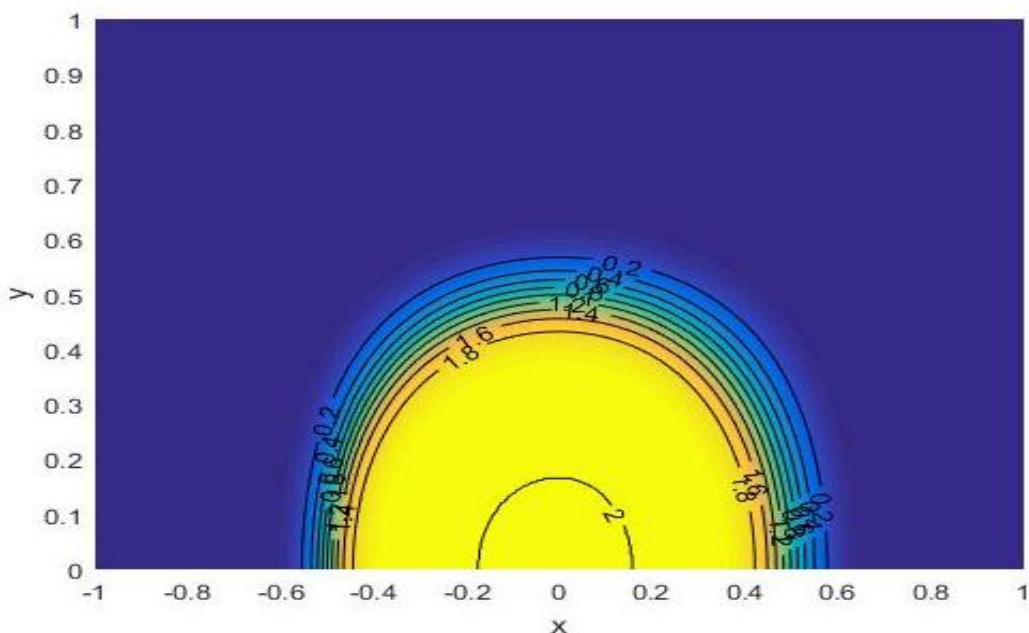


Figura 4.21: Mapa de la variable general per  $\rho/\Gamma = 1\,000\,000$ .

Per última instància, es mostrarà les línies de corrent del problema. A [3] es facilita la següent expressió per la funció de corrent:

$$\psi = -(1 - x^2)(1 - y^2) \tag{4.42}$$

D'aquesta manera, emprant l'anterior equació, s'han calculat les línies de corrent, que no són més que el mapa de iso funcions de corrent. Es representa en la Figura 4.22.

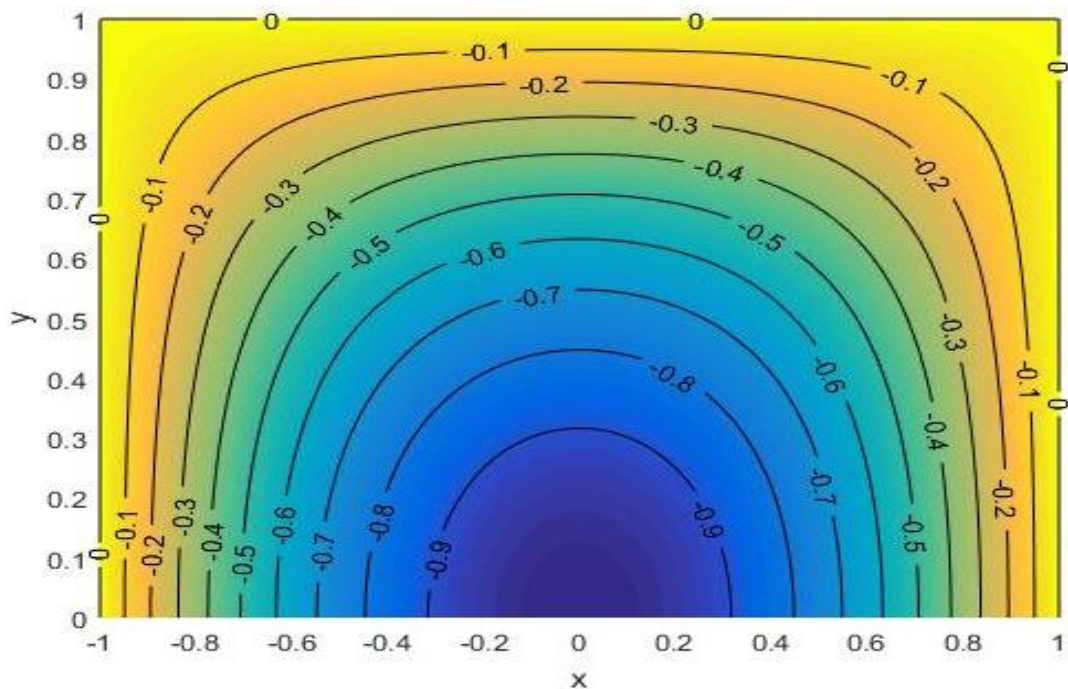


Figura 4.22: Línies de corrent del flux solenoïdal.

## 4.8 Comparativa de solvers

A l'acabar el capítol de la convecció-difusió, es va acabar d'implementar el *solver* del *Line-by-Line*.

D'aquesta manera, a continuació es realitzarà una comparativa entre aquest i el mètode *Gauss-Seidel* emprat fins ara.

Per tal de realitzar aquesta comparativa, s'emprarà l'últim cas, el del flux solenoïdal, amb el cas intermig de  $\rho/\Gamma = 1\,000$ , ja que tant la convecció com la difusió són importants.

