Álgebra lineal y geometría para la ingeniería

María Isabel García Planas

Primera edición: Enero 2011
Editor: la autora
ISBN: 978-84-614-8386-0
Depósito legal: B-13522-2011

La Geometría es el arte de pensar bien, y dibujar mal.

Henri Poincaré (Francia, 1854–1912)

*A mis hijos

Presentación

Este libro recoge el material preparado para estudiantes de la asignatura de geometría de los cursos de grado de ingeniería en tecnologías industriales, ingeniería química y grado de ingeniería de materiales de la ETSEIB-UPC. Se trata de un libro con contenidos básicos de esta materia.

El núcleo básico está constituido por los temas clásicos en un libro de álgebra lineal que estudia espacios vectoriales dotados de un producto escalar y sus aplicaciones a la geometría.

Este texto incluye también dos capítulos dedicados al estudio a nivel de introdución de variedades implícitas y al estudio elemental de curvas y superficies diferenciables de $\mathbb{R}^3$.

Por ser un libro de estudio recomendado a los estudiantes, cada capítulo consta de una amplia colección de ejercicios, con las soluciones correspondientes.

La intención de la autora es ofrecer a los estudiantes un texto completo de álgebra lineal básica aplicada a la geometría que les permita alcanzar un cierto grado de soltura en la resolución de los ejercicios y, al mismo tiempo, introducirse en la abstracción de les demostraciones.

La autora

Barcelona, 31 de Enero de 2011.

Índice general

Capítulo 1

Espacio vectorial euclídeo

1.1. Producto escalar. Bases ortonormales

Conceptos geométricos que en el caso de los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son se identifican fácilmente, pueden introducirse en un espacio vectorial real cualquiera.
Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.1. Un *producto escalar* (euclídio) en E es una aplicación

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow R \\ (u, v) &\longrightarrow \langle u, v\rangle \end{aligned}$$

que verifica las propiedades siguientes:

i) $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle \quad \forall u_1, u_2, v \in E$.

ii) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

iii) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle \quad \forall u, v \in E$.

iv) $\langle u, u\rangle \geq 0\ \forall u \in E$ y $\langle u, u\rangle = 0$ si, y sólo si $u = 0$.

Ejemplo 1.1.1. Consideremos en $\mathbb{R}^2$, para toda pareja de vectores $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$, la aplicación que viene definida por:

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

Claramente se verifican las propiedades del producto escalar.

En general, en $\mathbb{R}^n$ la aplicación

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

es un producto escalar. Dicho producto escalar se denomina *producto escalar ordinario de* $\mathbb{R}^n$.
En todo espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita se puede definir un producto escalar. Si escogemos una base $(u_1, \ldots, u_n)$ dados dos vectors cualesquiera $u = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$, $v = y_1u_1 + \ldots + y_nu_n$ podemos definir la aplicación

$$\begin{array}{rl} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) & \longrightarrow \langle u, v \rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \end{array} \tag{1.1}$$

No es difícil probar que se verifican todas las propiedades del producto escalar.
Otro producto escalar en E es el que viene definido de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle = \; & 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + \ldots + x_1y_n + x_ny_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + \\ & + x_3y_2 + \ldots + x_2y_n + x_ny_2 + 2x_ny_n \end{aligned}$$

Dada una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ del espacio, conociendo el producto escalar de los elementos de la base y debido a la propiedades del producto escalar, podemos conocer el producto escalar de cualquier pareja de vectores: sean $x = \lambda_1e_1 + \ldots + \lambda_ne_n$ e $y = \mu_1e_1 + \ldots + \mu_ne_n$, entonces

$$< x, y >= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\mu_j < e_i, e_j >$$

por lo que podemos escribir en forma matricial

$$< x, y >= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} < e_1, e_1 > & \ldots & < e_1, e_n > \\ \vdots & & \vdots \\ < e_n, e_1 > & \ldots & < e_n, e_n > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

llamando G a la matriz tenemos $< x, y >= x^tGy$ y la matrix G recibe el nombre de *matriz del producto escalar*.
Es fácil probar que G es invertible.

Una vez definido un producto escalar en un espacio vectorial, podemos introducir las nociones geométricas de norma de un vector y ángulo entre dos vectores.

Definición 1.1.2. Dado un vector u, definimos la *norma* o longitud del vector u como:

$$\|u\| = +\sqrt{\langle u, u\rangle} \tag{1.2}$$

Las propiedades de la norma de un vector son:

i) $\|u\| \geq 0 \ \forall u \in E$ i $\|u\| = 0$ si, y sólo si, $u = 0$.

ii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\| \ \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

iii) $|\langle u, u\rangle| \leq \|u\| \, \|v\| \ \forall u, v \in E$ (desigualdad de Cauchy-Schwartz).

iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \ \forall u, v \in E$ (desigualdad triangular).

Observación 1.1.1. Observar que, dado un vector $u \in E$, no nulo, el vector $\dfrac{u}{\|u\|}$ es un vector unitario (de norma 1).

Ejemplo 1.1.2. A $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar que viene definido per

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

es té:

$$\|(2, -3, 4)\| = \sqrt{29}, \quad \|(1, -1, 2)\| = \sqrt{6}, \quad \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\| = 1$$

Definición 1.1.3. Dados $u, v \in E$ no nulos, definimos *ángulo* entre estos dos vectores como el ángulo $\alpha \in [0, \pi]$ tal que:

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|} \tag{1.3}$$

Las propiedades de ángulo entre dos vectores son:

i) ángulo$(u, v) =$ ángulo$(v, u) \ \forall u, v \in E$.

ii) Si $\lambda > 0$ i $\mu > 0$ ángulo$(\lambda u, \mu v) =$ ángulo$(u, v) \ \forall u, v \in E$.

iii) ángulo$(u, v) =$ ángulo$(-u, -v) \ \forall u, v \in E$.

iv) ángulo$(u, v) +$ ángulo$(-u, v) = \pi \ \forall u, v \in E$.

Ejemplo 1.1.3. En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar definido por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

se tiene:

$$\text{ángulo}((1,0),(1,1)) = \frac{\pi}{4}, \quad \text{ángulo}((1,1),(-1,0)) = \frac{3\pi}{4}.$$

Sea E un espacio vectorial real con un producto escalar. Un tal espacio recibe el nombre de *espacio vectorial euclídeo*.

1.2. Bases ortonormales. El método de Gram-Schmidt

El concepto de vectores perpendiculares para vectores de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$, se puede generalizar al caso de un espacio vectorial sobre el que se ha definido un producto escalar.

Definición 1.2.1. Dados dos vectores $u, v \in E$, diremos que son ortogonales si

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Claramente se verifican las propiedades intuitivas sobre perpendicularidad.

i) Si $u, v \in E$ son ortogonales, ángulo$(u, v) = \frac{\pi}{2}$.

ii) Si $u, v \in E$ son ortogonales $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (teorema de Pitágoras).

Observación 1.2.1. Si sobre un espacio vectorial E consideramos el producto escalar definido en (1.1) entonces los vectores de la base $u_1, \ldots, u_n$ son todos de norma 1 y dos a dos ortogonales.

Definición 1.2.2. Sea E un espacio vectorial real en el que se ha definido un producto escalar. Se dice que una base $(u_1, \ldots, u_n)$ es *ortonormal* si verifica:

$$\begin{aligned} &\|u_i\| = 1, \ 1 \leq i \leq n, \\ &\langle u_i, u_j \rangle = 0, \ \text{para todo } i, j \text{ con } i \neq j. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ejemplo 1.2.1. La base canónica de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar ordinario es ortonormal.

En un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita se puede obtener una base ortonormal a partir de una base cualquiera dada, de la siguiente manera.

Método de ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea $u_1, u_2, \ldots, u_n$ una base de E. Entonces

$$\begin{aligned}
\overline{u}_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\
\overline{u}_2 &= \frac{u_2 - < \overline{u}_1, u_2 > \overline{u}_1}{\|u_2 - < \overline{u}_1, u_2 > \overline{u}_1\|} \\
&\vdots \\
\overline{u}_n &= \frac{u_n - < \overline{u}_1, u_n > \overline{u}_1 - \ldots - < \overline{u}_{n-1}, u_n > \overline{u}_{n-1}}{\|u_n - < \overline{u}_1, u_2 > \overline{u}_1 - \ldots - < \overline{u}_{n-1}, u_n > \overline{u}_{n-1}\|}
\end{aligned}$$

es una base ortonormal para E.

Observación 1.2.2. se verifica la siguiente relación de subespacios

$$\begin{aligned}
&[u_1] = [\overline{u}_1] \\
&[u_1, u_2] = [\overline{u}_1, \overline{u}_2] \\
&\quad\vdots \\
&[u_1, \ldots, u_n] = [\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n]
\end{aligned}$$

por lo que este método también sirve para determinar bases ortonormales de subespacios a partir de una base de este.

Observación 1.2.3. La matriz G del producto escalar en bases ortonormales es la identidad. Por lo que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal y si las coordenadas de x e y en esta base son $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ respectivamente, entonces $< x, y >= x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

Dado un vector $u \neq 0$ cualquiera del espacio vectorial euclídeo E podemos considerar el conjunto de vectores perpendiculares a este vector:

$$u^{\perp} = \{v \in E \mid \langle u, v \rangle = 0\}$$

Es fácil probar que este conjunto es un subespacio vectorial, que recibe el nombre de *subespacio ortogonal* a u.
De hecho, podemos calcular el conjunto de vectores perpendiculares a todos los vectores de un subespacio vectorial F:

$$\boxed{F^{\perp} = \{v \in E \mid \langle u, v\rangle = 0, \forall u \in F\}}$$

Observación 1.2.4. También es fácil probar que $F^{\perp}$ es un subespacio vectorial.

$F^{\perp}$ recibe el nombre de *complemento ortogonal de* F.

Ejemplo 1.2.2. En $\mathbb{R}^3$, y con el producto escalar definido por

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

si $F = [(2, 1, -1), (0, 2, 3)]$, entonces:

$$F^{\perp} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 2x_2 + 3x_3 = 0\} = [(-5, 6, -4)]$$

Proposición 1.2.1. *Si F es un subespacio vectorial cualquiera de E, entonces:*

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Escribimos:

$$\boxed{E = F \perp F^{\perp}.}$$

Del hecho de que la suma sea directa se deduce que la descomposición de un vector $u \in E$ cualquiera como suma de un vector de F y de un vector de $F^{\perp}$ es única: $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in F$ y $u_2 \in F^{\perp}$ únicos.

