

# **ASIGNACIÓN DE FRECUENCIAS A LÍNEAS AUXILIARES DE TRANSPORTE PÚBLICO EN SITUACIONES DE ELEVADA DEMANDA<sup>†</sup>**

*Esteve Codina Sancho<sup>1</sup>  
Ángel Marín Gracia<sup>2</sup>  
Luis Carlos Ibáñez Moreno<sup>2</sup>  
Francisco López Ramos<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> *Universitat Politècnica de Catalunya*  
<sup>2</sup> *Universidad Politécnica de Madrid*

## **RESUMEN**

Durante las operaciones diarias de una red densa de cercanías diversos incidentes pueden ocasionar que el tráfico de pasajeros tenga que desviarse de sus rutas habituales. Una práctica común para aliviar el efecto de estas disrupciones en el tráfico de pasajeros es mediante el establecimiento de un servicio de “Bus Bridging” entre las estaciones que se vean afectadas. Es decir, mediante el establecimiento de un conjunto de líneas de servicio auxiliar operadas mediante flotas de superficie (autobuses), las cuales es de preveer que tengan que soportar una elevada demanda. En este trabajo se presenta un modelo en programación matemática no lineal entero para determinar el dimensionamiento de estas líneas.

**Palabras clave:** Asignación de Frecuencias, Modelos de Congestión, Programación Matemática

## **ABSTRACT**

During the daily operations of a dense rapid transit network diverse incidents can cause that the traffic of passengers has to turn off its usual routes. A common practice to alleviate the effect of these disruptions in the traffic of passengers is by means of the establishment of a service of "Bus Bridging" among the stations that are affected. That is to say, by means of setting a group of lines for auxiliary service operated by means of surface (buses) fleets, which it can be expected to operate under very congested conditions. A Nonlinear Integer Mathematical Programming model to determine the dimension of these lines.

**Keywords:** Frequency assignment, Congested Models, Mathematical Programming

† Investigación financiada por los proyectos PT-2007-003-08CCPP (CEDEX)  
TRA2008-06782-C02-02 (MICINN)

## **1. INTRODUCCIÓN**

En la ponencia se expone un modelo basado en programación matemática para establecer el dimensionamiento de un conjunto previamente especificado de líneas de autobuses, que deban de atender niveles de demanda muy elevados, tales y como los que se producen durante la interrupción de servicios de metro o cercanías o durante la celebración de eventos masivos. Mediante este modelo pueden determinarse básicamente dos tipos de magnitudes básicas que determinan el dimensionamiento de dichas líneas: a) el número de unidades asignadas a cada línea y b) el número de servicios que debe asignarse a esas unidades. Este conjunto de líneas en principio puede plantearse como arbitrariamente grande o, mejor dicho, redundante en el sentido que, aquellas líneas que resulten asignadas con un número de servicios nulo, deberán ser descartadas en su implantación. A su vez, el modelo debe dar una estimación de las demoras experimentadas por los pasajeros en las estaciones, los tiempos de servicio de los autobuses en las estaciones, así como de los tiempos de espera por cola de los autobuses en las estaciones. El modelo incorpora además limitaciones de capacidad de las estaciones en cuanto a número máximo de pasajeros esperando. Como consecuencia el modelo debe proporcionar una apreciación al analista de cuáles son los cuellos de botella que presentan el conjunto de líneas seleccionadas. El modelo puede considerarse del tipo sistema óptimo, en el sentido de que la asignación de unidades y de servicios se lleva a cabo minimizando una combinación lineal de los costes de operación y del tiempo total invertido por los usuarios del sistema. Se consideran las demoras que sufren los autobuses como consecuencia de las subida y bajada de pasajeros, por las colas formadas por los autobuses durante las operaciones de subida/bajada de pasajeros y las demoras que sufren los pasajeros durante su espera en las estaciones.

## **2. TIEMPOS OPERACIONALES CONSIDERADOS EN LA MODELIZACIÓN**

Se efectúa una modelización de los diferentes tiempos que intervienen en las operaciones con buses. Dado que la congestión interviene de forma determinante y que se pretenden obtener soluciones lo más realistas posibles se han tenido en cuenta todos los diferentes tiempos que pueden intervenir. La referencia de Fernández y Taylor (2005) proporciona una buena descripción de los diferentes tipos de tiempos a considerar. También debe citarse el trabajo de Anderson (1981). Los diferentes tiempos de operación de los vehículos y de los pasajeros son:

### Tiempos V de operación de los vehículos

0. Tiempo de movimiento libre entre una estación y otra
1. Tiempo de maniobra de entrada en la estación
2. Tiempo de permanencia en la estación. A) Tiempo de espera en cola para acceder a la plaza de aparcamiento. B) Tiempo de maniobra para acceder/salir de la plaza de aparcamiento. C) Tiempo de servicio de los pasajeros (PST Passenger Service Time) para operación de subida/bajada

de viajeros (puede incluirse aquí apertura/cierre de puertas) . D) Tiempo de bloqueo en el aparcamiento. Tras el PST puede ocurrir que el convoy no pueda abandonar la plaza de aparcamiento ya que se produce cola en la salida de la estación debido a convoyes que intentan salir de la estación pero ven entorpecida su maniobra de salida por el tráfico reinante.

