



Introducció a les **COM**unicacions (ICOM - ETSETB/UPC): Regions de Decisió i Cota de la Unió

Josep Sala Álvarez

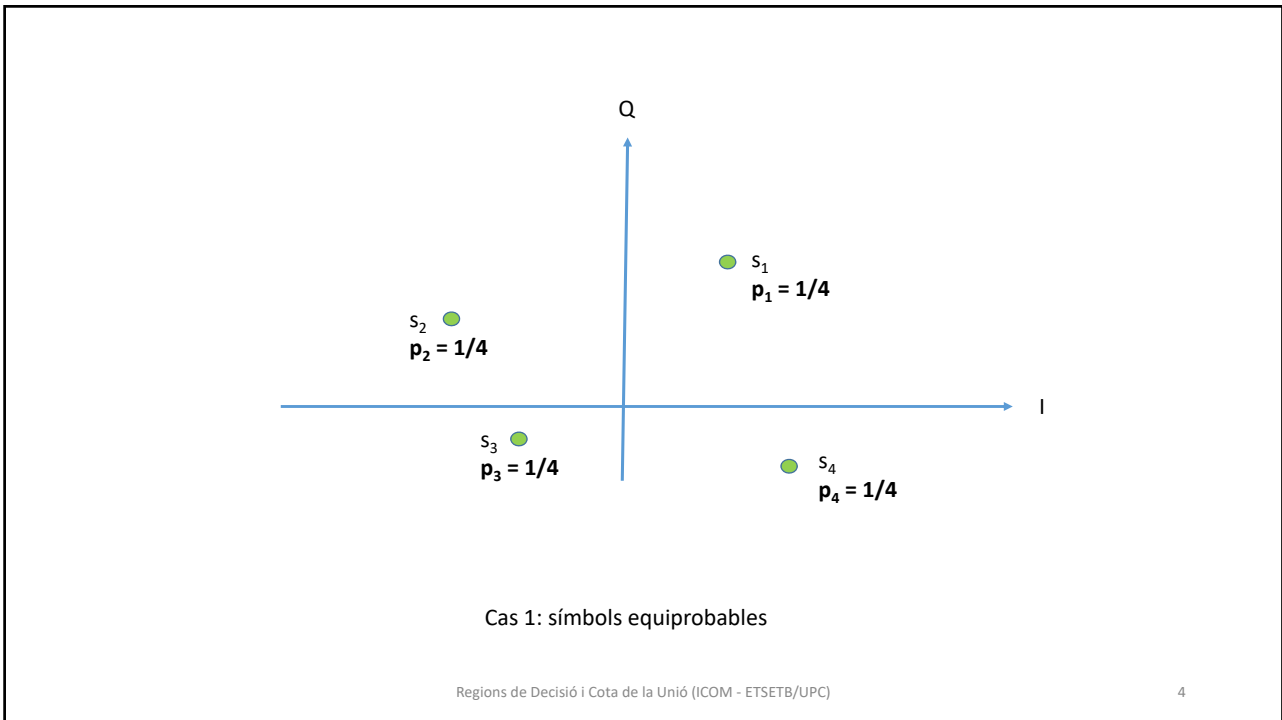
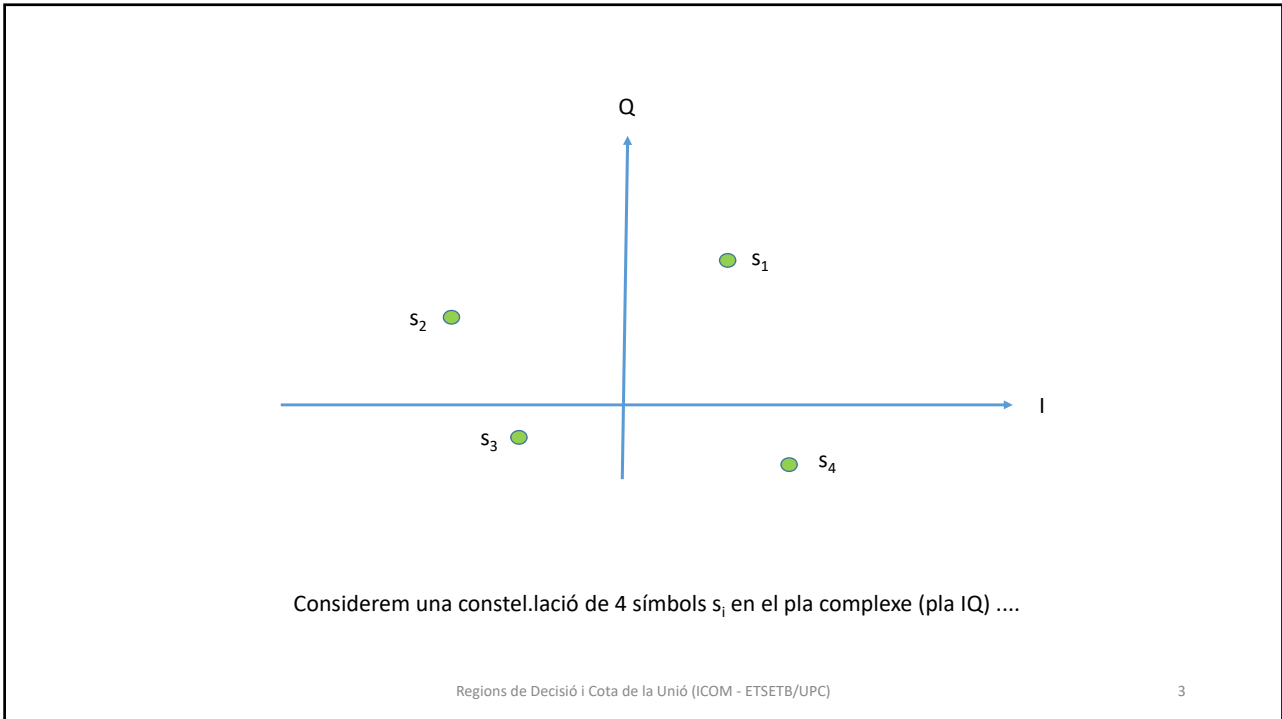
josep.sala@upc.edu

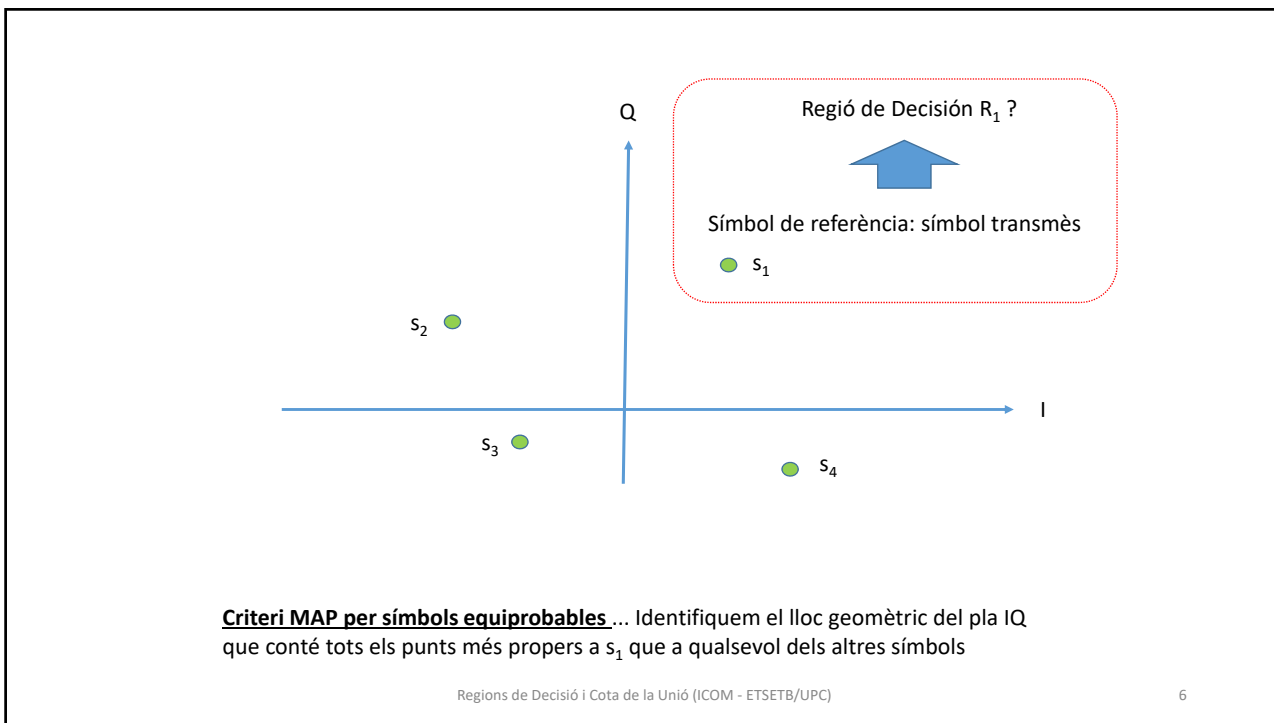
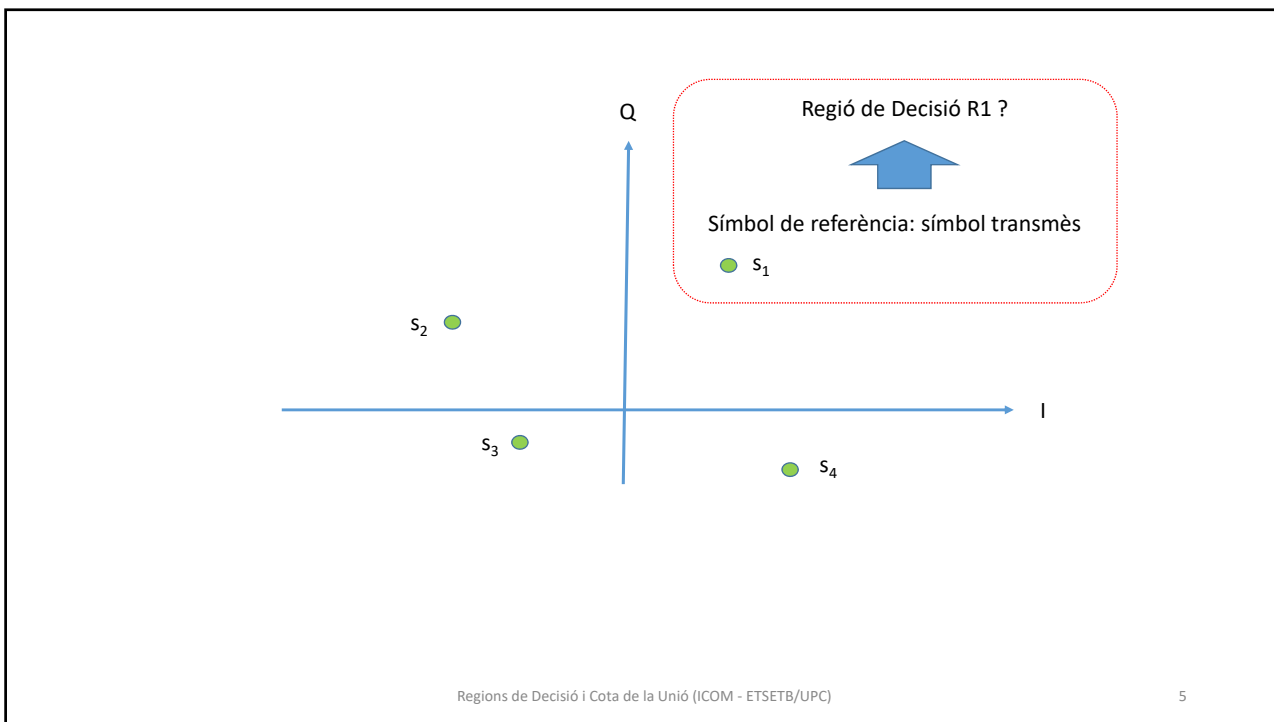
Dept. Teoria del Senyal i Comunicacions, Campus Nord UPC, Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya (Barcelona TECH)

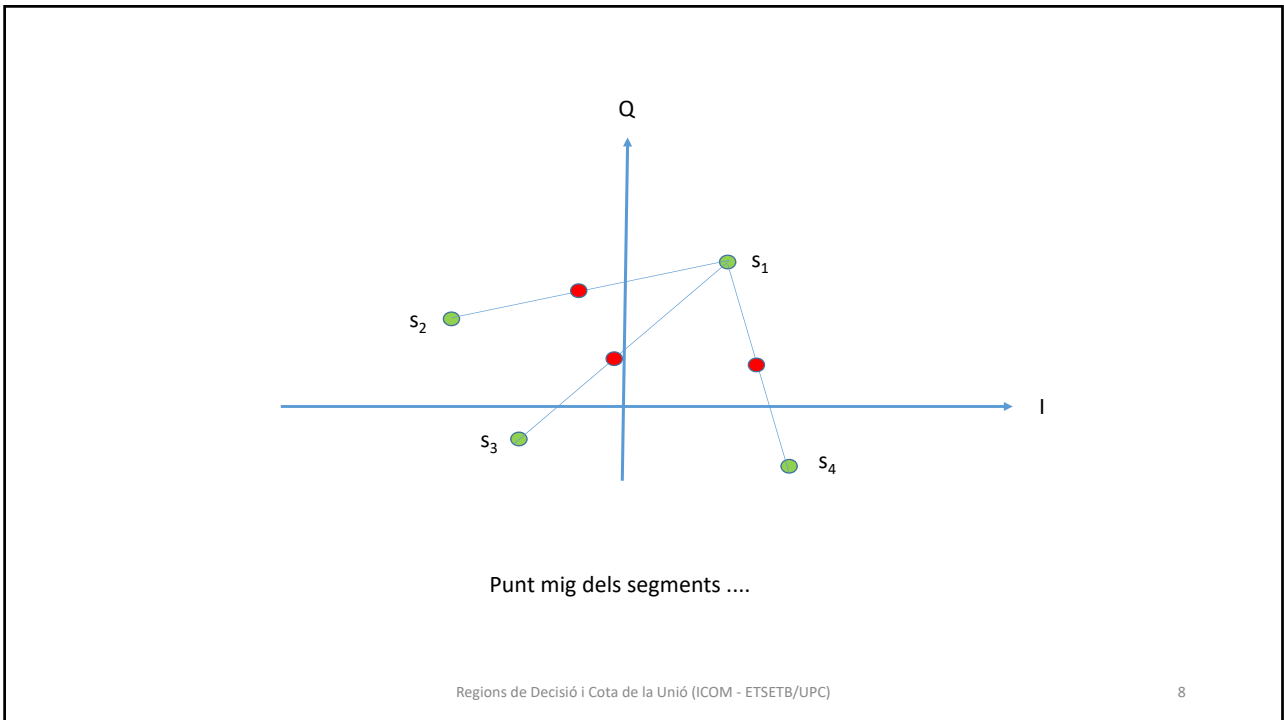
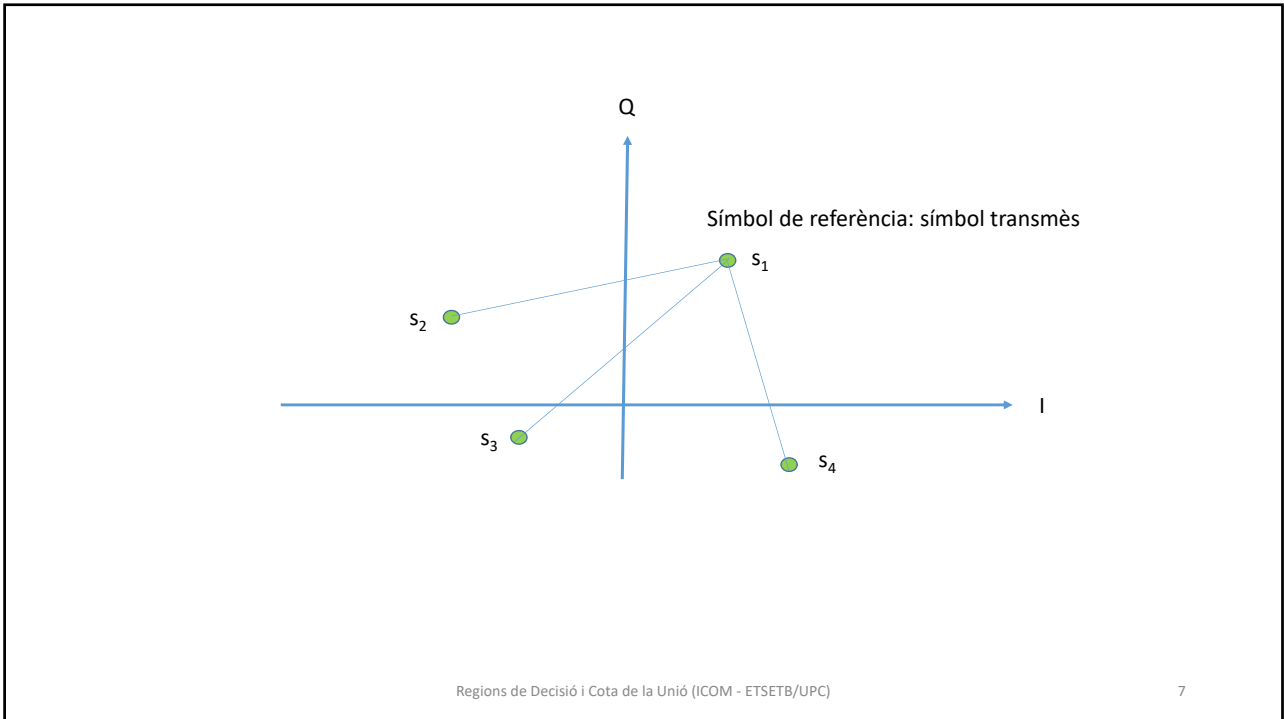
Aquest document presenta de forma gràfica :

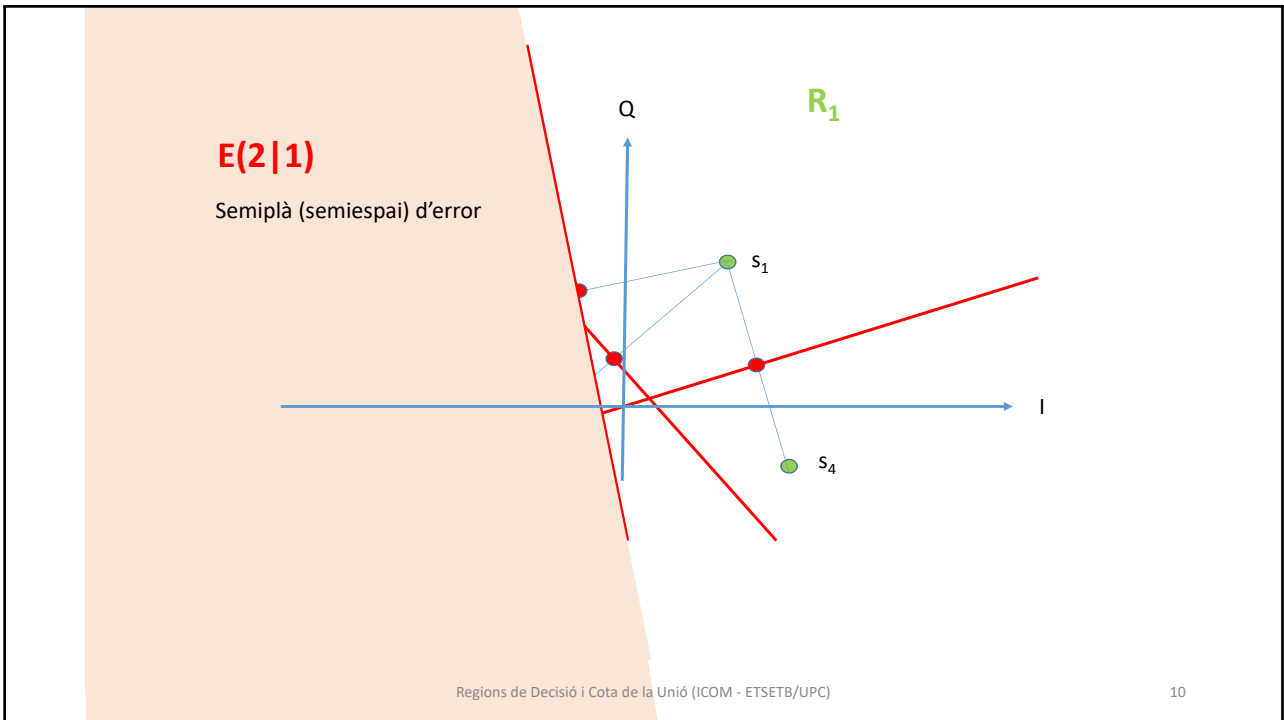
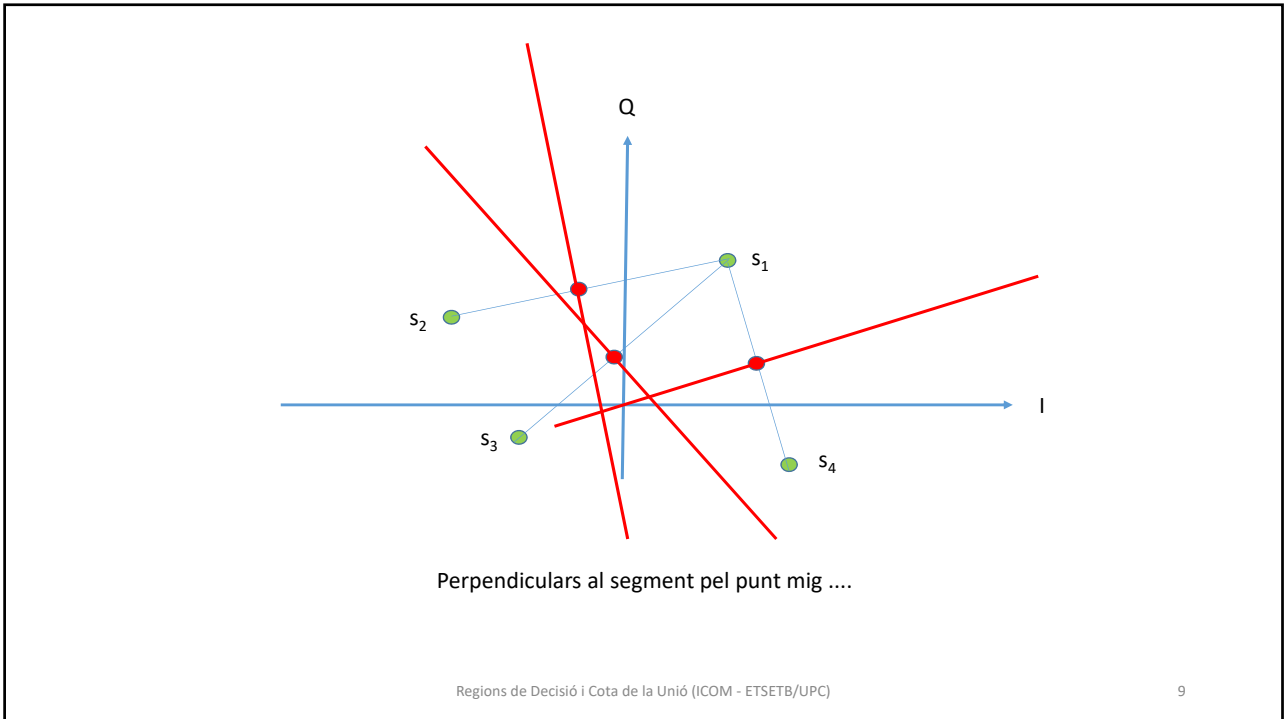
- La determinació de la regió de decisió \mathbf{R} associada a un símbol complex $\mathbf{s} = \mathbf{I} + \mathbf{jQ}$.
- La determinació de la seva probabilitat d'error i la d'una cota superior (Cota de la Unió).
- Exemples d'aplicació: 8-PSK, QPSK, 3-PSK+0.

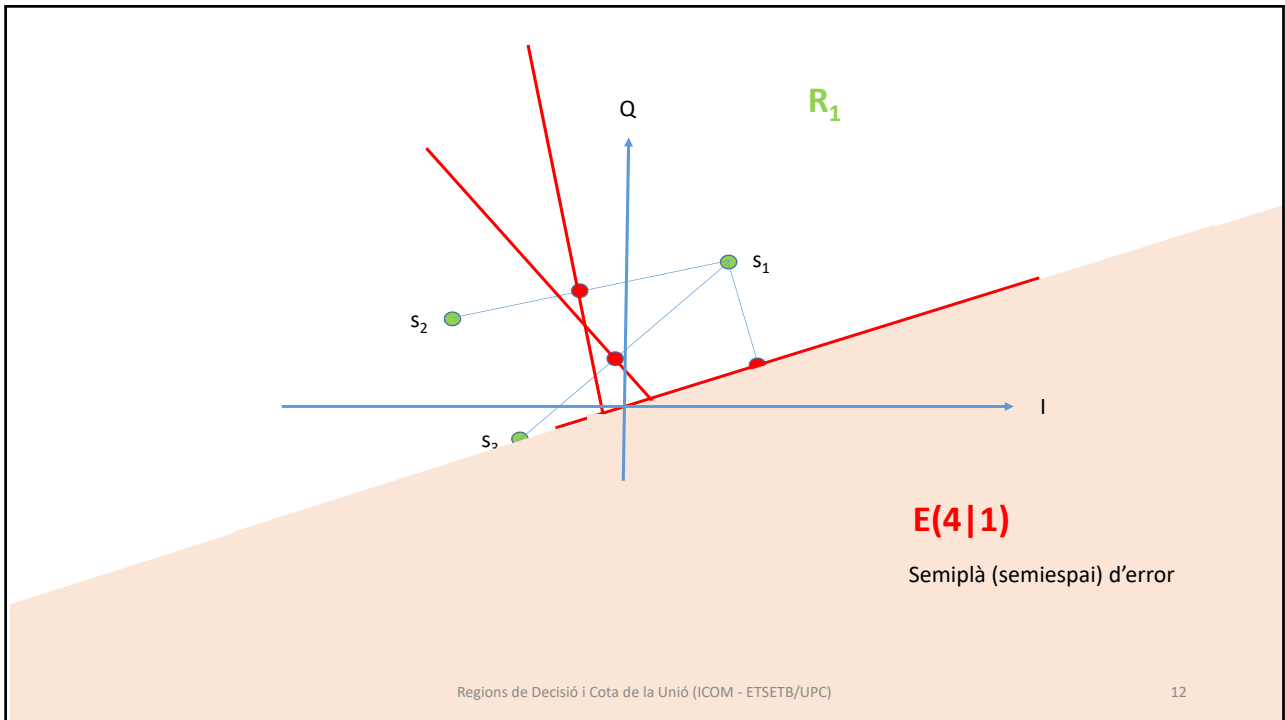
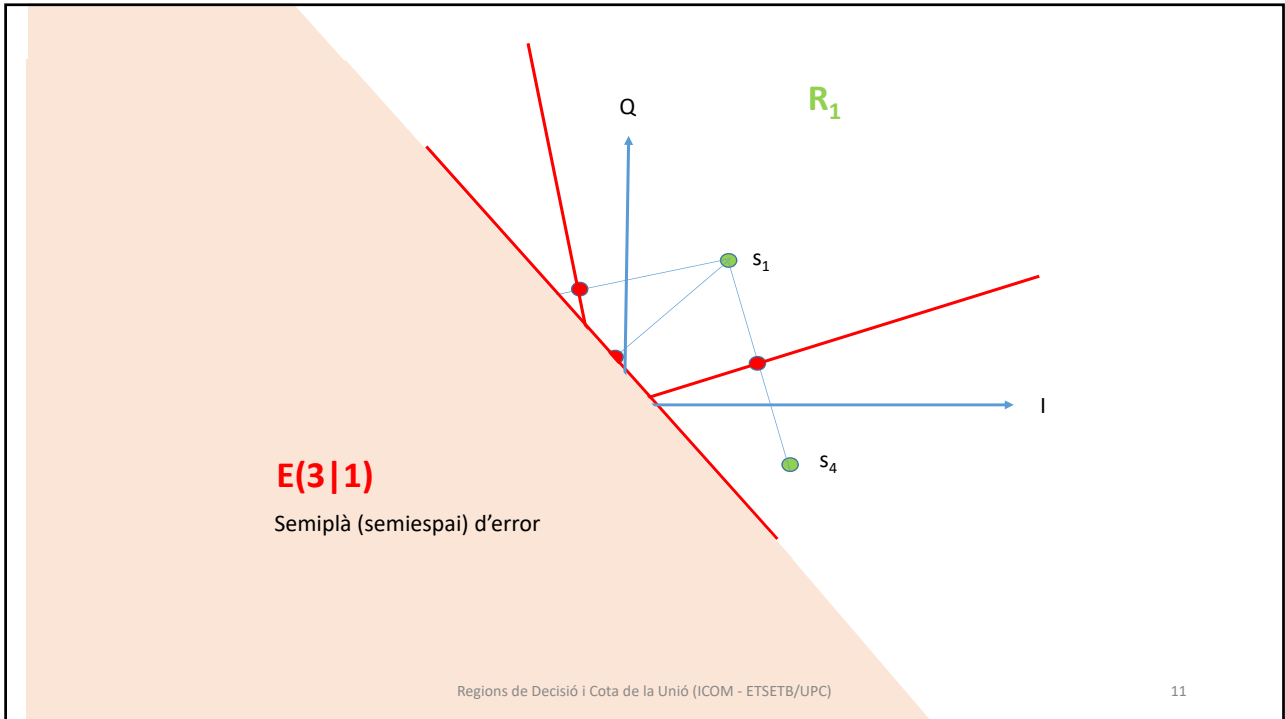
NOTA: la presentació està pensada per ser visualitzada en ordinador de forma animada.
No es recomana l'impressió en paper per excés de pàgines redundants.