Definición 1.2.3. Se denomina *projección ortogonal* de un vector $u \in E$ sobre F la componente sobre F de la descomposición en suma ortogonal de F y $F^{\perp}$.

Ejemplo 1.2.3. Sea $u = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$. La proyección ortogonal de u sobre $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ es $v = (2, 2)$, ya que $(1, 3) = 2(1, 1) - 1(1, -1)$ donde $((1, 1))$ es una base de F y $((1, -1))$ de $F^{\perp}$.

1.3. El Teorema de la proyección ortogonal

Vamos a ver a continuación como podemos obtener el vector proyección ortogonal de una vector dado sobre un subespacio vectorial.
Empezamos con el caso particular en que el subespacio vectorial F es de dimensión 1, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.1. *Sea E un espacio vectorial euclídeo, v un vector no nulo del espacio E. La proyección ortogonal de un vector $u \in E$ sobre $F = [v]$ es el vector*

$$w = \frac{< u, v >}{< v, v >} v \in F.$$

Demostración.

$$u = \alpha v + v_1, \quad \text{siendo } v_1 \in [v]^\perp$$
$$w = \alpha v$$

($[v]^\perp$ es el subespacio ortogonal a F, v_1 existe y es único).
Multiplicando escalarmente los vectores u y v tenemos

$$< u, v > = < \alpha v + v_1, v > = \alpha < v, v >$$
$$\alpha = \frac{< u, v >}{< v, v >}$$

Por lo que

$$\boxed{w = \frac{< u, v >}{< v, v >} v}$$

□

Observación 1.3.1. La norma de w es:

$$|w| = |\frac{u \cdot v}{v \cdot v} v| = \frac{|u \cdot v|}{v \cdot v} \sqrt{v \cdot v} = \frac{|u \cdot v|}{|v|}$$

Teorema 1.3.1. *Sea E un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita n y sea v un vector cualquiera de E. Entonces la proyección ortogonal de v sobre un subespacio vectorial $F \subset E$ que denotamos por $\pi_F v$, viene dado por*

$$\pi_F v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r$$

siendo $\{v_1, \dots, v_r\}$ *una base de* F *y* $\alpha_i =$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & \dots & < v_1, v_r > \\ \vdots & & \vdots \\ < v_r, v_1 > & \dots & < v_r, v_r > \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} < v, v_1 > \\ \vdots \\ < v, v_r > \end{pmatrix}.$$

Demostración. Tomemos una base de E formada por la base dada en F y una base de $F^{\perp}$. Sea $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ dicha base.
Por lo tanto el vector v tiene expresión única respecto a esta base:

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \alpha_n v_n$$

Claramente $\pi_F v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r$. Calculemos α_i, $i = 1, \dots, r$.

$$\begin{aligned} < v, v_1 > &= \alpha_1 < v_1, v_1 > + \ldots + \alpha_r < v_1, v_r > \\ \vdots & \\ < v, v_r > &= \alpha_1 < v_r, v_1 > + \ldots + \alpha_r < v_r, v_r > \end{aligned}$$

escrito en forma matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & \dots & < v_1, v_r > \\ \vdots & & \vdots \\ < v_r, v_1 > & \dots & < v_r, v_r > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < v, v_1 > \\ \vdots \\ < v, v_r > \end{pmatrix}$$

La matriz

$$\begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & \dots & < v_1, v_r > \\ \vdots & & \vdots \\ < v_r, v_1 > & \dots & < v_r, v_r > \end{pmatrix}$$

es claramente invertible, de donde el resultado. □

1.4. Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Consideremos dos vectores u y v del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.4.1. El producto vectorial entre u y v es el vector $u \wedge v \in [u, v]^{\perp}$ cuyo módulo d es $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \operatorname{sen} \alpha$ siendo α el ángulo entre los vectores u y v y el sentido positivo, esto es $\det(u, v, u \wedge v) > 0$, lo que en física se conoce como *la regla de la mano derecha*.

Podemos escribir esta definición de manera más compacta de la siguiente manera:

$$u \wedge v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \operatorname{sen} \alpha \, \mathbf{n}$$

siendo $\mathbf{n}$ el vector unitario ortogonal al subespacio $[u, v]$ en el sentido positivo. Fijada una base ortonormal en el espacio es fácil calcular el producto vectorial usando las coordenadas de los vectores. Sea $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$, entonces

$$\begin{aligned} u \wedge v \quad &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_1 \end{vmatrix} e_3 \\ &(u_2 v_3 - u_3 v_2) e_1 - (u_1 v_3 - u_3 v_1) e_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_3 \end{aligned}$$

El producto vectorial se suele a veces escribir de la forma

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

si bien esta es una expresión puramente formal ya que la primera fila de la matriz no está formada por escalares sino por vectores.
Con esta expresión es fácil probar que $u \wedge v$ es perpendicular a u y v respectivamente ya que

$$< u, u \wedge v >= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$< v, u \wedge v >= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Proposición 1.4.1. *Dados dos vectores* $u, v \in \mathbb{R}^3$, *el producto vectorial* $u \wedge v$ *verifica las siguientes propiedades.*

1. $u \wedge v = -v \wedge u$ *(antisimetría)*

2. *Si* $u \wedge v = 0$ *con* $u, v \neq 0$ *entonces* u *y* v *son linealmente dependientes.*

3. $(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$

4. *$u \wedge (v \wedge w) =< u, w > v- < u, v > w$ conocida como regla de la expulsión.*

5. *$u \wedge (v \wedge w) + w \wedge (u \wedge v) + v \wedge (w \wedge v) = 0$ conocida como identidad de Jacobi.*

1.5. Sistemas sobredeterminados

Consideremos el sistema de ecuaciones lineal

$$Ax = b$$

incompatible. Esto indica que $b \notin \operatorname{Im} A$.
Suponemos que la incompatibilidad del sistema viene dada por errores de medición y pretendemos buscar la solución más aproximada al sistema.
Para ello cambiamos el término independiente del sistema b por $\overline{b} = \pi_{\operatorname{Im} A}(b)$.
Notamos que $\overline{b} \in \operatorname{Im} A$ por lo que el sistema

$$Ax = \overline{b}$$

es compatible.
Para el caso particular en que $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $n \geq m$ y rango $A = m$ se tiene que el nuevo sistema tiene solución única y vale

$$x = (A^t A)^{-1} A^t b.$$

De hecho par a ver que es solución basta probar que

$$Ax = A(A^t A)^{-1} A^t b = \overline{b}.$$

Observación 1.5.1. $A(A^t A)^{-1} A^t$ es la matriz de la proyección de $\mathbb{R}^n$ sobre $\operatorname{Im} A$, es decir las columnas de la matriz son las proyecciones ortogonales de la base canónica sobre $\operatorname{Im} A$.

1.6. Endomorfismos ortogonales y simétricos

En este apartado estudiaremos dos casos especiales de endomorfismos sobre el espacio euclídeo ordinario $\mathbb{R}^n$, los ortogonales y los simétricos.

1.6.1. Aplicación lineal adjunta

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

la matriz de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en las bases canónicas. Consideremos la matriz traspuesta A^t, que representa la matriz de una aplicación lineal $f' : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Observamos que dados $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ cualesquiera se tiene $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f'(y)\rangle$, ya que:

$$\langle f(x), y\rangle = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)y_1 + \dots + (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)y_m =$$
$$\langle x, f'(y)\rangle = (a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m)x_1 + \dots + (a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m)x_n$$

Definición 1.6.1. Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, se define la aplicación $f' : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se denomina *aplicación adjunta de* f, como la única aplicación que verifica

$$\boxed{\langle f(x), y\rangle = \langle x, f'(y)\rangle.}$$

Si escribimos la matriz de f en bases ortonormales, la matriz de f' en las mismas bases, tanto en $\mathbb{R}^n$ como en $\mathbb{R}^m$, es la matriz traspuesta de la matriz de f.

Ejemplo 1.6.1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, x_1 - x_2, 5x_2)$. Las matrices de f y f' en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

respectivamente

Propiedades

Sean f, g endomorfismos cualesquiera de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

i) $(f + g)' = f' + g'$

ii) $(\lambda f)' = \lambda f'$

iii) $(f')' = f$

iv) $(f \circ g)' = g' \circ f'$

v) Si f es invertible $(f')^{-1} = (f^{-1})'$.

1.6.2. Endomorfismos ortogonales

Observamos que

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} g : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow (x_3, x_1, x_2) \end{array}$$

son aplicaciones que conservan las longitudes de los vectors y los ángulos. Es decir,

$$\begin{array}{cc} \|f(x)\| = \|x\|, & \|g(x)\| = \|x\|, \\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle & \langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle \end{array}$$

para un par de vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$ cualesquiera.
Obviamente esto no pasa siempre. Por ejemplo, si consideramos la aplicación $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida de la forma $h(x) = 4x$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$, vemos que $\|h(x)\| = 4\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$.
Estamos interesados en ver que endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ conservan el producto escalar y, por lo tanto, la norma y los ángulos. Observar que es equivalente decir que un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ conserva el producto escalar que decir que conserva la norma.

Definición 1.6.2. Los endomorfismos del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ tales que $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ para un par de vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ cualesquiera se denominan *ortogonales*.

El resultado siguiente justifica el nombre que reciben estos endomorfismos.

Teorema 1.6.1. *Sea A la matriz de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^n$ en una base ortonormal. Entonces, f es ortogonal si, y sólo si, esta matriz es ortogonal:*

$$\boxed{A^{-1} = A^t} \tag{1.5}$$

Demostración. En efecto. Si u es la base ortonormal considerada en E, entonces dados dos vectores $x, y \in E$ cualesquiera, ponemos $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ a las matrices columna formadas con las componentes de los vectores x, y en la base u, respectivamente. Entonces:

$$\langle f(x), f(y) \rangle = (AX)^t AY = X^t (A^t A) Y$$

y $\langle x, y \rangle = X^t Y$ de donde se deduce que necesariamente $A^t A = I$. □

Equivalentemente, f es ortogonal si, y sólo si, la aplicación adjunta es igual a l'aplicación inversa.

Ejemplo 1.6.2. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ la matriz del cual, en la base canónica, es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $A^{-1} = A^t$ y f es ortogonal.

De la definición de endomorfismo ortogonal se desprende que todo endomorfismo ortogonal transforma bases ortonormales en bases ortonormales. El recíproco también es cierto.

Teorema 1.6.2. *Un endomorfismo es ortogonal si, y sólo si, transforma bases ortonormales en bases ortonormales.*

Observación 1.6.1. Como consecuencia de esta propiedad, tenemos que los endomorfismos ortogonales son biyectivos.