3. Tiempo de maniobra para salir de la estación

#### Tiempos P individuales experimentados por los pasajeros

Hay que distinguir tres casos:

0. Pasajeros de paso. Sus tiempos son los mismos que los del vehículo  $V1+V2+V3+V4$ .
1. Pasajeros que bajan en la parada. Experimenta los tiempos  $V1, V2, V3(b)$  (solo acceso al parking) y  $V3(a)$ ; además hay que añadir el tiempo individual de descenso del vehículo. Este tiempo puede modelizarse a) proporcional a la cantidad de pasajeros que bajan b) constante. La opción a) es más realista pero si se quiere mantener una estructura de problema mixto entero-lineal presenta bastantes dificultades. En todo caso el tiempo de bajada es muy inferior al resto de los tiempos que intervienen (también es inferior al de abordaje al bus) y sugiero despreciarlo
2. Pasajeros que suben a un bus en la parada. Experimentan: A) Tiempo en la cola de espera a la llegada de un bus de la línea que se quiere tomar (recordar que no se consideran estrategias; cada pasajero se apunta a una línea en concreto y hace la correspondiente cola para esa línea). B) Tiempo de abordaje al bus. Dicho tiempo es del tipo  $p+qv$  donde  $v$  es el número de pasajeros que suben en un bus y  $p, q$  son constantes. Dicho tiempo se solapa con el tiempo  $V3(c)$ , C) Tiempos  $V3(b), V3(d)$  y  $V4$  y D) Tiempo  $V1$

### **3. ESTRUCTURA DEL GRAFO DEL MODELO**

Dado el anterior desglose de los diferentes tiempos de operación se ha adoptado una estructura de red de flujos por pareja Origen-destino para los movimientos de pasajeros.

Los flujos de pasajeros transcurrirán sobre un grafo dirigido  $G=(N, A)$  cuya estructura aparece esbozada en las figuras 1 y 2. El conjunto de nodos  $N$  se divide en dos subconjuntos:  $N_G$  que son los nodos que aparecen en el plano y por otra parte esta  $N \setminus N_G$  que son todos los demás y que conforman las líneas de autobuses. Los nodos en  $N_G$  y los arcos  $a=(i, j)$  tales que  $i \in N_G, j \in N_G$  se usan para representar la red de transbordos.

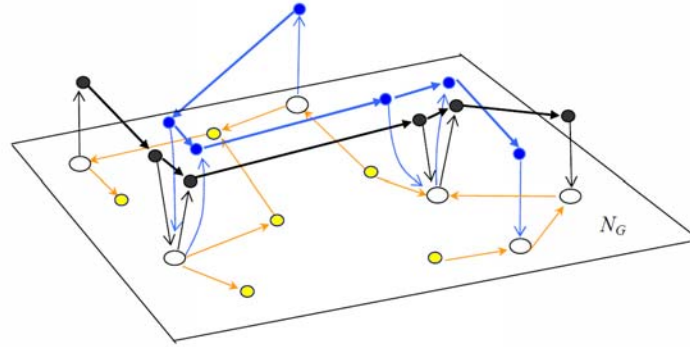


Figura 1. Representación del grafo  $G = (N, A)$ .

Por  $\hat{N}_G$  se designan los nodos en  $N_G$  que actúan como paradas.  $L$  es el conjunto de líneas. Por  $\Pi_\ell$  se designa al conjunto de  $n_\ell$  paradas que definen una línea  $\ell \in L$ , es decir  $\Pi_\ell = \{b_1, \dots, b_{n_\ell}\}$ . Por  $L_b$  se designa el conjunto de líneas que contienen la estación  $b \in N_G$ . Se define el conjunto  $A_b$  como los arcos cuyos nodos no están en  $N_G$  y que acceden a la estación  $b$ :

$$A_b = \{ (i, j) \in A \mid i, j \notin N_G, \exists (j, k) \in E(j) \text{ t.q. } k \in I(b) \} \quad (1)$$

Por  $A_\ell$  se designa el conjunto de arcos cuyos nodos no están en  $N_G$  y que modelizan la línea  $\ell \in L$

$$A_\ell = \{ (i, j) \in A \mid i, j \notin N_G, (i, j) \text{ pertenecen a la línea } \ell \} \quad (2)$$

Por  $A_G$  se designa el conjunto de arcos "en tierra":

$$A_G = \{ (i, j) \in A \mid i \in N_G, j \in N_G \} \quad (3)$$

En la figura 2 se muestra en detalle la modelización de líneas y paradas. Los arcos  $a = (b, j)$ ,  $b \in \Pi_\ell$ ,  $j \notin N_G$  son para modelizar el tiempo de abordaje y el de espera en la parada por parte de los pasajeros que abordarían la línea  $\ell$ . Dada una estación  $b$  en la que se detenga la línea  $\ell$ , el arco de abordaje desde  $b \in N_G$  hasta la línea  $\ell$  vendrá designado por  $a(\ell, b)$ . Para un arco de abordaje  $a$ , se designa el arco  $x(a)$  para los pasajeros que se mantienen en el bus al estacionarse en la estación y por  $y(a)$  se designa el correspondiente arco de bajada.

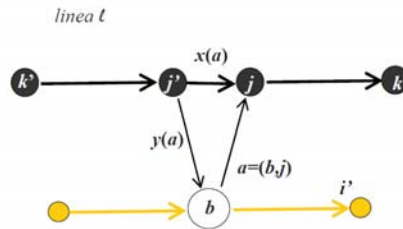


Figura 2. Detalle de los nodos y arcos que representan líneas y paradas.  $b, i' \in N_G$ .  $(k', j') \in A_b$ .

$$x(a) = (j', j), (j, k) \in A_\ell$$

El conjunto de líneas que inciden en una estación  $b$  puede definirse como:

$$L_b = \{\ell \in L \mid A_\ell \cap A_b \neq \emptyset\} \quad (4)$$

Sobre el grafo así especificado los flujos de pasajeros conforman una red multiartículo por destinos en la que el flujo en un arco  $a \in A$  para una destinación  $q \in D$  se designaran por  $v_a^d$ . Las ecuaciones de conservación de estos flujos en los nodos  $i \in N$  definirán un poliedro que designaremos por  $V$ .