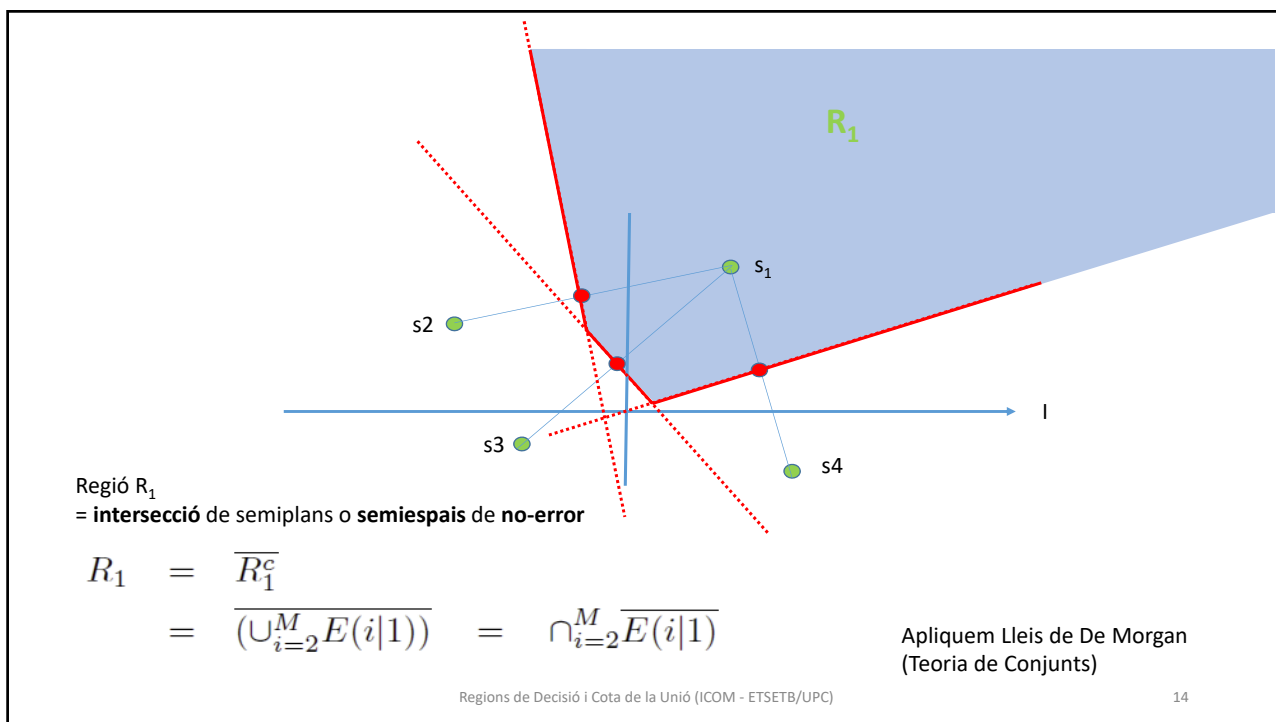
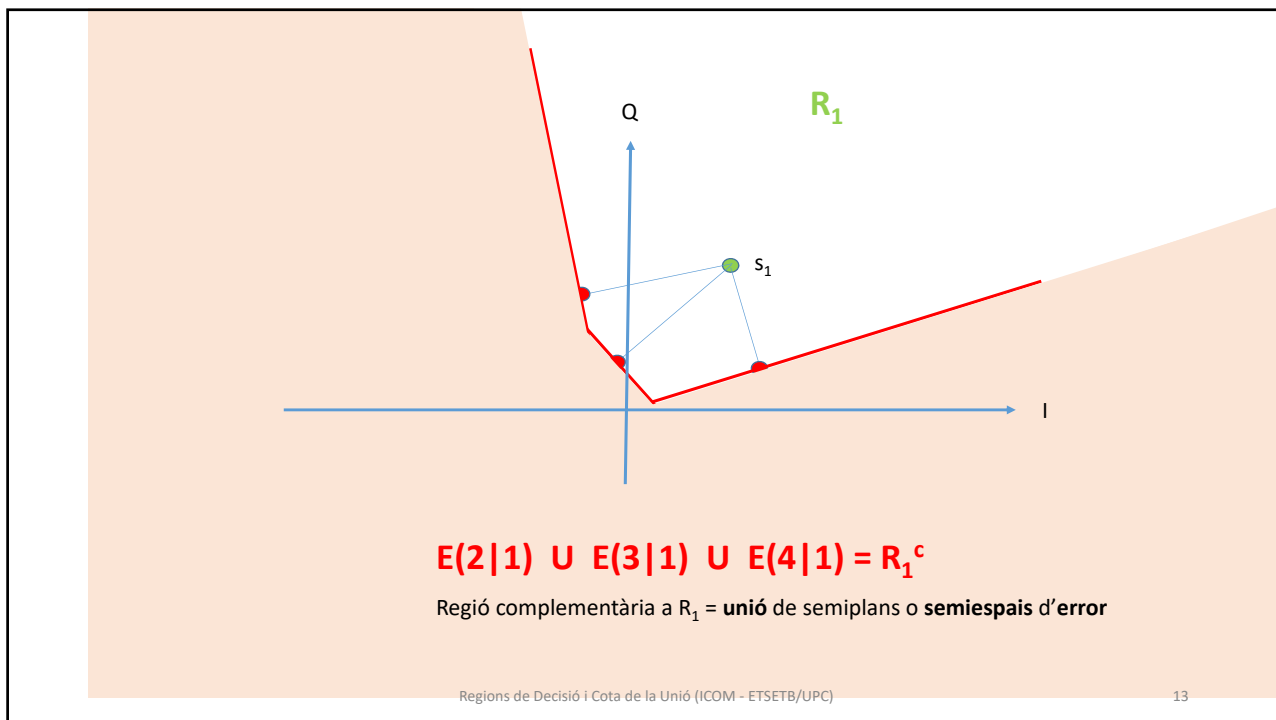


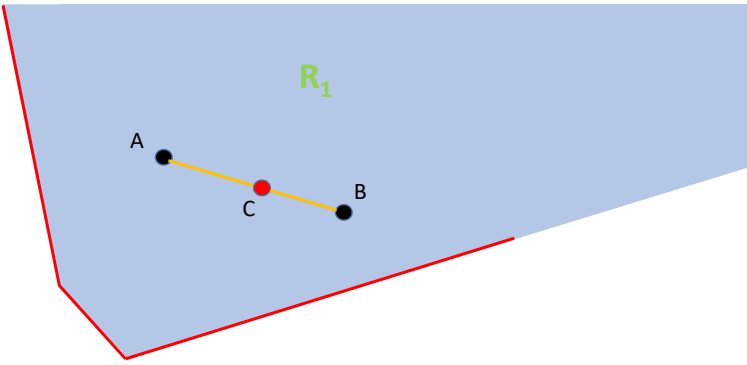










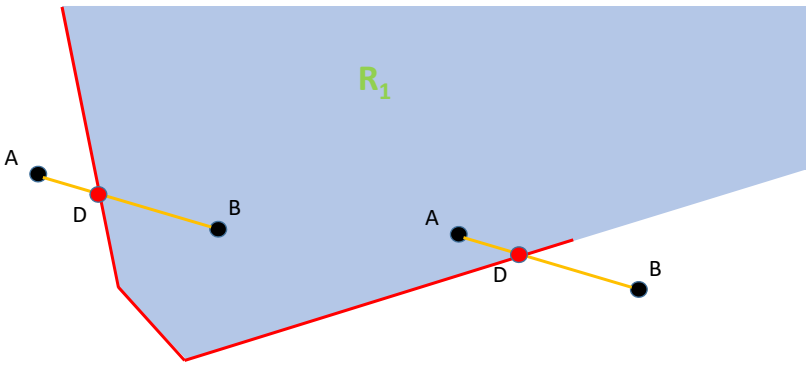


PROPIETAT 1

Les regions de decisió són **convexes**

Per qualsevol parella de punts A i B de R_1 , qualsevol punt C del segment que els uneix també pertany a la regió R_1

Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC) 15



PROPIETAT 1

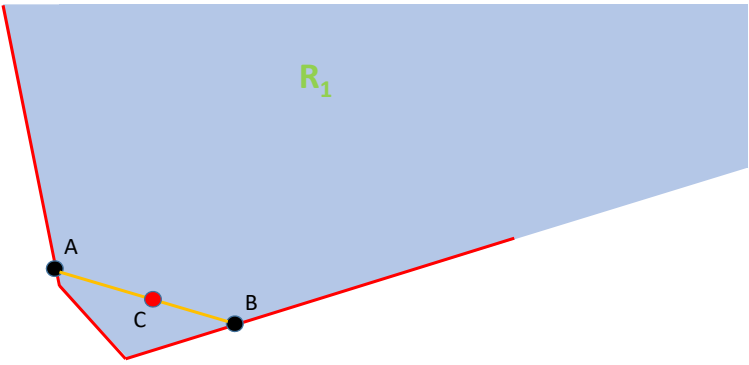
Les regions de decisió són **convexes**

Per qualsevol parella de punt A i B de R_1 , qualsevol punt C del segment que els uneix també pertany a la regió R_1

Si no fos així, una línia frontera de R_1 tallaria el segment AB en dues parts AD i DB i un dels dos punts A o B quedaria fora de R_1 , incorrent en una contradicció.

Per construcció de la regió R_1 com intersecció de semiplans, si la part AD està en R_1 , la part DB està fora de R_1 (i viceversa).

Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC) 16



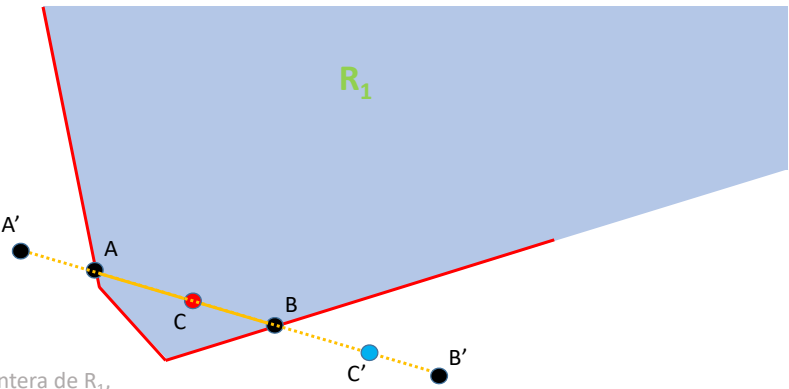
PROPIETAT 2

Les regions d'error **NO** són **convexes**

Per qualsevol parella de punts A i B en la frontera de R_1 ,

$R_1^c = E(2|1) \cup E(3|1) \cup E(4|1)$

Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC) 17



PROPIETAT 2

Les regions d'error **NO** són **convexes**

Per qualsevol parella de punts A i B en la frontera de R_1 , podem estendre el segment AB fora de R_1

El nou segment $A'B'$ conté punts C' dins de R_1^c , i també punts C fora de R_1^c (dins de R_1)

$R_1^c = E(2|1) \cup E(3|1) \cup E(4|1)$

Exceptuant el cas en que la única frontera sigui una recta (constel.lació de $M=2$ punts). En aquest cas la regió d'error i la regió de decisió són totes dues convexes.

Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC) 18

Probabilitat d'error de símbol quan es transmet el símbol $a_k = I_k + jQ_k$

$$p(\epsilon_s|k) = \int \int_{\cup_{i \neq k} E(i|k)} \frac{1}{2\pi N_0 E_p} \exp\left(-\frac{|(y_I + jy_Q) - \frac{E_p}{\sqrt{L_c}}(I_k + jQ_k)|^2}{2N_0 E_p}\right) dy_I dy_Q$$

Regió d'integració = complementària a la regió de decisió del símbol

$y = y_I + jy_Q$ Observació instant òptim a la sortida del Filtre Adaptat

E_p Energia de pols

L_c Atenuació en potència del canal

$a_k = I_k + jQ_k$ Símbol complex de la constel.lació en transmissió

$$A_i \doteq \{y \in E(i|1)\}, \quad 2 \leq i \leq M$$


Semiplà d'error: el símbol si té més versemblança que el símbol s_1 (quan transmetem s_1)

$$p(\epsilon_s|1) = \text{Prob}[y \in \cup_{i=2}^n A_i] \quad (n = M)$$

Probabilitat d'error de símbol en transmetre el símbol s_1

$$p(A \cap B) + p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Els semiplans d'error són conjunts de punts. Utilitzarem aquesta propietat per expressar les probabilitats d'error de símbol exactes i per obtenir-ne cotes superiors.

$$\begin{aligned}
 p(\epsilon_s|1) &= \text{Prob}[y \in \cup_{i=2}^n A_i] \\
 &= p(\cup_{i=2}^n A_i) \\
 &= p((\cup_{i=2}^{n-1} A_i) \cup A_n) \\
 &= p(\cup_{i=2}^{n-1} A_i) + p(A_n) - p((\cup_{i=2}^{n-1} A_i) \cap A_n) \\
 &= p(\cup_{i=2}^{n-2} A_i) + p(A_{n-1}) + p(A_n) - p((\cup_{i=2}^{n-2} A_i) \cap A_{n-1}) - p((\cup_{i=2}^{n-1} A_i) \cap A_n) \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{i=2}^n p(A_i) - \sum_{i'=3}^n p((\cup_{i=2}^{i'-1} A_i) \cap A_{i'}) \quad \text{exacte !!} \\
 &\leq \sum_{i=2}^n p(A_i) = \sum_{i=2}^n p(E(i|1))
 \end{aligned}$$


Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC) 21

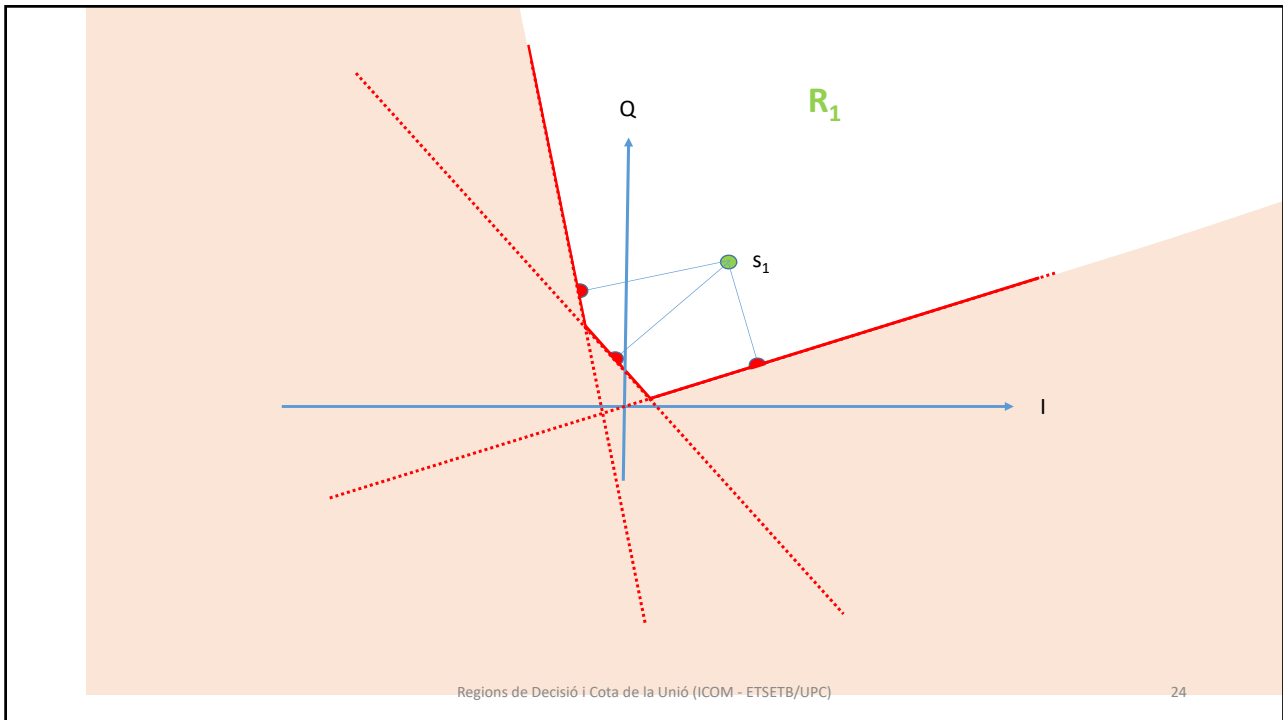
$$p(\cup_{i=2}^n A_i) \leq \sum_{i=2}^n p(A_i)$$

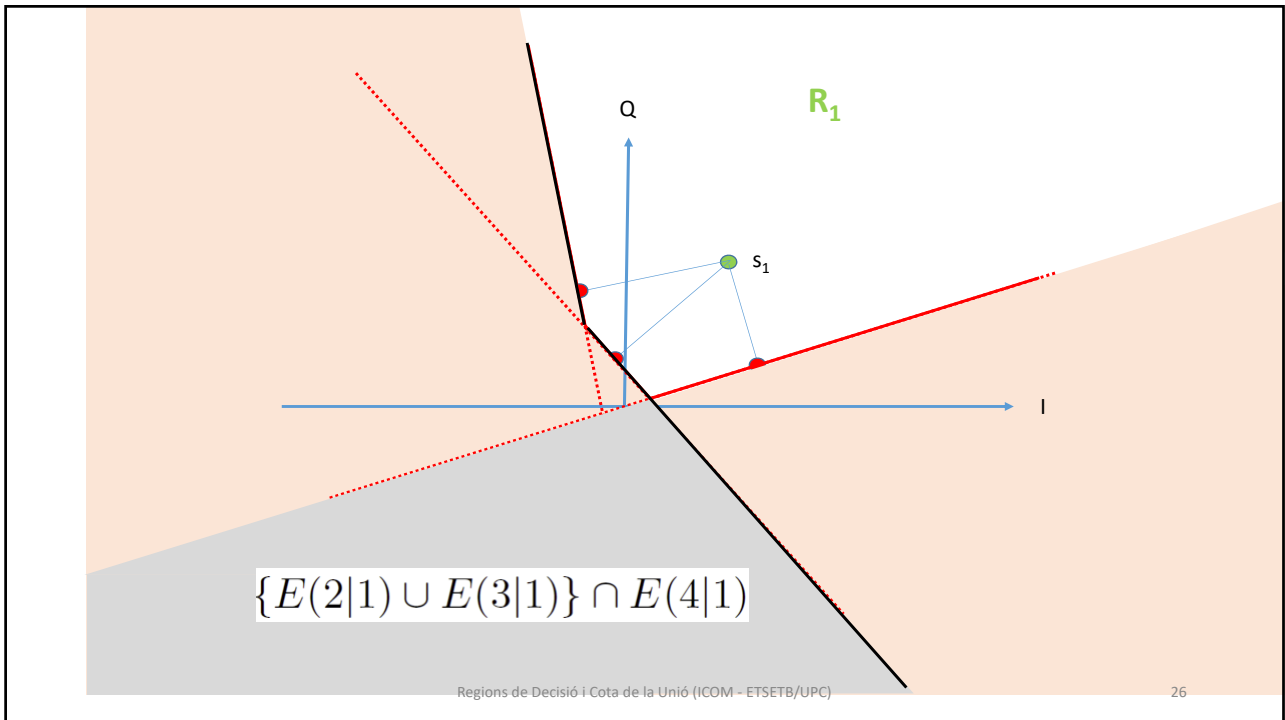
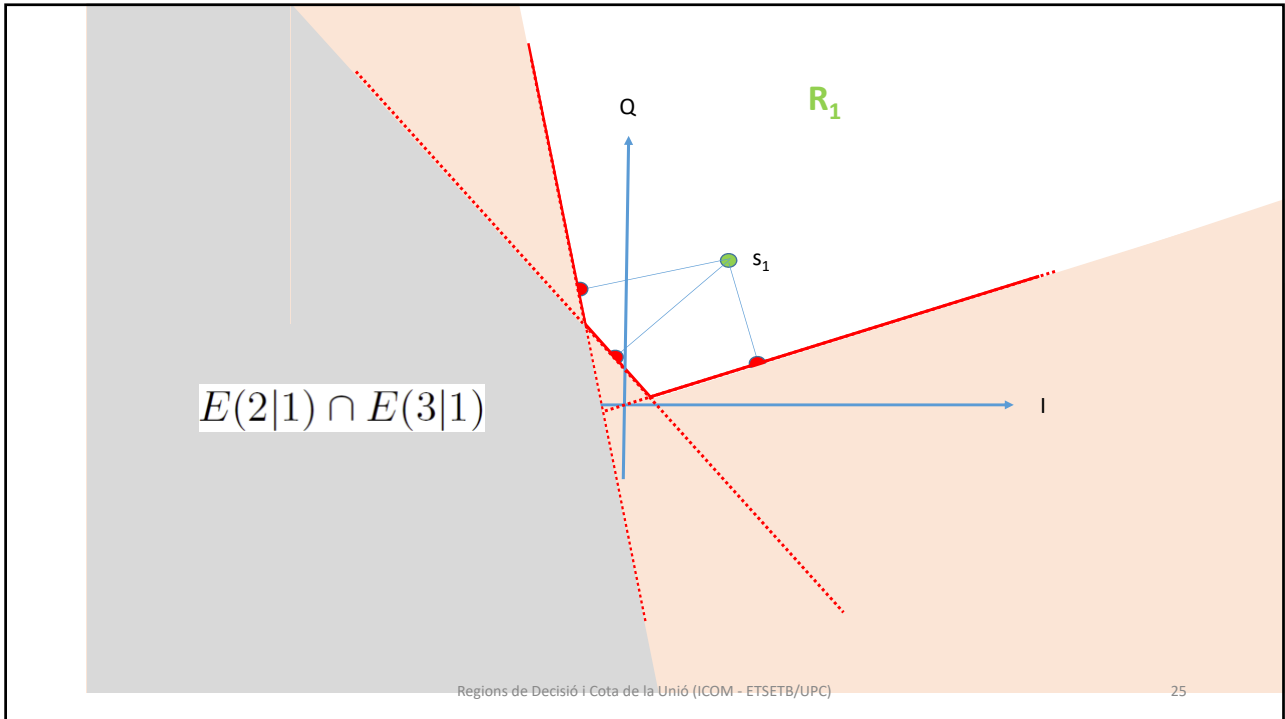
COTA DE LA UNIÓ
 -
UNION BOUND

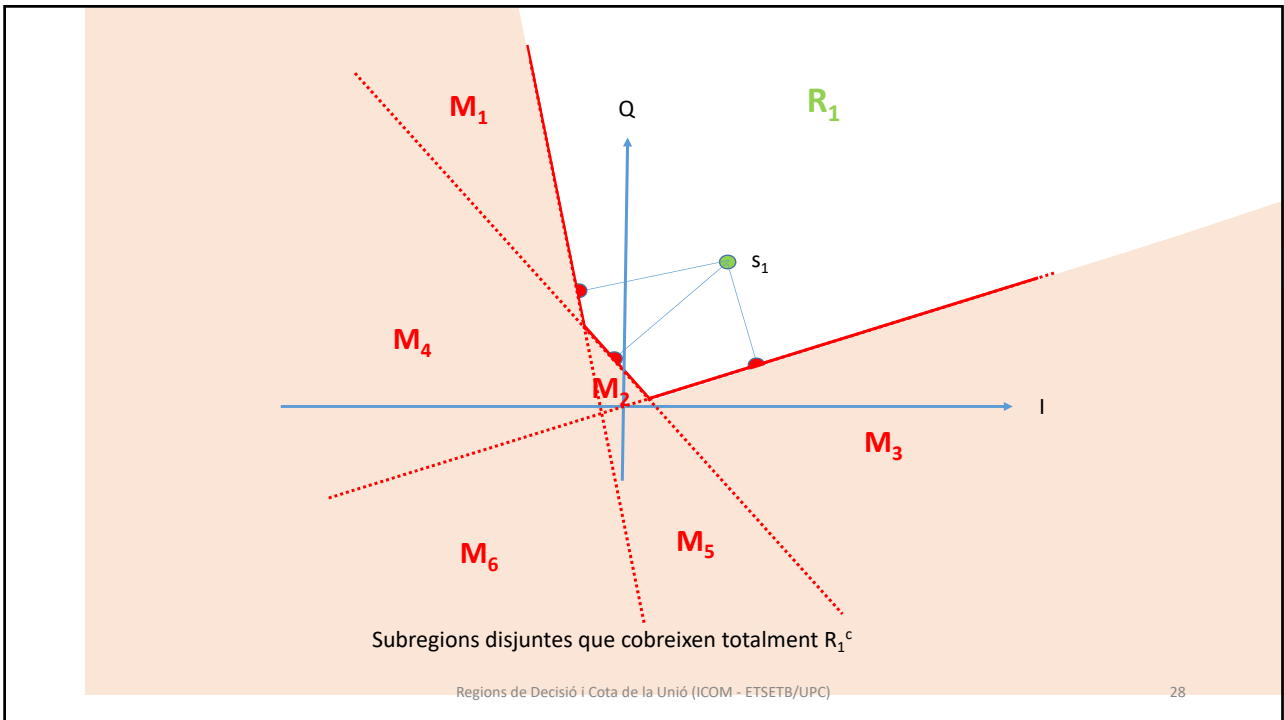
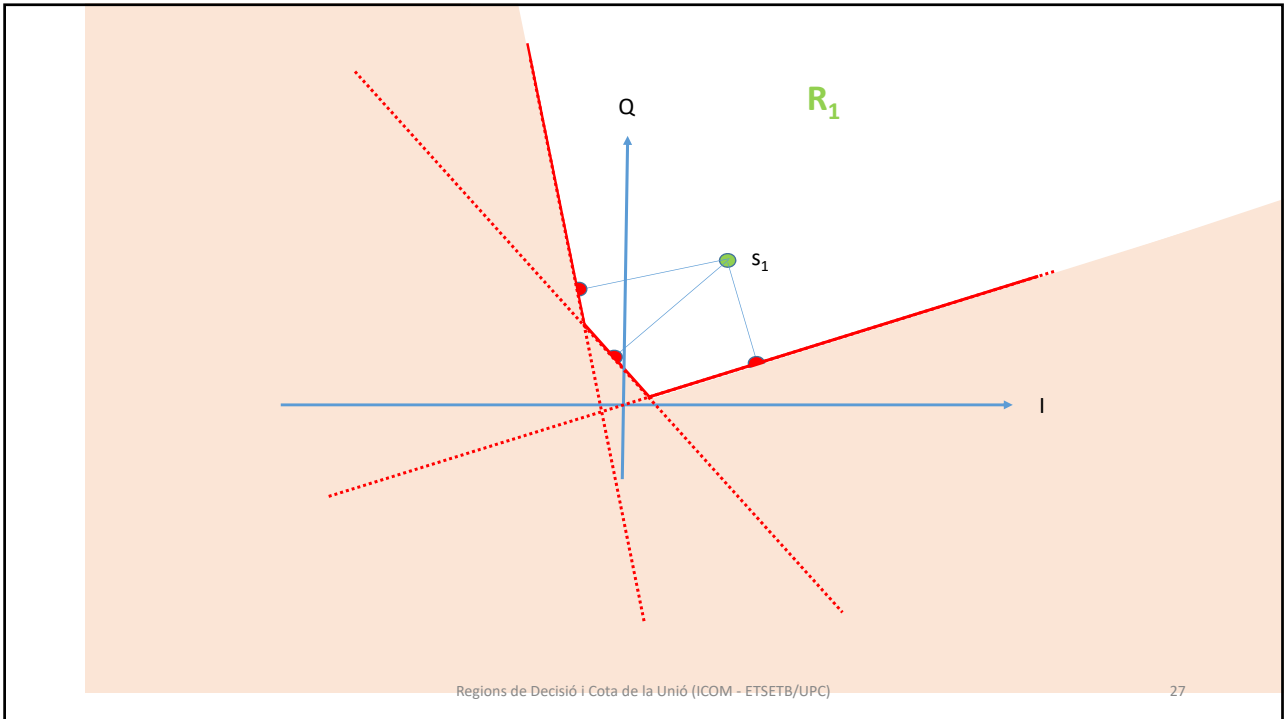
Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC) 22