Presentamos a continuación los endomorfismos ortogonales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Antes, pero, necesitamos hacer la observación siguiente.

Observación 1.6.2. Sea f un endomorfismo ortogonal de $\mathbb{R}^n$

a) Si el endomorfismo f diagonaliza, los únicos valores propios posibles son 1 y -1, ya que

$$\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

y eso sólo es posible si $|\lambda| = 1$.

b) Si f es un endomorfismo ortogonal de $\mathbb{R}^n$, entonces $|\det f| = 1$; es decir, los únicos valores propios posibles para $\det f$ son 1 y -1, ya que si A es la matriz de f en una base ortonormal,

$$A^t A = I \implies \det(A^t)\det(A) = 1 \implies (\det(A))^2 = 1$$

c) Si v_1 y v_2 son vectores propios de f correspondientes a los valores propios 1 y -1 respectivamente.

$$\langle v_1, v_2\rangle = \langle f(v_1, f(v_2)\rangle = \langle v_1, -v_2\rangle = -\langle v_1, v_2\rangle,$$

de donde deducimos que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$; por lo tanto, v_1 y v_2 son ortogonales.

Pasemos ya a obtener los endomorfismos ortogonales de $\mathbb{R}^2$. Los únicos endomorfismos ortogonales de $\mathbb{R}^2$ que diagonalizan son los que tienen por matrices, en una base ortonormal,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si el endomorfismo no diagonaliza, su matriz en una base ortonormal cualquiera es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \pm\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Observar que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ son casos particulares que corresponden a $\alpha = 0, \pi$, respectivamente. Así pues, los endomorfismos ortogonales de $\mathbb{R}^2$ son los que tienen por matriz, en una cierta base ortonormal,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que geométricamente corresponde a hacer una simetría respecto de una recta, y los que tienen por matriz, en cualquier base ortonormal de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\operatorname{sen}\alpha \\ \pm\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

que geométricamente corresponde a hacer un giro de centre el origen y ángulo α.

El signo depende de la *orientación* de la base (es decir, si S es la matriz de cambio de base respecto de la base canónica, y $\det S = 1$ es $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ y, si $\det S = -1$, es $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1.6.3. Sea f el endomorfismo ortogonal la matriz del cual en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Consideremos la base $u_1 = e_2, u_2 = e_1$. Entonces $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto $\det S = -1$. La matriz del endomorfismo en esta nueva base es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Pasemos ahora a estudiar cuales son los endomorfismos ortogonales de $\mathbb{R}^3$.
Sea f un endomorfismo ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Sea λ_1 un valor propio, $\lambda_1 = 1$ o bien $\lambda_1 = -1$ (puesto que el polinomio característico de f tiene grado 3, por lo menos tiene una raíz real). Supongamos que v_1 es un vector propio de módulo 1 de valor propio λ_1 y denotemos por $F = [v_1]$ el subespacio que genera. El subespacio vectorial F es invariante por f, y, por tanto, también lo es $F^\perp$. Sean $v_2, v_3 \in F^\perp$ tales que $v = (v_1, v_2, v_3)$ es una base ortogonal d'$\mathbb{R}^3$. En la base (v_2, v_3) la matriz de $f_{|F^\perp}$ ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\operatorname{sen}\theta \\ \pm\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto, en la base v, la matriz de f es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \cos\theta & \mp\operatorname{sen}\theta \\ & \pm\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Hemos encontrado así, pues, todos los endomorfismos ortogonales de $\mathbb{R}^3$. Geométricamente, los que en una cierta base ortonormal tienen por matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & \mp\operatorname{sen}\theta \\ & \pm\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

corresponden a hacer un giro de ángulo θ alrededor de la recta $[v_1]$.
Los que en una cierta base ortonormal tienen por matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\theta & \mp\operatorname{sen}\theta \\ & \pm\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

corresponden a hacer un giro de ángulo θ alrededor de la recta $[v_1]$, seguida de una simetría especular respecto del plano $[v_2, v_3]$.
Para valores concretos de los ángulos ($\theta = 0, \pi, ...$) tenemos que corresponden a simetrías especulares respecto un plano, simetrías axiales respecto una recta, simetrías centrales.
De forma más general, se demuestra que los endomorfismos ortogonales de $\mathbb{R}^n$ son los que tienen por matriz asociada, en una cierta base ortonormal, una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&&& \\ & \dots &&&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&&& \\ &&& -1 &&&&&&&& \\ &&&& \dots &&&&&&& \\ &&&&& -1 &&&&&& \\ &&&&&& \cos\theta_1 & \mp\operatorname{sen}\theta_1 &&&& \\ &&&&&& \pm\operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 &&&& \\ &&&&&&&& \ddots &&& \\ &&&&&&&&& \cos\theta_m & \mp\operatorname{sen}\theta_m \\ &&&&&&&&& \pm\operatorname{sen}\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix}$$

1.6.3. Endomorfismos simétricos

Ejemplo 1.6.4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el endomorfismo que tiene por matriz, en la base canónica,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se observa que el vector e_1 se transforma en el vector de la misma dirección y sentido pero de norma 2, y que el vector e_2 se transforma en el vector con la misma dirección y sentido pero de norma 3.
Todos los vectors del plano de norma 1 (son los que verifican $x_1^2 + x_2^2 = 1$) se transformen en

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$$

(es decir, la circunferencia de radio 1 se ha deformado en la elipse de semiejes 2 y 3).

Esta intrepretación no se habría podido hacer tan fácilmente, si la base de los vectores propios considerada no hubiera sido ortonormal.
Los endomorfismos simétricos, que se definen a continuación, representan un conjunto de endomorfismos que diagonalizan y para los cuales podemos hallar una base ortonormal de vectores propios.

Definición 1.6.3. Dado un endomorfismo f de $\mathbb{R}^n$, se dice que es *simétrico* si coincide con su adjunto

$$\boxed{f = f'}$$

Algunos autores denominan a este tipo de endomorfismos *deformaciones.*
De la propia definición se desprende la siguiente proposición.

Proposición 1.6.1. *Un endomorfismo simétrico es aquel para el cual si matriz en una base ortonormal es simétrica.*

A continuación se presentan algunos ejemplos de endomorfismos simétricos.

Proposición 1.6.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo cualquiera. Entonces $f' \circ f$ es simétrico.*

Demostración.

$$(f' \circ f)' = f' \circ (f')' = f' \circ f.$$

□

Un ejemplo importante es el siguiente.

Ejemplo 1.6.5. Sea F un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión r y sea G su complementario ortogonal. Consideremos el endomorfismo

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n = F \perp G &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u + v &\longrightarrow u \end{aligned}$$

Es fácil ver que este endomorfismo es simétrico (recibe el nombre de *proyección ortogonal* de $\mathbb{R}^n$ sobre el subespacio F).

Es fácil obtener la matriz de la proyección ortogonal π_F de E sobre F y que notaremos por Π_F, en una base cualquiera de E:
Tomemos una base para F

$$F = [v_1, \dots, v_d],$$

y sea

$$X = \begin{pmatrix} < e_1, v_1 > & \dots & < e_1, v_d > \\ \vdots & & \vdots \\ < e_n, v_1 > & \dots & < e_n, v_d > \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & \dots & < v_1, v_d > \\ \vdots & & \vdots \\ < v_d, v_1 > & \dots & < v_d, v_d > \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_d \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\Pi_F = XM^{-1}V^t = (VM^{-1}X)^t.$$

En particular tenemos la proyección de un vector sobre un subespacio

$$\Pi_F(x) = XM^{-1}V^t(x) = VM^{-1} \begin{pmatrix} < x, v_1 > \\ \vdots \\ < x, v_d > \end{pmatrix}$$

Otro ejemplo no menos importante es el siguiente.

Ejemplo 1.6.6. Sea F un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión r y sea G su complementario ortogonal. Consideremos el endomorfismo

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n = F \perp G &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u + v &\longrightarrow u - v \end{aligned}$$

Es fácil ver que este endomorfismo es simétrico (recibe el nombre de *simetría* d'$\mathbb{R}^n$ respecto el subespacio F). Se observa que este endomorfismo, además, es ortogonal.

El resultado más importante de este tipo de endomorfismos es el siguiente.

Teorema 1.6.3 (Teorema espectral real)**.** *Todo endomorfismo simétrico diagonaliza en una base ortonormal, formada por vectores propios.*

Para la demostración de este teorema necesitamos los siguientes lemas.

Lema 1.6.1. *Sean u y v dos vectores propios de valores propios λ y μ diferentes. Entonces u y v son ortogonales.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\langle f(u), v\rangle &= \langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle\\ \langle f(u), v\rangle &= \langle u, f(v)\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \mu\langle u, v\rangle\end{aligned}$$

por tanto $(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = 0$ y como que $\lambda \neq \mu$ se tiene que u y v son ortogonales. □

Lema 1.6.2. *El polinomio característico de todo endomorfismo simétrico descompone completamente en $\mathbb{R}$.*

Pasemos ahora a demostrar el teorema espectral real.

Demostración. Haciendo inducción sobre $n = \dim E$.
Si $n = 1$, el enunciado del teorema es evident. Supongamos, pues, que es cierto hasta la dimensión $n-1$. Sea λ_1 un valor propio (real) del endomorfismo f, y sea v_1 un vector propio de f de valor propio λ_1 unitario. Podemos identificar el subespacio $[v_1]^\perp$ con $\mathbb{R}^{n-1}$. Por la hipótesis de inducción, la restricción del endomorfismo f al subespacio $[v_1]^\perp$ admite una base ortonormal $(v_2, \ldots, v_n)$ de vectores propios, debido a que este endomorfismo restricción también es simétrico. Es fácil comprobar ahora que $(v_1, \ldots, v_n)$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de f.

□

Ejemplo 1.6.7. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Claramente f es simétrico, ya que su matriz es simétrica. Se observa que en la base ortonormal $u_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $u_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ el endomorfismo diagonaliza:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es decir, la circunferencia unidad se transforma en una elipse de semiejes 4 y 2, en las direcciones de los vectores propios.