### 3.1 Ejemplo de grafo expandido

En la siguiente figura 3 se muestra el conjunto de líneas consideradas y la red expandida de acuerdo con lo descrito en el apartado 1

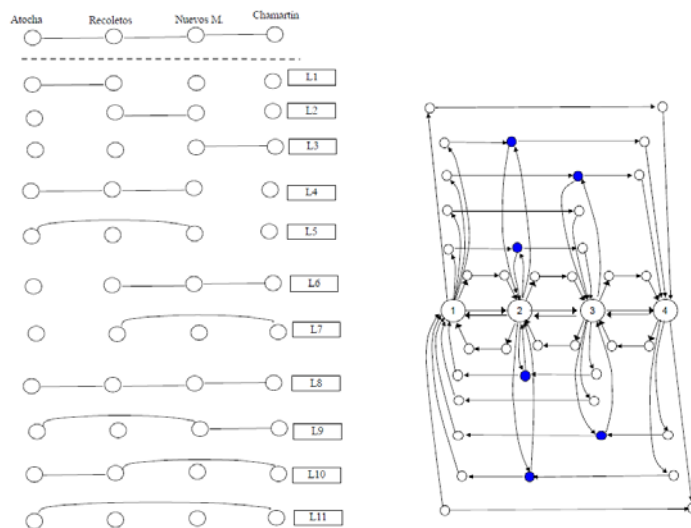


Figura 3- Líneas posibles consideradas para un corredor con cuatro estaciones. Se consideran todas las líneas simétricas con iguales paradas en la ida que en la vuelta. A la derecha Grafo multiartículo expandido correspondiente a las líneas 1,2,3,4,5,9,10,11

## 4. TIEMPO DE ESPERA DE LOS PASAJEROS EN UNA ESTACIÓN

Es de destacar la escasa literatura científica específica dentro de las ciencias del transporte a este factor. Por ello se ha efectuado un estudio previo para evaluar la cuantía y forma de estas demoras para poder encontrar expresiones cerradas que puedan ser incluidas en el contexto de un modelo de programación lineal entero mixto. El modelo de colas de los pasajeros esperando en las estaciones de autobuses presenta las siguientes características:

- Servicio en lotes (*bulk service*). Es decir los clientes o pasajeros van llegando de uno

en uno, pero el servicio se produce cuando hay llegada de un servidor (autobús o convoy) y se lleva un grupo de pasajeros, que es el mínimo de entre los pasajeros en la parada y la capacidad disponible en el servicio (autobús)r.

- Capacidad del servidor aleatoria. Es el número de plazas libres o capacidad disponible. Debe ser aleatorio y tomar valores entre 0 y  $C =$  capacidad máxima del autobús o del convoy.
- Tiempo entre llegadas de servidores aleatorio con distribución de probabilidades genérica.

La llegada de los pasajeros a las estaciones se ha adoptado como poissoniana. En el contexto de teoría de colas el modelo más adecuado parece ser el  $M/G^{[Y]}/s$ . Se han examinado mediante simulación diversas distribuciones de probabilidad para los tiempos entre llegadas de servidores. En general se ha encontrado que la respuesta es parecida a la que proporciona el clásico modelo  $M/M^{[Y]}/1$ , es decir, llegadas de pasajeros poissonianas con tasa  $\lambda$  pasajeros por unidad de tiempo, llegadas de autobuses poissonianas de tasa  $\mu$  y una sola plaza de aparcamiento para los autobuses,  $s = 1$ . En este caso el modelo de colas, proporciona un tiempo de espera por pasajero  $\varphi$  en la cola de la estación del tipo

$$\varphi(z, \rho) = P(z)\xi(\rho) \tag{5}$$

siendo  $P(z)$  una función que depende del número de servicios que efectúan los servidores de la línea y  $\xi(\rho)$  una función creciente y convexa del factor de carga  $\rho$  en la parada o cociente entre la tasa de llegadas de pasajeros y la tasa de pasajeros que pueden aligerar los servidores que llegan a la parada.

La siguiente figura 4 muestra los resultados de valores del tiempo de espera experimentado por los pasajeros en una estación de autobús, en función del factor de carga de dicha parada.

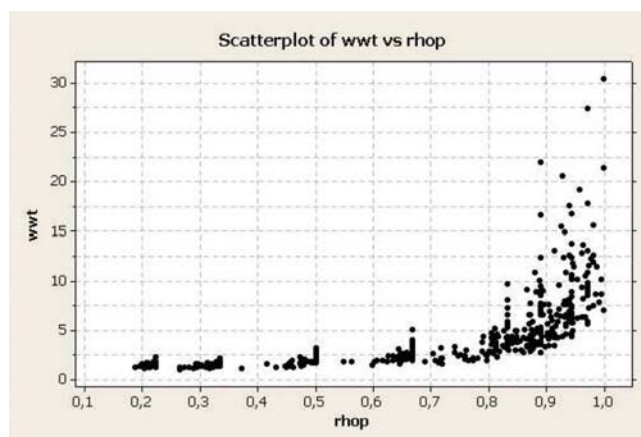


Figura 4. Tiempo de espera de los pasajeros en la estación en función del coeficiente de carga  $\rho$  durante un período de 180 minutos.