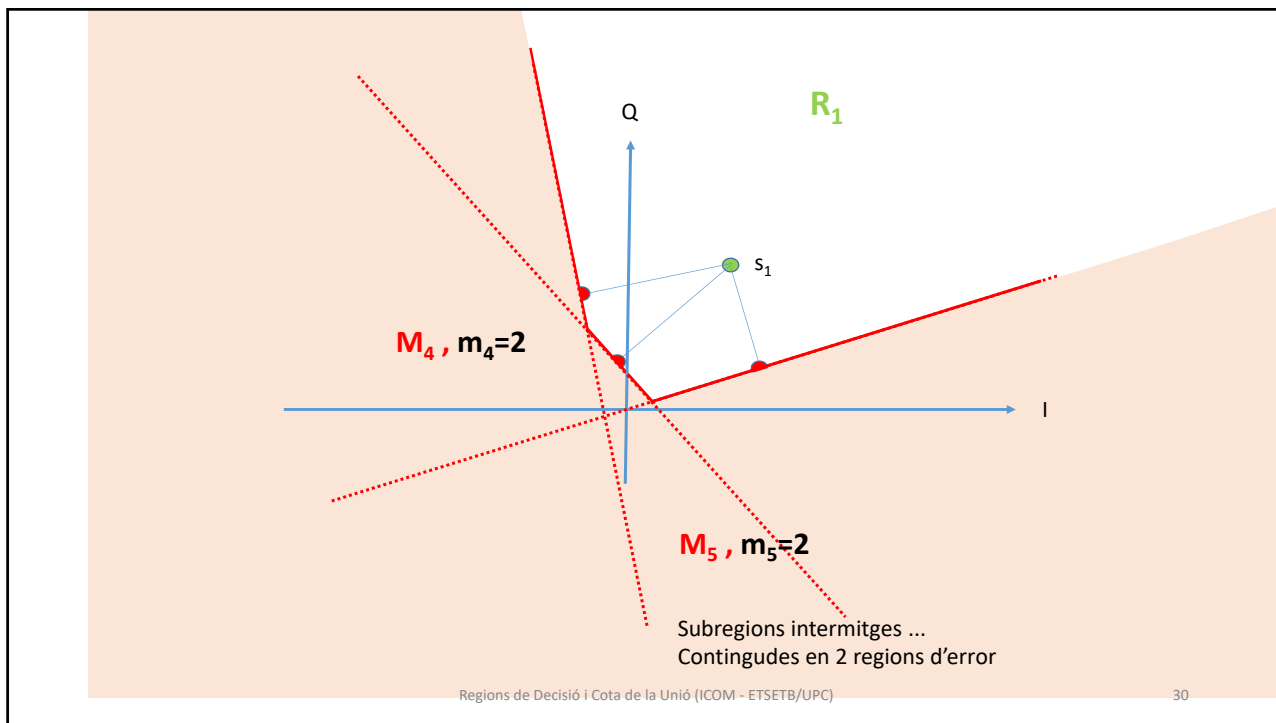
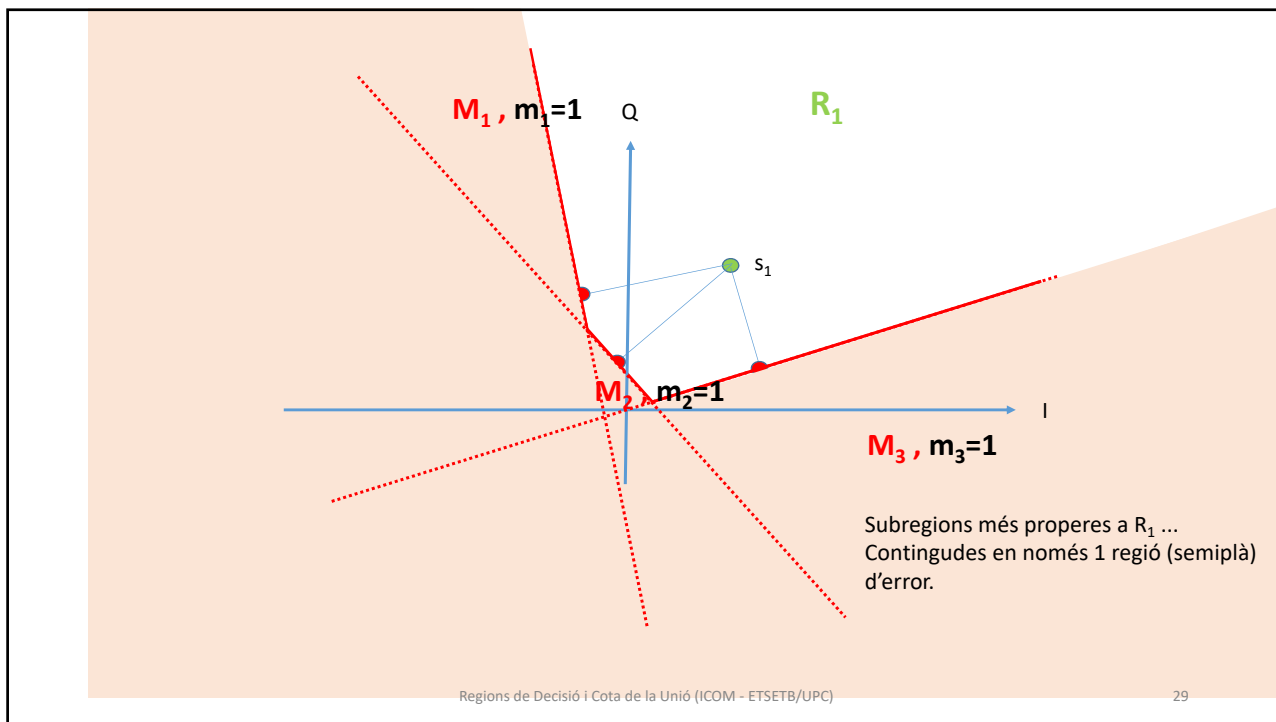
Desenvolupament per la constel·lació anterior :

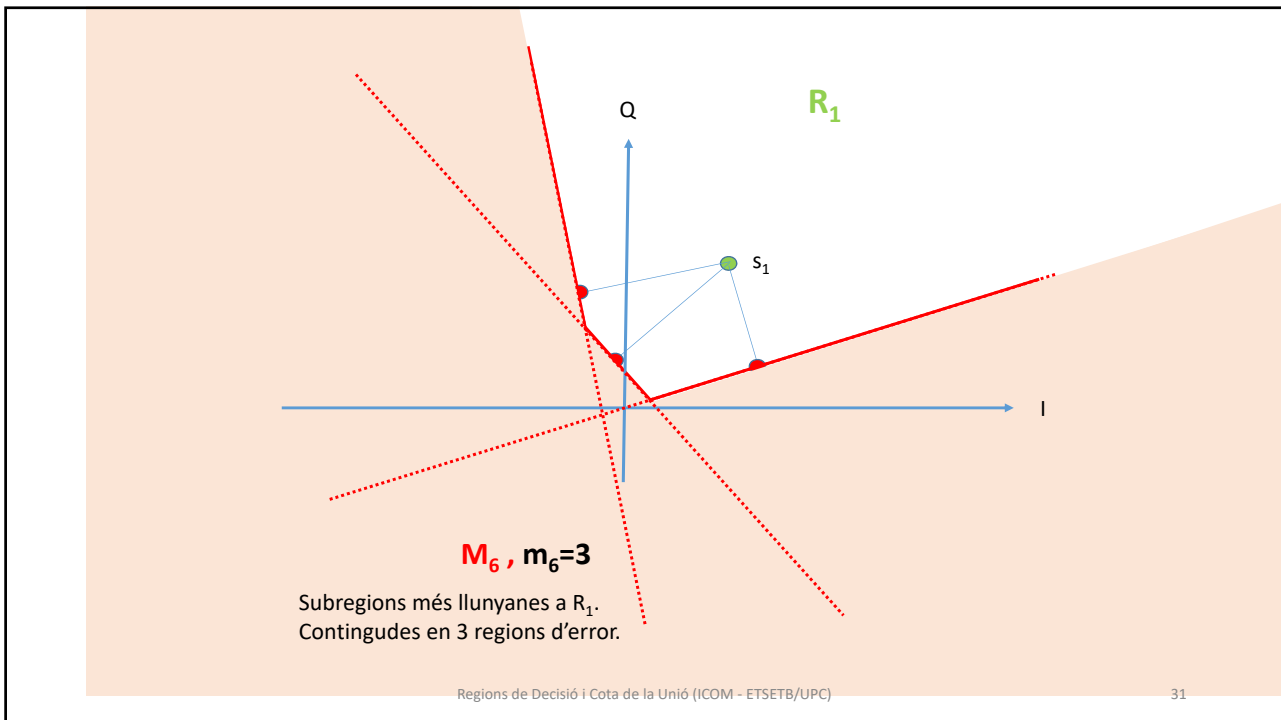
$$\begin{aligned}
 p(\epsilon_s|1) &= \text{Prob}(y \in \{E(2|1) \cup E(3|1) \cup E(4|1)\}) \\
 &= p(E(2|1)) + p(E(3|1)) + p(E(4|1)) \\
 &\quad - p(E(2|1) \cap E(3|1)) - p(\{E(2|1) \cup E(3|1)\} \cap E(4|1)) \\
 &\leq p(E(2|1)) + p(E(3|1)) + p(E(4|1))
 \end{aligned}$$











31

$$p\left(\cup_{i=2}^M E(i|1)\right) \leq \sum_{i=2}^M p(E(i|1))$$

Probabilitat d'error del símbol s_1

$$= \sum_{i=2}^M Q\left(\frac{d_{i,1}}{2\sigma}\right)$$

$$p\left(\cup_{i=1, i \neq k}^M E(i|k)\right) \leq \sum_{i=1, i \neq k}^M p(E(i|k))$$

Probabilitat d'error de la resta de símbols:
... es calcula d'ídèntica forma a partir de
l'espectre de distàncies inter-símbol
de la constel.lació.

$$= \sum_{i=1, i \neq k}^M Q\left(\frac{d_{i,k}}{2\sigma}\right)$$

Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC)

32

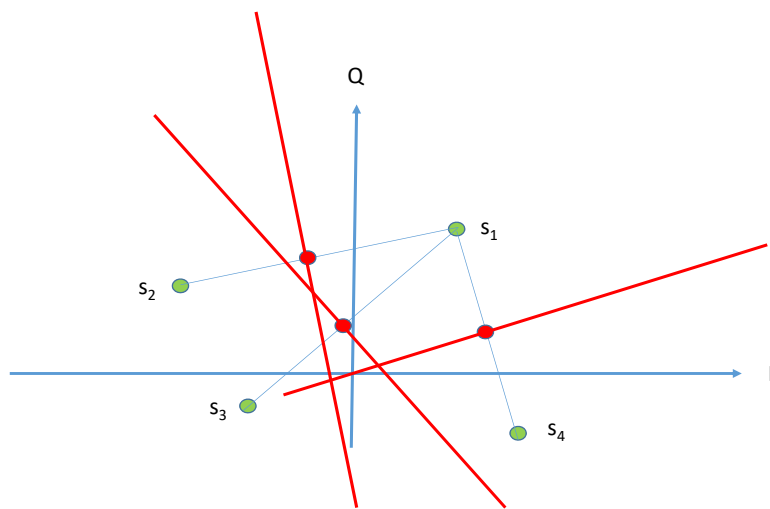
$$\begin{aligned}
 p(\epsilon_s) &= \sum_{k=1}^M p_k p(\epsilon_s | k) \\
 &= \sum_{k=1}^M \frac{1}{M} p(\epsilon_s | k) \quad (\text{símbols equiprobables}) \\
 &\leq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1, i \neq k}^M Q\left(\frac{d_{i,k}}{2\sigma}\right)
 \end{aligned}$$

← Probabilitats a priori de cada símbol

Cota de la Unió : símbols equiprobables

Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC)

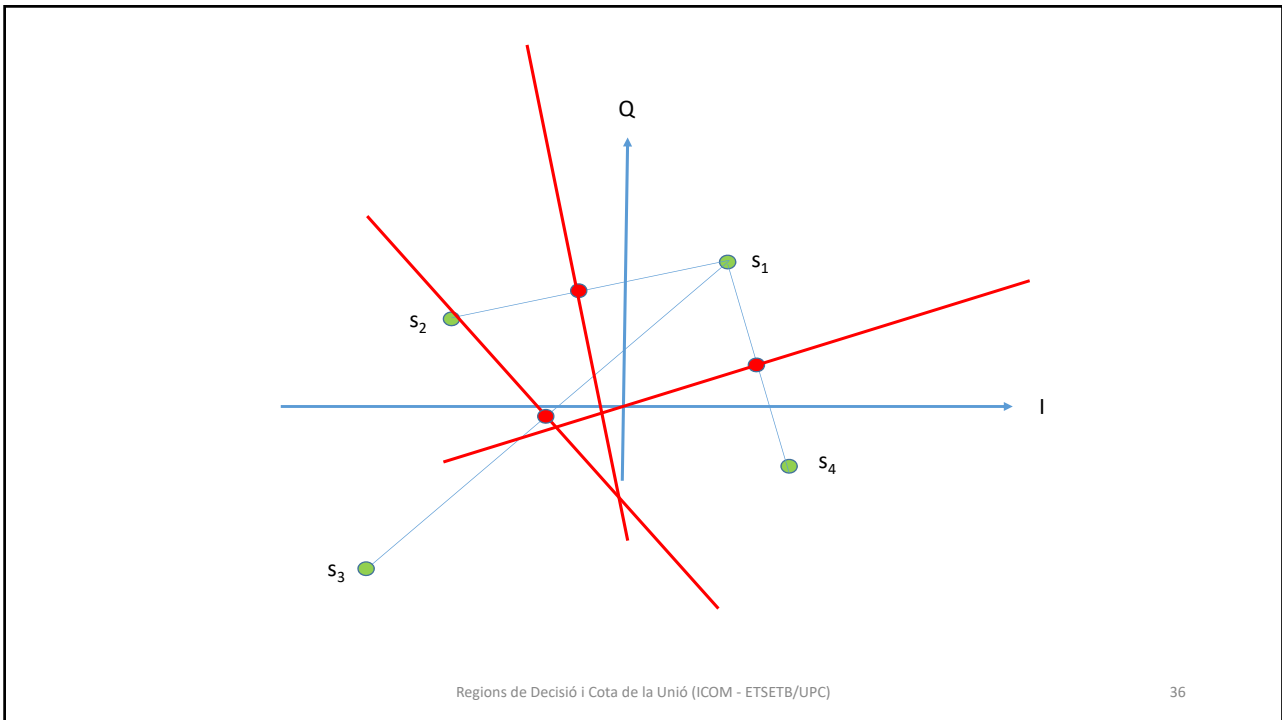
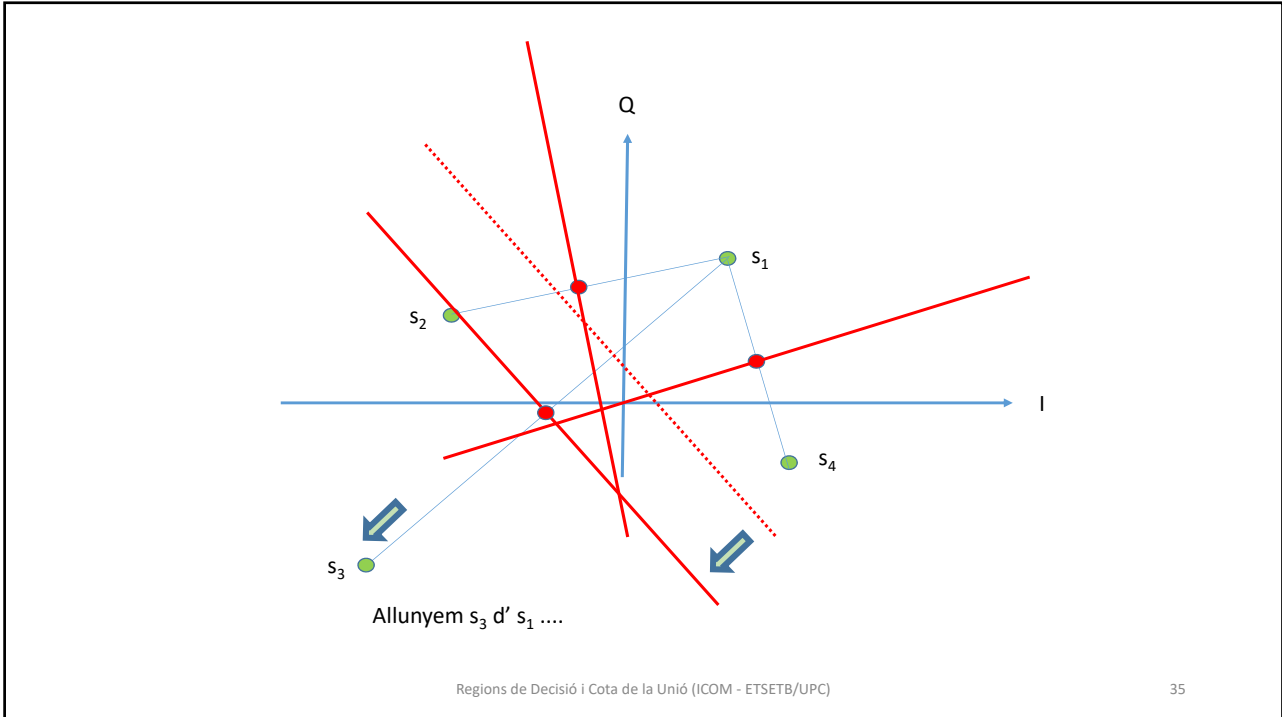
33

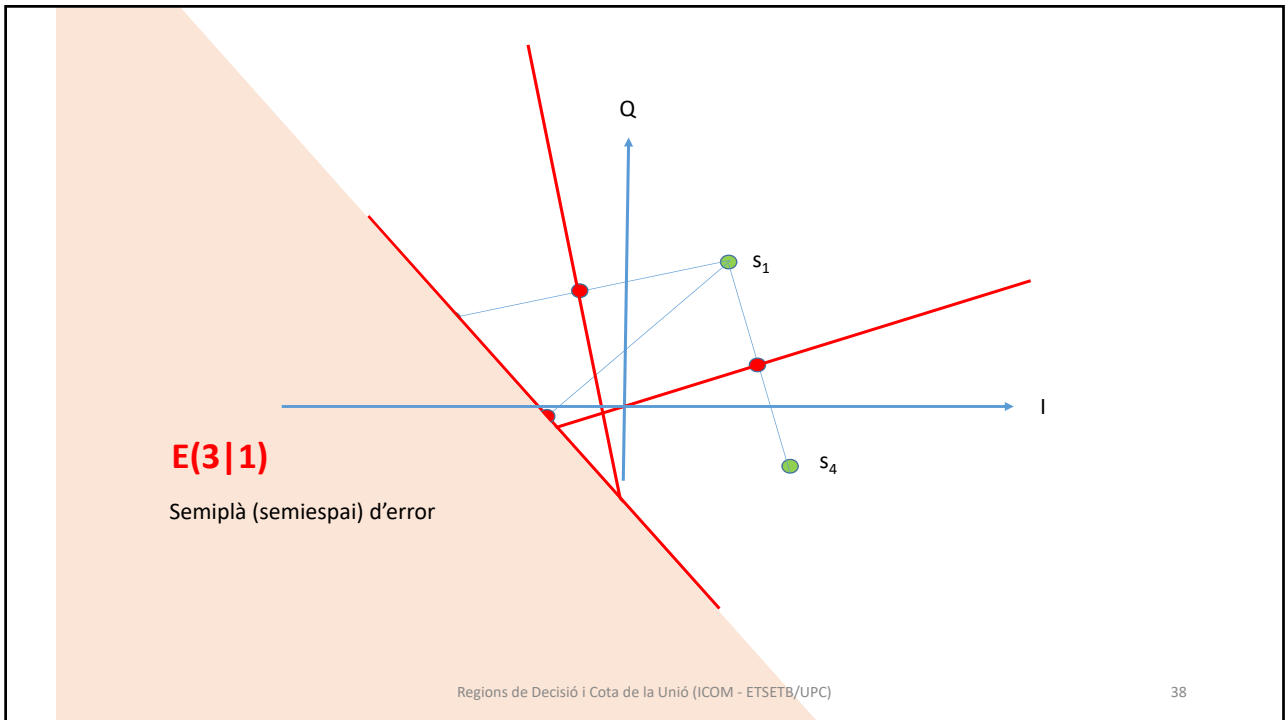
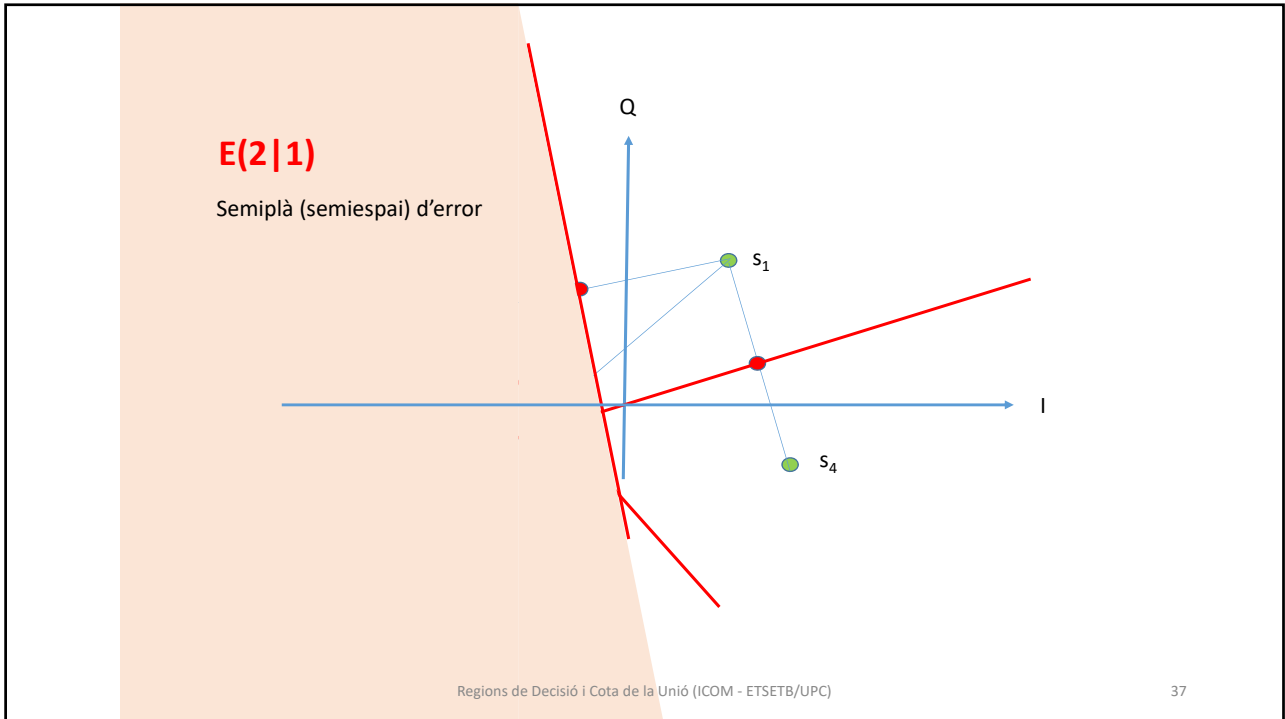


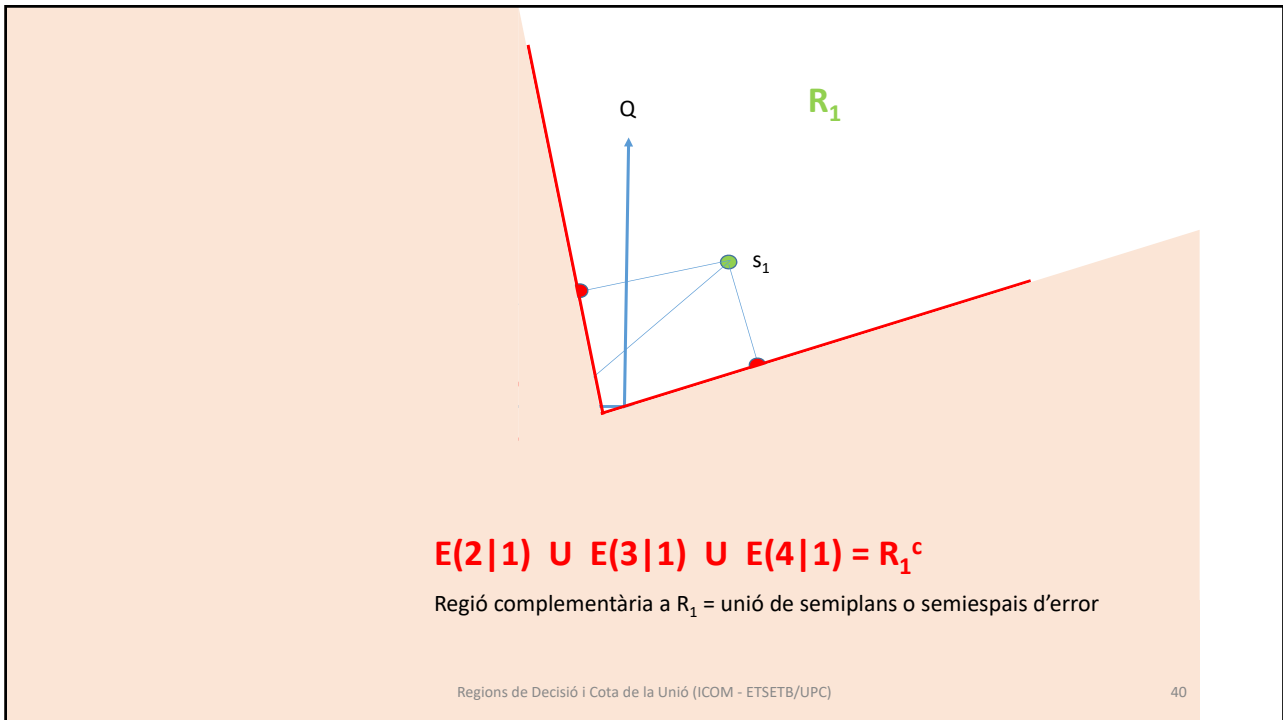
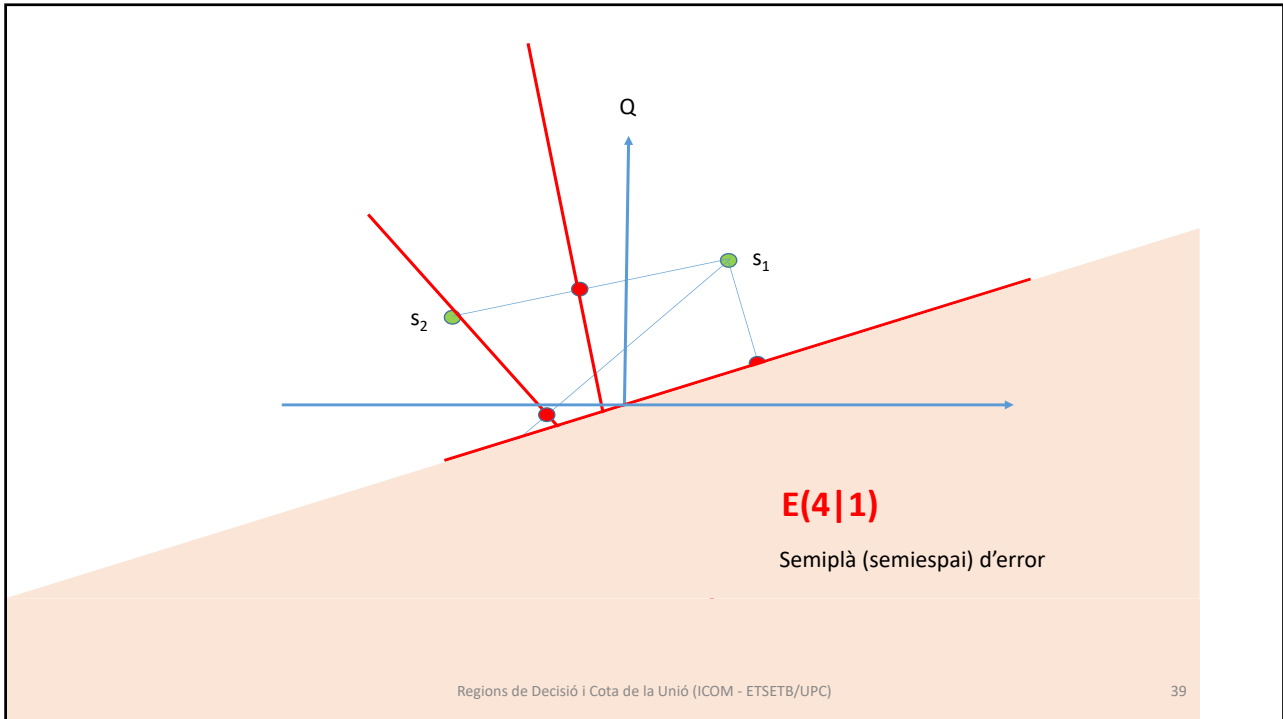
Tornem al punt anterior:
 Perpendiculars al segment pel punt mig