Así pues, si f es un endomorfismo simétrico con polinomio característico $Q_f(t) = (-1)^n(t-\lambda_1)^{n_1}\dots(t-\lambda_r)^{n_r}$, se tiene que

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(f-\lambda_1 id)\perp\dots\perp\operatorname{Ker}(f-\lambda_r id)$$

Como consecuencia de este teorema se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.6.1. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son los valores propios del endomorfismo f y $\pi_1, \dots, \pi_r$ son los endomorfismos proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre los subespacios vectoriales $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 id), \dots, \operatorname{Ker}(f-\lambda_r id)$, entonces:

$$f = \lambda_1\pi_1 + \dots + \lambda_r\pi_r$$

Esta expresión se denomina *descomposición espectral del endomorfismo* f.
Teniendo en cuenta que $\pi_i\circ\pi_i = \pi_i$ per a $i,\dots,r$ y que $\pi_i\circ\pi_j = 0$ si $i\neq j$, se deduce de este corolario que

$$f^m = \lambda_1^m\pi_1 + \dots + \lambda_r^m\pi_r \quad \forall m$$

Además, de esta última igualdad se deduce que

$$p(f) = p(\lambda_1)\pi_1 + \dots + p(\lambda_r)\pi_r$$

para todo polinomio $p(t)\in\mathbb{R}[t]$. De hecho, si φ es una función analítica cualquiera,

$$\varphi(f) = \varphi(\lambda_1)\pi_1 + \dots + \varphi(\lambda_r)\pi_r$$

La lectura en lenguaje matricial del teorema espectral es la siguiente.
Si $A\in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica, existe una matriz ortogonal S tal que S^tAS es una matriz diagonal. El corolario anterior tiene la siguiente interpretación a nivel matricial.
Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son los valores propios de la matriz A con multiplicidades respectivas $n_1, \dots, n_r$, entonces:

$$A = \lambda_1\left[S^t\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots^{(n_1} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}S\right] + \dots + \lambda_r\left[S^t\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots^{(n_r} \\ & & & & & 1\end{pmatrix}S\right]$$

Esta expresión es la denominada *descomposición espectral de la matriz* A.

Ejemplo 1.6.8. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sus valores propios son: $-1(2)$, 1 y 8.
Llamemos S a la matriz cuyos vectores columna forman una base ortonormal de vectores propios de la matriz A,

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

La descomposición espectral de la matriz A es:

$$A = (-1)\left[S^t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} S\right] + \left[S^t \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} S\right] + 8\left[S^t \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} S\right]$$

De hecho para un endomorfismo cualquiera tenemos la proposición siguiente.

Proposición 1.6.3. *Sea f un endomorfismo cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Entonces se puede descomponer en composición de un endomorfismo simétrico (deformación) por un endomorfismo ortogonal (que conserva la forma).*

Ejemplo 1.6.9. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ la matriz del cual en base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

que no es ni simétrico ni ortogonal.
Se observa que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = O \cdot S$$

O es la matriz ortogonal y S es simétrica cuyos valores propios son las raíces cuadradas positivas de los valores propios de A^tA.

Ejemplo 1.6.10. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

que no es ni simétrico ni ortogonal.
Se observa que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = O \cdot S$$

O es una matriz ortogonal y S es simétrica cuyos valores propios son la raíz cuadrada positiva del valor propio no nulo de A^tA y 0.

1.7. Espacios vectoriales euclídeos de dimensión infinita

Consideramos el espacio vectorial de dimensión infinita $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado $[a,b]$. Definimos la siguiente operación

$$< f, h >= \int_a^b f(x)h(x)dx \tag{1.6}$$

Proposición 1.7.1. *Con esta operación el espacio* $C([0,1],\mathbb{R})$ *queda estructurado como espacio vectorial euclídeo.*

Proposición 1.7.2. *En* $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ *con el producto escalar definido* (1.6) *el sistema trigonométrico*

$$\{1, \cos nx, sen\, nx \mid n \in \mathbb{N}\}$$

es ortogonal.

Corolario 1.7.1. En dicho espacio euclídeo, el sistema

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

es ortonormal.

Definimos ahora sobre $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$, el producto escalar:

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{f(x)}dx$$

Proposición 1.7.3. *En $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, con este producto escalar, el sistema $\{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es ortogonal.*

1.8. Ejercicios resueltos

1. Sea $E = \mathbb{R}^3$ el espacio vectorial euclídeo natural. Probar que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Solución:

$$\begin{gathered}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 =< x+y, x+y > + < x-y, x-y >^2= \\ < x,x > +2 < x,y > + < y,y > + < x,x > -2 < x,y > + < y,y >= \\ = 2 < x,x > +2 < y,y >= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\end{gathered}$$

2. En $\mathbb{R}^4$, espacio euclídeo natural, determinar el subespacio ortogonal y complementario de $F = [w_1 = (1,1,1,1), w_2 = (3,3,-1,-1)]$.

Solución:

$$\begin{aligned}F^\perp &= \{v \in \mathbb{R}^4 \mid < v, w >= 0\, \forall w \in F\} = \\ &= \{v \in \mathbb{R}^4 \mid < v, w_1 >= 0, < v, w_2 >= 0\} = \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0, 3x+3y-z-t = 0\}\end{aligned}$$

3. Sea E un espacio vectorial euclídeo y F, G subespacios vectoriales. Probar

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$$

Solución:

Hay que probar una igualdad entre conjuntos, probaremos, pues la doble contención.

$x \in (F+G)^{\perp} \implies \; < x, v >= 0, \forall v \in F+G.$

En particular:

$$\left.\begin{array}{l} < x, v >= 0, \; \forall v_1 + 0 \in F + G \implies x \in F^{\perp} \\ \\ < x, v >= 0, \; \forall 0 + v_2 \in F + G \implies x \in G^{\perp} \end{array}\right\} \implies x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

Esto es $\boxed{(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}.}$

$\forall x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$ es

$$\left.\begin{array}{l} x \in F^{\perp} \implies \; < x, v_1 >= 0 \; \forall v_1 \in F \\ \\ x \in G^{\perp} \implies \; < x, v_2 >= 0 \; \forall v_2 \in G \end{array}\right\} \quad < x, v_1 + v_2 >= 0 \implies x \in (F+G)^{\perp}$$

Esto es $\boxed{F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}.}$

4. Sea $E = C^0([-1,1])$ con el producto escalar

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f \cdot g$$

Sea F el subespacio vectorial de E de las funciones impares. Encontrar $F^{\perp}$.

Solución:

E es de dimensión no finita.

$E = F \oplus G$ con G subespacio vectorial de las funciones pares.

$\forall g \in F^{\perp}$, $g = f_1 + f_2 \in F \oplus G$

$$\int_{-1}^{1} f \cdot g = \int_{-1}^{1} f \cdot (f_1 + f_2) = \int_{-1}^{1} f \cdot f_1 + \int_{-1}^{1} f \cdot f_2 \underset{(a)}{=} \int_{-1}^{1} f \cdot f_1 = A$$

(a) $f \cdot f_2$ es una función impar.

Si $g \in F^{\perp}$ es $A = 0$ para toda función $f \in F$, en particular para $f = f_1$ pues f_1 es impar.
Luego $\int_{-1}^{1} f_1^2 \geq 0$ y es cero si y sólo si $f_1^2 = 0$. Luego $F^{\perp} \subset G$.

La contención contraria es inmediata.

5. En $\mathbb{R}^3$, construir una base ortonormal por el método de Gram-Schmidt a partir de la dada por

   a) $x = (1,1,1),\ y = (1,1,0),\ z = (1,0,0)$.

   b) $x = (1,0,0),\ y = (1,1,0),\ z = (1,1,1)$.

Solución:

a)
$$x_1 = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$
$$y_1 = \frac{y- < x_1, y > x_1}{\|y- < x_1, y > x_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right),$$
$$z_1 = \frac{z- < x_1, z > x_1- < y_1, z > y_1}{\|z- < x_1, z > x_1- < y_1, z > y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0).$$

b)
$$x_1 = \frac{x}{\|x\|} = (1,0,0),$$
$$y_1 = \frac{y- < x_1, y > x_1}{\|y- < x_1, y > x_1\|} = (0,1,0),$$
$$z_1 = \frac{z- < x_1, z > x_1- < y_1, z > y_1}{\|z- < x_1, z > x_1- < y_1, z > y_1\|} = (0,0,1).$$

Observación 1.8.1. El orden en que están dispuestos los vectores en una base influye notablemente en el resultado.

6. En $\mathbb{R}^3$ y con el producto escalar ordinario, consideramos el subespacio vectorial
$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\right\}.$$
Determinar una base ortonormal para F.

Solución:

Determinemos una base de F.

$\forall (x, y, z) \in F$ es $z = -x - 2y$, por lo que
$$(x, y, z) = (x, y, -x - 2y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2)$$
luego
$$u_1 = (1, 0, -1), \qquad u_2 = (0, 1, -2),$$
determinan una base de F.

Apliquemos ahora el método de ortonormalización de Gram-Schmidt a estos vectores
$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1),\\ v_2 &= \frac{u_2 - < u_2, v_1 > v_1}{\|u_2 - < u_2, v_1 > v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1). \end{aligned}$$
obteniendo así, una base ortonormal para F.

7. Determinar la matriz de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio F engendrado por los vectores $(1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)$.

Solución:

La matriz es $\Pi_F = XM^{-1}V^t$.
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\Pi_F = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

8. Determinar la matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, del producto escalar euclídeo g, tal que los vectores $u = (1,1)$, $v = (1,2)$ son ortogonales y sus normas son 1, 2, respectivamente.

   Solución:

   Los vectores u y v son linealmente independientes, por lo que son base de $\mathbb{R}^2$. La matriz de g en dicha base es

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   ya que

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{< u, u >} = 1 \\ \|v\| &= \sqrt{< v, v >} = 2 \\ < u, v > &= 0 \end{aligned}$$

   Sea $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base. Entonces si llamamos G a la matriz del producto escalar en la base natural tenemos

$$G_1 = S^t G S$$

   luego

$$G = (S^t)^{-1} G_1 S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

9. Obtener una descomposición QR para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$v_1 = (1, 0, -1, 1)$
$v_2 = (1, 1, 0, 0)$
$v_3 = (0, -1, -1, 0)$

$$\overline{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 1) \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \sqrt{3}\overline{v}_1$$

$$\overline{v}_2 = \frac{v_2 - < v_2, \overline{v}_1 > \overline{v}_1}{\|v_2 - < v_2, \overline{v}_1 > \overline{v}_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \frac{1}{3}\overline{v}_1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\overline{v}_2$$

$$\overline{v}_3 = (0, 0, 0, 0) \quad \Longrightarrow \quad v_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{v}_1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\overline{v}_2$$

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

10. Sea $E = M_n(\mathbb{R})$. Probar que $< A, B >= \text{tr } B^t A$ es un producto escalar euclídeo definido en E. Dar la expresión de $\|A\|$. (tr indica la traza de la matriz).