Se han efectuado diversas simulaciones para comprobar los efectos de la fluctuación aleatoria de la capacidad disponible de los autobuses, alrededor de un valor medio, a su llegada a las estaciones para períodos finitos y se ha comprobado que esta variabilidad tiene unos efectos bastante limitados. La figura 5 muestra las curvas de demora en cola para los pasajeros para diferentes distribuciones de la capacidad de llegada de las unidades a las estaciones. Para estos ensayos se ha supuesto que la capacidad de llegada se distribuía como una ley normal de esperanza 50 plazas, truncada dentro del intervalo [0,100], bajo diferentes coeficientes de variación

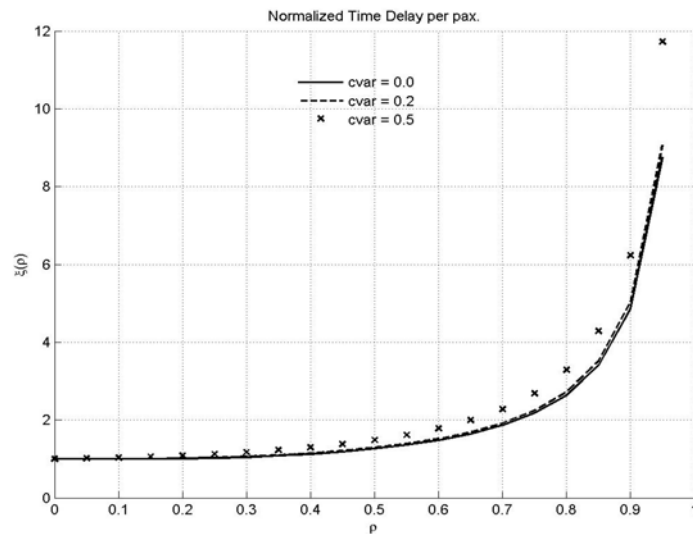


Figura 5. Efectos en el tiempo de espera de los pasajeros en la estación de autobús para varios coeficientes de variación (0.0, 0.2, 0.5) de la distribución de las capacidades de llegada, supuesta 50 plazas en media y distribuida normalmente entre el intervalo [0,100].

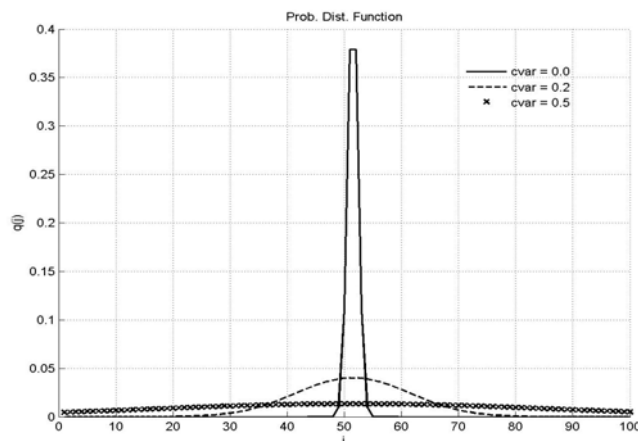


Figura 6. Distribución de probabilidad para la capacidad de llegada de los autobuses utilizada para la determinación del tiempo de espera de los pasajeros de la figura anterior. Son distribuciones normales centradas en 50 y truncadas en 0 y 100

#### 4.1 Aproximación del tiempo total de demora de los pasajeros que esperan en cola para subir a una línea

El factor de carga en la parada SERÁ  $\rho = v_a / (\eta - v_x)$  y por tanto la demora total  $\zeta = v_a \phi$  de todos los pasajeros que suben a la línea vendrá dada por:

$$\zeta = v_a P(z) \xi(\rho) = v_a P(z) \xi\left(\frac{v_a}{\eta - v_x}\right) = P(z) \phi(v_a, v_x) \quad (6)$$

siendo  $\eta$  la capacidad total máxima de la línea durante el periodo de  $h$  minutos y habitualmente  $P(z) = h/z$ . Si la función de demora  $\xi(\cdot)$  es no decreciente y convexa en  $[0,1]$ , entonces la función  $\phi$  es convexa en la región de  $\mathfrak{R}^2$  dada por  $v_a + v_x \leq \eta, v_a \geq 0, v_x \geq 0$  y por lo tanto se puede aproximar mediante un conjunto finito de planos tangentes a  $(\phi(v_a, v_x), v_a, v_x)$  en  $\mathfrak{R}^3$ .

Si  $\phi_a^{(k)} = \phi(v_a^{(k)}, 0)$ ,  $\hat{\phi}_a^{(k)} = \nabla_{v_a} \phi(v_a^{(k)}, 0)$ ,  $\hat{\phi}_x^{(k)} = \nabla_{v_x} \phi(v_a^{(k)}, 0)$  con  $(v_a^{(k)}, 0) \in S$ , entonces la aproximación de  $\phi$  en una malla de puntos conveniente puede hacerse mediante la función  $\psi$ , también convexa:

$$\psi(v_a, v_x) = \max_{0 \leq k \leq n_\phi - 1} \left\{ \phi_a^{(k)} + \hat{\phi}_a^{(k)}(v_a - v_a^{(k)}) + \hat{\phi}_x^{(k)} v_x \right\} \quad (7)$$