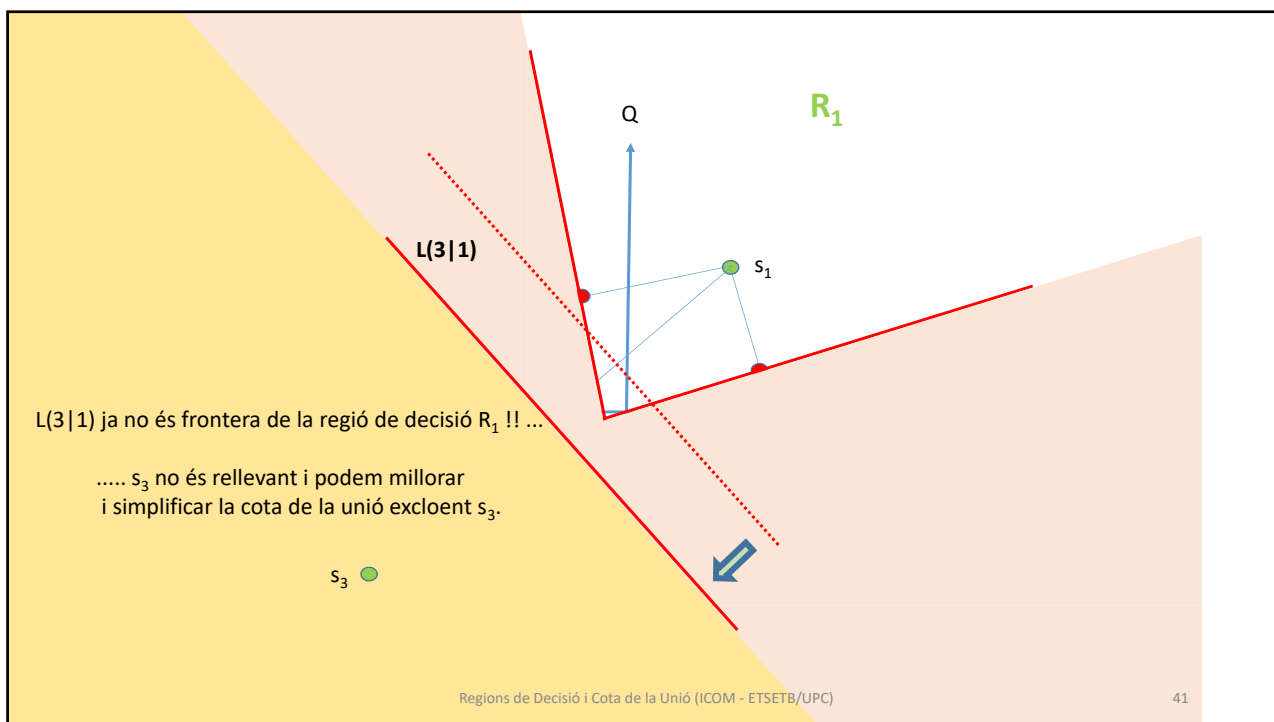
Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC)

34









De forma analítica

$$\begin{aligned}
 p(\epsilon_s|1) &= p(E(2|1)) + p(E(3|1)) + p(E(4|1)) - p(E(2|1) \cap E(3|1)) - p(\{E(2|1) \cup E(3|1)\} \cap E(4|1)) \\
 (3 \leftrightarrow 4) \\
 &= p(E(2|1)) + p(E(4|1)) + p(E(3|1)) - p(E(2|1) \cap E(4|1)) - p(\{E(2|1) \cup E(4|1)\} \cap E(3|1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(3|1) &\subset \{E(2|1) \cup E(4|1)\} \quad (\text{condició símbol irrellevant}) \\
 \Rightarrow &\{E(2|1) \cup E(4|1)\} \cap E(3|1) = E(3|1) \quad , \\
 &\{E(2|1) \cup E(4|1)\} \cup E(3|1) = \{E(2|1) \cup E(4|1)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(\epsilon_s|1) &= p(E(2|1)) + p(E(4|1)) + p(E(3|1)) - p(E(2|1) \cap E(4|1)) - p(E(3|1)) \\
 &= p(E(2|1)) + p(E(4|1)) - p(E(2|1) \cap E(4|1)) \\
 &\leq p(E(2|1)) + p(E(4|1))
 \end{aligned}$$

.... es cancel·len termes entre si i només queden els rellevants

I de forma més general (pel símbol s_1)

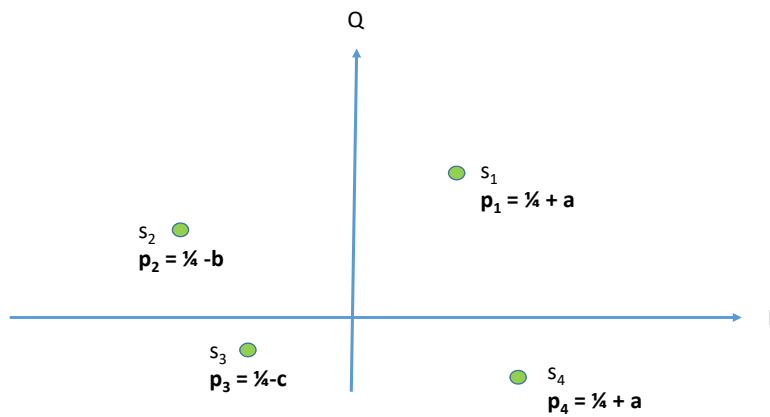
$$A_k \subset \bigcup_{i=2, i \neq k}^M A_i$$

(condició símbol irrellevant)

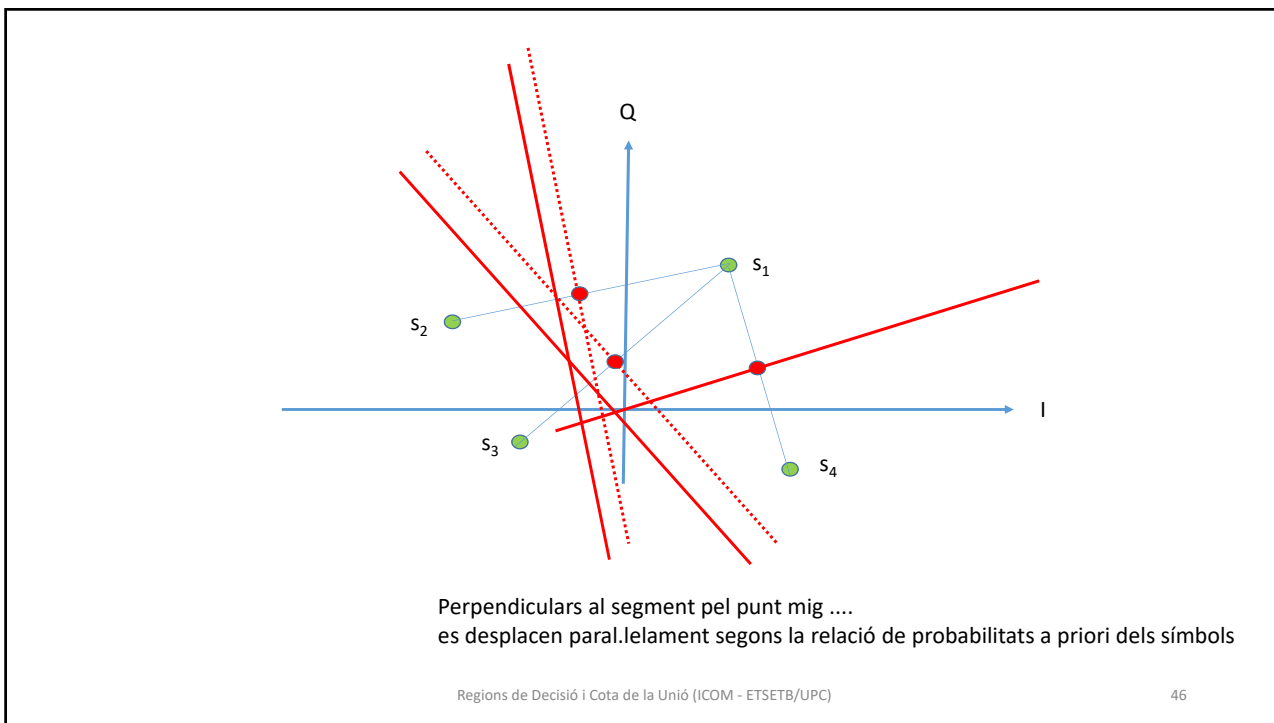
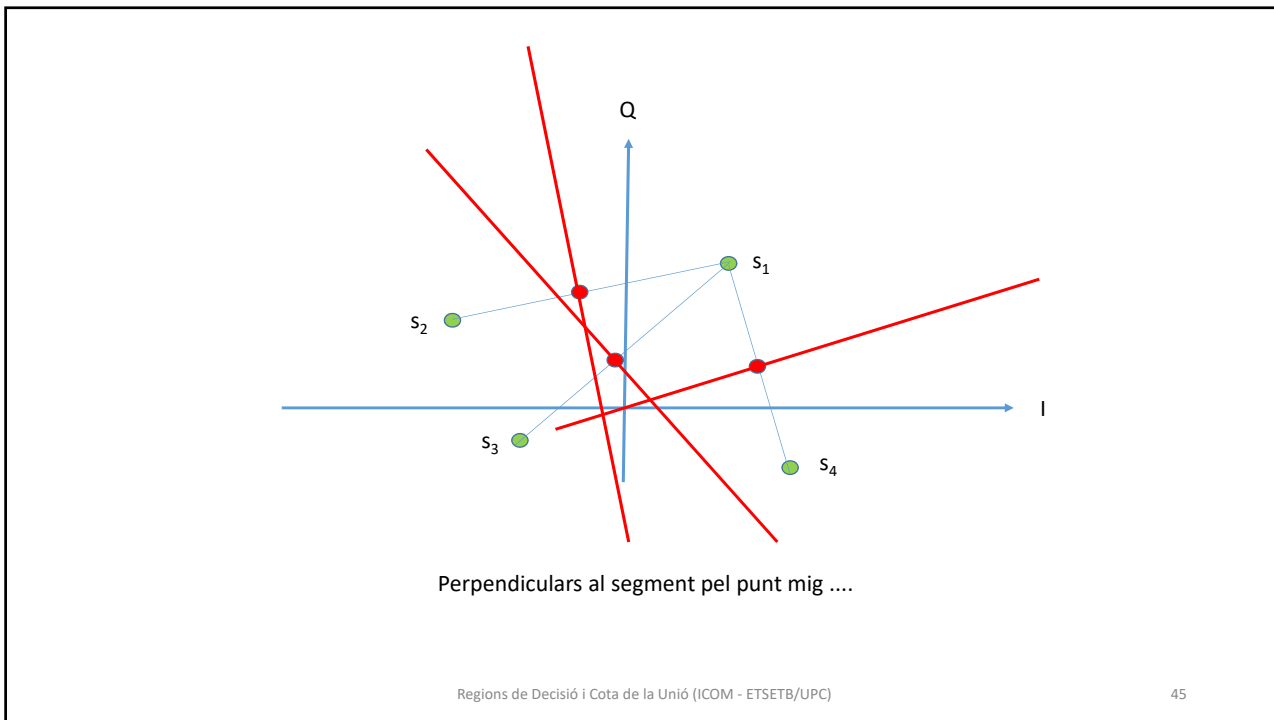
$$\Rightarrow p\left(\bigcup_{i=2}^M A_i\right) = p\left(\bigcup_{i=2, i \neq k}^M A_i\right)$$

$$\leq \sum_{i=2, i \neq k}^M p(A_i)$$

Cota de la Unió simplificada !!
..... menys termes !!



Cas 2: símbols no-equiproables, $2a = b+c$.



Les fronteres de decisió s'expandeixen cap els símbols que veuen reduïda la seva relació de probabilitat respecte la del símbol de referència.

Si la relació de probabilitats no varia, la frontera de decisió no es mou.

La cota de la unió funciona d'ídèntica forma amb els semiespais d'error corresponents.

Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC) 47

$$p(\epsilon_s) = \sum_{k=1}^M p_k p(\epsilon_s | k)$$

$$\leq \sum_{k=1}^M p_k \sum_{i=1, i \neq k}^M Q\left(\frac{l_{i,k}}{\sigma}\right)$$

$l_{i,k} \neq l_{k,i}$

Cota de la Unió: símbols no-equiprobables

Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC) 48

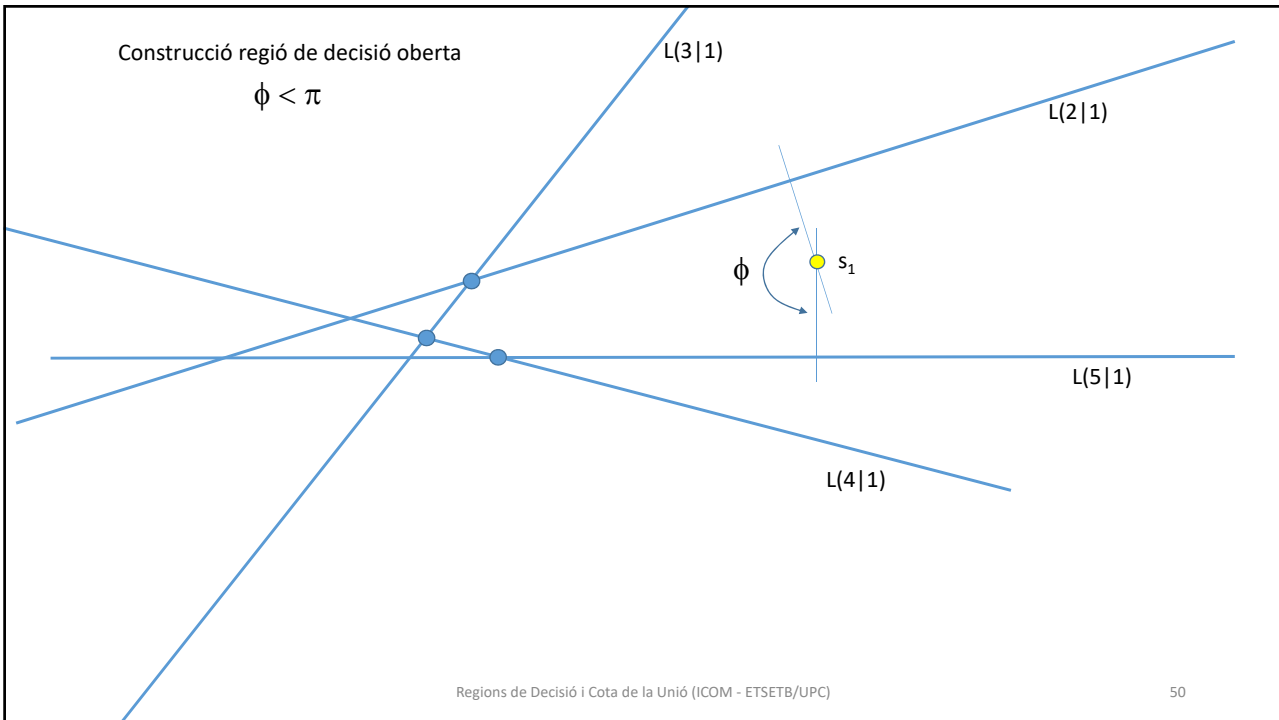
Demostració alternativa de la cota de la unió

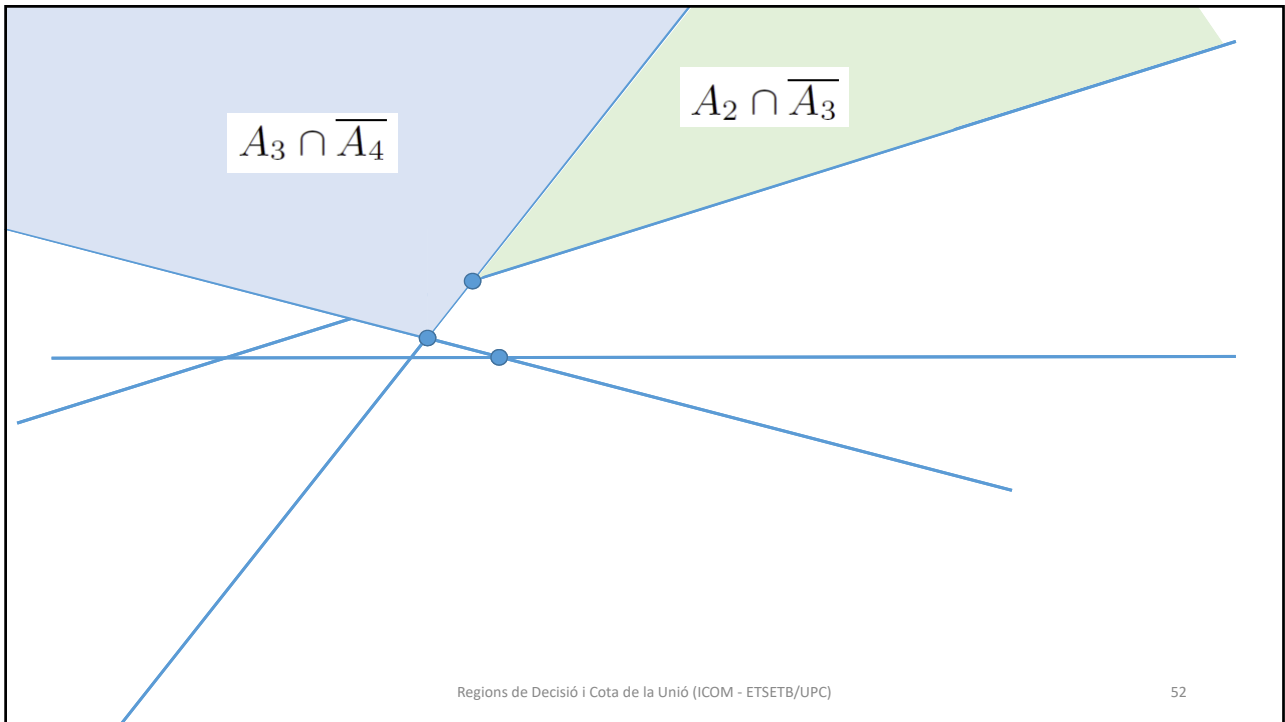
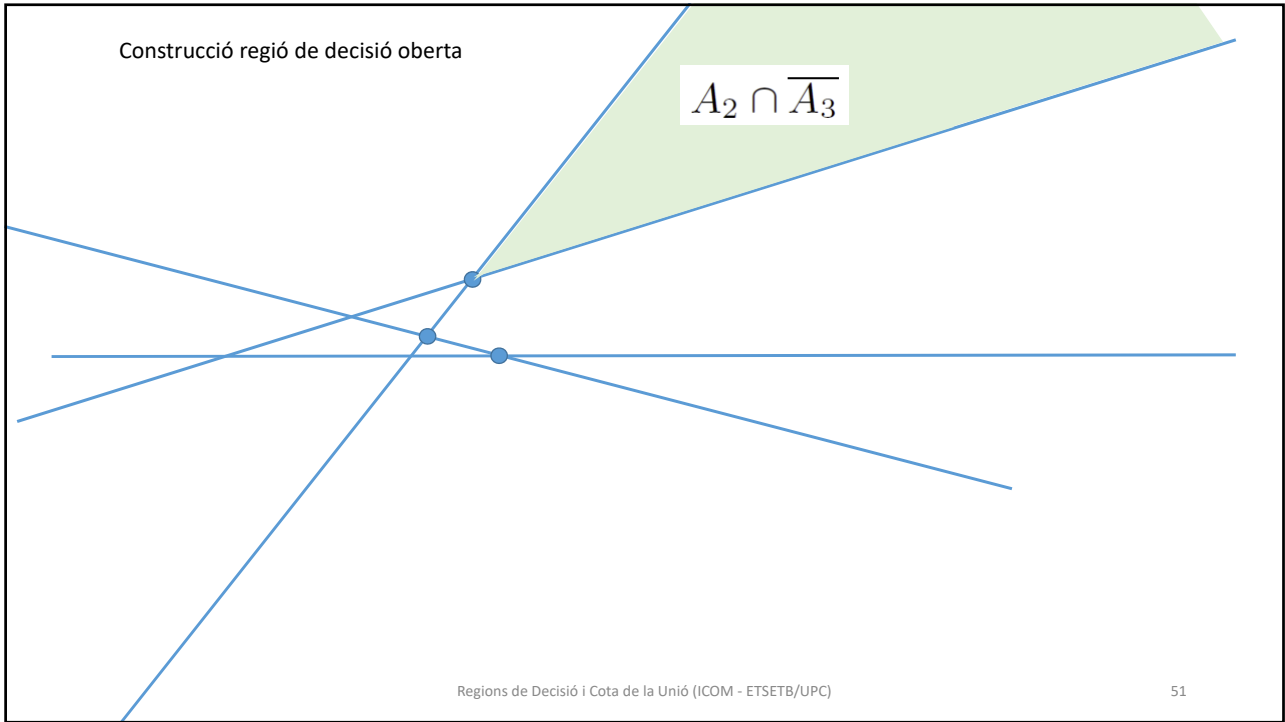
..... particularitzada al pla IQ

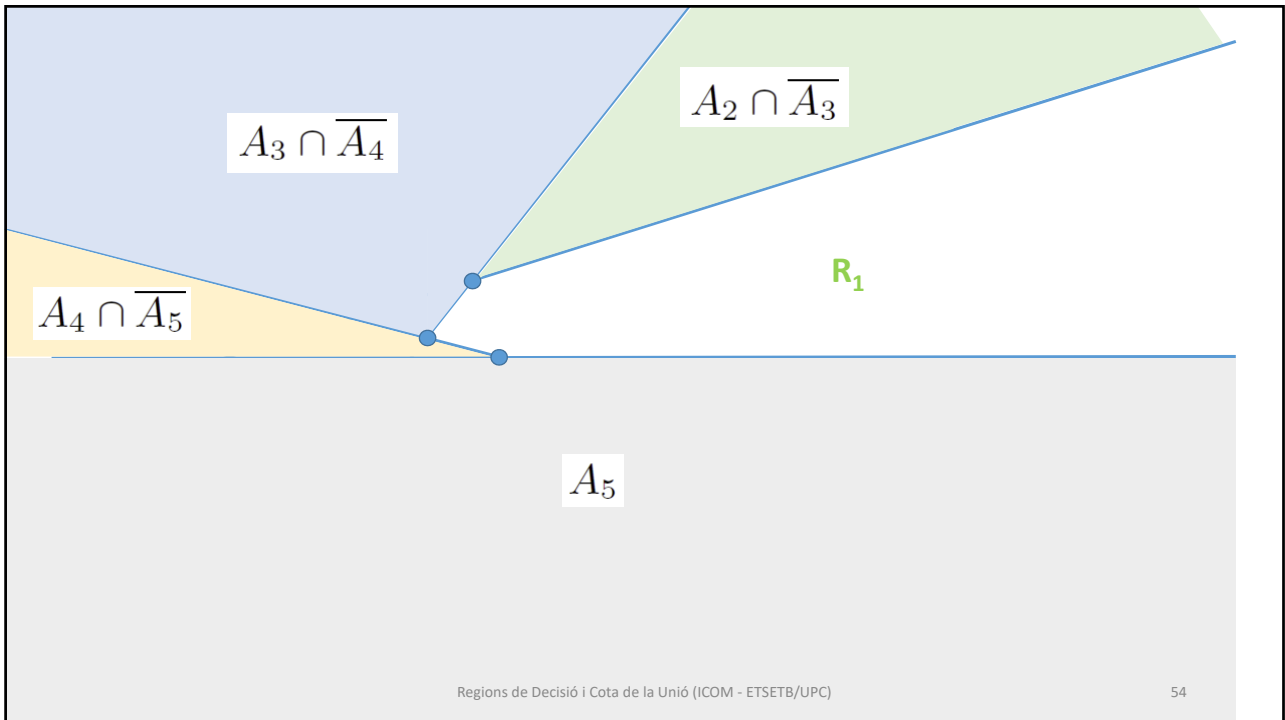
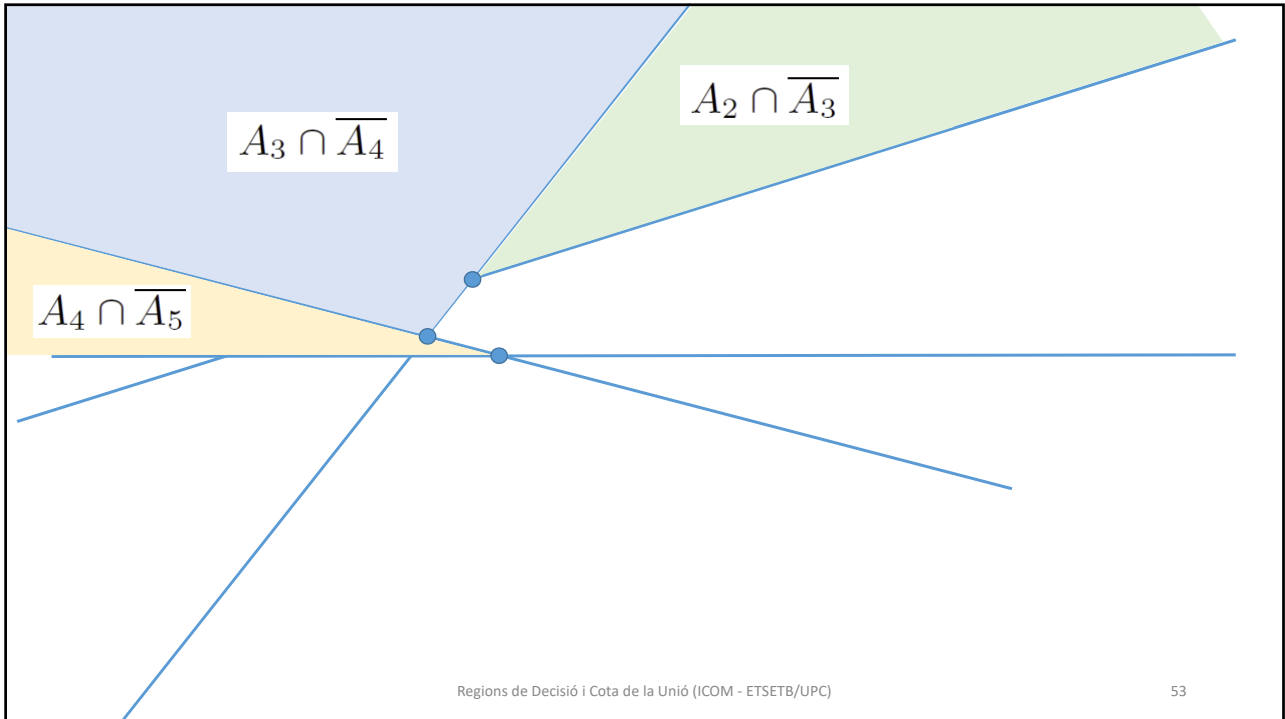
..... enrajolem la regió de decisió.