Solución:

Probemos que $<, >$ es bilineal y simétrico:

Sean $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} < A + B, C > =& \text{ tr}\, C^t(A + B) = \text{tr}\,(C^t A + C^t B) = \text{tr}\, C^t A + \text{tr}\, C^t B = \\ =& < A, C > + < B, C >, \\ < \lambda A, B > =& \text{ tr}\, B^t(\lambda A) = \text{tr}\,(B^t A) = \text{tr}\, B^t A = \\ =& < A, B >, \\ < A, B > =& \text{ tr}\, B^t A = \text{tr}\,(B^t A)^t = \text{tr}\, A^t (B^t)^t = \text{tr}\, A^t B = \\ =& < B, A > . \end{aligned}$$

Veamos ahora que $<,>$ es definido positivo: Sea $A = (a_{ij})$; entonces $A^t = (a_{ji})$ y $A^tA = (\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk})$. Por tanto $< A, A >= \mathrm{tr}(A^tA) = \sum_{ij=1}^n a_{ij}^2$.

Por lo que $< A, A >\geq 0$ y si $< A, A >= 0$, se tiene $\sum_{ij=1}^n a_{ij}^2 = 0$ y $a_{ij}^2 = 0$ para $i, j = 1, \cdots, n$, es decir $a_{ij} = 0$ para $i, j = 1, \cdots, n$, y por tanto $A = 0$.

Calculemos ahora la norma de A:

$\|A\| = \sqrt{< A, A >} = \sqrt{\mathrm{tr}\, A^tA} = \sqrt{\sum_{ij=1}^n a_{ij}^2}$.

Observación 1.8.2. si vemos la matriz A como un vector en $\mathbb{R}^{n^2}$. Esto es, si $A = (a_{ij})$ consideramos $A = (a_{11}, \ldots a_{1n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ la norma considerada coincide con la norma usual de un vector en $\mathbb{R}^{n^2}$.

11. Comprobar que $\{e_i^j\}_{i,j=1,\cdots,3}$ es una base ortonormal de E donde e_i^j es la matriz cuyos elementos son todos nulos salvo el que ocupa la fila j y la columna i, que es 1.

Solución:

Los vectores e_i^j son de norma 1: Sea $A = (a_i^j)$,

$$\|A\| = \sqrt{< A, A >} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} (a_i^j)^2},$$

luego $\|e_i^j\| = \sqrt{1} = 1$.

$\diamond$ e_i^k, y e_k^h con $j \neq h$ ó $i \neq k$ son ortogonales:

$$< e_i^j, e_k^h >= \mathrm{tr}\,(e_k^h)^t e_i^j = \mathrm{tr}\,(e_h^k)^t e_i^j = \mathrm{tr}(0) = 0$$

(si $A = (a_i^j)$; $B = (b_i^j)$, $\Longrightarrow$ $AB = (c_i^j)$, con $c_i^j = \sum_{k=1}^3 a_i^k b_k^j$).

Luego $\{e_i^j\}$ es un conjunto de vectores ortonormales, y puesto que $\mathrm{card}\,\{e_i^j\} = \dim E$, podemos afirmar que este conjunto es una base.

12. Sea $F = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$. Encontrar la proyección ortogonal de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sobre F y $F^\perp$.

Solución:

$F = [(-1,0,3,4),(2,-1,0,0)] = [v_1, v_2]$

$v = (1,0,0,1)$

$$\boxed{\pi_F v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}< v_1, v_1 > & < v_1, v_2 >\\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 >\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}< v, v_1 >\\ < v, v_2 >\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}26 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} = \frac{1}{126}\begin{pmatrix}19\\ 58\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{v = \pi_F v + \pi_{F^\perp} v}$$

13. Sea $F = \left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\right\}$. Hallar G complemento ortogonal de F.

Solución:

$$\begin{aligned}F &= \{(0,a,-a,0), a \in \mathbb{R}\} = [(0,1,-1,0)] = \\ &= \{(x,y,z,t) \mid X = 0, y+z = 0, t = 0\}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}G = [(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)] = \\ = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\end{aligned}}$$

14. Hallar la solución más aproximada por el método de los mínimos cuadrados, del sistema

$$\left.\begin{aligned}x - y &= 15\\ 2x - 2y &= 0\end{aligned}\right\}.$$

Solución:

Con lenguaje matricial el sistema se expresa $A\overline{x} = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

El sistema es incompatible y la matriz A es de rango 1.

Busquemos la proyección ortogonal del vector $(15, 0)$ sobre el subespacio $\operatorname{Im} A = [(1, 2)]$

$$\Pi_{\operatorname{Im} A}(15, 0) = XM^{-1}V^t,$$

siendo

$$\begin{aligned} X &= (<(15,0),(1,2)>) = (15) \\ M &= (<(1,2),(1,2)>) = (5) \\ V^t &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego

$$\Pi_{\operatorname{Im} A}(b) = (3, 6) = \overline{b}^t.$$

Resolvamos ahora el sistema (compatible) $A\overline{x} = \overline{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \iff x - y = 3.$$

De todas las soluciones buscamos la de norma *mínima*, esto es la proyección ortogonal de $(0, 0)$ sobre la recta de soluciones. La podemos hallar intersecando la recta de soluciones con la perpendicular que pasa por el origen.

$$\left. \begin{aligned} x - y = 3 \\ x + y = 0 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right).}$$

15. Determinar la solución aproximada de la relación espacio-tiempo (x, t) de una partícula que se desplaza a velocidad constante con movimiento uniforme del cual se han hecho las mediciones siguientes:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 1 & 1{,}9 & 4{,}1 & 5{,}9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solución:

El movimiento es uniforme $\implies$ relación espacio tiempo es lineal:

$$\boxed{at + b = x \quad \Leftrightarrow \quad (t,1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x}$$

que, con los datos del problema nos queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}9 \\ 4{,}1 \\ 5{,}9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Sistema incompatible; daremos pues una solución *aproximada* del problema:

rango $A = 2 \implies A^tA$ es inversible, por lo que la solución es:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (A^tA)^{-1}A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}9 \\ 4{,}1 \\ 5{,}9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{119{,}6}{114} \\ \\ \frac{151}{114} \end{pmatrix},$$

$$\text{con} \quad A^tA = \begin{pmatrix} 74 & 16 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A^tA)^{-1} = \frac{1}{114}\begin{pmatrix} 5 & -16 \\ -16 & 74 \end{pmatrix}.$$

16. Hallar la solución más aproximada por el método de los mínimos cuadrados, del sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 1 \\ 3x + 3y &= -1 \end{aligned}\right\}.$$

Solución:

Matricialmente el sistema se expresa $A\overline{x} = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

El sistema es incompatible y la matriz A es de rango 1.

Busquemos la proyección ortogonal del vector $(1, 1, -1)$ sobre el subespacio $\operatorname{Im} A = [(1, 2, 3)]$

Observamos que

$$< (1, 2, 3), (1, 1, -1) >= 0$$

luego

$$\Pi_{\operatorname{Im} A} = 0 = \overline{b}.$$

Resolvamos pues, el sistema (compatible)

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \\ 3x + 3y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es

$$x + y = 0.$$

De todas las soluciones queremos la de norma mínima, y esta es $(0, 0)$.

17. Sea $E = \mathbb{R}_2[x]$, el espacio vectorial euclídeo cuyo producto escalar viene determinado por $< P, Q >= \int_0^1 PQ$.

    Se define $D \in \mathcal{L}(E)$ como $D(P) = P'$ polinomio derivado. Determinar la aplicación D' adjunta de D.

    Matriz de D': fijamos la base $\{1,\, x,\, x^2\}$ de E y determinamos las matrices A de D y G de $< \,,\, >$ en esta base.

$$D(1) = 0; \quad D(x) = 1; \quad D(x^2) = 2x, \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

matriz de $< \, , \, >$:

$$\begin{array}{rr} < 1, 1 >= \int_0^1 1 = 1, & < 1, x >= \int_0^1 x = 1/2, \\ < 1, x^2 >= \int_0^1 x^2 = 1/3, & < x, x >= \int_0^1 x^2 = 1/3, \\ < x, x^2 >= \int_0^1 x^3 = 1/4, & < x^2, x^2 >= \int_0^1 x^4 = 1/5. \end{array}$$

Con lo cual $G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, y $G^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$.

$\Longrightarrow$ la matriz de D' es:

$$\boxed{A' = G^{-1} A^t G = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 12 & -24 & -26 \\ 0 & 30 & 30 \end{pmatrix}.}$$

18. Hallar la aplicación adjunta de

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;\; f(x, y, z) = (x + 2y, y + 3z)$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$M_{u,v}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} u = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, 1)\} \\ v = \{(-1, 0, -1), (0, -1, 1), (0, 1, 0)\} \end{array}$$

Solución:

a) Las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ son ortonormales por lo que $G_{\mathbb{R}^3} = I_3$, $G_{\mathbb{R}^2} = I_2$.

La matriz de f en dichas bases es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz A' de f' en estas bases es

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

b) La matriz del producto escalar de $\mathbb{R}^3$ en la base u es

$$G_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz del producto escalar de $\mathbb{R}^3$ en la base v es

$$G_v = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\boxed{A' = G_u^{-1} A^t G_v}$$

19. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ tal que $f(x_i) = y_i$, $1 \leq i \leq 4$ siendo

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = (0,1,1,1) \\ x_2 = (-1,0,1,1) \\ x_3 = (-1,-1,-1,0) \\ x_4 = (-1,-1,-1,0) \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} y_1 = (3,-1,-1,-1) \\ y_2 = (1,-3,-1,-1) \\ y_3 = (-1,-3,-1,1) \\ y_4 = (-3,-1,-1,1) \end{array}\right\}.$$

¿Es f simétrico?

La matriz A de f en bases ortonormales ha de ser simétrica

$$B_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En las bases B_1 y B_2 la matriz de f es la identidad. Luego

$$\boxed{A = S_2^{-1} I S_1}$$

Hay que ver si $A = A^t$.

20. En $\mathbb{R}^3$, determinar la matriz (en la base canónica) de la simetría respecto el subespacio $F = \{(x, y, z) \mid x - z = 0, x - y = 0\}$. Deducir de esta, la matriz de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre F.

Solución:

Determinemos una base ortonormal de F

$$F = [\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)] = [u_1]$$

Completamos esta base a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, dando una base ortonormal de $F^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

$$F^\perp = [\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)] = [u_2, u_3].$$

En la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ la matriz de la simetría es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

En la base canónica la matriz de la simetría es

$$B = SAS^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Observación 1.8.3. S es ortogonal, pues es la expresión en una base ortonormal de una base también ortonormal, luego $S^{-1} = S^t$.