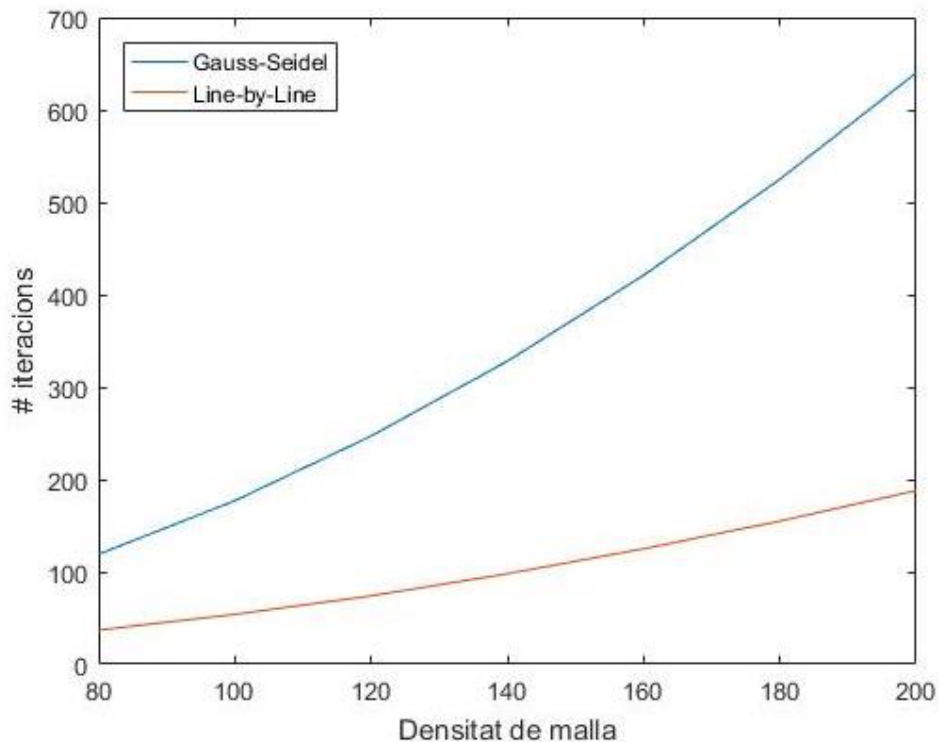


Figura 4.23: Comparativa entre els solvers de *Gauss-Seidel* i *Line-by-Line*.

El resultat obtingut d'aquesta comparativa es representa en la Figura 4.23, on clarament es pot observar com el mètode *Line-by-Line* necessita de menys iteracions que el *Gauss-Seidel* per obtenir una solució amb la mateixa precisió.

A més, a l'augmentar la malla, la tendència ha necessitar més iteracions pel *Gauss-Seidel* es dispara mentre que l'increment d'iteracions necessàries del *Line-by-Line* no és tan gran.

## 5 Capítol III: Equacions de *Navier-Stokes*

### 5.1 Introducció teòrica

Les equacions de *Navier-Stokes* ja es van presentar en la introducció d'aquest estudi. Cal comentar, però, que el cas que es tractarà posteriorment no necessita de l'equació de l'energia, és per això que en aquesta introducció teòrica s'ometrà.

Les hipòtesis bàsiques de treball seran les següents:

- Convecció forçada
- Fluid Newtonià
- Propietats termofísiques constants
- Dissipació viscosa negligible
- Flux incompressible
- Flux de viscositat constant

Així les equacions de conservació de la massa i de quantitat de moviment es poden reescriure com:

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v} \quad (5.2)$$

Quant a la tècnica emprada per resoldre les equacions de *Navier-Stokes*, serà el Mètode de Pas Fraccionat (FSM, de l'anglès *Fractional Step Method*).

La base teòrica és el Teorema de *Helmholtz-Hodge*, el qual anuncia que un camp vectorial té una descomposició única en un camp de gradient pur i un vector de divergència nul·la.

Això es pot aplicar ja que el flux és incompressible, i per tant el gradient de la velocitat és nul (5.1), mentre que la pressió és un camp de gradient pur.

Retornant a les equacions, l'equació (5.2) es pot reescriure com:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = R(\bar{v}) - \nabla p \quad (5.3)$$

On:

$$R(\bar{v}) = -\rho(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} + \mu \nabla^2 \bar{v} \quad (5.4)$$

Si s'integren les equacions de conservació de massa (5.1) i de quantitat de moviment (5.4) respecte el temps:

$$\nabla \cdot \bar{v}^{n+1} = 0 \quad (5.5)$$

$$\rho \frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} R(\bar{v}^n) - \frac{1}{2} R(\bar{v}^{n-1}) - \nabla p^{n+1} \quad (5.6)$$

En aquest estadi, si s'aplica el teorema de *Helmholtz-Hodge*, es pot obtenir la següent descomposició única:

$$\bar{v}^P = \bar{v}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (5.7)$$

On  $\bar{v}^P$  és la velocitat predictora, una solució aproximada. Introduint aquesta descomposició de (5.7) a l'equació (5.6) de quantitat de moviment, es pot obtenir una equació de velocitat projectada:

$$\bar{v}^P = \bar{v}^n + \frac{\Delta t}{\rho} \left[ \frac{3}{2} R(\bar{v}^n) - \frac{1}{2} R(\bar{v}^{n-1}) \right] \quad (5.8)$$

Per altra banda, si s'aplica l'operador divergència sobre la descomposició única (5.7), s'obté una equació per la pressió: l'equació de Poisson.

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \bar{v}^P \quad (5.9)$$

Finalment, la variable que es vol calcular  $\bar{v}^{n+1}$  s'obté reescriuint (5.7):

$$\bar{v}^{n+1} = \bar{v}^P - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (5.10)$$

D'aquesta manera es pot resumir el FSM en 5 passos:

- 1) **Evaluació de  $R(\bar{v}^n)$**
- 2) **Càlcul de la velocitat predictora  $\bar{v}^P$**
- 3) **Resolució del sistema d'equacions del mapa de pressions**
- 4) **Obtenció de la velocitat desitjada  $\bar{v}^{n+1}$**
- 5) **Nou *time-step***

En aquest mètode es poden donar solucions sense sentit físic on el gradient de pressions es desacobli del camp de velocitats (per més informació vegeu [5]).

Per evitar això, s'emprarà una malla diferent, una malla desplaçada (en anglès, *staggered mesh*), que és bàsicament que els nodes de càlcul de les propietats convectives estan desplaçats respecte els nodes de la malla principal on es calculen totes les variables escalars tals com la pressió.

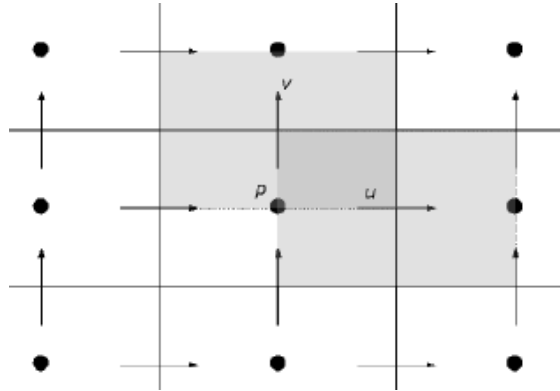


Figura 5.1: Malla desplaçada. [5]

A la Figura 5.1 s'esquematitza la malla desplaçada, on la velocitat horitzontal es denomina com  $u$  i la velocitat vertical com  $v$ .

Per altra banda, respecte a la malla, en el codi s'ha implementat una malla no uniforme de concentració hiperbòlica amb la metodologia exposada en [5]. Aleshores, segons el factor d'estretament  $k$  que es pot triar, la malla pot ser uniforme o no uniforme amb una forta concentració en els vèrtexs del problema que s'exposarà posteriorment.

## 5.2 Avaluació dels passos

A continuació s'exposarà tant les equacions de discretització, com d'una manera més general, el mètode per calcular i obtenir totes les variables de cadascun dels passos del FSM.