Las demoras de los pasajeros en el modelo podrán incluirse en forma del siguiente conjunto de restricciones:

$$P(z)(-c\tilde{\beta}_k z^\ell + \tilde{\beta}_k v_x + \tilde{\gamma}_k v_a) \leq \zeta, \quad 0 \leq k \leq n_\phi - 1 \quad (8)$$

siendo ahora  $\zeta$  una variable (continua) que debe incorporarse en el modelo con el significado de demora total (la de todos los pasajeros) en la cola de los pasajeros. En caso de que  $Z(z) = h/z$ :

$$\tilde{\beta}_{a,k} v_{x(a)} z^\ell + \tilde{\gamma}_{a,k} v_a z^\ell \leq \frac{\zeta_a}{h} + c^\ell \tilde{\beta}_{a,k}, \quad a = a(\ell, b), b \in \Pi_\ell, \ell \in L, 0 \leq k \leq n_\phi - 1 \quad (9)$$

Los coeficientes  $\tilde{\beta}_{a,k}, \tilde{\gamma}_{a,k}$  en las restricciones anteriores son pues:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{a,k} &= \rho_{a,k}^2 \xi'(\rho_{a,k}), \quad a = a(\ell, b), b \in \Pi_\ell, \ell \in L, 0 \leq k \leq n_\phi - 1 \\ \tilde{\gamma}_{a,k} &= \xi(\rho_{a,k}) + \rho_{a,k} \xi'(\rho_{a,k}), \quad a = a(\ell, b), b \in \Pi_\ell, \ell \in L, 0 \leq k \leq n_\phi - 1 \end{aligned} \quad (10)$$

Mediante simulaciones se han determinado las curvas de demora  $\xi(\rho)$  en estado estacionario para diferentes distribuciones de la capacidad efectiva de los autobuses a su llegada a la estación. Mediante dichas simulaciones se ha calculado mediante aproximaciones en diferencias finitas una tabla de coeficientes  $\tilde{\beta}_{a,k}, \tilde{\gamma}_{a,k}$ .

## 5. DEMORAS DE LOS AUTOBUSES EN LAS ESTACIONES

El funcionamiento de las estaciones juega un papel fundamental en el sistema de busbridging. De forma empírica este elemento ha sido estudiado extensivamente bajo



diversas condiciones operacionales y configuraciones (ver, por ejemplo el informe 100 del TCRP en la lista de referencias). En este trabajo se ha supuesto que, dado que las estaciones del sistema debían de implantarse de forma provisional, obedecían a una configuración como la mostrada en la siguiente figura

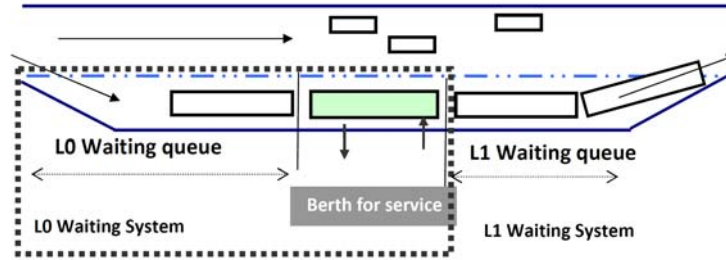


Figura 7. Configuración tipo de las estaciones

Pese a que, de hecho, la configuración mostrada corresponde a una disposición de dos sistemas de espera en *tandem* con bloqueo, se supondrá que hay poca probabilidad de interferencia del sistema L1 de salida sobre el sistema L0 de entrada. Para modelizar las demoras en cola de los autobuses en el primer sistema de espera se ha utilizado una aproximación a la fórmula de Allen-Cuneen para colas GI/G/s, que proporciona una muy buena aproximación del tiempo de espera en cola  $W_q$  en función de la tasa de entradas  $\lambda$ , de la capacidad de servicio por servidor  $\mu$ , del coeficiente de tráfico  $\rho$  y de los coeficientes de variación  $C_\tau^2, C_x^2$  de los tiempos entre llegadas  $\tau$  y del tiempo de servicio  $x$

$$W_q = \frac{C(s, \lambda / \mu)(C_\tau^2 + C_x^2)}{2\mu s(1 - \rho)}$$

( $C(s, \theta)$  es la función de Erlang). En teoría de colas, las fórmulas de demora  $W_q$  en función del coeficiente de tráfico  $\rho$  de la cola resultan en funciones convexas. Por tanto, es posible pensar en que pueda hacerse una aproximación del tipo:

$$W_q(\rho) \approx \max_{1 \leq v \leq m} \{a^v + d^v \rho\}$$

para diferentes valores del número de servidores  $s$ . En la formulación se limitará la demora que pueden sufrir los autobuses en acceder a las plataformas de subida/bajada mediante un conjunto de  $n_w$  restricciones tales como

$$a_b^v + d_b^v \rho_b \leq \hat{w}_b, \quad 1 \leq v \leq n_w, \quad b \in \hat{N}_G$$

las cuales redundan en una limitación del número de servicios a efectuar por las unidades a las líneas que acceden a la estación. La siguiente figura muestra los valores para la demora normalizada  $W_q'$ :

$$W'_q = \mu W_q / (C_\tau^2 + C_x^2) = C(s, s\rho) / 2s(1 - \rho) = C(s, s\rho) / 2s(1 - \rho)$$