La matriz de la proyección es:

$$\boxed{\Pi_F = \frac{1}{2}(I + A) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

21. Sea A una matriz real simétrica. Demostrar que los valores propios de A, son estrictamente positivos si y sólamente si, existe una matriz inversible N tal que $A = N^t \cdot N$.

Solución:

La matriz A es simétrica, por lo que existe una matriz D diagonal y una matriz S ortogonal, tal que: $A = S^{-1}DS$.

Supongamos ahora que los valores propios son todos estrictamente positivos:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \lambda_i \geq 0$$

Por lo que, existe la matriz

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} +\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & +\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Observación 1.8.4. $(\sqrt{D})^2 = D$. Luego a $\sqrt{D}$ le llamaremos raíz cuadrada de D

Consideremos $\boxed{B = S^{-1}\sqrt{D}S}$

Es tal que

$$B^2 = (S^{-1}\sqrt{D}S)(S^{-1}\sqrt{D}S) \;=\; (S^{-1}\sqrt{D})(SS^{-1})(\sqrt{D}S) =$$
$$= (S^{-1}\sqrt{D})(\sqrt{D}S) \;=\; S^{-1}(\sqrt{D}\sqrt{D})S = S^{-1}DS = A,$$

o sea que:

$$A = (S^{-1}\sqrt{D})(\sqrt{D}S).$$

Llamando $N = \sqrt{D}S$ tenemos que $N^t = (\sqrt{D}S)^t = S^t\sqrt{D}^t = S^{-1}\sqrt{D}$, ya que S es ortogonal y $\sqrt{D}$ diagonal. N es inversible por ser producto de matrices inversibles. Luego existe N inversible con $A = N^t \cdot N$.

Recíprocamente, si $A = N^t \cdot N$, tenemos que A es simétrica ya que:

$$A^t = (N^t \cdot N)^t = N^t \cdot N^{tt} = N^t \cdot N = A;$$

por lo que existe S ortogonal y D diagonal, tal que $A = S^{-1}DS$.

Veamos que los valores propios de A son estrictamente positivos:

Si existe algún valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \leq 0$, por definición de valor propio, existe $v \neq 0\,, v \in \mathbb{R}^n$ con $Av = \lambda v$, entonces,

$$< Av, v >=< \lambda v, v >= \lambda < v, v > \leq 0. \quad \text{(a)}$$

Por ser $A = N^t \cdot N$ tenemos además que

$$< Av, v >=< N^t \cdot Nv, v >=< Nv, Nv > \geq 0. \quad \text{(b)}$$

De (a) y (b) se deduce que $< Nv, Nv >= 0$, por lo que $Nv = 0$, y por ser N inversible es $v = 0$ ¡contradicción!. Luego no puede existir $\lambda \leq 0$.

22. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Probar que existe W triangular superior tal que $A = W^t W$.

Solución:

Si existe, es $W = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$ y

$$A = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$$

esto es

$$\begin{aligned} t_{11}^2 = 2 &\implies t_{11} = \sqrt{2} \\ t_{11}t_{12} = -1 &\implies t_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ t_{11}t_{13} = 0 &\implies t_{13} = 0 \\ t_{12}^2 + t_{22}^2 = 2 &\implies t_{22} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ t_{12}t_{13} + t_{22}t_{23} = -1 &\implies t_{23} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ t_{13}^2 + t_{23}^2 + t_{33}^2 = 2 &\implies t_{33} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{W = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}}$$

Observación 1.8.5. Si la matriz dada es real simétrica y definida positiva, podemos asegurar que existe la *descomposición de Cholesky* de dicha matriz.

23. a) Sea $(E,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y sea f un automorfismo de E. Probar que f puede descomponerse de la forma $f = h \circ g$ con g automorfismo simétrico y h ortogonal.

b) Expresar la matriz A como producto de una matriz simétrica por una de ortogonal, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) Consideremos $\Phi = f' \circ f$. Es un automorfismo simétrico pues:

$$\Phi' = (f' \circ f)' = f' \circ f'' = f' \circ f = \Phi.$$

y de valores propios positivos pues, sea x un vector propio de Φ de valor propio λ. Entonces:

$$\begin{array}{l} <\Phi(x), x> = <(f' \circ f)(x), x> = <f'(f(x)), x> = <f(x), f(x)> \\ <\Phi(x), x> = <\lambda x, x> = \lambda <x, x> . \end{array}$$

Puesto que $x \neq 0$ es $<x, x>> 0$. Al ser f automorfismo si $x \neq 0$ es $f(x) \neq 0$. Luego $<f(x), f(x)>> 0$.

Por lo que

$$<f(x), f(x)> = \lambda <x, x>> 0$$

De donde se deduce que $\lambda > 0$.

Sea $\{u_1, \cdots, u_n\}$ una base ortonormal de vectores propios de Φ (existe por ser Φ simétrica) y sea $g \in Aut(E)$ definido de la forma

$$g(u_i) = +\sqrt{\lambda_i} u_i.$$

Los valores $\sqrt{\lambda_i}$ reciben el nombre de *valores singulares* de la aplicación f.

$g^2 = \Phi$ ya que:

$$g^2(u_i) = g(g(u_i)) = g(\sqrt{\lambda}_i u_i) = \sqrt{\lambda}_i g(u_i) = \sqrt{\lambda}_i \sqrt{\lambda}_i u_i = \lambda_i u_i = \Phi(u_i).$$

La aplicación g es simétrica ya que su matriz en una base ortonormal es simétrica, por lo que g^{-1} también es simétrica.

Definimos

$$\boxed{h = f \circ g^{-1}}$$

La aplicación h es *ortogonal*; en efecto:

$$\begin{aligned} h' \circ h = (f \circ g^{-1})' \circ (f \circ g^{-1}) = ((g^{-1}) \circ f) \circ (f \circ g^{-1}) = \\ = g^{-1} \circ \Phi \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g^2 \circ g^{-1} = g^{-1} \circ (g \circ g) \circ g^{-1} = I \circ I = Id \end{aligned}$$

Luego $h' = h^{-1}$.

De hecho el resultado es general ya que si $\operatorname{Ker} f$ es invariante por f también lo es $(\operatorname{Ker} f)^\perp$, lo que permite construir h tal que $h_{\operatorname{Ker} f} = I$ y $h_{(\operatorname{Ker} f)^\perp} = f_{(\operatorname{Ker} f)^\perp} \circ (g_{\operatorname{Ker} f)^\perp})^{-1}$.

b) A es la matriz de un automorfismo f de $\mathbb{R}^2$ en la base natural, descompondremos pues f como en el apartado a) y escribiremos las matrices de g y h en la base natural que nos proporcionarán la descomposición de la matriz A.

Puesto que la base natural es ortonormal la matriz de f' en dicha base es A^t.

La Matriz de $\Phi = f' \circ f$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

La aplicación Φ diagonaliza en la base natural por lo que, las matrices de g y g^{-1} en dicha base son respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz de h es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la matriz A nos queda descompuesta de la forma:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.}$$

24. Determinar la descomposición espectral del endomorfismo f cuya matriz en la base natural de $\mathbb{R}^3$ es

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad b \neq 0.$$

Solución:

f es diagonalizable (su matriz en una base ortonormal es simétrica).

El polinomio característico de A es:

$$\det(A - tI) = -(t - (a - b))^2(t - (a + 2b)).$$

Por lo que tenemos:

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(A - (a - b)I) \perp \operatorname{Ker}(A - (a + 2b)I). \quad \text{(a)}$$

Sean π_1 y π_2 las proyecciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ sobre $\operatorname{Ker}(A-(a-b)I)$ y $\operatorname{Ker}(A - (a + 2b)I)$ respectivamente.

Entonces:

$$\boxed{f = (a - b)\pi_1 + (a + 2b)\pi_2.}$$

En efecto, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, tenemos (por (a)) que $x = x_1 + x_2$ con

$$x_1 \in \operatorname{Ker}(A-(a-b)I)\,,\ x_2 \in \operatorname{Ker}(A-(a+2b)I),$$

y se tiene que $\pi_i(x) = x_i$, entonces:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2) = (a-b)x_1+(a+2b)x_2 = \\ = (a-b)\pi_1(x)+(a+2b)\pi_2(x) = ((a-b)\pi_1+(a+2b)\pi_2)x. \end{aligned}$$

25. Sean $f, g \in \mathcal{L}(E)$, siendo E un espacio vectorial euclídeo, tales que $\forall x \in E$, se tiene $\|f(x)\| = \|g(x)\|$.

    a) Demostrar que $f' \circ f = g' \circ g$.
    b) Demostrar que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$,
    c) Sea f biyectiva. Probar que existe $h \in O(E)$ tal que $g = h \circ f$.

Solución:

a) Sabemos que $< f(x), f(x) >=< g(x), g(x) >$, $\forall x \in E$, entonces

$$< (f' \circ f)(x), x >=< (g' \circ g)(x), x > \ \ \forall x \in E$$

(ó equivalentemente $< ((f' \circ f) - (g' \circ g))x, x >= 0$, $\forall x \in E$).

Puesto que el producto escalar es definido positivo:

$$((f' \circ f) - (g' \circ g))(x) = 0,\ \forall x \in E$$

de donde: $(f' \circ f)(x) = (g' \circ g)(x)$, $\ \forall x \in E$, $\iff$ $f' \circ f = g' \circ g$.

b) $$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0 \iff \|f(x)\| = 0 \iff \\ \|g(x)\| = 0 \iff g(x) =, 0 \iff x \in \operatorname{Ker} g. \end{aligned}$$

c) Si f es biyectiva y existe h, esta ha de ser $\boxed{h = g \circ f^{-1}}$.

Veamos si h así definida es ortogonal:

$$\begin{aligned}
&< g\circ f^{-1}(x), g\circ f^{-1}(x) >= \\
&= < f^{-1}(x), g\prime \circ g\circ f^{-1}(x) >=< f^{-1}(x), f\prime \circ f \circ f^{-1}(x) >= \\
&= < f^{-1}(x), f\prime(x) >=< f\prime\prime \circ f^{-1}(x), x >= \\
&= < f\circ f^{-1}(x), x >=< x, x >,
\end{aligned}$$

luego $g\circ f^{-1}$ conserva la norma, es decir es ortogonal.

26. Sea E_3 el espacio vectorial euclídeo ordinario referido a la base natural. Se considera la rotación f de eje el subespacio generado por $v = (1, -1, 1)$ y tal que $f(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$. Hallar las ecuaciones de rotación.