Construcció regió de decisió oberta

$$\phi < \pi$$







$$A_i \cap \overline{A_{i+1}} = A_i \setminus \{A_i \cap A_{i+1}\}$$

$$p(A_i \cap \overline{A_{i+1}}) = p(A_i) - p(A_i \cap A_{i+1})$$

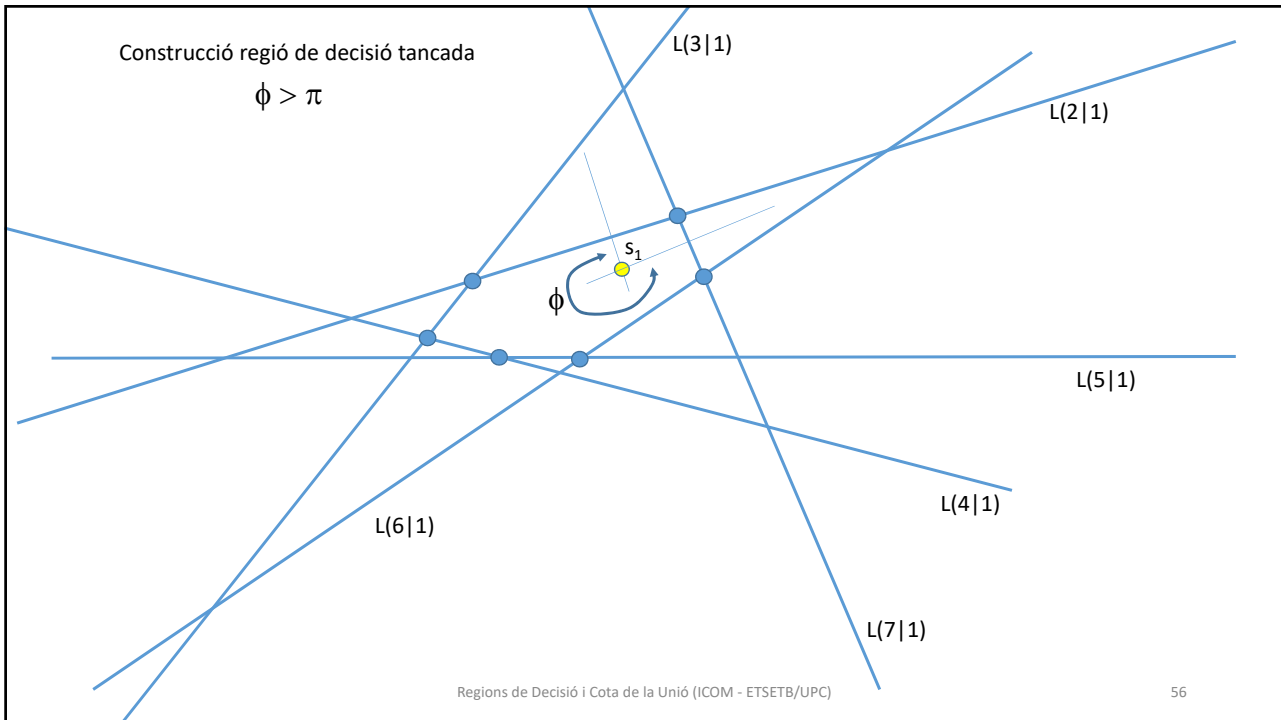
$$p(\epsilon_s|1) = p(A_2 \cap \overline{A_3}) + p(A_3 \cap \overline{A_4}) + p(A_4 \cap \overline{A_5}) + p(A_5)$$

$$p(\epsilon_s|1) = p(A_k) + \sum_{i=2, i \neq k}^M p(A_i \cap \overline{A_{i+1}})$$

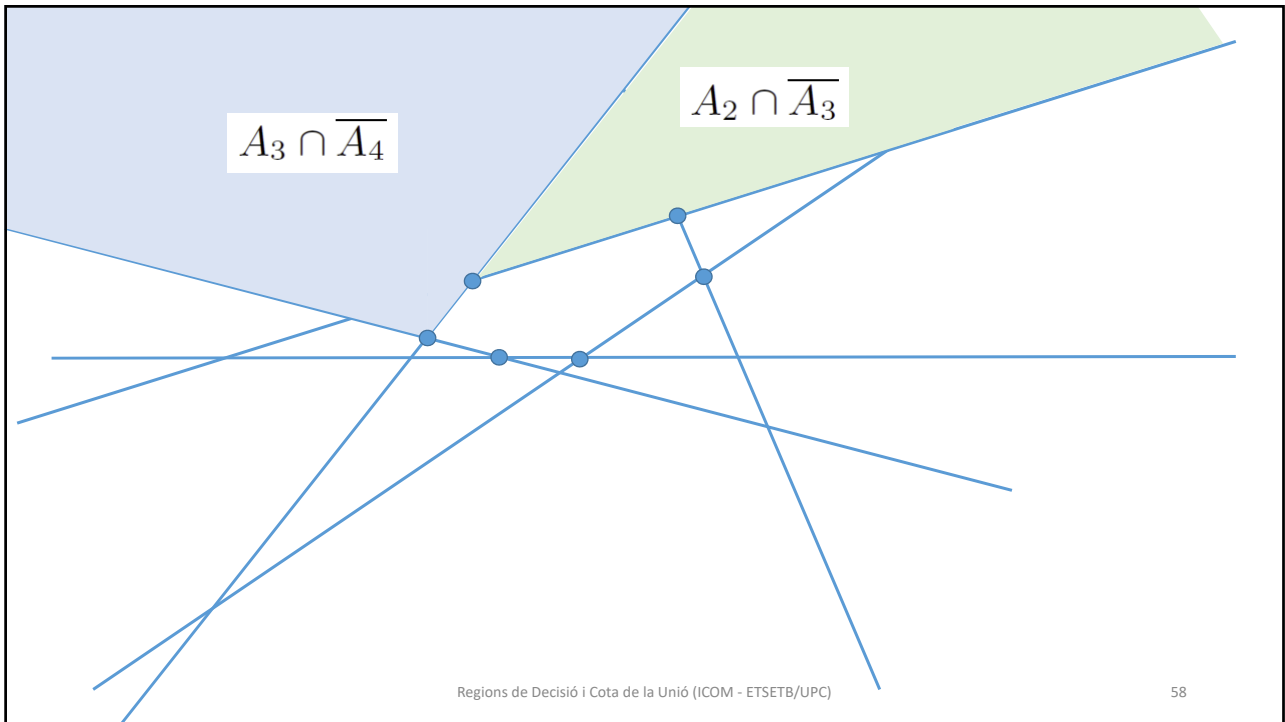
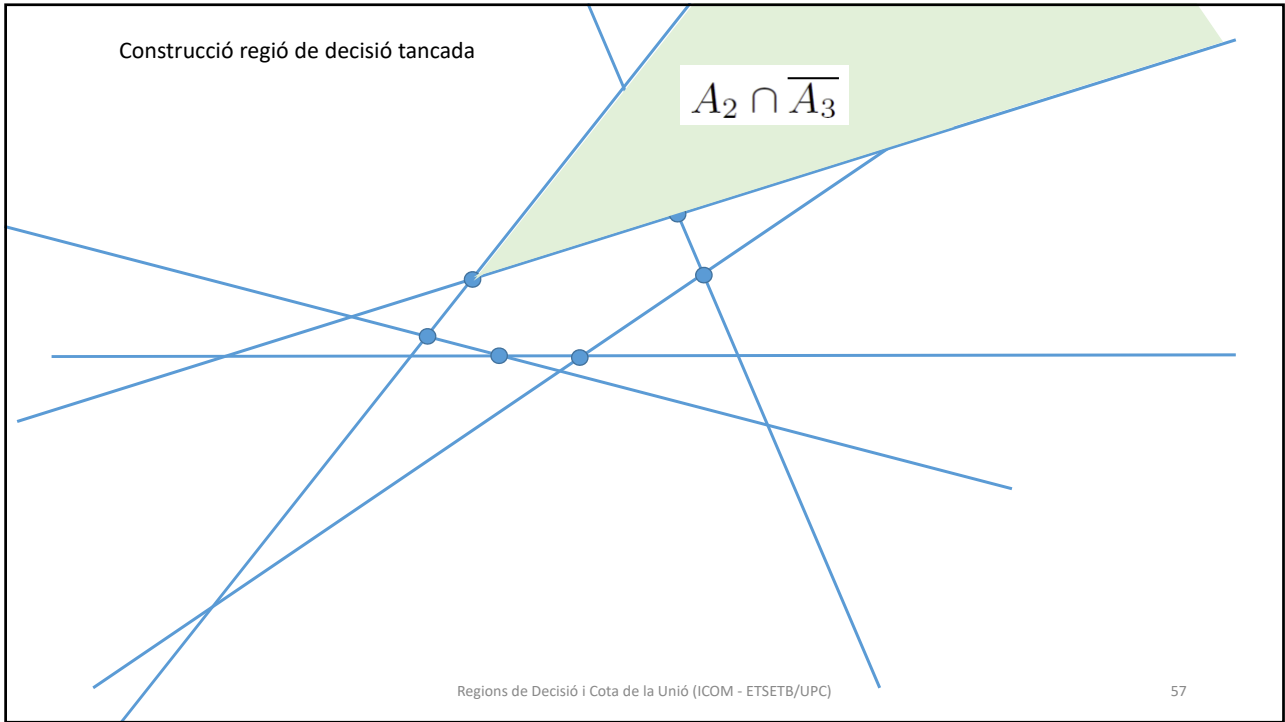
$$\leq p(A_k) + \sum_{i=2, i \neq k}^M p(A_i) = \sum_{i=2}^M p(A_i)$$

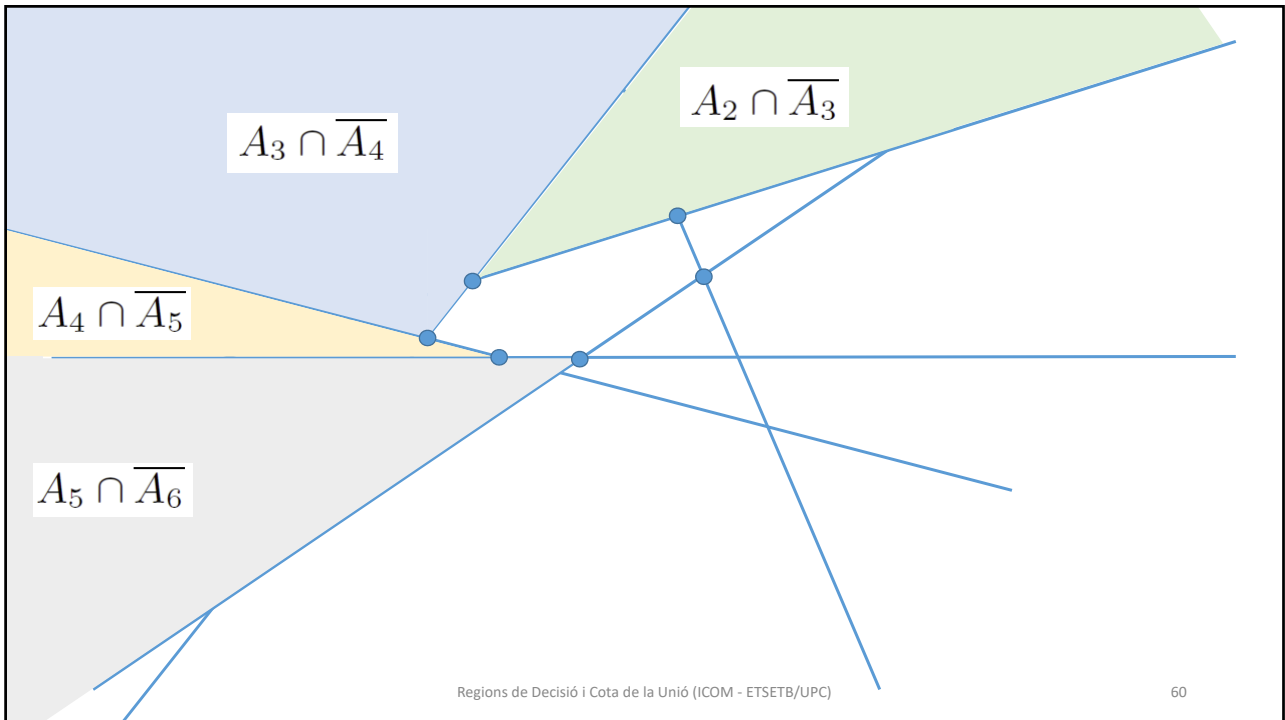
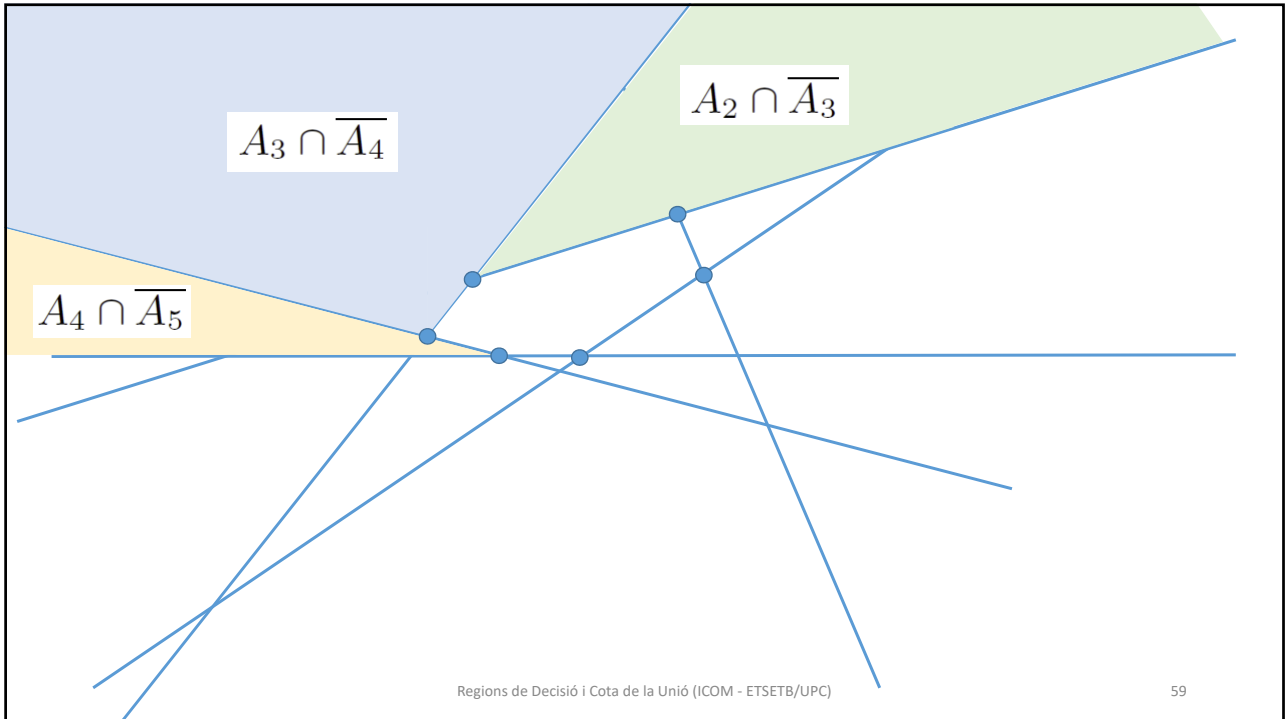
Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC)

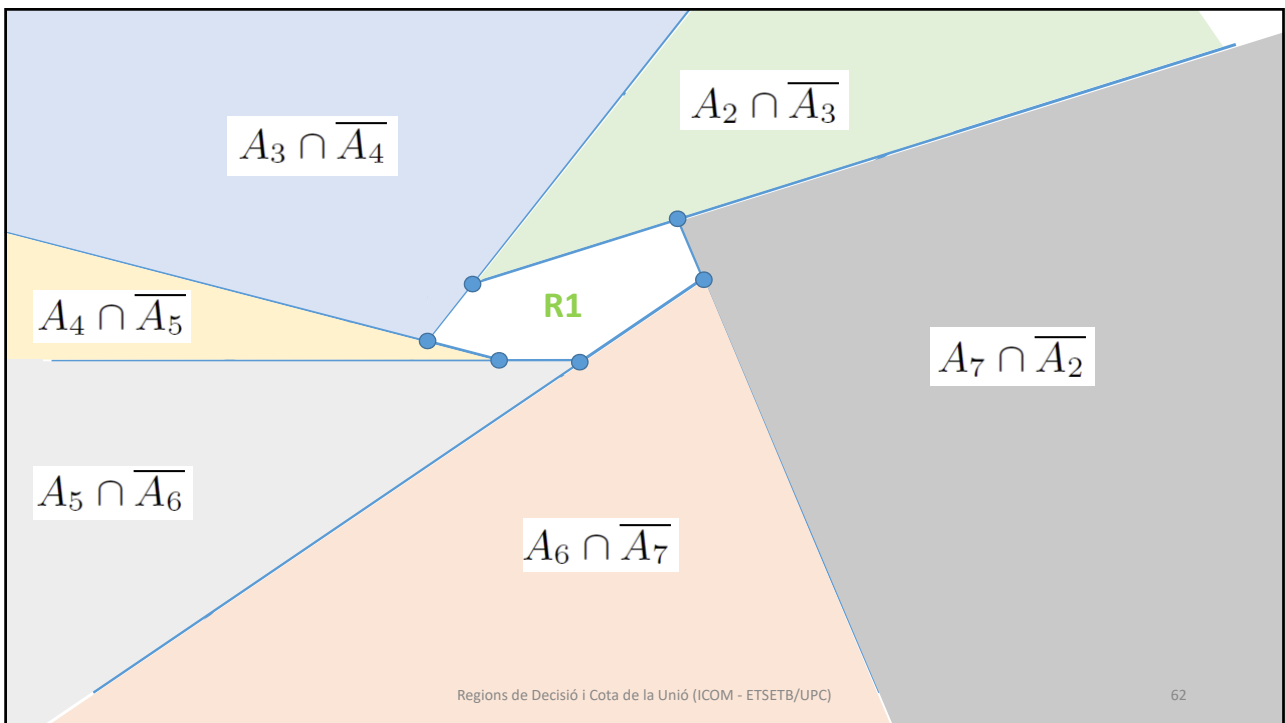
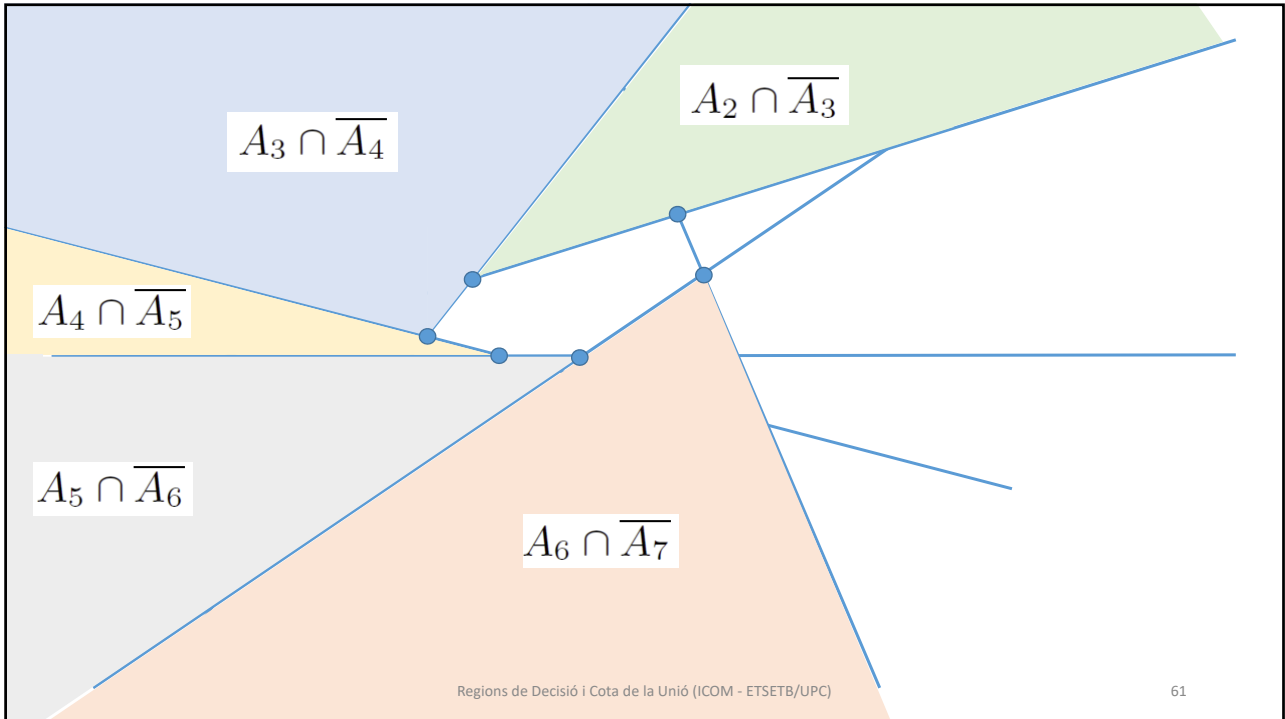
55



56







$$p(\epsilon_s|1) = p(A_2 \cap \overline{A_3}) + p(A_3 \cap \overline{A_4}) + p(A_4 \cap \overline{A_5}) \\ + p(A_5 \cap \overline{A_6}) + p(A_6 \cap \overline{A_7}) + p(A_7 \cap \overline{A_2})$$

$$p(\epsilon_s|1) = \sum_{i=2}^M p(A_i \cap \overline{A_{i+1}}) \quad , \quad A_{M+1} \equiv A_2 \\ \leq \sum_{i=2}^M p(A_i)$$

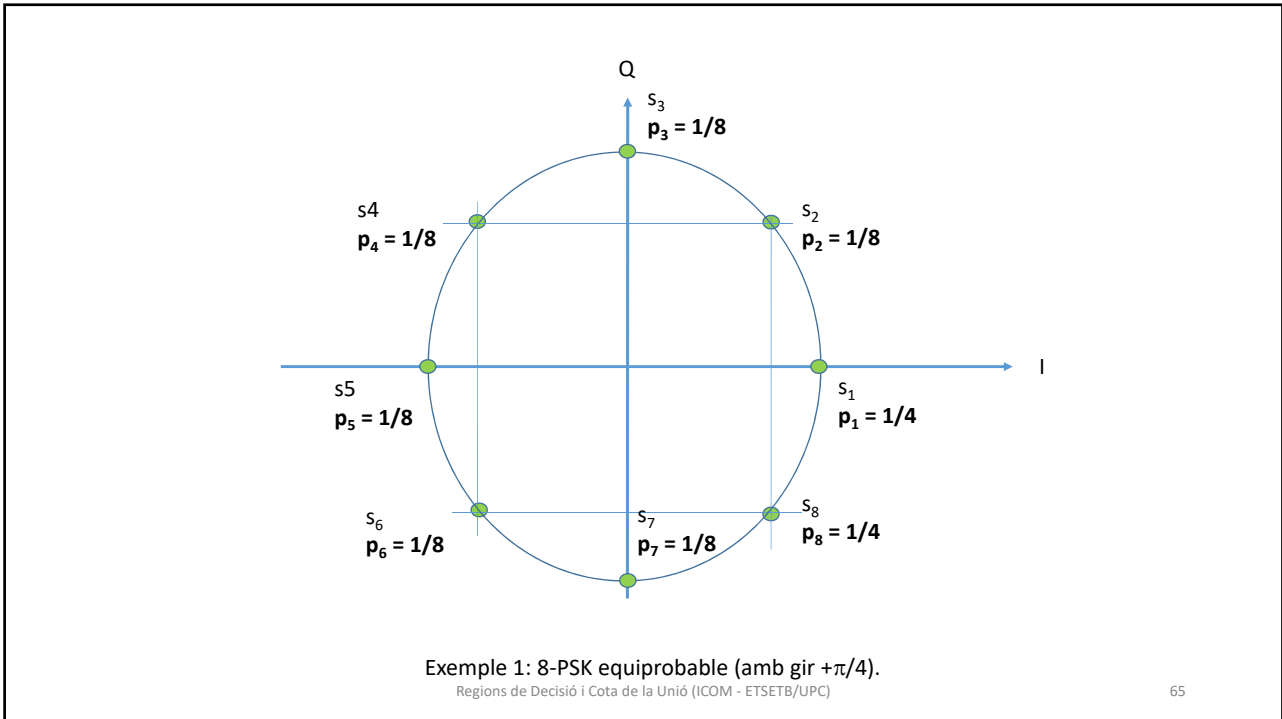
Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC)

63

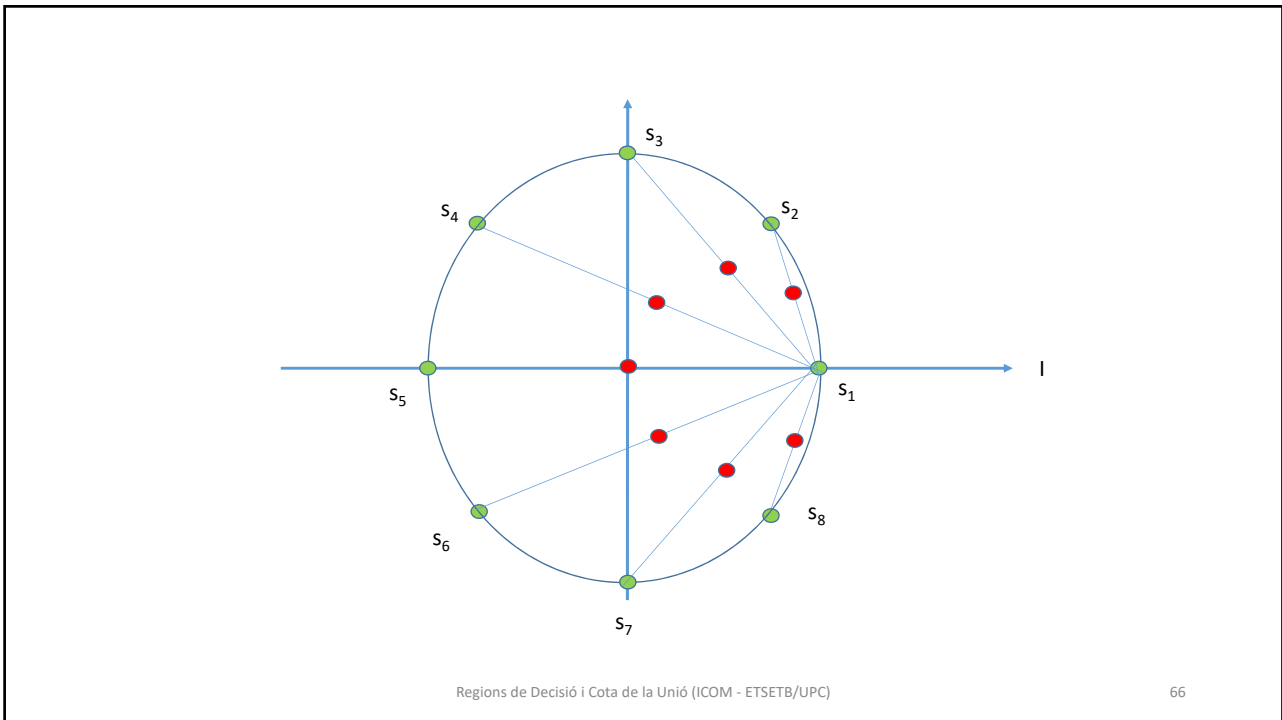
EXEMPLES

Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC)