En primera instància, pel càlcul de  $R$ , s'empra una equació per la velocitat  $u$  i una per la velocitat  $v$  que són del tot anàlogues:

$$\begin{aligned}
 R(u)\Omega_{xP} = & -[\dot{m}_e u_e + \dot{m}_w u_w + \dot{m}_n u_n + \dot{m}_s u_s] \\
 & + \left[ \mu_e \frac{u_E - u_P}{dPE} A_e - \mu_w \frac{u_P - u_W}{dPW} A_w \right. \\
 & \left. + \mu_n \frac{u_N - u_P}{dPN} A_n - \mu_s \frac{u_P - u_S}{dPS} A_s \right]
 \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}
 R(v)\Omega_{yP} = & -[\dot{m}_e v_e + \dot{m}_w v_w + \dot{m}_n v_n + \dot{m}_s v_s] \\
 & + \left[ \mu_e \frac{v_E - v_P}{dPE} A_e - \mu_w \frac{v_P - v_W}{dPW} A_w \right. \\
 & \left. + \mu_n \frac{v_N - v_P}{dPN} A_n - \mu_s \frac{v_P - v_S}{dPS} A_s \right]
 \end{aligned} \quad (5.12)$$

On  $\Omega_P$  és el volum del volum de control desplaçat de la velocitat corresponent, i els fluxos  $\dot{m}$  volumètrics s'avaluen amb interpolacions de conservació de massa, mentre que la propietat de transport  $u$  o  $v$  s'avalua amb esquemes numèrics convectius.

El 2n pas és de càlcul directe de la velocitat predictor  $\bar{v}^P$  amb l'equació (5.8) un cop s'ha calculat la  $R$ .

El 3r pas és on es gasta més potència computacional ja que cal resoldre un sistema d'equacions definit per l'equació de Poisson. La discretització porta a la següent equació de discretització:

$$a_P p_P^{n+1} = a_E p_E^{n+1} + a_W p_W^{n+1} + a_N p_N^{n+1} + a_S p_S^{n+1} + b_P \quad (5.13)$$

On:

$$a_E = \frac{A_e}{dPE} \quad (5.14)$$

$$a_W = \frac{A_w}{dPW} \quad (5.15)$$

$$a_N = \frac{A_n}{dPN} \quad (5.16)$$

$$a_S = \frac{A_s}{dPS} \quad (5.17)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (5.18)$$

$$b_P = -\frac{1}{\Delta t} [(\rho u^P)_e A_e - (\rho u^P)_w A_w + (\rho v^P)_n A_n - (\rho v^P)_s A_s] \quad (5.19)$$

On aquesta última equació seria 0 per algoritmes com el SIMPLE on el terme  $b_P$  contindria l'equació de la conservació de la massa, però no es compleix això en aquest cas, ja que les velocitats emprades són les predictor i no les reals.

Finalment, en el 4t pas, es pot obtenir el valor desitjat de les velocitats en l'instant de càlcul mitjançant l'equació (5.10). Quant a la nomenclatura, els nodes de la malla principal  $A$  i  $B$  van en l'ordre de l'abecedari en el sentit creixent de la coordenada  $x$  i/o  $y$ .

$$u_P^{n+1} = u_P^P - \frac{\Delta t}{\rho} \cdot \frac{p_B^{n+1} - p_A^{n+1}}{dAB} \quad (5.20)$$

$$v_P^{n+1} = v_P^P - \frac{\Delta t}{\rho} \cdot \frac{p_B^{n+1} - p_A^{n+1}}{dAB} \quad (5.21)$$

En última instància cal decidir si cal un nou *time-step*, una nova integració temporal i un nou salt en la coordenada del temps.

El  $\Delta t$  emprat serà adaptatiu i es calcularà en cada iteració segons la condició de *Courant-Friedrich-Levy*, on es triarà el mínim (5.24) entre els *time-steps* en relació a la convecció (5.22) i a la difusió (5.23):

$$\Delta t_{conv} = \min\left(0.35 \frac{\Delta x}{|\bar{v}|}\right) \quad (5.22)$$

$$\Delta t_{dif} = \min\left(0.20 \frac{\rho \Delta x \Delta y}{\mu}\right) \quad (5.23)$$

$$\Delta t = \min(\Delta t_{conv}, \Delta t_{dif}) \quad (5.24)$$

Per altra banda, en el cas que s'analitzarà, es voldrà assolir l'estat estacionari. Aquesta condició s'avaluarà mitjançant la següent expressió:

$$\max\left(\frac{|\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n|}{\Delta t}\right) \quad (5.25)$$

On es busca la màxima diferència dels valors de les velocitats en l'instant actual i l'immediatament anterior.

Quan l'expressió (5.25) és menor a un criteri de convergència, per exemple, menor a  $10^{-3}$ , es considera que s'ha assolit l'estat estacionari i s'acaba la resolució del problema.

### 5.3 Introducció cas: *Driven-Cavity*

El cas tractat és el d'una cavitat quadrada on les parets són estàtiques menys la de dalt, que es mou a una velocitat donada horitzontal  $u_{ref}$ .

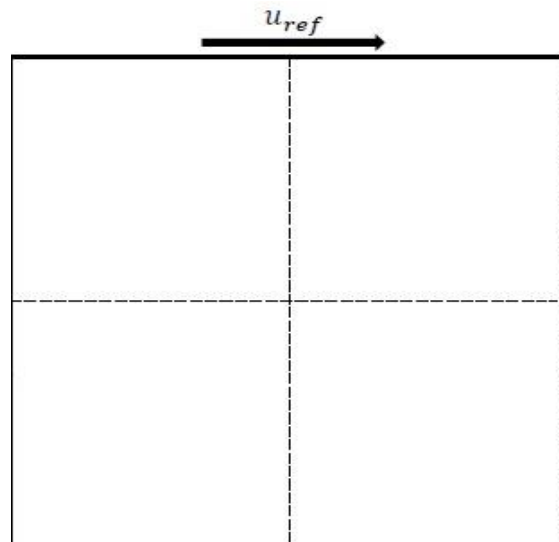


Figura 5.2: Esquema del cas tractat. [5]

D'aquesta manera les condicions de contorn queden definides a tots els voltants com:

$$v = 0 \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (5.27)$$

I en la paret superior:

$$u = u_{ref} \quad (5.28)$$

I per la resta de parets:

$$u = 0 \quad (5.29)$$

Per comparar els resultats de les simulacions, s'agafaran com a referència els de l'article de [7]. Aquests resultats donen alguns valors de la velocitat  $u$  per la línia vertical central de l'esquema de la Figura 5.2 i la velocitat  $v$  per la línia horitzontal central per diferents números de Reynolds.



## 5.4 Esquemes de convecció-difusió

En aquest capítol s'empraran altres esquemes de convecció-difusió que els emprats en el capítol anterior que eren els recomanats per Patankar [1]. Així, es pot estudiar-ne més.

D'aquesta manera, s'empraran altres esquemes trobats a [3], l'UDS (*Upwind Direct Scheme*) i el CDS (*Central Difference Scheme*), com també un esquema de més alt ordre trobat a [8], l'SMART.

L'UDS és un esquema de 1r ordre, mentre que el CDS és de 2n ordre i l'SMART de 2n-4t ordre.