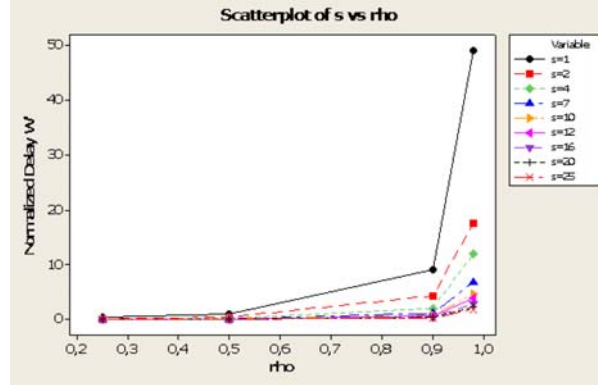


Figura 8. Demora normalizada para la fórmula de Allen Cunnan, según una aproximación

$$W_q(\rho) \approx \max_{1 \leq v \leq m} \{a^v + d^v \rho\}$$

## 6. MODELO DE ASIGNACIÓN DE SERVICIOS Y UNIDADES A LÍNEAS

Los tiempos en los arcos del grafo expandido vendrán dados por las funciones  $T_a(v, z)$ , que presentan como argumentos a  $v$ , volúmenes de pasajeros en los arcos del grafo y  $z$ , los servicios asignados a las líneas. Los tiempos totales de espera en las colas de pasajeros en las estaciones se suponen que vendrán dados por funciones  $\zeta_{a(\ell, b)}(v, z)$ . El tiempo total de viaje sobre la red vendrá dado por:

$$\sum_{a \in A} v_a T_a(v, z) + \sum_{\ell \in L} \sum_{b \in \Pi_\ell} \zeta_{a(\ell, b)}(v, z)$$

El primer término,  $\sum_{a \in A} v_a T_a(v, z)$ , se corresponde con todos los tiempos en los arcos del grafo expandido con la exclusión de los tiempos de espera en cola de los pasajeros en las estaciones, componente ésta que aparece en el segundo término.

La función objetivo del modelo consistirá en dos términos: el primero comprenderá los costes de operación de los servicios  $z^\ell$  a la línea  $l$  más los costes de alquiler correspondientes a asignar  $n^\ell$  buses a la línea  $l$ ; el segundo término se corresponderá con una valoración económica del tiempo total de los usuarios de  $\theta$  €/u. de. Tiempo.

Los tiempos  $T(v, z)$  en los arcos del grafo expandido están relacionados con funciones que dependen de  $(v, z)$  para a) los tiempos de espera en cola de los autobuses en las estaciones. A este fin se usa la aproximación de Allen-Cunnan descrito en la sección 5, mientras que los tiempo de servicios de pasajeros se suponen para autobuses de una puerta de entrada y dos de salida utilizando las fórmulas de GUENTHNER, R. P., K. C. SINHA. El ciclo de la línea tiene en cuenta tanto los tiempos de servicio de pasajeros en las plataformas, como las demoras de los autobuses por colas.

El modelo aparece formulado como problema de programación matemática entero

no lineal para el que es necesario desarrollar una heurística que haga viable su resolución computacional.

$$\begin{aligned}
 & \text{[Modelo M0]} \quad \text{Min}_{n,z,v,\tau,\lambda} \sum_{\ell \in L} (\zeta^\ell n^\ell + \gamma^\ell z^\ell) + \theta \sum_{a \in A} v_a T_a(v,z) + \theta \sum_{\ell \in L} \sum_{b \in \Pi_\ell} \zeta_{a(\ell,b)}(v,z) \\
 & \text{A0-1} \quad \sum_{\ell \in L} n^\ell \leq p, \quad n^\ell \geq 0, n^\ell \in \mathbb{Z}, \quad \ell \in L \\
 & \text{A0-2} \quad \text{s.a. :} \quad H^\ell n^\ell \geq z^\ell C_\ell(v,z), \quad \ell \in L \\
 & \text{A0-3} \quad 0 \leq z^\ell \leq \lambda^\ell \hat{f} \cdot H, \quad z^\ell \in \mathbb{Z}, \quad \lambda_\ell \in \{0,1\}, \quad \ell \in L \\
 & \text{A0-4} \quad z_\ell \geq \lambda^\ell H / h_{\max}, \quad \ell \in L \\
 & \text{B0-1} \quad v \in V \\
 & \text{R0-1} \quad \sum_{a \in \hat{E}(i)} \tau_a^\omega \leq 1, \quad \tau_a^\omega \in \{0,1\}, \quad a \in \hat{E}(i), i \in N, \omega \in W \\
 & \text{R0-2} \quad v_a^\omega \leq M \tau_a^\omega, \quad a \in A \setminus A_G, \quad \omega \in W \\
 & \text{Qb0} \quad \sum_{\ell \in L_b} z^\ell \leq \hat{Z}_b(v,z), \quad b \in \hat{N}_G \\
 & \text{en Qp0-1, Qp0-2 :} \\
 & \text{Qp0-1} \quad v_a + v_{x(a)} \leq cz^\ell \\
 & \text{Qp0-2} \quad \sum_{\ell \in L_b} \zeta_a(v,z) \leq (H / \eta_b) \hat{N}_b^{\text{pax}}
 \end{aligned}$$

Las restricciones A indican las relaciones entre los tiempos de ciclo el número de servicios z de cada línea y el número de vehículos asignados a cada línea. No readmiten n°s de servicios que resulten en una frecuencia demasiado baja (por lo menos debe de ser H/hmax; de otro modo se descarta la línea asignándole z=0 servicios). Las restricciones B son las de factibilidad de los flujos sobre el grafo expandido. Las restricciones Qb0, indican la máxima capacidad de las estaciones b mediante las funciones  $Z_b(v,z)$ ; las restricciones Qp0-1 son para explicitar las capacidades máximas de cada línea, suponiendo c pax. Máximo para cada autobús y las restricciones Qp0-2 indican la capacidad finita de las estaciones en cuanto a n° máximo de pasajeros que pueden estar esperando.