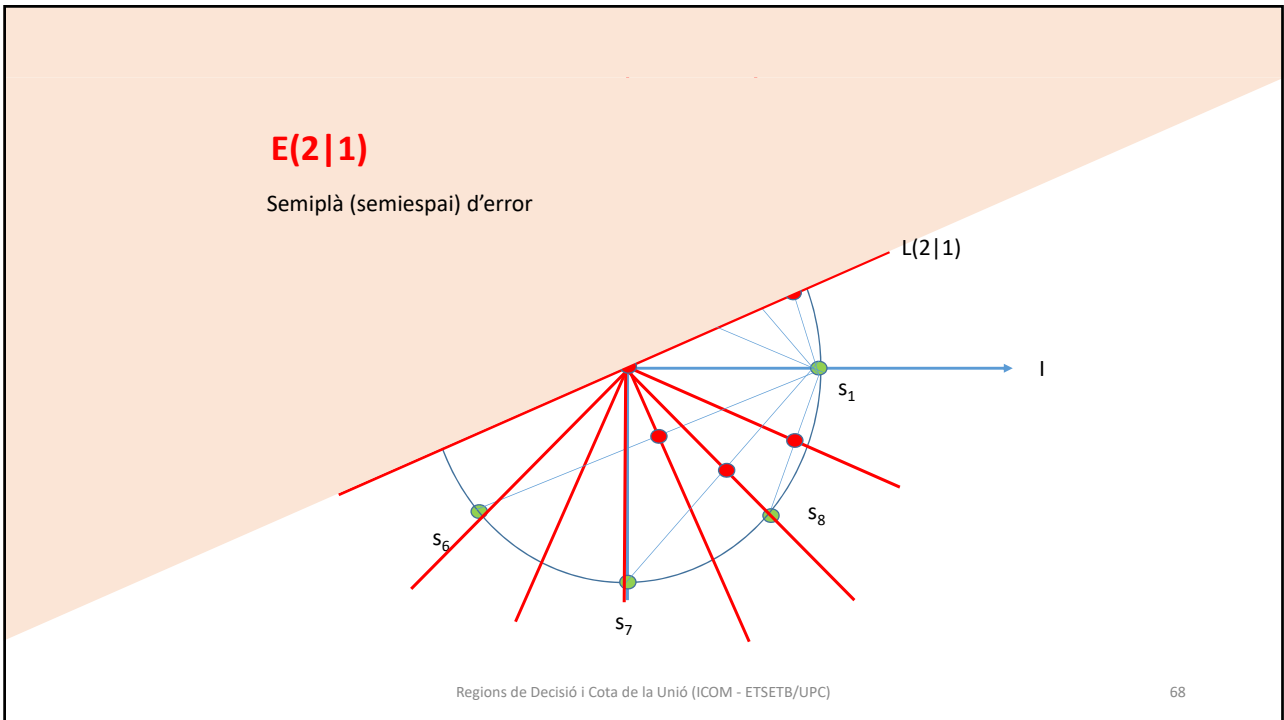
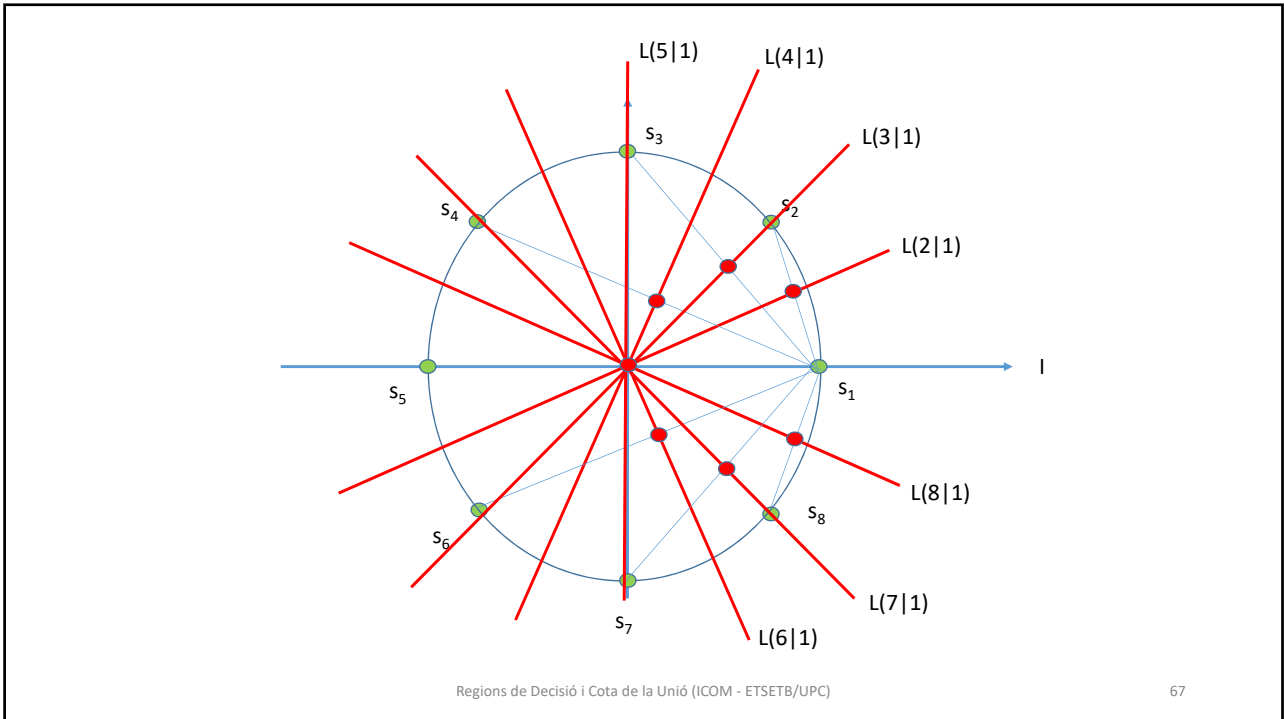
64

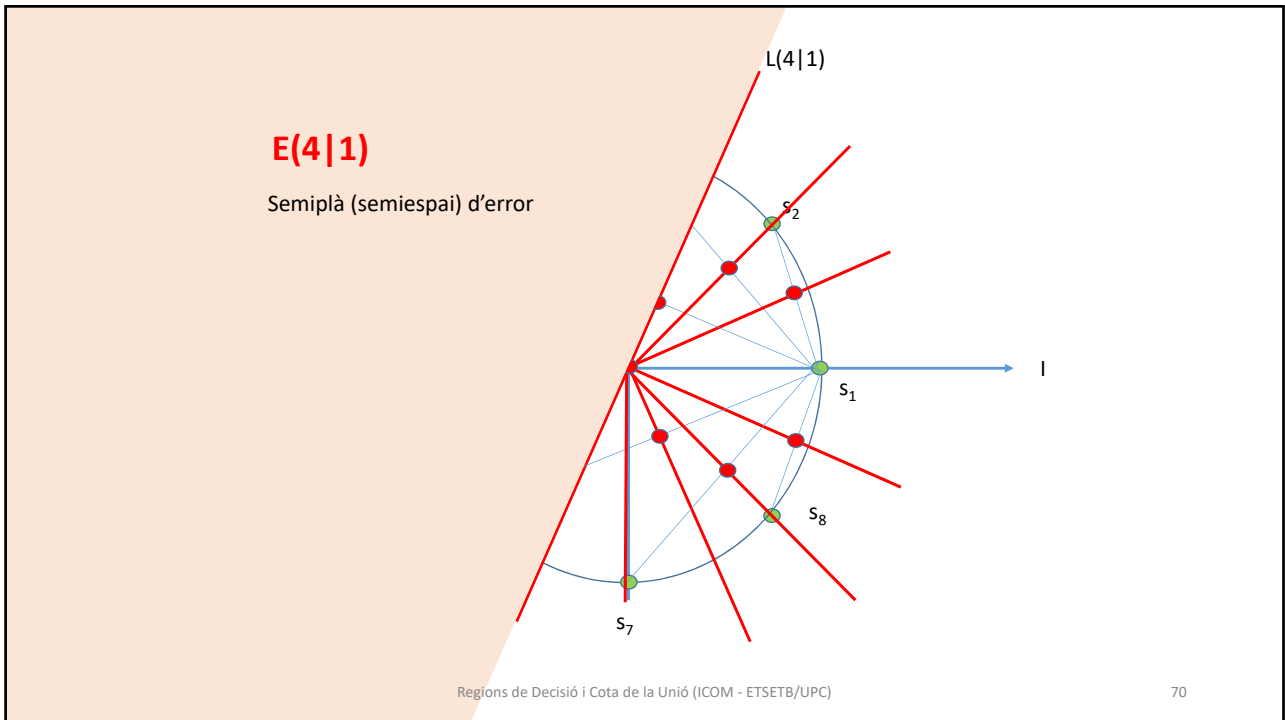
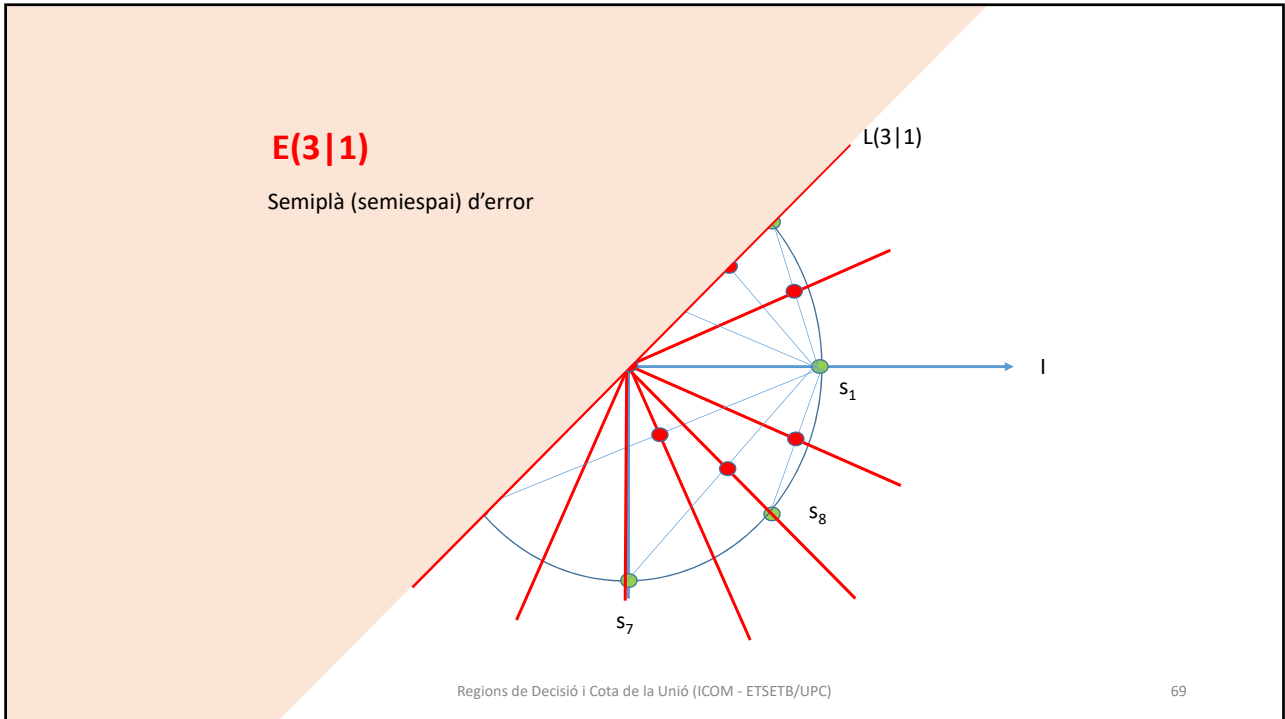


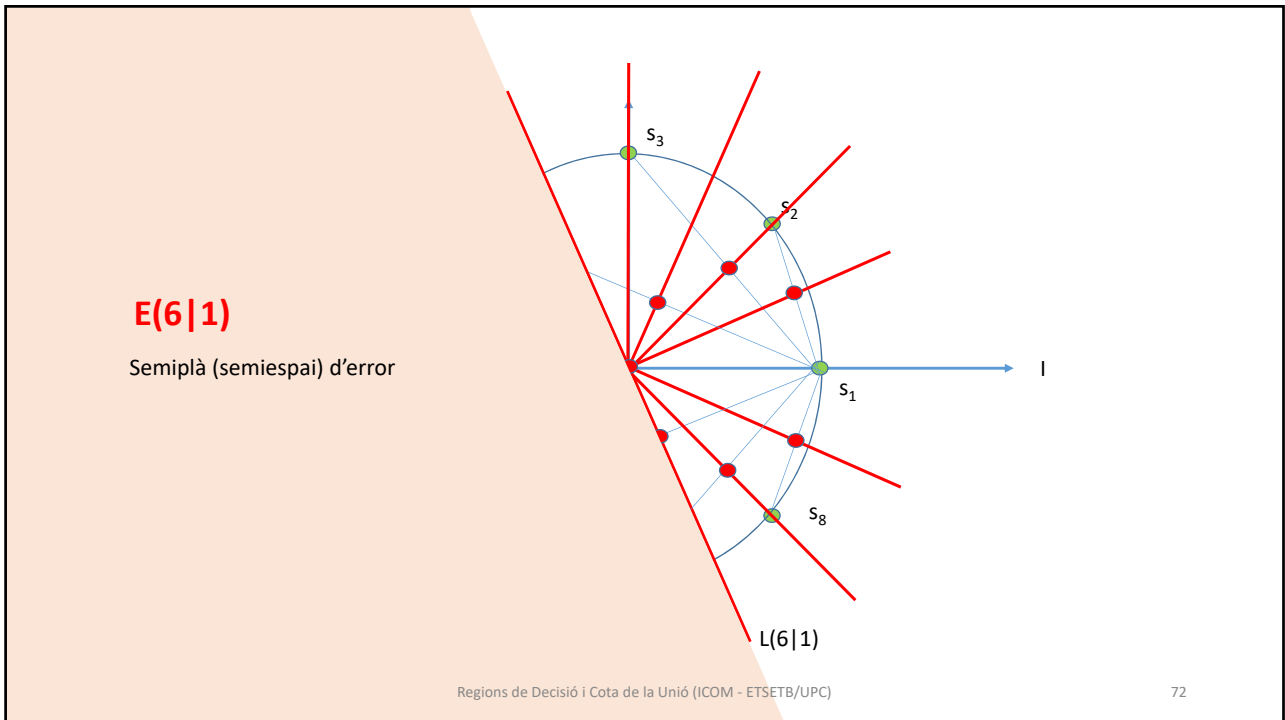
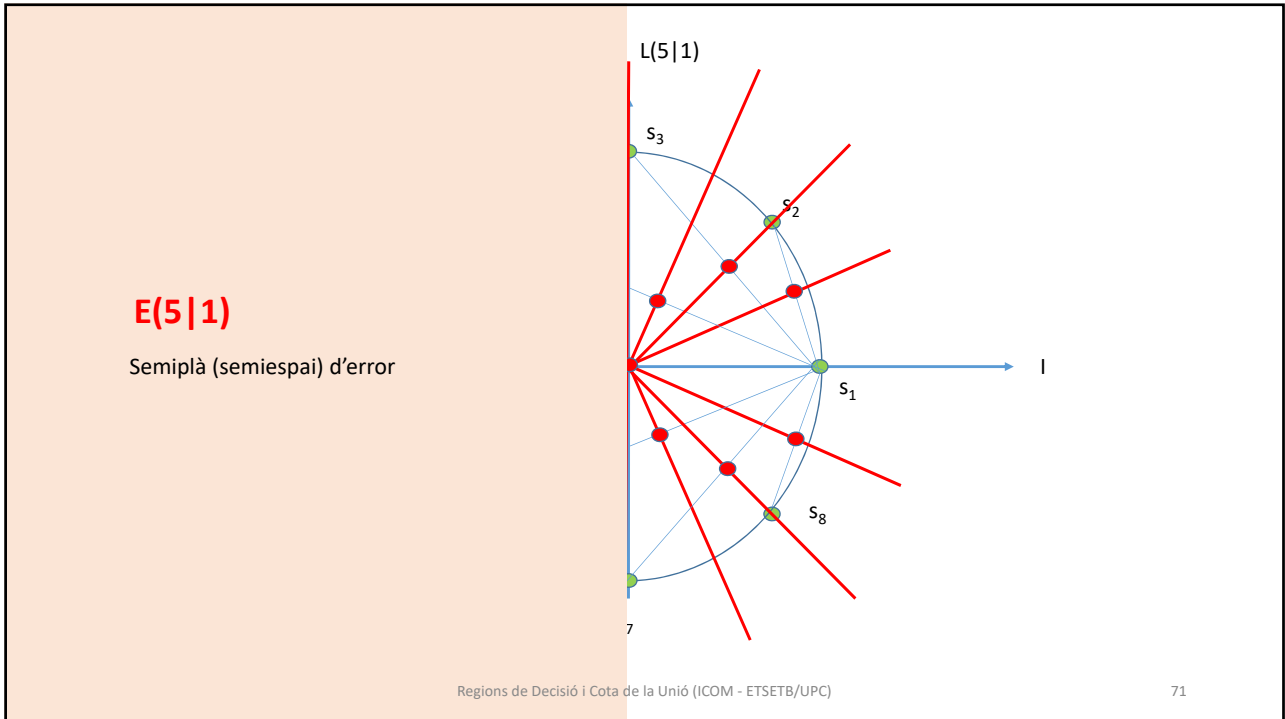
65

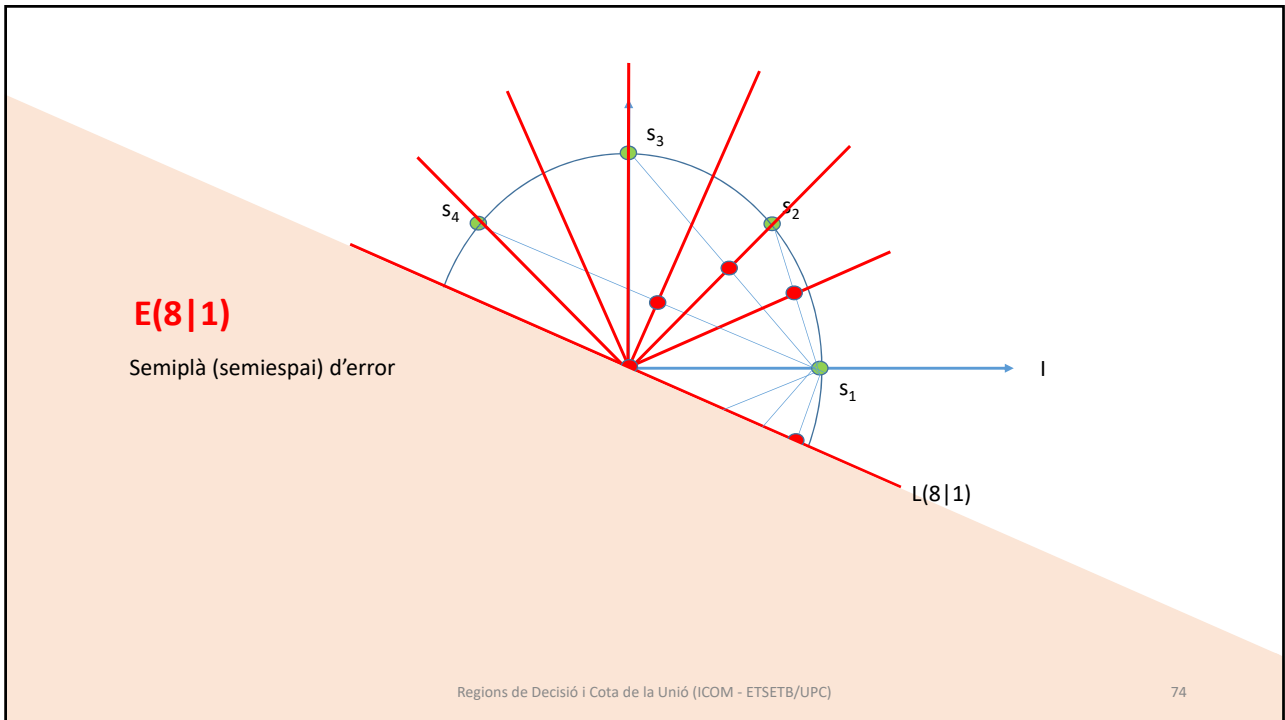
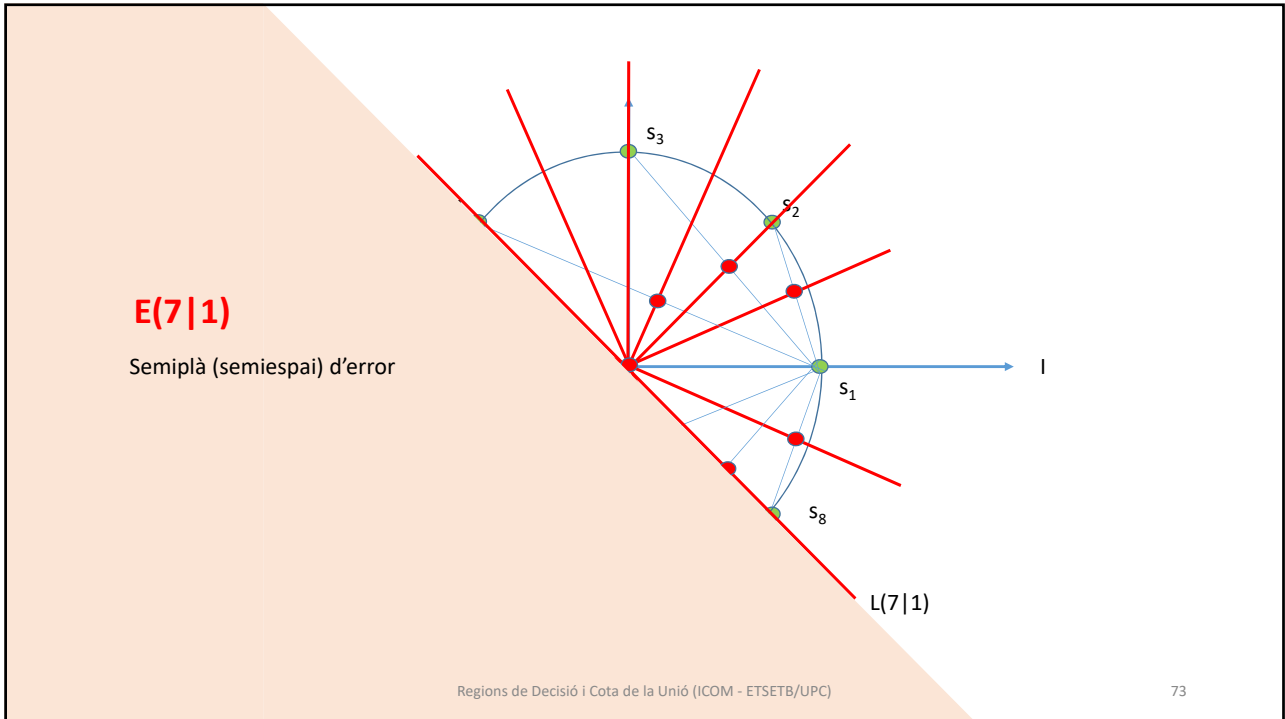


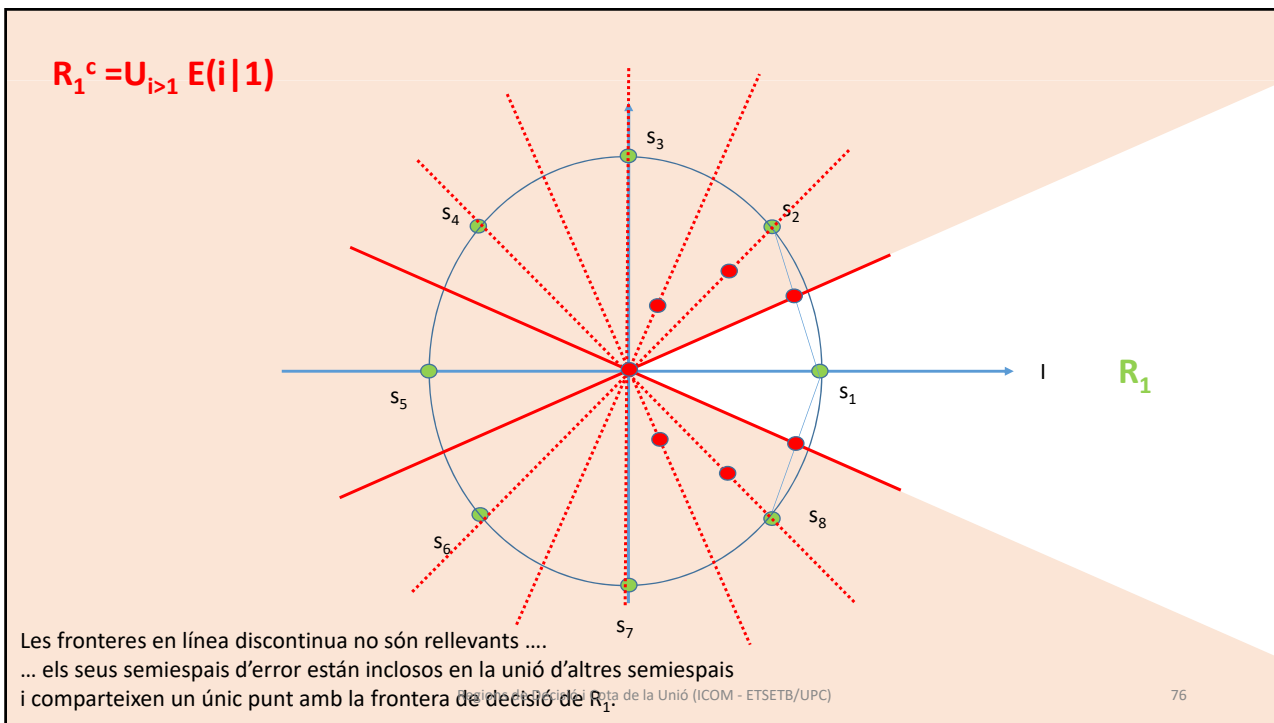
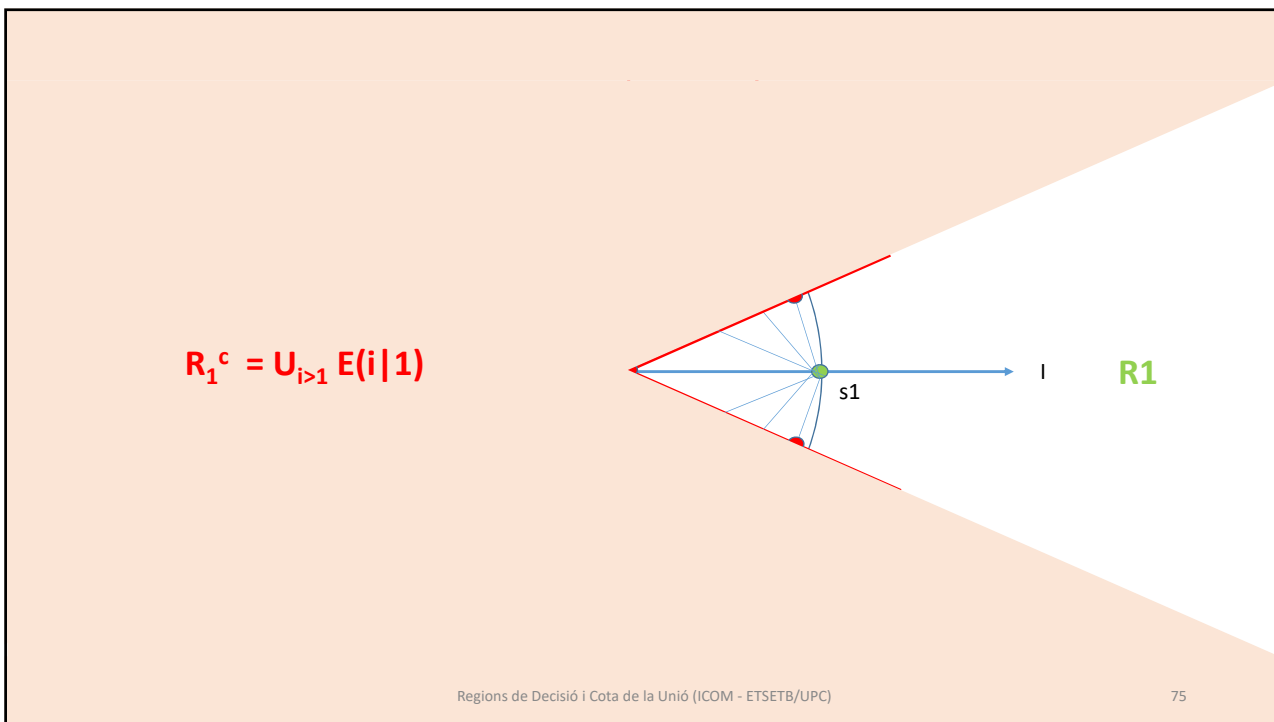
66