## 5.5 Estudi de convergència

Atès que la potència computacional de l'ordinador en què es duu a terme l'estudi no és elevada, es farà un petit estudi de convergència computant l'error entre la simulació i els valors de referència, a més de veure el temps que triga a fer-se les simulacions.

La situació simulada ha estat amb un Reynolds de 100 i l'esquema emprat han estat l'UDS i l'SMART.

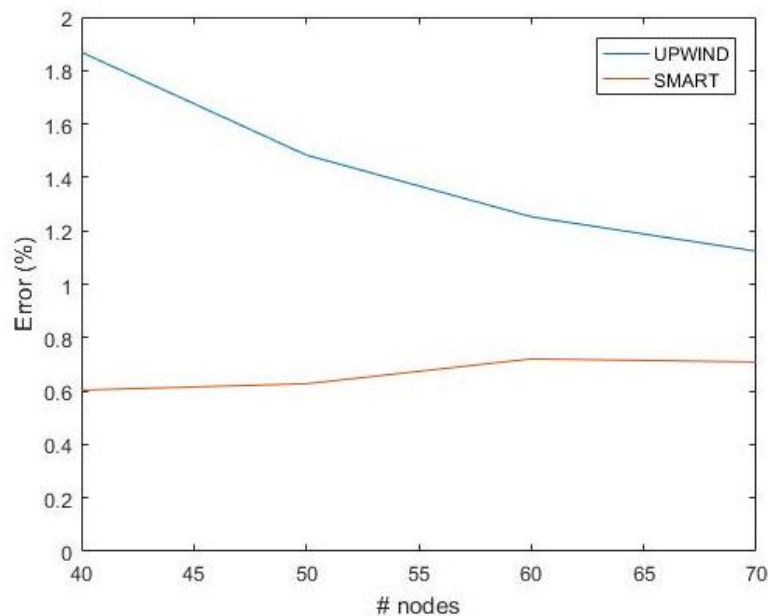


Figura 5.3: Error computat en l'estudi de convergència.

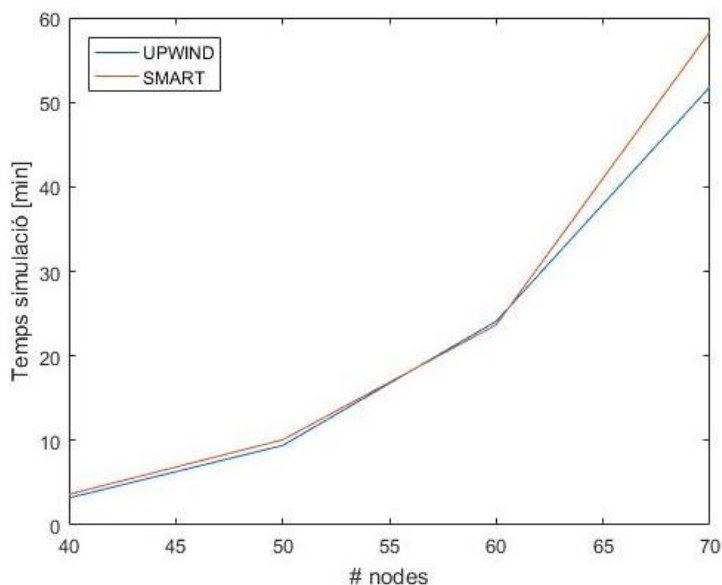


Figura 5.4: Temps de simulació en l'estudi de convergència.

Tal i com es pot apreciar en la Figura 5.3, l'SMART té un percentatge d'error bastant menor que l'UDS.

En la Figura 5.4 s'aprecia com el temps de simulació augmenta a l'augmentar la mida de la malla.

Tot i que l'SMART presenti un temps requerit de simulació lleugerament superior a l'UDS, l'ús del primer esquema està justificat doncs l'error és bastant menor. En conclusió, per les limitacions computacionals de l'ordinador emprat, l'estudi que es realitzarà serà preliminar i les simulacions que es realitzaran seran de malla de 40x40 a 50x50 aproximadament.

## 5.6 Cas A: Reynolds 100

Aquest primer cas es caracteritza per un baix número de Reynolds i per la consegüent laminaritat del flux.

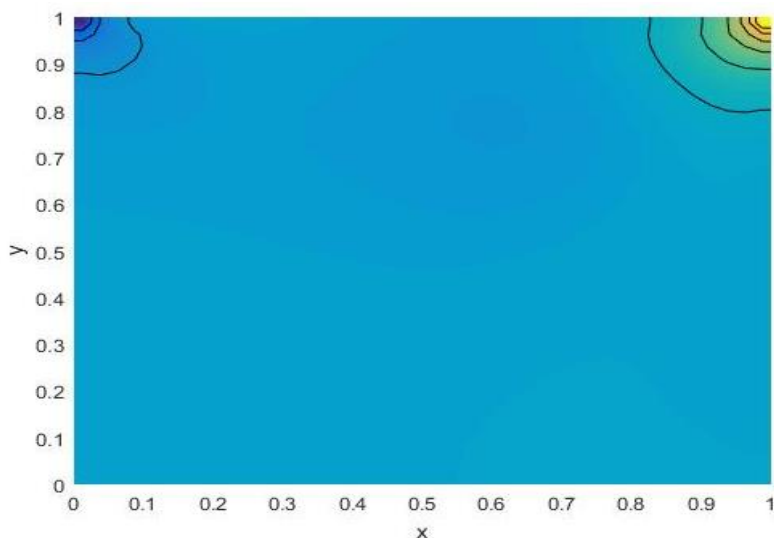


Figura 5.5: Mapa de pressions.

El mapa de pressions té un aspecte similar pels números de Reynolds tractats, així que només es mostrarà el de la Figura 5.5, corresponent a Reynolds 100.

Bàsicament, es produeix una zona de baixa pressió en el vèrtex superior esquerre i una zona d'alta pressió en el vèrtex superior dret. Això és causat pel lliscament de la paret superior cap a la dreta.

Cal comentar que per la resolució d'aquest problema el valor en si de la pressió no és important, sinó la diferència de pressions que causa el moviment del fluid.

La solució en les línies centrals es mostra a continuació a la Figura 5.6 i la Figura 5.7.