Solución:

El eje es el subespacio de vectores propios de valor propio 1, y sabemos que el subespacio ortogonal es también invariante por f. Consideramos la base de E_3 siguiente

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), \\
v_2 &= (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 2\frac{\sqrt{6}}{6}), \\
v_3 &= (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{v}{\|v\|},
\end{aligned}\right\}$$

que es ortonormal.

En esta base la matriz de la rotación es

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que $f(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$, veamos como se expresan los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ en la nueva base. La matriz cambio de base es

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 2\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 2\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} (1,0,0) &= \frac{\sqrt{2}}{2}v_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}v_3 \\ (0,0,1) &= 2\frac{\sqrt{6}}{6}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}v_3 \end{aligned}$$

haciendo $f(\frac{\sqrt{2}}{2}v_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}v_3) = (0v_1 + 2\frac{\sqrt{6}}{6}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}v_3)$, tenemos que

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{sen}\theta = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\theta = 2\frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}\right\}$$

resolviendo el sistema tenemos que la solución es

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Luego la matriz de la rotación en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ es

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la base natural se expresará:

$$SMS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que las ecuaciones de la rotación son:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x' = -y \\ y' = -z \\ z' = x \end{array}\right\}.$$

27. Estudiar la transformación definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(2x + y - 2z) \\ y' = \dfrac{1}{3}(x + 2y + 2z) \\ z' = \dfrac{1}{3}(-2x + 2y - z). \end{cases}$$

Dar sus elementos característicos.

La matriz M en la base natural de $\mathbb{R}^3$, de dicha transformación es

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matriz simétrica en una base ortonormal, luego es la matriz de un endomorfismo simétrico y $\det(M - I) = -(t-1)^2(t+1)$, por lo que es también, un endomorfismo ortogonal;

Dicha aplicación es pues, una simetría ortogonal respecto al plano de vectores propios de valor propio 1.

Busquemos el plano de simetría $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(M - I)$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,(M - I) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}.$$

Escojamos una base ortonormal de $\mathrm{Ker}\,(M - I)$:

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0) \\ v_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,-1) \end{cases}$$

La dirección de la simetría es $\operatorname{Ker}(M+I) = \operatorname{Ker}(M-I)^{\perp}$, luego

$$\operatorname{Ker}(M+I) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ x-y-z=0\}.$$

Sea $v_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1,-1,2)$ una base de $\operatorname{Ker}(M+I)$.

Notamos que en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ la transformación tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

28. Sea E un espacio vectorial euclídeo de dimensión tres tal que en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, la matriz del producto escalar es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sea $F = \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid x_1 = -x_3 = x_2\}$; y consideremos $f \in End(E)$, tal que $\forall v \in E, f(v) = u - w$, siendo $v = u + w$ con $u \in F$, $w \in F^{\perp}$. ¿Es f ortogonal?

Solución:

Tenemos que comprobar si $\|f(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in E$.

Para ello expresaremos la matriz del producto escalar en una cierta base

$\{u_1, u_2, u_3\}$, escogida de forma que $u_1 \in F$ y $u_2, u_3 \in F^{\perp}$.

$$\begin{aligned} F &= \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid x_1 = -x_3 = x_2\} = \\ &= [e_1 + e_2 - e_3] = [(1,1,-1)], \end{aligned}$$

por lo tanto $F^\perp = \{x \in E \mid < x, y >= 0, \forall y \in F\}$,

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} F^\perp = \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid x_1 + x_2 = 0\} = \\ = [e_1 - e_2, e_3] = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)], \end{array}$$

luego

$$\overline{G} = S^tGS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

siendo

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Sea $v \in E$, $v = \lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + \lambda_3u_3$, luego $f(v) = \lambda_1u_1 - \lambda_2u_2 - \lambda_3u_3$ y

$$\begin{aligned} < v, v > &= v^t\overline{G}v = 2\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 3\lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3 \\ < f(v), f(v) > &= f^t(v)\overline{G}f(v) = 2\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 3\lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

Por lo que f es ortogonal.

Observación 1.8.6. *$f^2(v) = f(u - w) = u + w = v. \Longrightarrow \ f^2 = I, \Longleftrightarrow f = f^{-1}$; y puesto que f ortogonal se tiene $f^{-1} = f'$.*

Por lo que tenemos que $f = f'$ y f es también simétrico.

29. Sean u, v dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ y f el endomorfismo definido por

$$f(x) = u \wedge (v \wedge x) + v \wedge (u \wedge x)$$

a) Calcular $\det f$.

b) Determinar los vectores y valores propios de f.

Solución:

a) Escojamos como base de $\mathbb{R}^3$ la $\{u, v, u \wedge v\}$

Recordemos que

$$\boxed{\begin{array}{l} (x \wedge y) \wedge z = < x, z > y - < y, z > x \\ < x \wedge y, z > = \det(x, y, z) \\ < u, v >^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} f(u) &= - < v, u > u + < u, u > v \\ f(v) &= < v, v > u - < u, v > v \\ f(u \wedge v) &= -2 < u, v > \end{aligned}$$

Luego

$$\det f = \begin{vmatrix} - < u, v > & < v, v > & 0 \\ < u, u > & - < u, v > & 0 \\ 0 & 0 & -2 < u, v > \end{vmatrix} = -\|u \wedge v\|^2(-2 < u, v >)$$

b)

$$\begin{aligned} &\det(f - \lambda I) = \\ &= (\lambda^2 + 2 < u, v > \lambda + < u, v >^2 - \|u\|^2 \|v\|^2)(-2 < u, v > - \lambda) = \\ &= (- < u, v > + \|u\| \|v\| \lambda)(- < u, v > - \|u\| \|v\| \lambda)(-2 < u, v > - \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= (\|v\|, \|u\|, 0) = \|v\| u + \|u\| v \\ u_2 &= (\|v\|, -\|u\|, 0) = \|v\| u - \|u\| v \\ u_3 &= (0, 0, 1) = u \wedge v \end{aligned}$$

30. Sean g_1 y g_2 dos rotaciones de ángulos α y β respectivamente y de ejes perpendiculares. Determinar $g_1 \circ g_2$.

Solución:

Puesto que g_1 y g_2 son rotaciones $g_1 \circ g_2$ también lo es, para ello basta observar que

$$\|(g_1 \circ g_2)(x)\| = \|g_1(g_2(x))\| = \|g_2(x)\| = \|x\|,$$

luego es ortogonal y además

$$\det(g_1 \circ g_2) = \det g_1 \cdot \det g_2 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Determinemos su eje de rotación y su ángulo. Para ello describamos matricialmente las aplicaciones g_i.

Consideremos la base de $\mathbb{R}^3$ siguiente

e_1 vector director normalizado del eje de giro de g_1,

e_2 vector director normalizado del eje de giro de g_2

$e_3 = e_1 \wedge e_2$.

Por hipótesis e_1 y e_2 son ortogonales luego esta base es ortonormal.

En esta base la matriz de g_1 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de g_2 en esta base primero la calculamos en la base

$u_1 = e_2$,

$u_2 = e_1$,

$u_3 = u_1 \wedge u_2 = -e_3$.

En dicha base es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz de g_2 en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

La matriz de la composición en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es pues

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha \operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}.$$

El eje de giro es el subespacio de vectores propios de valor propio 1:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta - 1 & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta & \cos\alpha - 1 & -\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha \operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\cos\beta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

y el ángulo de giro lo obtenemos a través de la traza de la matriz

$$1 + 2\cos\varphi = \cos\beta + \cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta.$$

Capítulo 2

Formas bilineales y cuadráticas

2.1. Formas bilineales

Definición 2.1.1. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Una forma bilineal es una aplicación

$$\begin{aligned} f : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow f(u, v) \end{aligned}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v), \ \forall u_1, u_2, v \in E$
2. $f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v)$, $\forall u \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2) \ \ \forall u, v_1, v_2 \in E$
4. $f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v), \ \forall u, v \in E$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

es decir, una aplicación $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal si es lineal en cada una de sus componentes.

Ejemplo 2.1.1. 1. Un producto escalar euclídeo sobre un espacio vectorial es una forma bilineal

2. En $\mathbb{R}^2$, la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2$$

es una forma bilineal.

Proposición 2.1.1. *Sea $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal sobre E. Entonces*

$$f(u,0) = f(0,u) = 0, \ \forall u \in E$$

Definición 2.1.2. i) Una forma bilineal $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ es simétrica si

$$f(x,y) = f(y,x), \ \forall x, y \in E$$

ii) Una forma bilineal $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ es antisimétrica o alternada si

$$f(x,y) = -f(y,x), \forall x, y \in E$$

Ejemplo 2.1.2. i) La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x,y) = x_2 y_1 1 + x_1 y_2 +$ es una forma bilineal simétrica.
ii) La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 3x_1y_2 - 3x_2y_1$ es alternada o antisimétrica.

Proposición 2.1.2. *Toda forma bilineal antisimétrica verifica que*

$$f(x,x) = 0, \ \forall x \in E$$

2.1.1. Expresión matricial de una forma bilineal

Supongamos ahora que el espacio vectorial E sobre el que tenemos definida una forma bilineal, es de dimensión finita. Veamos a continuación, como si seleccionamos una base en E podemos expresar matricialmente la forma bilineal.
Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E. Para toda pareja de vectores $x, y \in E$ tenemos $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ y $y = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$
Entonces utilizando las propiedades de la forma bilineal tenemos

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\sum_{j=1}^{n} \mu_j f(e_i, e_j)) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \mu_j f(e_i, e_j)$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) & \ldots & f(e_1,e_n) \\ f(e_2,e_1 & f(e_2,e_2 & \ldots & f(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(e_n,e_1) & f(e_n,e_2) & \ldots & f(e_n,e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Definición 2.1.3. dada una forma bilineal f definida sobre un espacio E de dimensión finita n Llamaremos matriz de la forma bilineal f en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \ldots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1 & f(e_2, e_2 & \ldots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \ldots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

y si expresamos los vectores x e y en forma matricial respecto la base $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \mu_1 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix}$ escribiremos la forma bilineal en la forma matricial:

$$f(x, y) = X^t A Y$$

Observación 2.1.1. Si la forma bilineal es simétrica (antisimétrica) la matriz asociada es simétrica (antisimétrica).