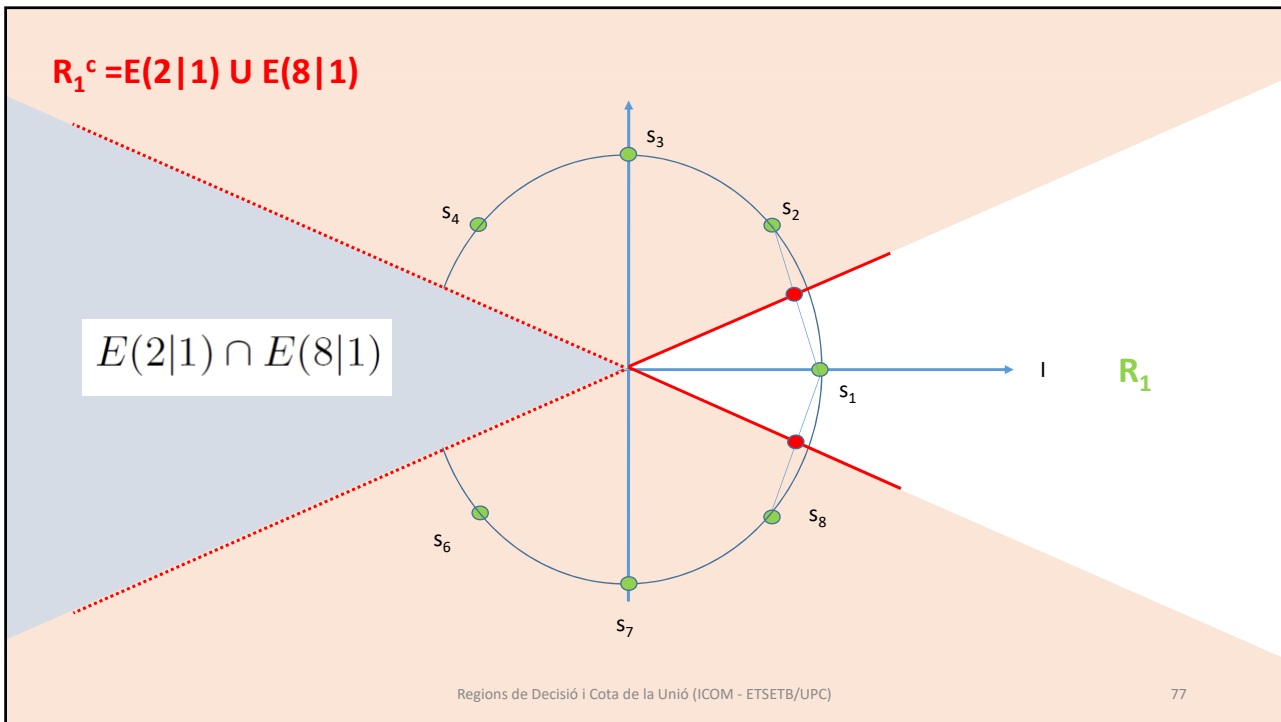




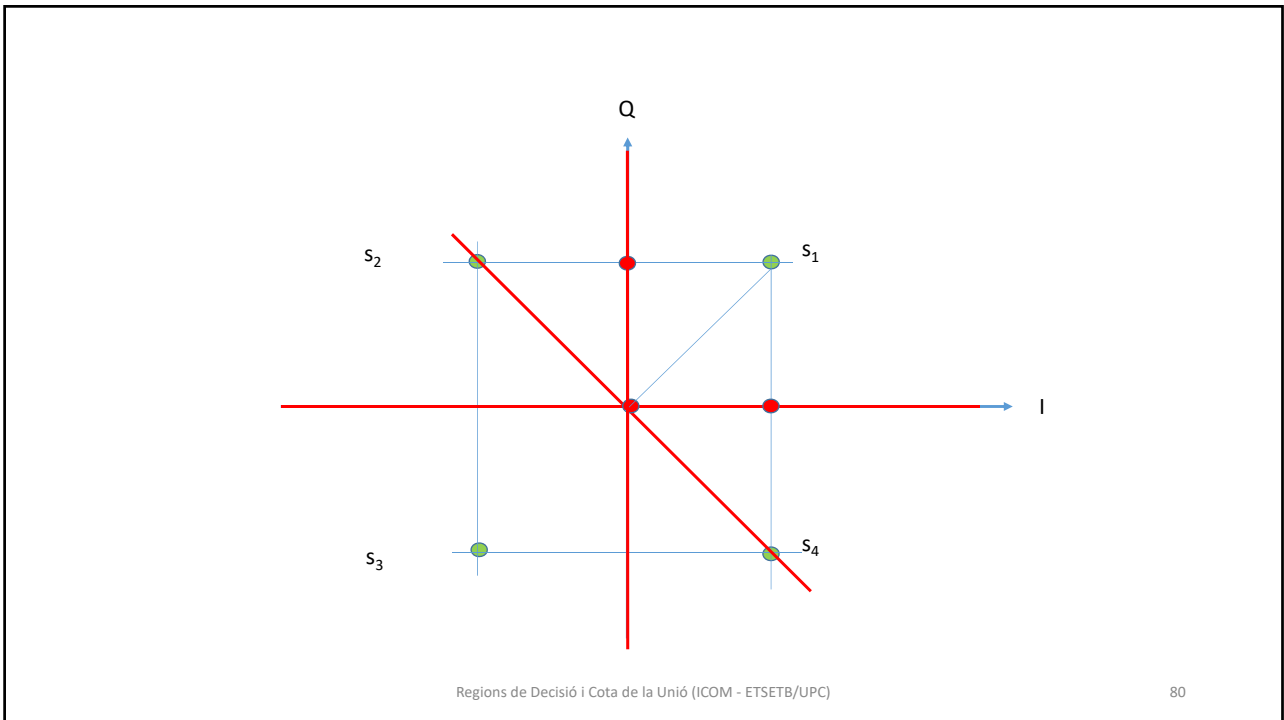
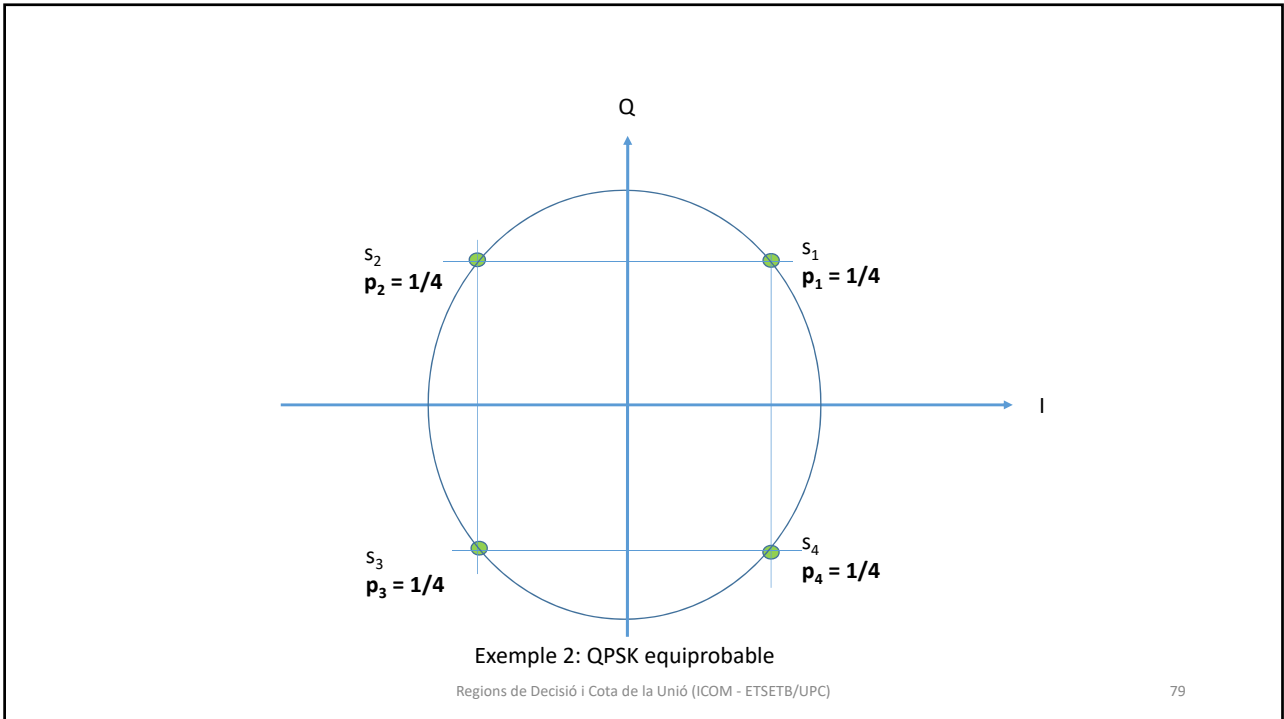


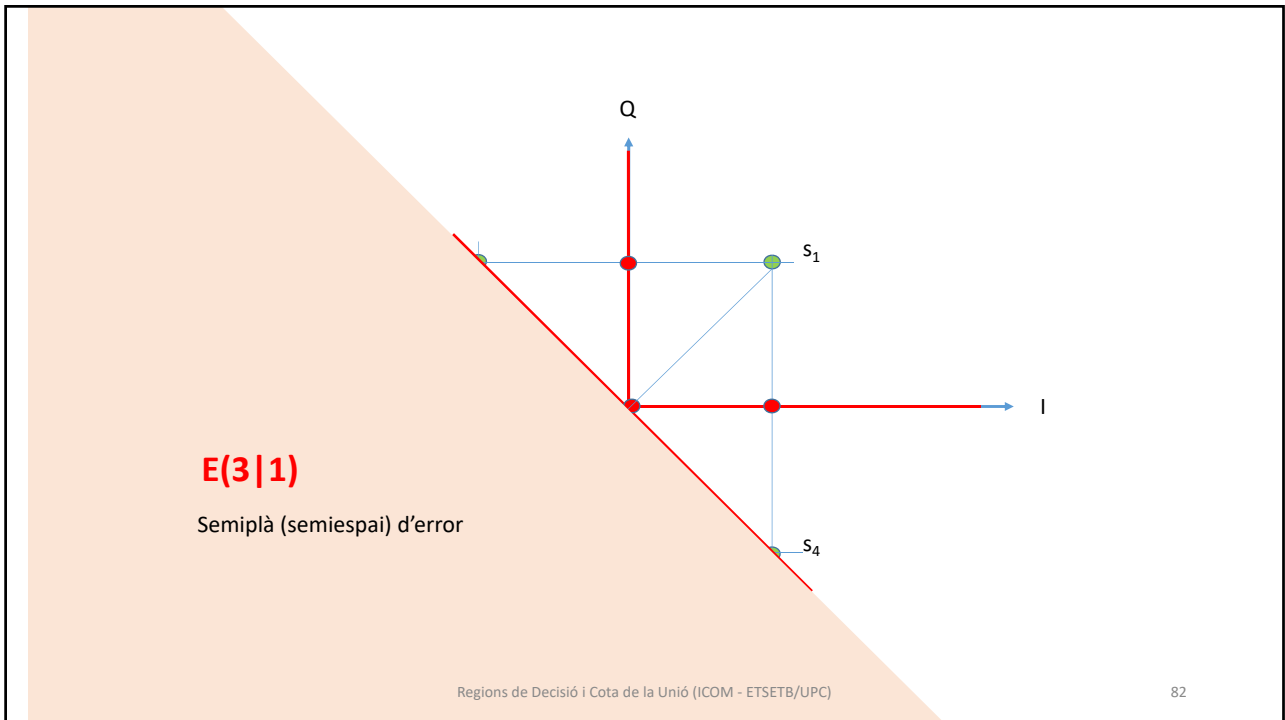
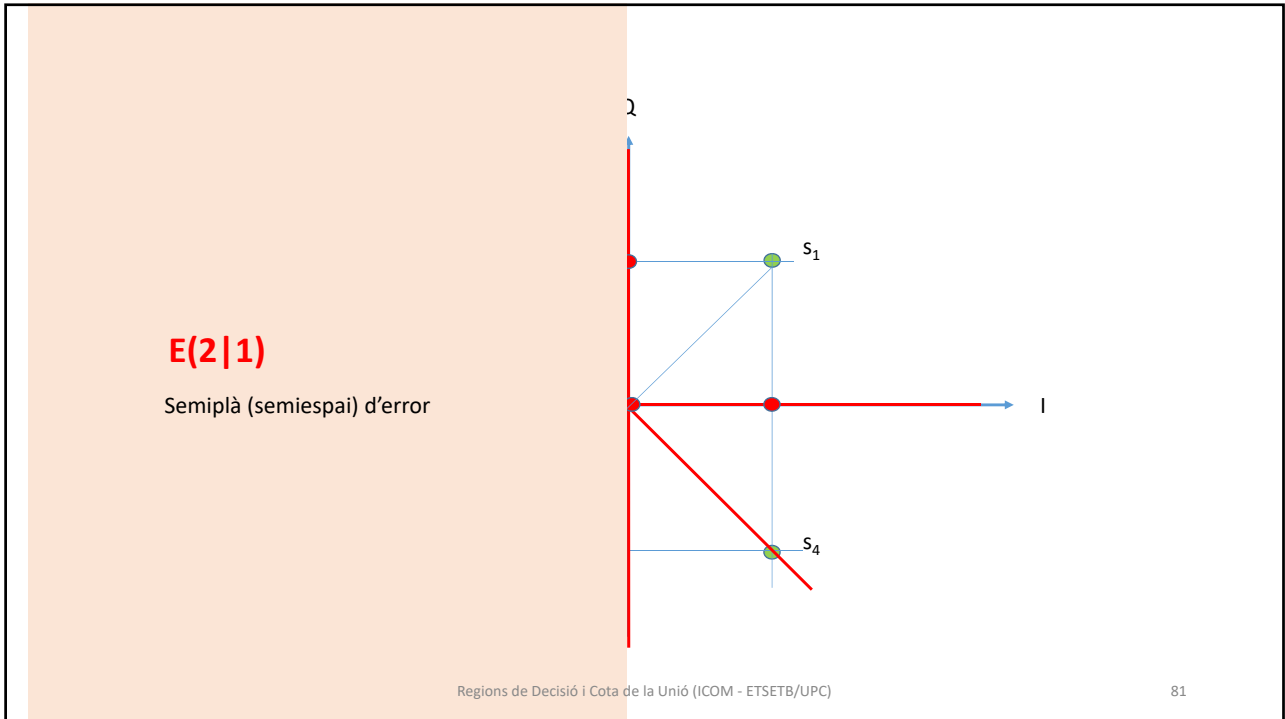


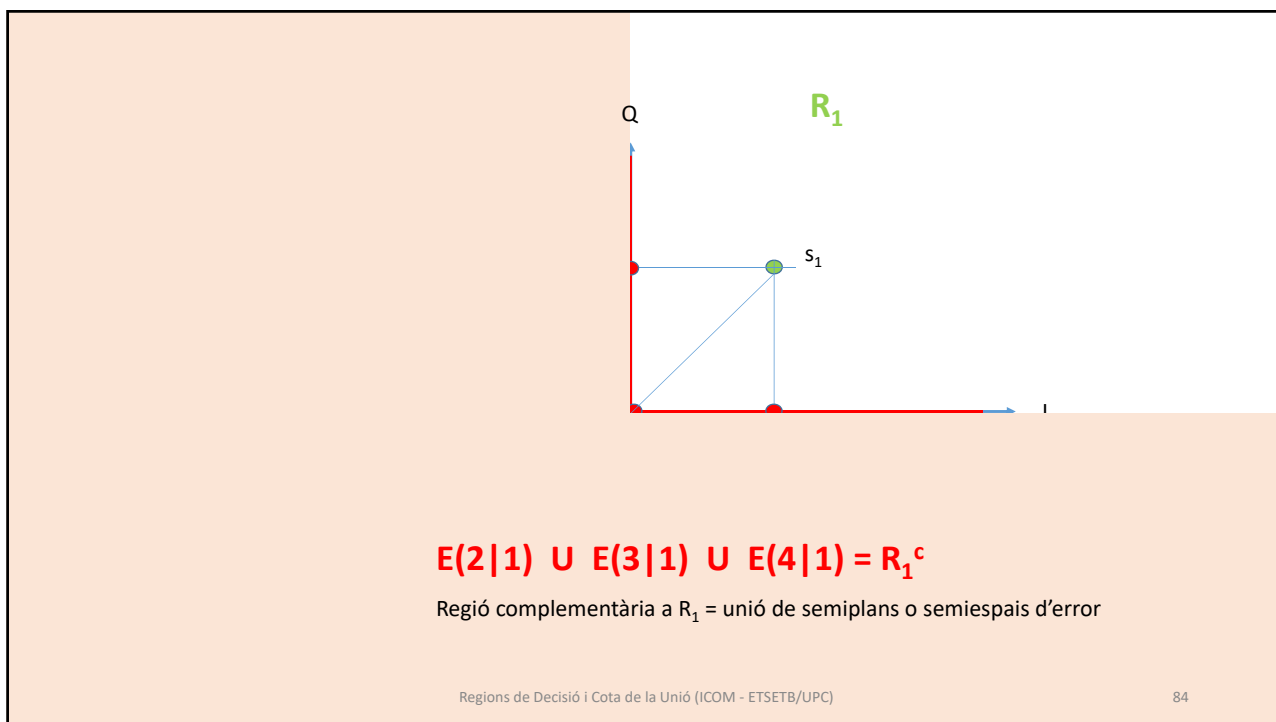
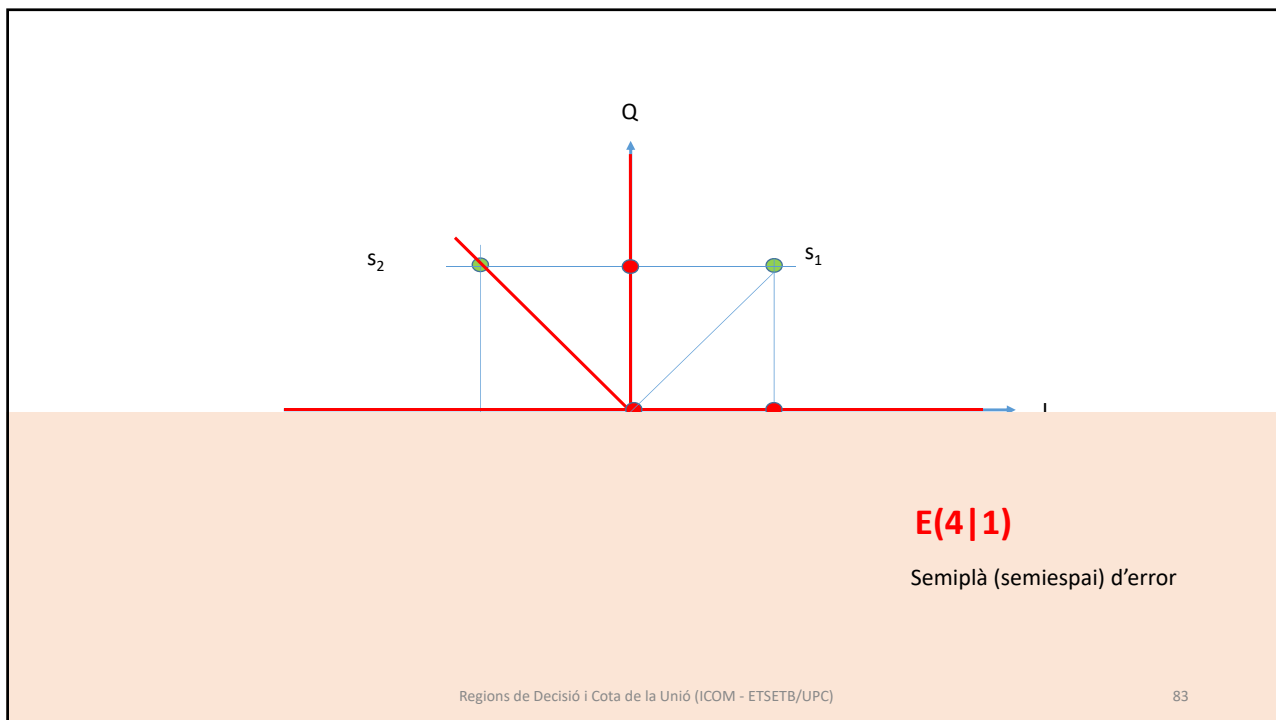


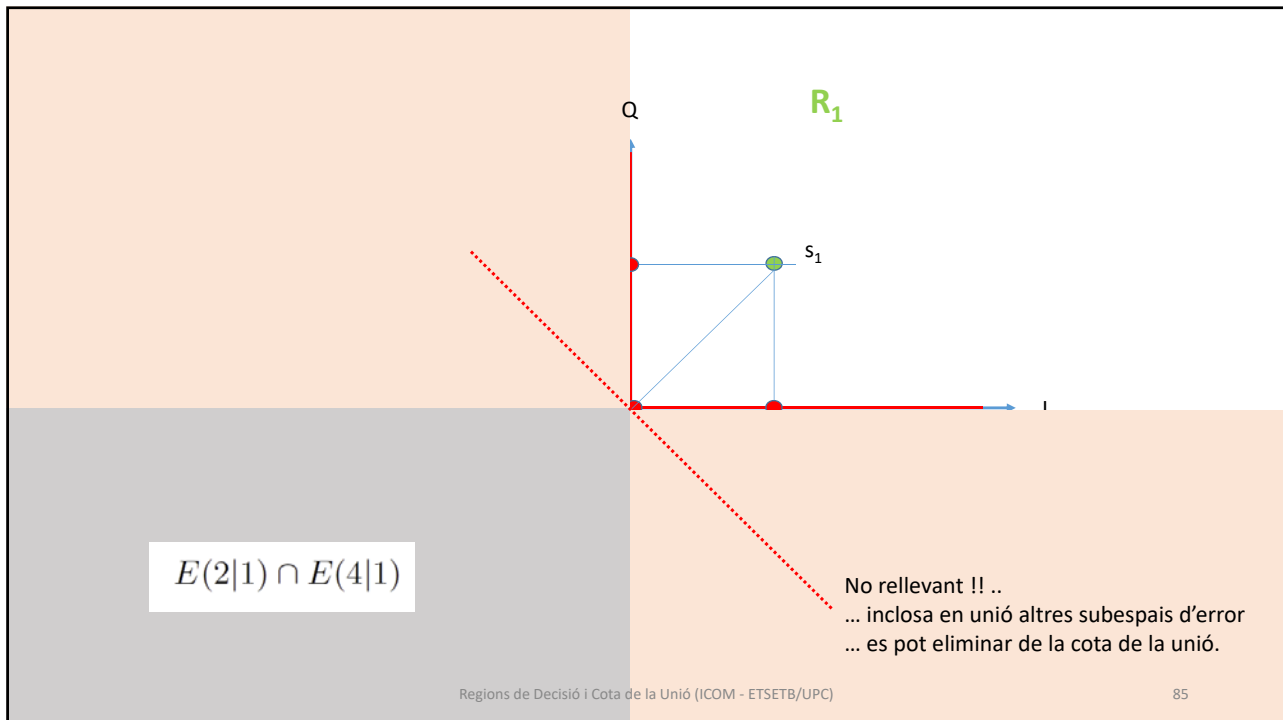


$$\begin{aligned}
 p(\epsilon_s) &= p(E(2|1)) + p(E(8|1)) - p(E(2|1) \cap E(8|1)) \\
 &\leq p(E(2|1)) + p(E(8|1)) \\
 &= 2Q\left(\frac{d_{2,1}}{2\sigma}\right)
 \end{aligned}$$





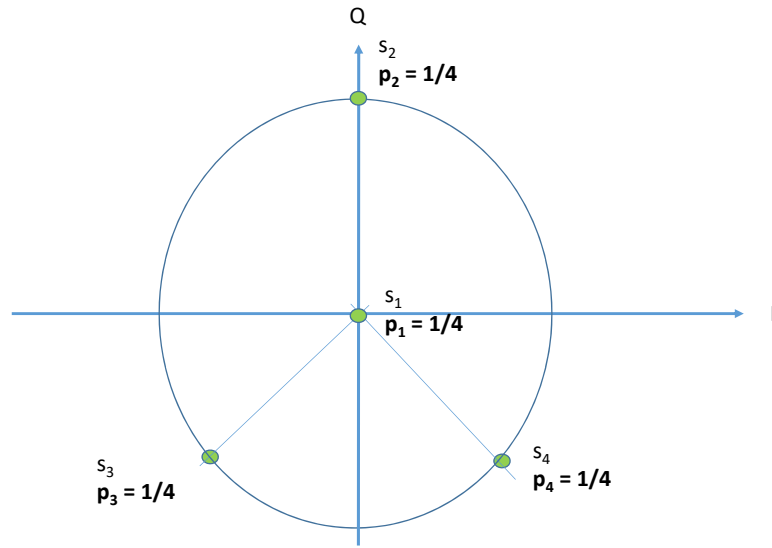




$$\begin{aligned}
 p(\epsilon_s) &= p(E(2|1)) + p(E(4|1)) - p(E(2|1) \cap E(4|1)) \\
 &= 2Q \left(\frac{d_{2,1}}{2\sigma} \right) - Q^2 \left(\frac{d_{2,1}}{2\sigma} \right) \\
 &\leq p(E(2|1)) + p(E(4|1)) \\
 &= 2Q \left(\frac{d_{2,1}}{2\sigma} \right)
 \end{aligned}$$

Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC)