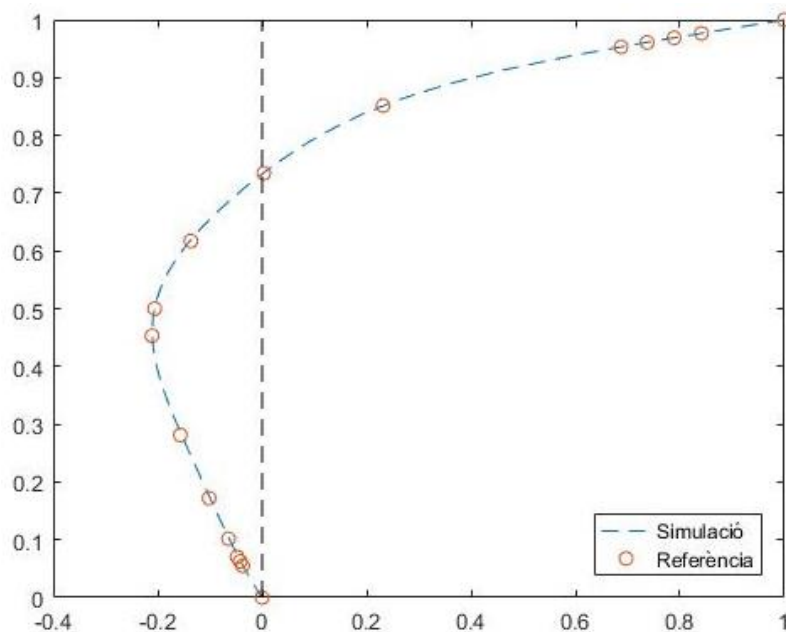


Figura 5.6: Perfil de velocitats  $u$  en la línia central per Reynolds 100.

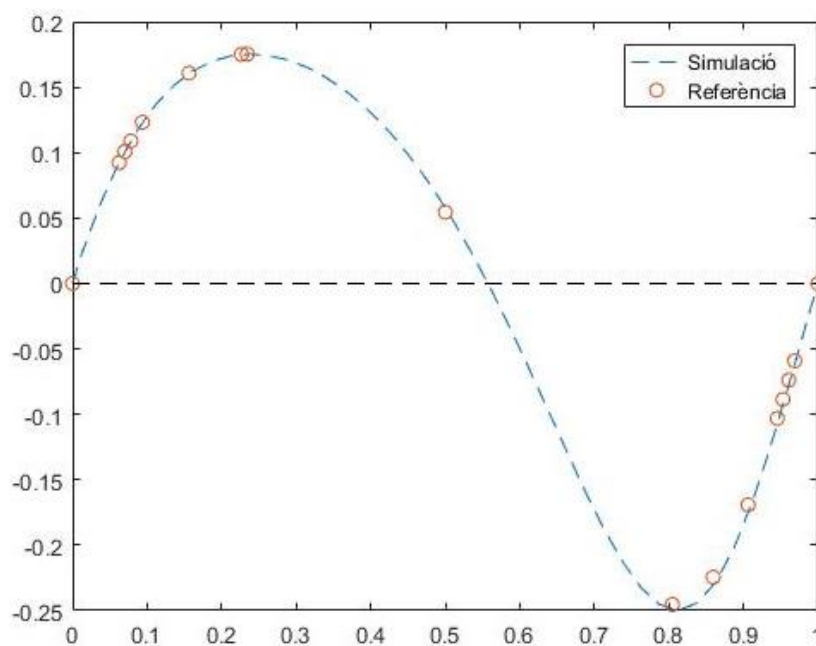


Figura 5.7: Perfil de velocitats  $v$  en la línia central per Reynolds 100.

Tal i com es pot comprovar en els perfils de velocitats anteriors, ressegueixen perfectament el perfil marcat per les dades de referència.

Per altra banda, a la Figura 5.8 es representa el mapa del mòdul de la velocitat.

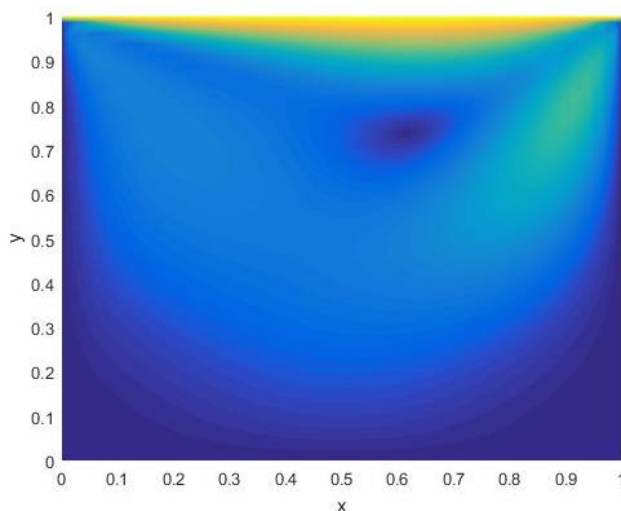


Figura 5.8: Mapa del mòdul de la velocitat per Reynolds 100.

Posteriorment es van calcular les funcions de corrent. Les funcions de corrent estan definides per les següent equacions:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.30)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (5.31)$$

Emprant qualsevol de les dues equacions anteriors amb diferències finites, es pot trobar el camp escalar de la funció de corrent  $\psi$ .

D'aquesta manera, s'han calculat les línies de corrent, que no són més que el mapa de *iso* funcions de corrent.

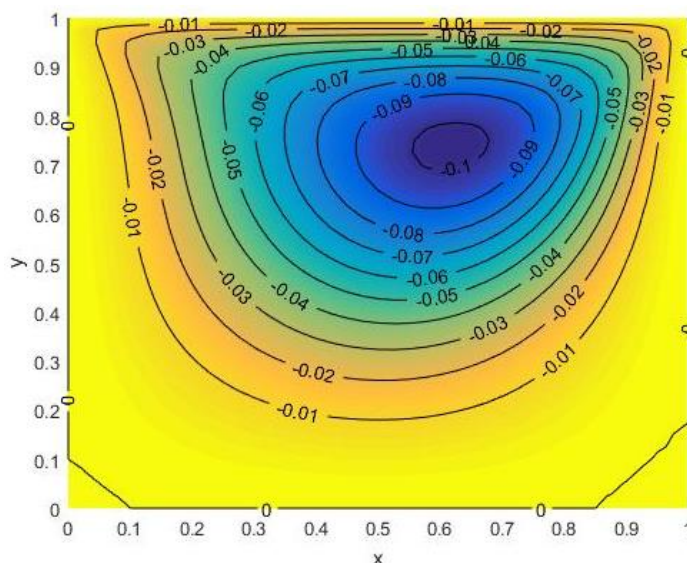


Figura 5.9: Línies de corrent per Reynolds 100.

## 5.7 Cas B: Reynolds 1000

La solució de les línies centrals es mostra a la Figura 5.10 i la Figura 5.11.

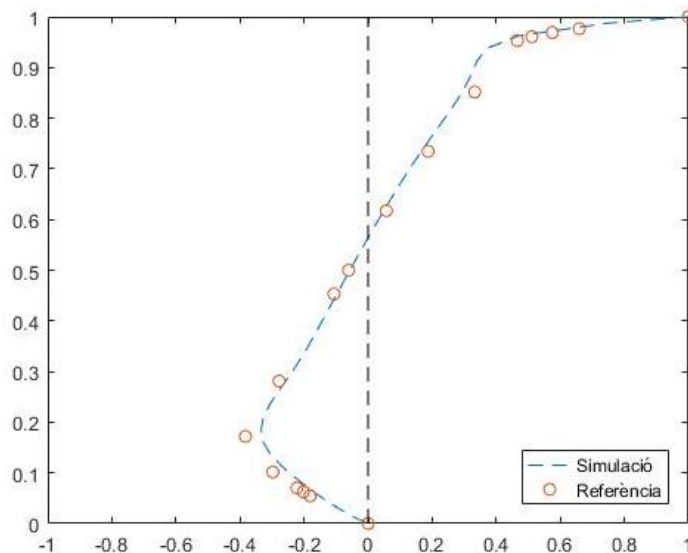


Figura 5.10: Perfil de velocitats  $u$  en la línia central per Reynolds 1000.