### 6.1 Procedimiento iterativo heurístico para resolver el modelo M0

0. a) Determinar inicialmente unos valores adecuados para el número de servicios para el número de servicios y un valor inicial para el tiempo por pasajero y servicio en cada estación,  $\bar{P}_a^{(0)}$ . Establecer también valores iniciales para los ciclos de cada línea  $\bar{C}_\ell^{(0)}$ ; Establecer un tiempo inicial de servicio para los autobuses en las estaciones,  $\kappa_b^{(0)}$ , y un valor para los tiempos de espera en cola de los autobuses en las estaciones,  $w_{qb}^{0,(0)}$ ,  $b \in N_G$ , de forma que pueda determinarse una capacidad

de las estaciones,  $\bar{Z}_b^{(0)}$  usando las funciones  $\tilde{Z}_b(\cdot; \cdot)$ , esto es,  $\bar{Z}_b^{(0)} = \tilde{Z}_b(\kappa_b^{(0)}, w_{qb}^{0,(0)})$ . Determinar también valores de tiempo de viaje en los arcos del grafo expandido  $\bar{T}_a^{(0)}$ .

0. b) Resolver el problema de programación lineal entera mixto que resulta de fijar valores  $(\bar{T}^{(0)}, \bar{Z}^{(0)}, \bar{P}^{(0)}, \bar{C}^{(0)})$  para las funciones  $(T(v, z), Z(v, z), P(z), C(v, z))$  en el modelo M0. Debe notarse que entonces el modelo M0 pasa a ser un problema de programación lineal entera mixto. Se obtendrán así volúmenes de pasajeros y número de servicios  $(v^{(1)}, z^{(1)})$ . Inicializar el contador de iteraciones  $\nu = 0$

En la iteración  $\nu+1$ :

1. Obtener nuevos valores para los tiempos de servicio de los autobuses  $\kappa_b^{(\nu+1)}$ , tiempos de espera de los autobuses en las estaciones,  $w_{qb}^{0,(\nu+1)}$ , y capacidad en las estaciones  $\bar{Z}_b^{(\nu+1)}$  mediante un paso tipo MSA, usando  $\alpha_\nu = 1/(\nu + 2)$ :

$$\begin{aligned} \kappa_b^{(\nu+1)} &= \kappa_b^{(\nu)} + \alpha_\nu (\kappa_b(v^{(\nu+1)}, z^{(\nu+1)}) - \kappa_b^{(\nu)}) \\ w_{qb}^{0,(\nu+1)} &= w_{qb}^{0,(\nu)} + \alpha_\nu (w_{qb}^0(v^{(\nu+1)}, z^{(\nu+1)}) - w_{qb}^{0,(\nu)}) \\ \bar{Z}_b^{(\nu+1)} &= \bar{Z}_b^{(\nu)} + \alpha_\nu (\tilde{Z}_b(\kappa_b^{(\nu+1)}, w_{qb}^{0,(\nu+1)}) - \bar{Z}_b^{(\nu)}) \end{aligned} \quad b \in N_G$$

2. Actualizar los valores de los tiempos de ciclo para las líneas  $C_\ell^{(\nu+1)} = C_\ell(v^{(\nu+1)}, z^{(\nu+1)})$ ,  $\ell \in L$ , el tiempos en estado de descongestión por pasajero y servicio en cada estación  $\bar{P}_a^{(\nu+1)} = P_a(z^{(\nu+1)})$  y tiempos de viaje en los arcos del grafo expandido  $\bar{T}^{(\nu+1)}$  de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \bar{T}_a^{(\nu+1)} = t_a^0 + w_b^1 + \kappa_{b,\ell}(v^{(\nu+1)}, z^{(\nu+1)}) + w_{q,b'}^{0,(\nu+1)}, & \text{si } a = (j_\ell(b), j'_\ell(b')) \in A_{\ell,b}^0, \ell \in L, b, b' \in \Pi_\ell \\ \bar{T}_a^{(\nu+1)} = T_a(v^{(\nu+1)}, z^{(\nu+1)}) & \text{de otra forma} \end{cases}$$

3. Resolver el problema lineal entero mixto para  $(\bar{T}^{(\nu+1)}, \bar{Z}^{(\nu+1)}, \bar{P}^{(\nu+1)}, \bar{C}^{(\nu+1)})$  y obtener nuevos flujos  $v^{(\nu+2)}$  y número de servicios  $z^{(\nu+2)}$ . Incrementar contador  $\nu \leftarrow \nu + 1$  y volver al paso 1.

El algoritmo termina cuando, para un predeterminado número de iteraciones  $r$  consecutivas, el número de servicios asignados a las líneas de bus no se altera ( $z^{\nu+1} = \dots = z^{\nu+r}$ ) y también durante esas  $r$  iteraciones, los flujos  $v$  y las demoras totales

$\zeta$  presentan poca fluctuación ( $v^{v+s+1} - v^{v+s} \leq \varepsilon_v$  y  $\zeta^{v+s+1} - \zeta^{v+s} \leq \varepsilon_\zeta$ ,  $s = 1, 2, \dots, r-1$ )

## 7. RESULTADOS

Se presentará la aplicación del anterior modelo en una red de pruebas basada en las estaciones de cercanías del corredor (Atocha, Recoletos, Nuevos Ministerios y Chamartín). Se muestra la matriz OD de viajes entre estaciones en el periodo  $h = 180$  minutos. La última fila y columna expresan las tasas *medias* de llegadas y partidas por minuto en las diferentes estaciones. Debe observarse lo *muy elevadas* que son bastantes de ellas.