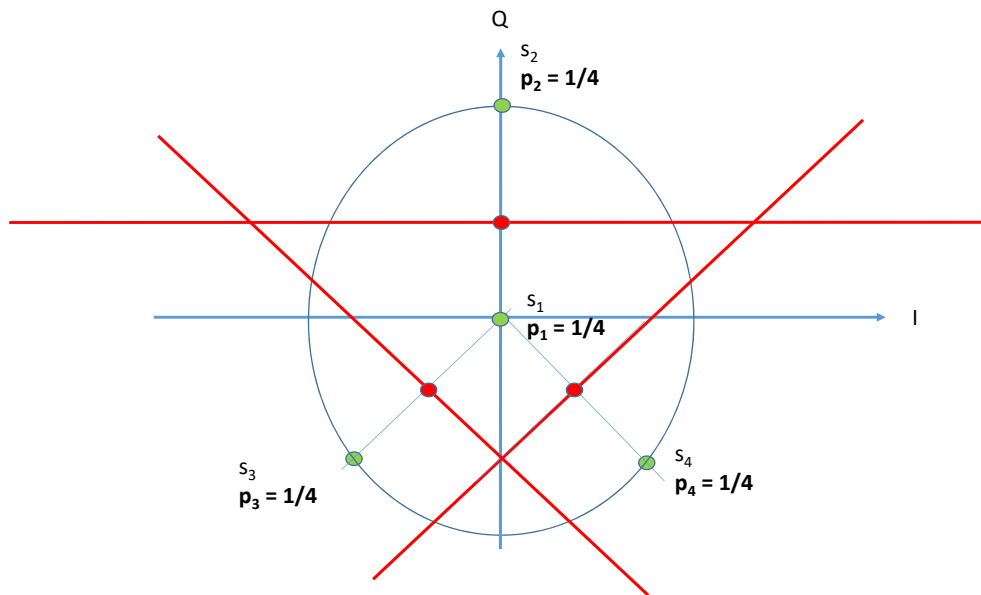
86



Exemple 3: 3-PSK (amb gir $-\pi/2$) i símbol central. Símbols equiprobables

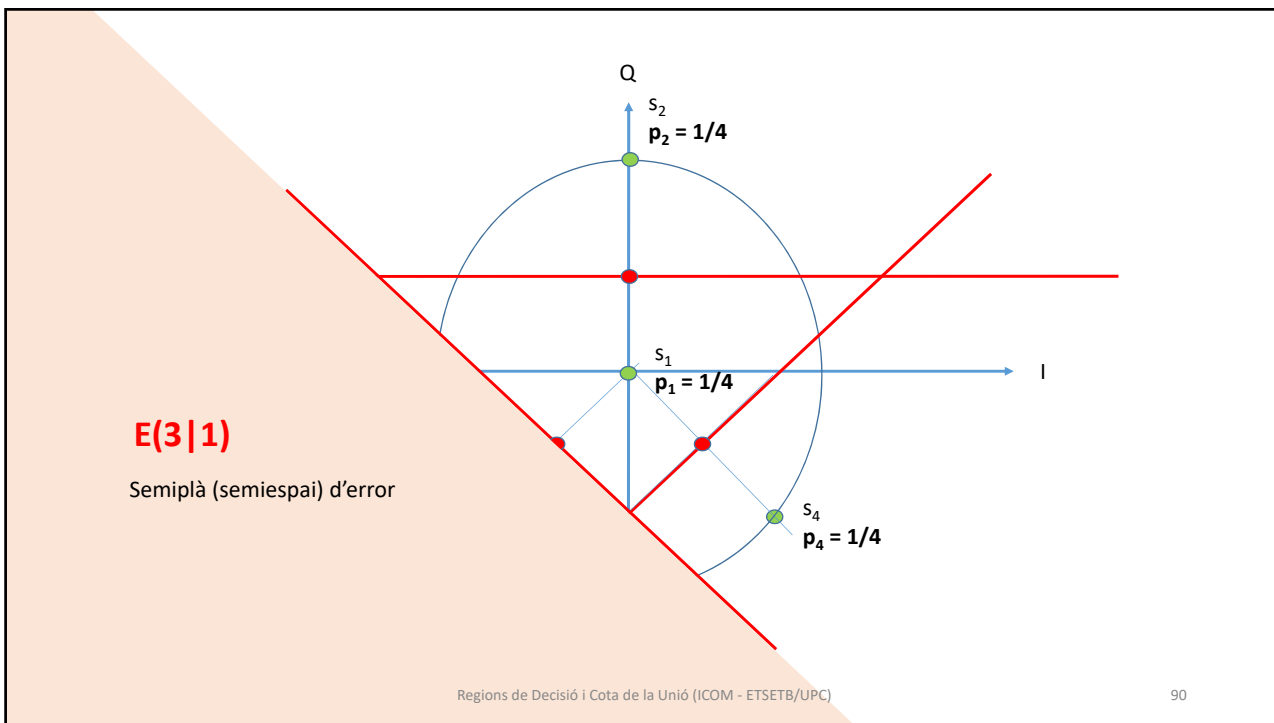
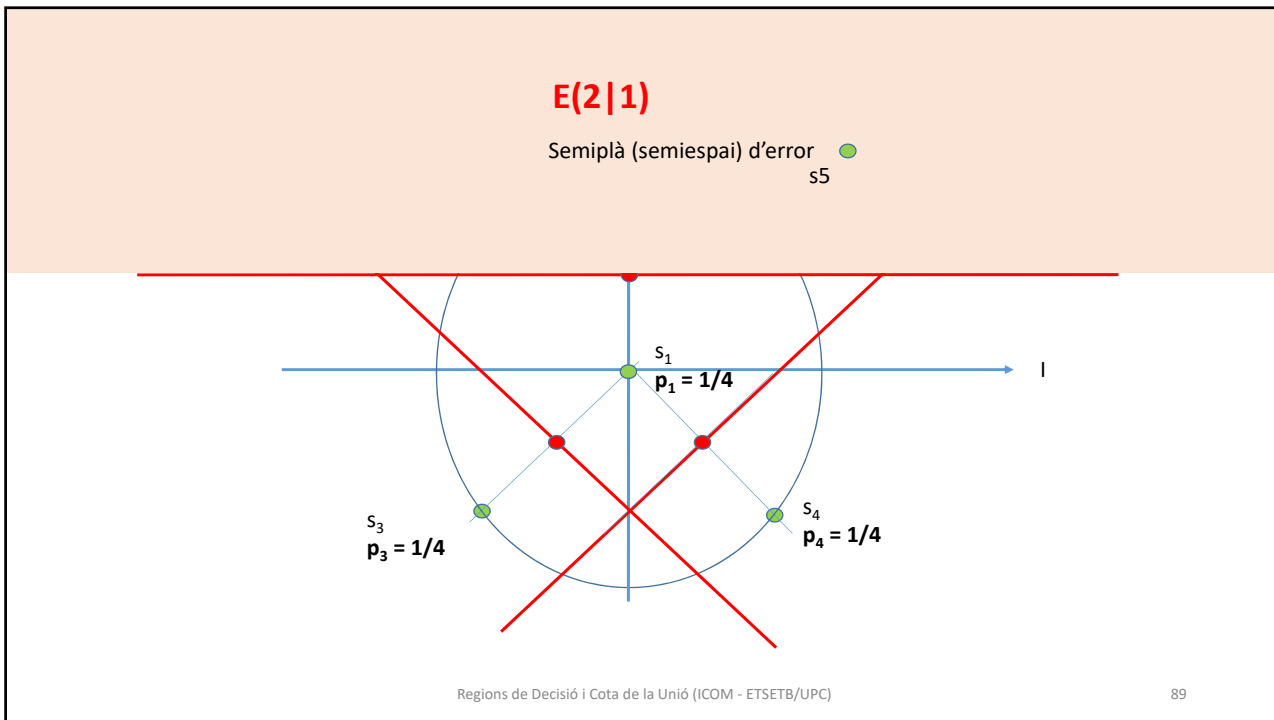
Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC)

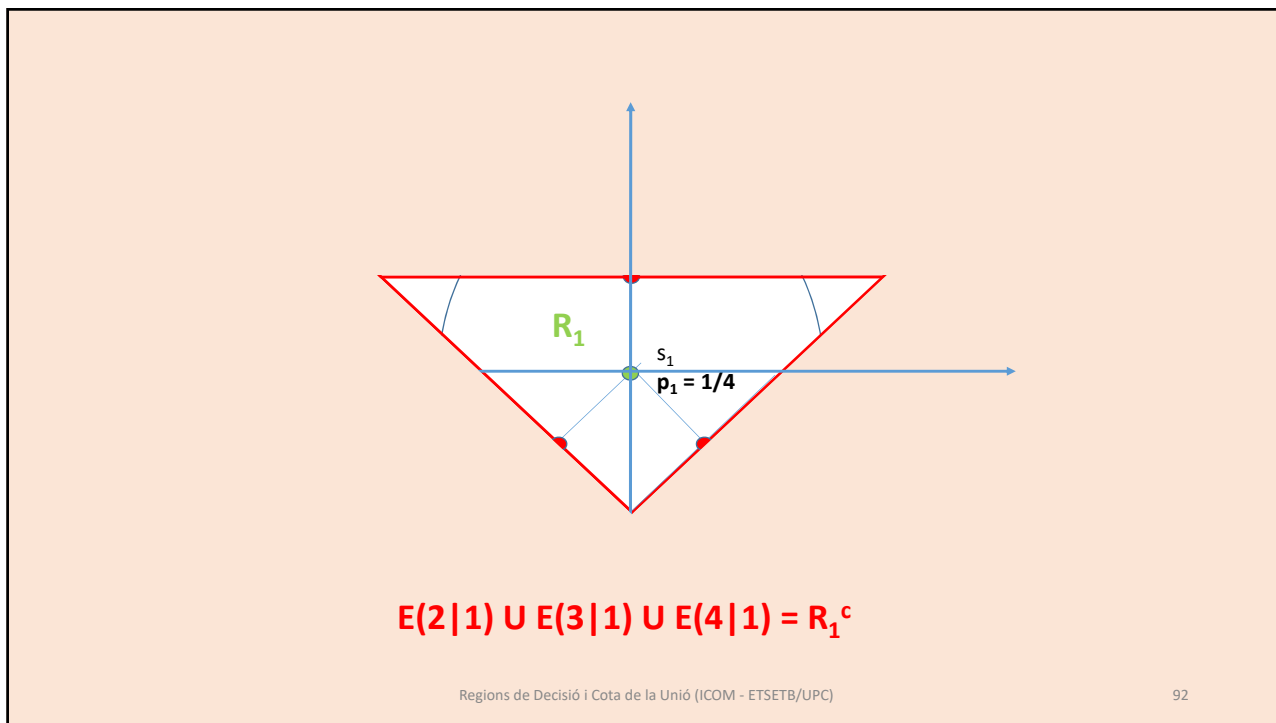
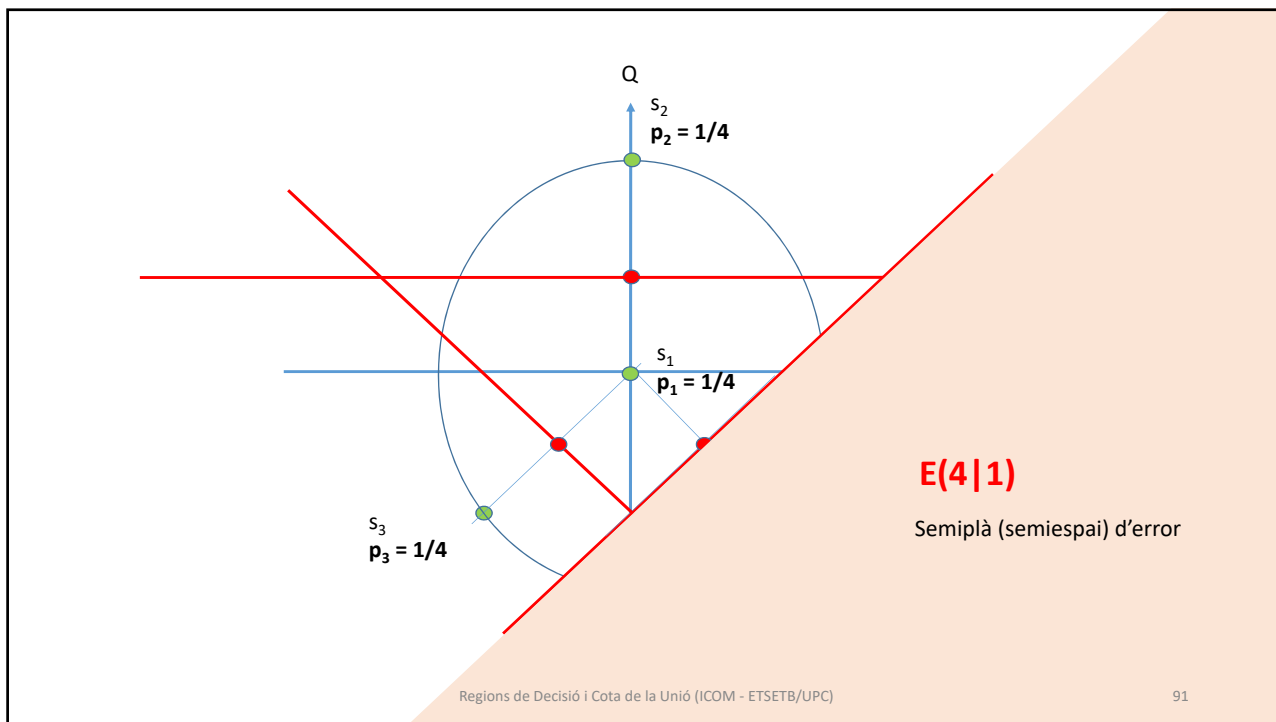
87

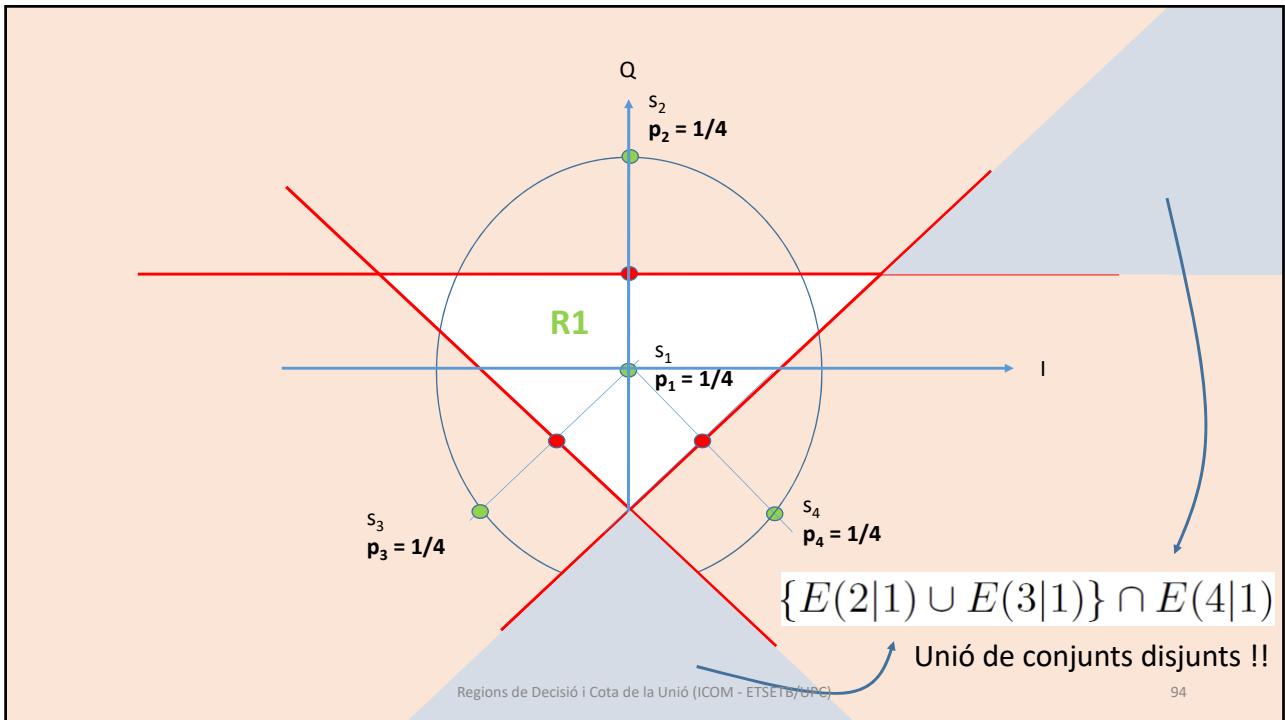
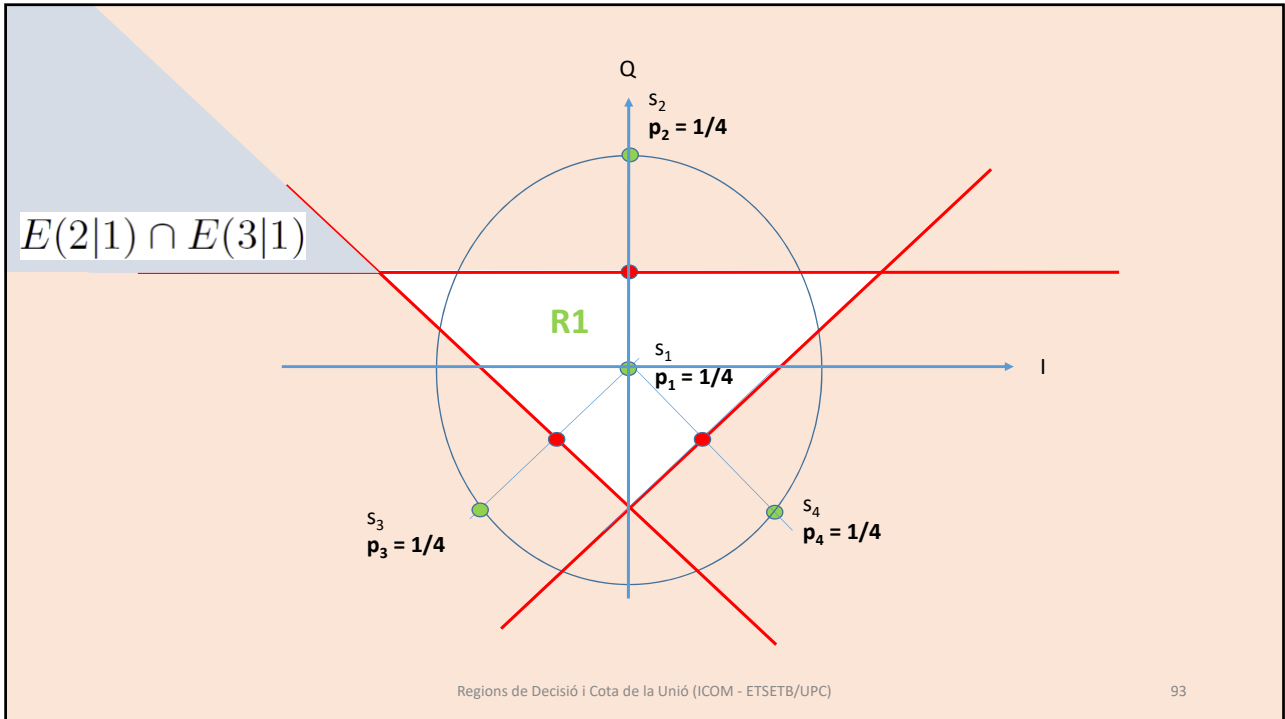


Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC)

88







Propietats de Conjunts

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

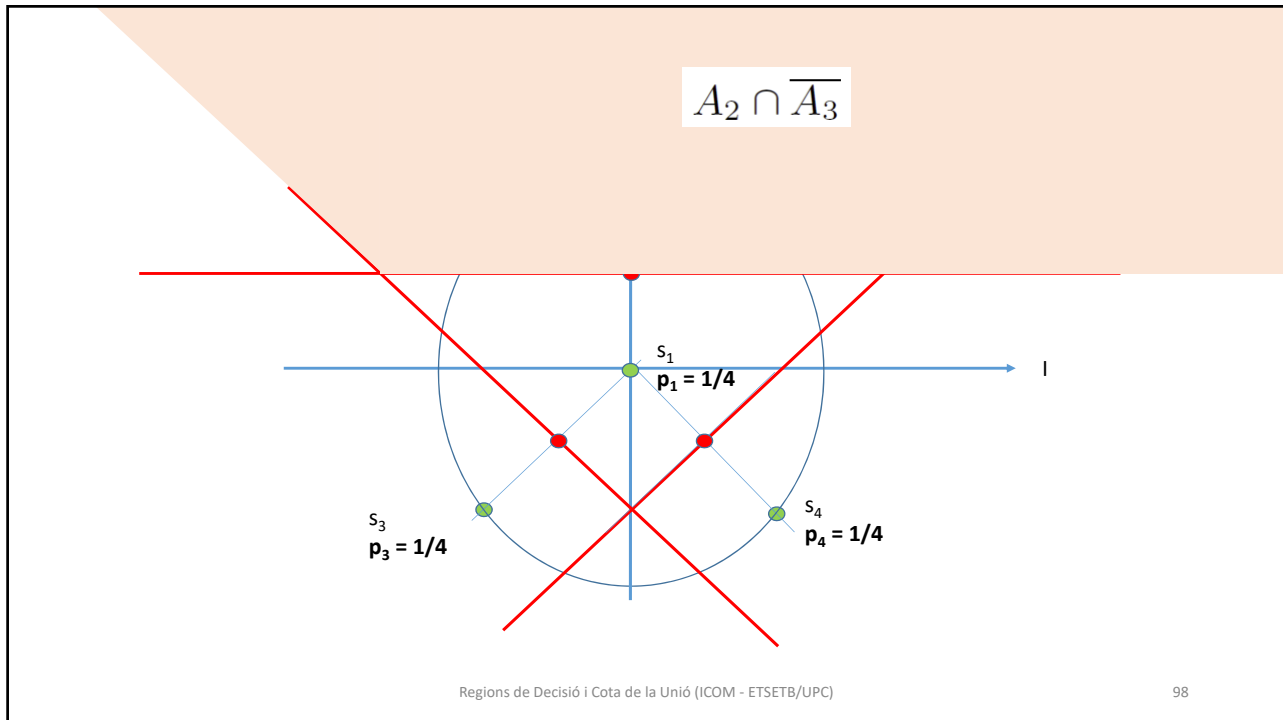
Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC) 95

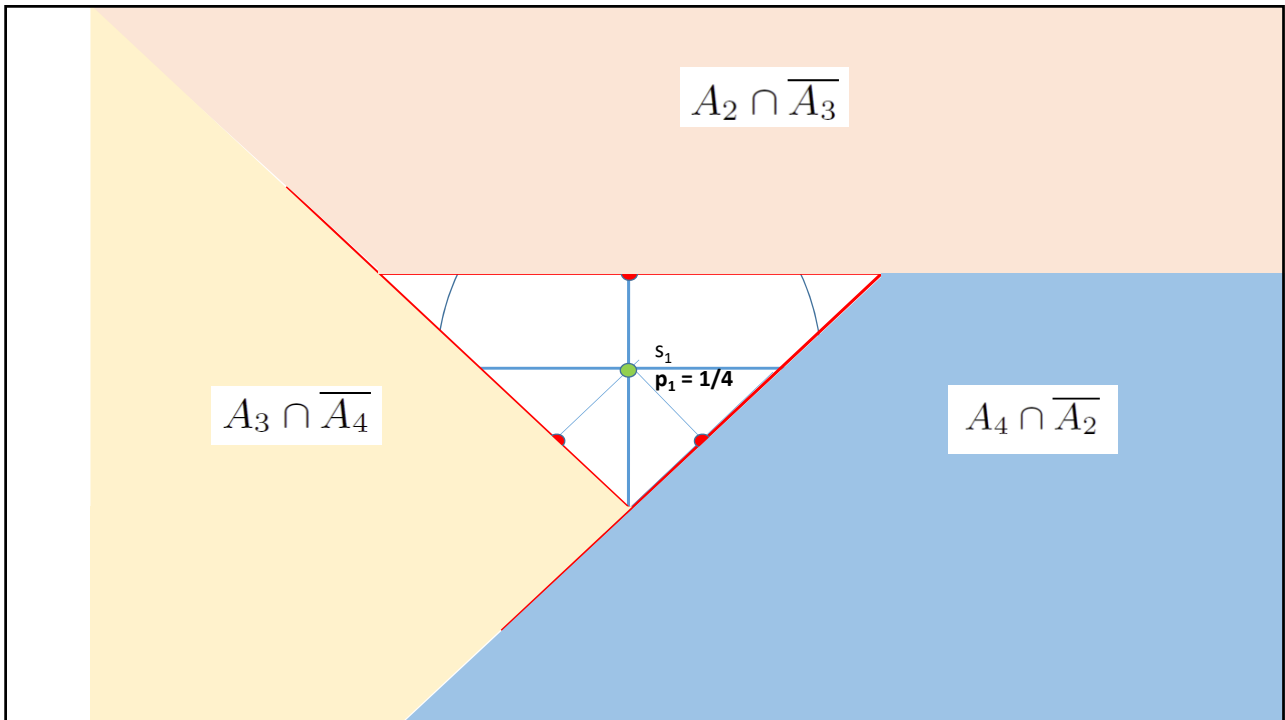
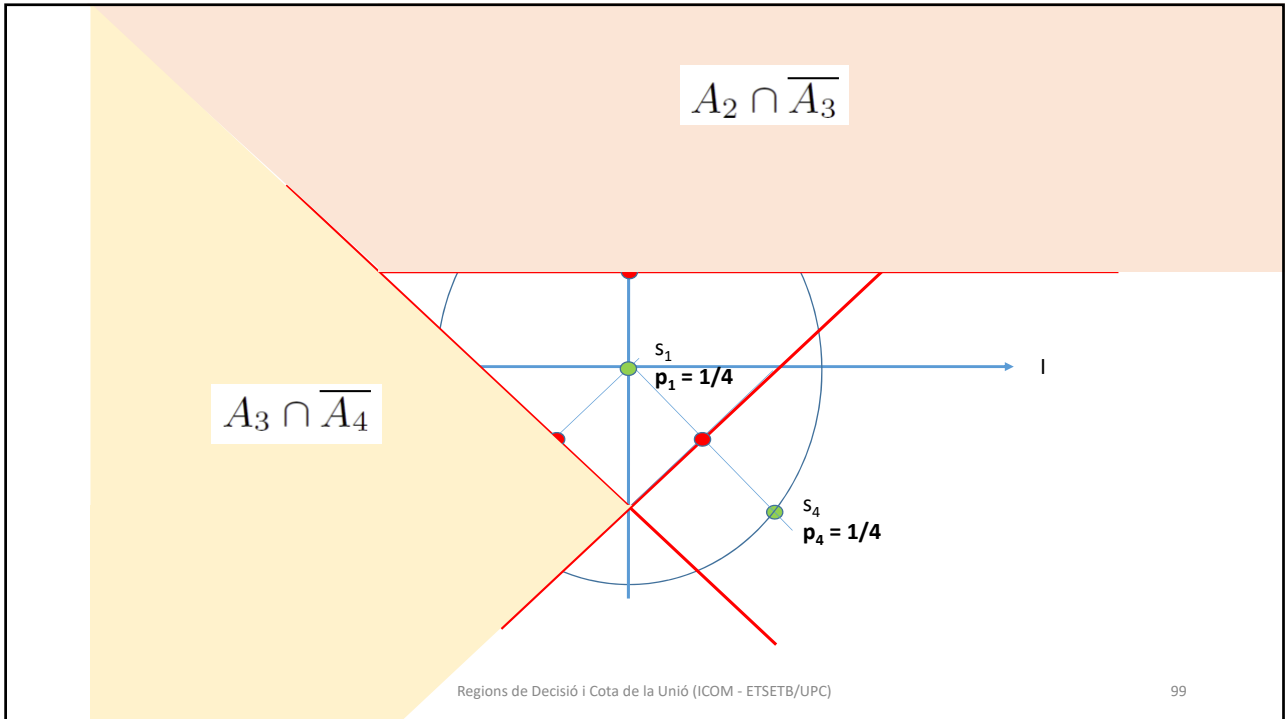
$$\{E(2|1) \cup E(3|1)\} \cap E(4|1) = \{E(2|1) \cap E(4|1)\} \cup \{E(3|1) \cap E(4|1)\}$$

Regions de Decisió i Cota de la Unió (ICOM - ETSETB/UPC) 96

Mètode 1 per la Cota de la Unió (General)

$$\begin{aligned}
 p(\epsilon_s|1) &= \text{Prob}(y \in \{E(2|1) \cup E(3|1) \cup E(4|1)\}) \\
 &= p(E(2|1)) + p(E(3|1)) + p(E(4|1)) \\
 &\quad - p(E(2|1) \cap E(3|1)) - p(\{E(2|1) \cup E(3|1)\} \cap E(4|1)) \\
 &\leq p(E(2|1)) + p(E(3|1)) + p(E(4|1))
 \end{aligned}$$





Mètode 2 per la Cota de la Unió (pla IQ)

$$p(\epsilon_s | 1) = p(A_2 \cap \overline{A_3}) + p(A_3 \cap \overline{A_4}) + p(A_4 \cap \overline{A_2})$$

$$p(\epsilon_s | 1) = \sum_{i=2}^4 p(A_i \cap \overline{A_{i+1}}) \quad , \quad A_5 \equiv A_2$$

$$\leq \sum_{i=2}^4 p(A_i)$$