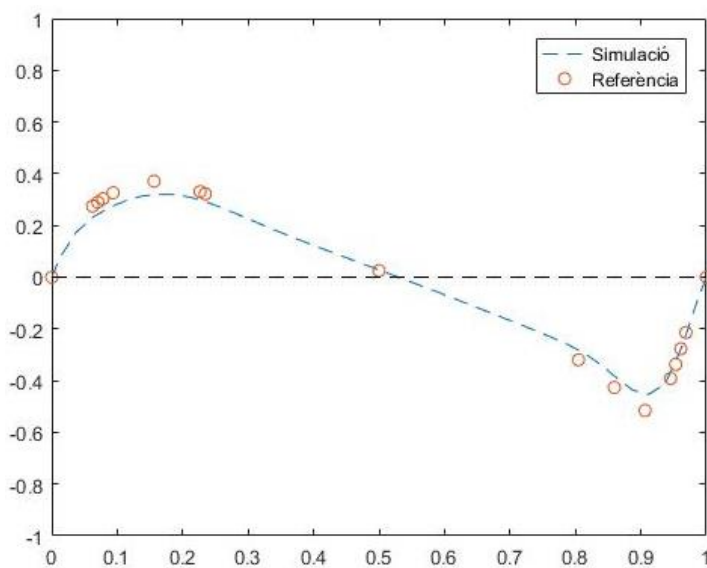


Figura 5.11: Perfil de velocitats  $v$  en la línia central per Reynolds 1000.

Com es pot observar en les figures anteriors, els perfils segueixen la tendència dels valors de referència però hi ha certs errors. L'error màxim és del 6.65 %. Aquest defecte es podria millorar augmentant la mida de la malla.

Per altra banda, a la Figura 5.12 es representa el mapa del mòdul de la velocitat, i a la Figura 5.13 les línies de corrent.

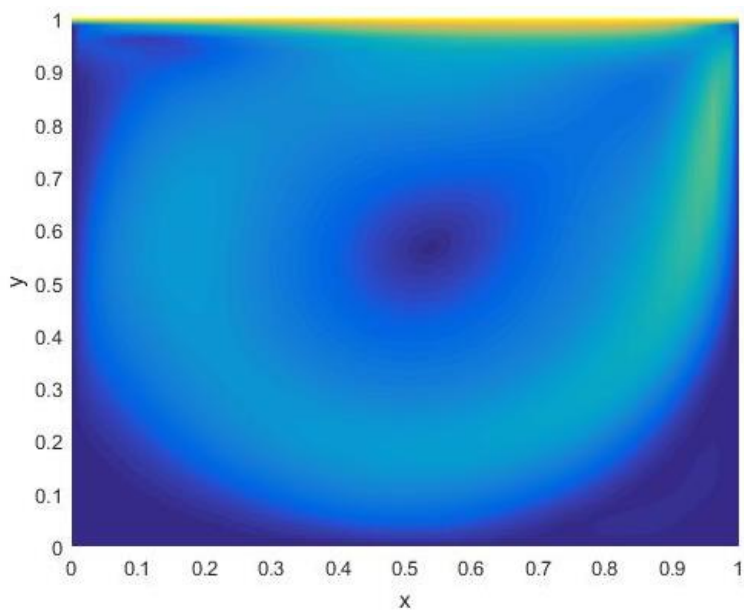


Figura 5.12: Mapa del mòdul de la velocitat per Reynolds 1000.

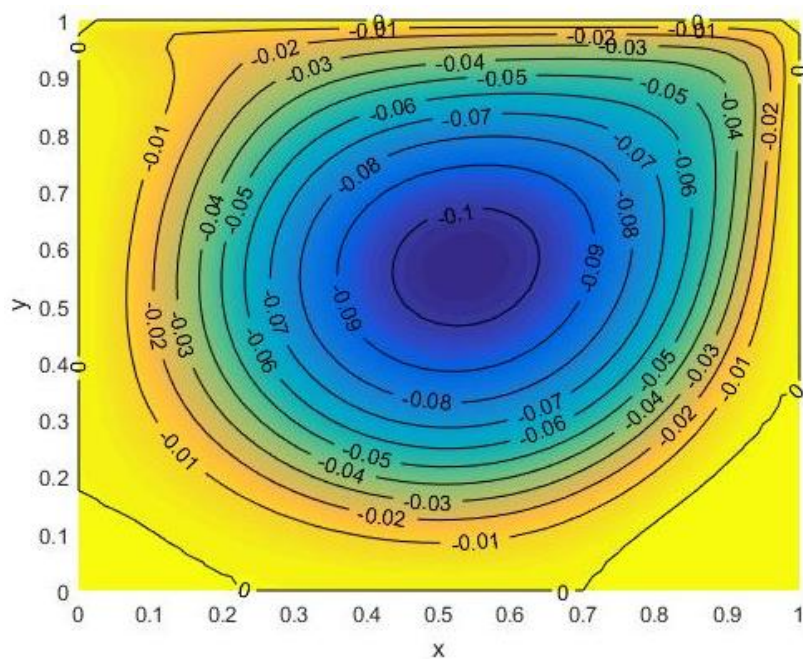


Figura 5.13: Línies de corrent per Reynolds 1000.

## 5.8 Cas C: Reynolds 3200

La solució de les línies centrals es mostra a la Figura 5.14 i la Figura 5.15.

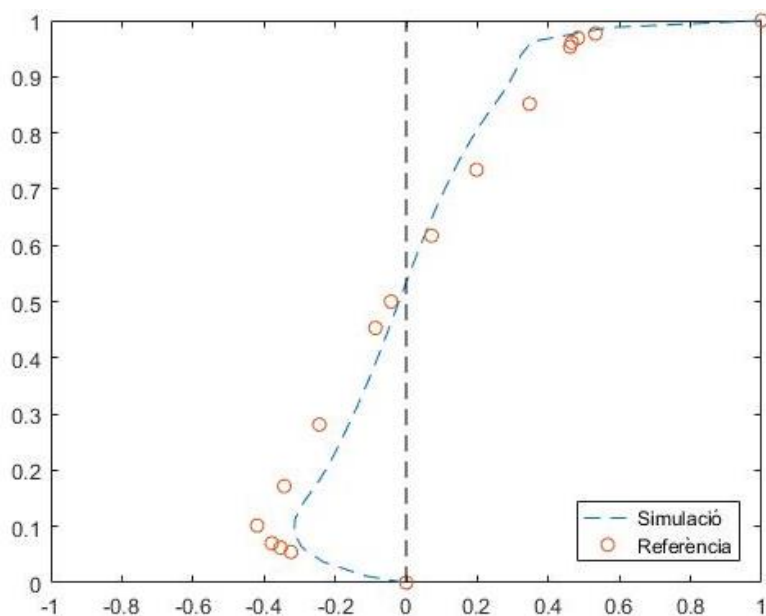


Figura 5.14: Perfil de velocitats  $u$  en la línia central per Reynolds 3200.