	At	Re	NM	Ch	TotalOr.	pax/min
At	0	2.011	22.097	368	24.476	135,98
Re	170	0	3.066	230	3.466	19,25
NM	4.386	150	0	170	4.706	26,14
Ch	2.504	150	2.438	0	5.092	28,28
TotalDest.	7.060	2.311	27.601	768	37.740	–
pax/min	39,22	12,84	153,34	4,26	–	–

Se muestran los resultados para la red mostrada en la figura 3., durante un período de 3 horas y para la matriz O-D de pasajeros anterior, suponiendo una frecuencia de llegada a las estaciones muy regular. Por  $z$  se designa el nº de servicios a efectuar por los  $n$  vehículos asignados a cada una de las líneas (sólo resultan válidas las líneas 11, 7 y 8 de entre todas las opciones mostradas en la figura 3).  $C1$  es el ciclo de línea resultante,  $HH0$  el headway medio y  $CCI$  la capacidad de la línea. Se han utilizado autobuses de capacidad 100 pax y se ha supuesto 5 plazas de aparcamiento en cada estación (pklots). El nº total de buses que caben en las diferentes estaciones viene dado  $LOSE+L1SE$ ; las ocupaciones resultantes de estos espacios vienen indicadas por  $LOSEoc$  y  $L1Seoc$  respectivamente. La cantidad máxima de pasajeros esperando en las estaciones viene indicada por  $MaxPax$  y la ocupación máxima posible en un 95%, por  $PaxOc$ .  $Zmaxb$  proporciona la estimación de la capacidad (3 horas) de entrada de las estaciones,  $wpck$  indica el tiempo de espera en cola de los buses. Por  $\rho_{hob}$  se indica el factor de carga y por  $\kappa$  el PST (passenger service time) de cada estación.

<b>Sigma=0.0 eta=1.0</b>						
	<b>z</b>	<b>n</b>	<b>C1</b>	<b>HH0</b>	<b>CC1</b>	
L-L11	22	7	49.4	8.1	2200	
L-L7	62	14	38.9	2.9	6200	
L-L8	180	59	58.2	1.0	18000	
<b>Pcklen Cappck Pcksize T a Peu Tppax</b>						
	12.0	100.0	1.0	0.116	27.5	
<b>prklots prklength LOQ(m) Llspai LOSE LOSEoc</b>						
At	5	64	180	24	20	20.26
Re	5	64	64	24	10	9.37
NM	5	64	64	24	10	8.01
Ch	5	64	250	24	25	17.07
<b>LlSE LlSEoc MaxPax PaxOc</b>						
At	2	0.84	2500	2500.0		
Re	2	1.00	900	797.2		
NM	2	0.75	1200	40.0		
Ch	2	1.10	800	202.1		
<b>Zmaxb wpck rhob kappa</b>						
At	202.9	2.53	0.782	3.48		
Re	242.9	0.58	0.467	1.73		
NM	212.0	0.50	0.433	2.16		
Ch	341.0	1.57	0.675	2.30		

## 8. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo formulado como problema de Programación Matemática para asignar frecuencias a líneas de transporte público en situaciones de elevada demanda, tales como las que se producen en situaciones de disrupción y eventos especiales en entornos urbanos densos. Este modelo presta especial atención a: a) el dimensionamiento y otros parámetros operacionales en las estaciones del sistema auxiliar de transporte, b) los fenómenos de colas de los autobuses en las estaciones. Para poder resolver el modelo de forma satisfactoria computacionalmente se ha desarrollado un método de resolución heurístico basado en una iteración de tipo MSA (method of successive averages).

## 9. BIBLIOGRAFÍA

- ANDERSON, P.A., SCALIA-TOMBA G.P. (1981). A mathematical model of a bus route. **Transportation Research. B** 15, 4, 249-266
- B. BOUZAÏENE-AYARI, M. GENDREAU, S. NGUYEN. (2001) Modelling bus stops in transit networks: a survey and new formulations. **Transportation Science. Vol 35, No 3**, 304-321,
- FERNÁNDEZ, R. TAYLOR, N. (2005) Effect of passenger-bus-traffic interactions on

bus stop operations. **Transportation Planning and Technology**. **28, 4** 272-292

GIBSON, J., I. BAEZA AND L.G. WILLUMSEN (1989) Bus-stops, congestion and congested bus-stops. **Traffic Engineering and Control** **30(6)**, 291-302.

GUENTHNER, R. P., K. C. SINHA. (1983). Modeling bus delays due to passenger boardings and alightings. **Transportation Research Record**, **915**: 7-13.

MARÍN, A. (2007). An extension to rapid transit network design problem. **Trabajos de Investigación Operativa**, **15**: 231-241.

FERNANDEZ, R. TAYLOR, N. (2005) "Effect of passenger-bus-traffic interactions on bus stop operations" **Transportation Planning and Technology**. **28, 4** 272-292

TCRP-Transit Capacity and Quality of Service Manual. Report 100. 2nd Edition 2003. Transit Cooperative Research Program. Federal Transit Administration. TRB.