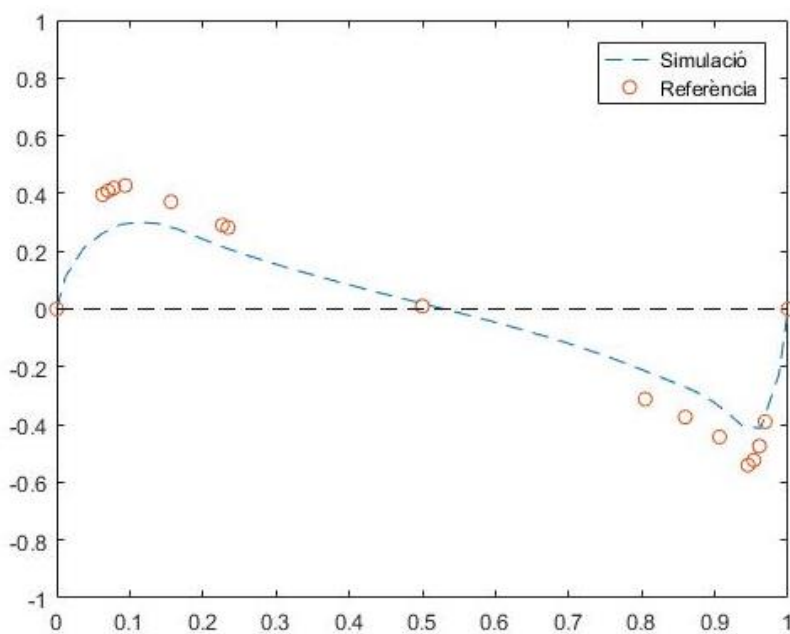


Figura 5.15: Perfil de velocitats  $v$  en la línia central per Reynolds 3200.

En aquest cas els errors augmenten bastant ja que augmenta el Reynolds comença a ser alt, arribant a un error màxim important del 13.8%. Tanmateix, l'error es podria disminuir densificant la malla.

Per altra banda, a la Figura 5.16 es representa el mapa del mòdul de la velocitat, i a la Figura 5.17 les línies de corrent.

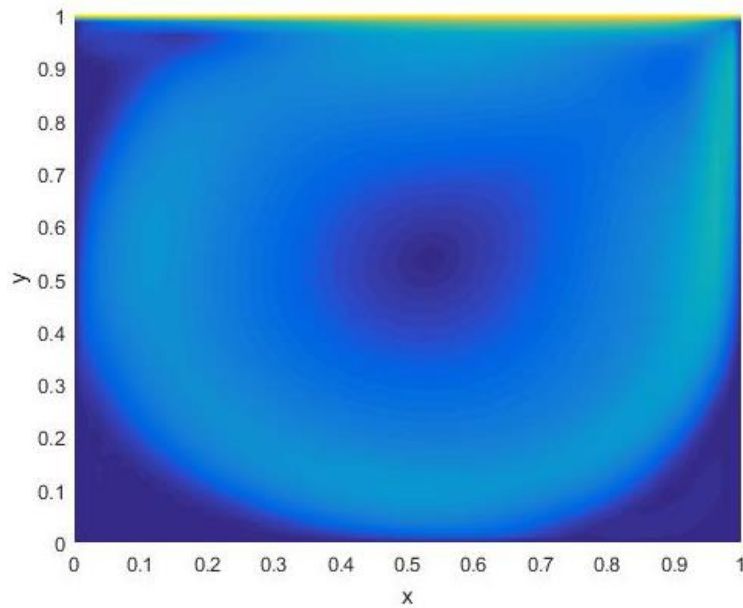


Figura 5.16: Mapa del mòdul de la velocitat per Reynolds 3200.

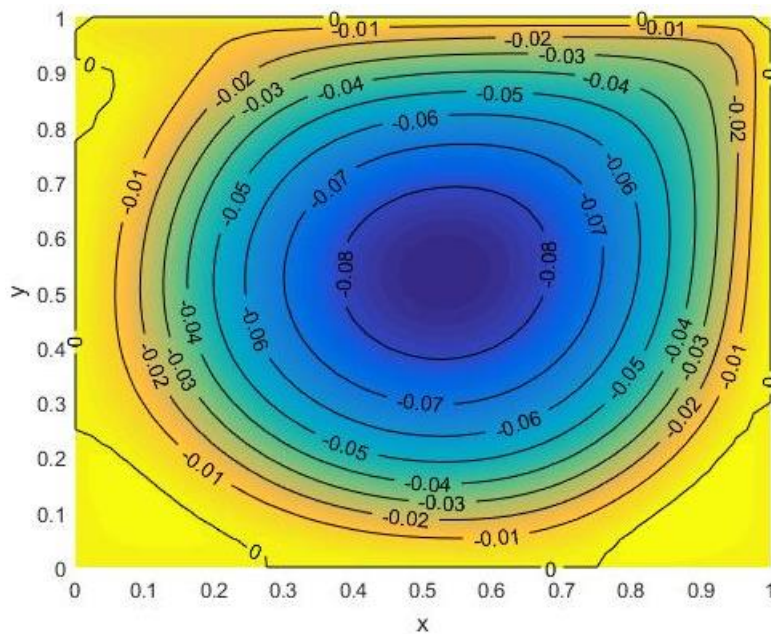


Figura 5.17: Línies de corrent per Reynolds 3200.

## 5.9 Cas D: Reynolds 5000

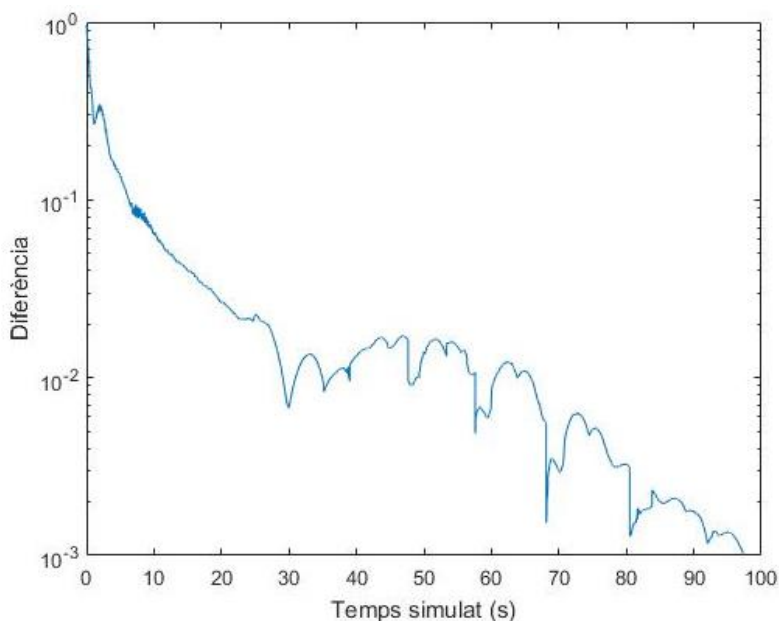
En aquest cas, el Reynolds ja és elevat i el problema està en zones de transició on les inestabilitats del flux aniran conduït cap a la turbulència.

D'aquesta manera, és més il·lustratiu mostrar aquests resultats on s'evidencia aquest fet, desmarcant-se dels resultats exposats anteriorment

Cal recordar quin era el criteri per considerar que la simulació havia assolit l'estat estacionari. L'equació era la (5.25), que s'anomenarà diferència en les següents figures.



Per una malla de 50x50, la diferència en la simulació es representa en la Figura 5.18.

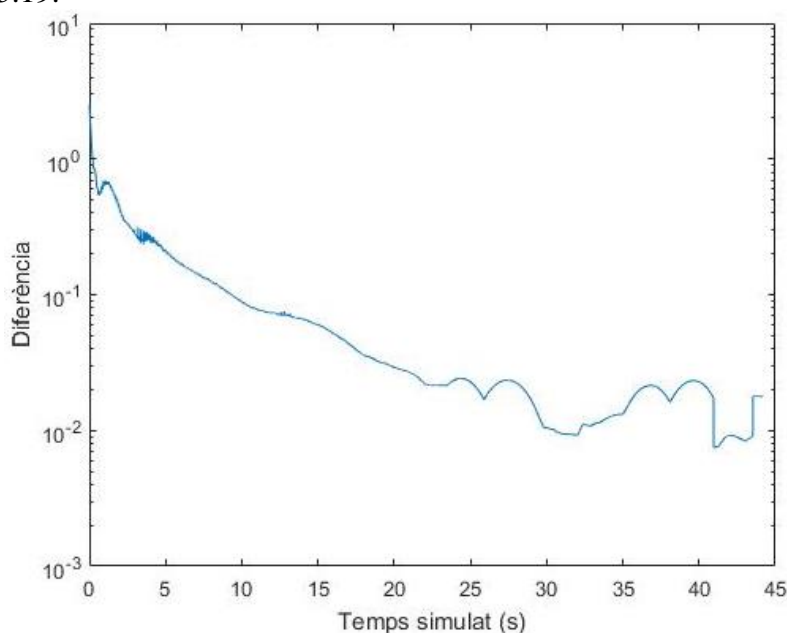


**Figura 5.18: Diferència per Reynolds 5000 i malla 50x50.**

Cal comentar que en les abscisses es troba el temps simulat del fenomen físic, no és el temps que triga l'ordinador a resoldre-ho. A part, el gràfic és semilogarímic per apreciar millor tot l'espectre.

Es pot apreciar com la diferència fluctua molt i li costa arribar al valor de convergència imposat de  $10^{-3}$ . En aquesta anàlisi s'evidencia la presència d'instabilitats.

En la mateixa línia, a posteriori es va simular amb una malla més densa, de 80x80. Per falta de temps, la simulació no va arribar a la convergència. Es representa la diferència en la Figura 5.19.



**Figura 5.19: Diferència per Reynolds 5000 i malla 80x80.**

Tal i com es pot observar, es resistia a baixar cap al valor de  $10^{-3}$  i oscil·lava.

## 5.10 Optimització del codi

De manera que el codi funcionés més eficientment, es va fer una modificació en aquest que va resultar en què les simulacions, de mitjana, trigaven **3 vegades menys**.

Quan es crida una funció, l'*input* pot passar-se a la funció en forma de còpia (l'ordinador es fa una còpia) o per referència. En el 1r cas, el que es fa amb la variable no afecta en el codi principal, mentre que en el 2n cas, per referència, en què no es fa una còpia, si en la funció es modifica la variable, en el codi principal també queda modificada.

És per això que molts *inputs* es passaven amb còpia, per no modificar-los. No obstant, també es poden passar per referència constant, i no es modifica la variable al programa principal, i l'ordinador tampoc fa una còpia.

Aquesta optimització del codi feta a finals d'aquest estudi, millora el rendiment dels codis.

## 6 Conclusions i línies futures

Aquest estudi ha permès desenvolupar una base sobre els mètodes bàsics emprats en el camp del CFD. Això és important ja que no sempre es pot realitzar una formació d'aquest tipus pels estudiants d'enginyeria en general.

En general, l'abast d'aquest estudi i els requeriments han estat complerts. La limitació computacional de l'ordinador de què es disposa ha jugat el seu paper, però com podria passar-li a qualsevol investigador en problemes més complexos.

Els problemes tractats han aportat diversos aspectes clau que ajuden a l'enteniment general del camp del CFD. En trets generals, les solucions obtingudes han estat satisfactòries. Sempre hi ha hagut errors, però s'han pogut minimitzar d'una manera o d'una altra.

Un aspecte important és l'experiència que s'obté en verificar que els codis estiguin lliures d'errors, ja que trobar un error en un codi és complicat, i a poc a poc es va millorant en solucionar-los.

Els següents passos serien provar casos amb fluxos externs i geometries més complicades o la resolució de problemes tridimensional.

Després, una primera aproximació als fenòmens de la turbulència seria un gran pas que es podria anar desenvolupant.

## 7 Bibliografia

- [1] Suhas V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill Book Company, 1980.
- [2] Centre Tecnològic de Transferència de Calor (CTTC), Universitat Politècnica de Catalunya. *A Two-dimensional Transient Conduction Problem*. (PDF).
- [3] Centre Tecnològic de Transferència de Calor (CTTC), Universitat Politècnica de Catalunya. *Convection-difusion equations CTTC manuscript*. (PDF).
- [4] Centre Tecnològic de Transferència de Calor (CTTC), Universitat Politècnica de Catalunya. *Convection-difusion exercises*. (PDF).
- [5] Centre Tecnològic de Transferència de Calor (CTTC), Universitat Politècnica de Catalunya. *Fractional Step Method: Staggered and Collocated Meshes*. (PDF).
- [6] F.X. Trias, O. Lehmkuhl, *A self-adaptive strategy for the time integration of Navier-Stokes equations*, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals 60 (2), 116-134, 2011.
- [7] Ghia et al. *High-Re Solutions for Incompressible Flow Using Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method*. Journal of Computational Physics 48, 387-411 (1982).
- [8] Darwish, M. S. and Moukalled, F. H. *NORMALIZED VARIABLE AND SPACE FORMULATION METHODOLOGY FOR HIGH-RESOLUTION SCHEMES*, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 26:1, 79 – 96 (1994).