Ejemplo 2.1.3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f((1,0),(1,0)) &= 1 \\ f((1,0),(0,1)) &= 1 \\ f((0,1),(1,0)) &= -1 \\ f((0,1),(0,1)) &= 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Equivalencia de formas bilineales

Sea ahora $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una nueva base de E, y sea S la matriz de cambio de base por lo que la relación entre los vectores x e y expresados en la base de partida X e Y y su expresión X' e Y' en la nueva base viene dada por $X = SX'$ y $Y = SY'$

Por lo que

$$f(x,y) = (SX')^t A(SY') = (X'^t S^t)A(SY') = X'^t(S^t AS)Y'$$

Por lo tanto la matriz de la forma bilineal en la nueva base es

$$B = S^t AS$$

Esta relación nos permite definir la siguiente relación de equivalencia

Definición 2.1.4. $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ se dice que son congruentes si existe $S \in M_n(\mathbb{R})$ invertible tal que

$$A = S^t AS$$

Proposición 2.1.3. *Dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ son congruentes si y sólo si representan una misma forma bilineal.*

2.2. Formas cuadráticas

Definición 2.2.1. Sea $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica definida sobre el espacio vectorial E. Llamaremos *forma cuadrática* asociada a f a la aplicación

$$\begin{aligned} Q_f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow Q_f(x) = f(x,x). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.1. En $\mathbb{R}^3$ consideremos la forma bilineal $f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_2y_1 + x_3y_2$. La forma cuadrática asociada es

$$Q_f(x) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

2.2.1. Expresión matricial de una forma cuadrática. Cambios de base

Sea $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática asociada a una forma bilineal simétrica $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $\{e_1, \ldots v_n\}$ base de E, como que la forma bilineal f es simétrica tenemos que $f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i)$. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} Q(x) &= f(x,x) = \\ & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) & \dots & f(e_1,e_n) \\ f(e_2,e_1 & f(e_2,e_2 & \dots & f(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(e_n,e_1) & f(e_n,e_2) & \dots & f(e_n,e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) & \dots & f(e_1,e_n) \\ f(e_1,e_2 & f(e_2,e_2 & \dots & f(e_n,e_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(e_n,e_1) & f(e_n,e_2) & \dots & f(e_n,e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definición 2.2.2. Sea E un espacio vectorial f una forma bilineal simétrica y sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de E. Llamaremos matriz de la forma cuadrática en la base dada, a la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) & \dots & f(e_1,e_n) \\ f(e_1,e_2 & f(e_2,e_2 & \dots & f(e_n,e_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(e_n,e_1) & f(e_n,e_2) & \dots & f(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

asociada a la forma bilineal f.

Observación 2.2.1. A partir de la forma cuadrática se puede conocer la forma bilineal simétrica de la cual procede. En efecto.
Supongamos conocida la forma cuadrática

$$Q(x) = f(x,x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j$$

Entonces

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \dots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \dots & \frac{1}{2}a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{1n} & \frac{1}{2}a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Por lo que claramente, la forma bilineal

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \dots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \dots & \frac{1}{2}a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{1n} & \frac{1}{2}a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

tiene por forma cuadrática asociada la dada.

Ejemplo 2.2.2. Hallar la matriz asociada a $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

en la base canónica.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Al igual que para las formas bilineales, nos preguntamos como cabia la matriz de una forma cuadrática al cambiar de base.

Sea ahora $\{u_1, \dots, u_n\}$ una nueva base de E, y sea S la matriz de cambio de base por lo que la relación entre el vector x expresado en la base de partida X y su expresión X' en la nueva base viene dada por $X = SX'$

Por lo que

$$Q(x) = f(x,x) = (SX')^t A(SX') = (X'^t S^t)A(SX') = X'^t(S^t AS)X'$$

Por lo tanto la matriz de la forma bilineal en la nueva base es

$$B = S^t AS$$

Esta relación nos induce a buscar bases para las cuales, la matriz de la forma cuadrática es suficientemente sencilla de manera que por simple observación se puedan deducir sus propiedades

Ejemplo 2.2.3. Sea la forma cuadrática cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $\{(1, -2), (0, 1)\}$ una nueva base.

En dicha base la matriz de la forma cuadrática es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que la forma bilineal asociada a dicha forma cuadrática es un producto escalar euclídeo.

Por lo tanto, proponemos buscar maneras de reducir a una forma sencilla la matriz de una forma cuadrática dada.

2.2.2. Reducción de formas cuadráticas

i) Método de Gauss

Sea $q(x) = \sum a_{ij}x_ix_j = x^tAx$ en una base $B = \{u_i, \dots, u_n\}$

1) Si $a_{11} \neq 0$ hacemos el cambio de base $x = x^1u_1 + \ldots + x^nu_n = y^1u_1 + \ldots + y^nu_n$ siguiente :

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

con este cambio queda

$$\overline{A} = S^tAS = \frac{1}{a_{11}} \begin{pmatrix} (a_{11})^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si $a_{11} = 0$ pero existe $a_{ii} \neq 0$, hacemos el cambio

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \frac{-a_{i1}}{a_{ii}} & \frac{-a_{i2}}{a_{ii}} & \dots & \frac{-a_{in}}{a_{ii}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

2) Si $a_{ii} = 0 \ \forall i$, pero por ejemplo $a_{12} \neq 0$ hacemos

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ x_3 &= y_3 \\ \vdots &= \vdots \\ x_n &= y_n \end{aligned}$$

y pasamos al caso anterior.
Si es $a_{ij} \neq 0$ hacemos

$$\left.\begin{aligned} x_i &= y_i + y_j \\ x_j &= y_i - y_j \end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad x_k = y_k \quad \forall k \neq i, j$$

3) Consideramos la matriz B y seguimos el mismo procedimiento y así sucesivamente hasta conseguir que toda la matriz sea diagonal.

Observación 2.2.2. En la práctica el procedimiento consiste en "completar cuadrados" del modo siguiente:
Se forma un cuadrado de modo que, al desarrollarlo, aparezcan (entre otros) todos los términos donde aparece la "x". Los términos introducidos los compensaremos restando.
Se hace lo mismo para la "y", etc.

ii) Método de la congruencia pivote
Dada una matriz A, simétrica (matriz asociada a la forma cuadrática) pretendemos hallar S tal que $S^t AS = D$, con D matriz diagonal y S inversible.
Si S es inversible, será el producto de matrices elementales (recordar que una matriz elemental es la matriz resultante de hacer una sola transformación elemental de columna a la matriz identidad). $S = E_p \dots E_2 E_1$ y por lo tanto $S^t = (E_p \dots E_1)^t = E_1^t \dots E_p^t$.
Si E_1 es una matriz elemental asociada a una transformación elemental de columna, E_1^t es una matriz elemental asociada a una transformación elemental de fila (homóloga a E_1) se tiene que:

$$D = E_1^t E_2^t \dots E_p^t A E_p \dots E_2 E_1$$

puesto que A es simétrica, para diagonalizarla habrá que efectuar sobre ella las mismas transformaciones elementales de fila que de columna. Si consideramos la matriz $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$ y hacemos

$$S^t \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & \\ & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & S^t \end{pmatrix}$$

tenemos que si efectuamos sobre I las mismas transformaciones elementales efectuadas sobre A obtenemos S^t.

iii) Método endomorfismo asociado
Toda matriz $A \in M_n(R)$ simétrica, es equivalente a una matriz diagonal. Basta asociar a la matriz A el endomorfismo simétrico $\varphi = A_\varphi$ de $\mathbb{R}^n$, definido por $\varphi(x) =< \varphi(x), x >= x^t Ax$. Por el teorema espectral de los endomorfismos simétricos existe en $\mathbb{R}^n$ una base ortonormal de vectores propios de φ, es decir $D = S^{-1}AS$ con D diagonal.
La matriz S es ortogonal ya que es la matriz de cambio de base de una base ortonormal a otra base ortonormal, por lo que $S^t = S^{-1}$.
Por lo tanto

$$D = S^{-1}AS = S^tAS$$

por lo que A y D son equivalentes como formas cuadráticas.

2.3. Ley de inercia

Sea $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática sobre un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E tal que la matriz de Q sea diagonal (sabemos que existe por el apartado anterior). Es decir

$$\begin{pmatrix} Q(e_1) & 0 & & \\ 0 & Q(e_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q(e_n) \end{pmatrix}$$

Supongamos la base ordenada de manera que

$$\left.\begin{array}{l} Q(e_i) > 0 \ 1 \leq i \leq r \\ Q(e_j) < 0 \ r+1 \leq j \leq s \\ Q(e_p) = 0 \ s+1 \leq p \leq n \end{array}\right\}$$

Observación 2.3.1. Siempre podemos hacer el cambio de base que consiste en reordenar la base $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, e_{i_{r+1}}, \ldots, e_{i_s}, v_{i_{s+1}}, \ldots v_{i_n}\}$.

Si tomamos ahora la base

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{Q(e_1)}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{Q(e_r)}}, \frac{1}{\sqrt{|Q(e_{r+1})|}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{|Q(e_s)|}}, e_{s+1}, \ldots, e_n\right\}$$

la matriz de la forma cuadrática en esta base es

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \overset{s)}{\ddots} & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \overset{r)}{\ddots} & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \overset{n-s-r}{\ddots} & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Esta representación matricial de Q recibe el nombre de *matriz canónica* de la forma cuadrática.

Proposición 2.3.1 (Ley de la inercia de las formas cuadráticas)**.** *Si una forma cuadrática se reduce a la suma de cuadrados en dos bases diferentes, el número de términos positivos y negativos es el mismo en ambos casos.*

Definición 2.3.1. Llamamos *índice de positividad* al número de términos positivos de la forma cuadrática diagonalizada, r, *índice de negatividad* al número de términos negativos de la forma cuadrática diagonalizada, s, e *índice de nulidad* al número de términos nulos de la forma cuadrática diagonalizada, $n - r - s$. El par (r, s) recibe el nombre de *signatura de la forma cuadrática.*

Corolario 2.3.1. Dos matrices simétricas congruentes siempre tienen la misma signatura.

Definición 2.3.2. i) Decimos que una forma cuadrática Q es definida positiva si $Q(x) > 0$, $\forall x \in E$

ii) Decimos que una forma cuadrática Q es definida negativa si $Q(x) < 0$, $\forall x \in E$

iii) Diremos que una forma cuadrática Q no es definida en signo si exis ten vectores x e $y \in E$ $Q(x) > 0$,

iv) Diremos que una forma cuadrática Q es semidefinida positiva si $Q(x) \geq 0$, $\forall x \in E$

v) Diremos que una forma cuadrática es Q semidefinida negativa si $Q(x) \leq 0$, $\forall x \in E$

vi) Diremos que una forma cuadrática es Q no degenerada si $Q(x) \neq 0$, $\forall x \in E$

Proposición 2.3.2. *i) Una forma cuadrática es definida positiva si* $r = n$

ii) Una forma cuadrática es definida negativa si $s = n$

iii) Una forma cuadrática no es definida en signo si $r, s \leq 0$

iv) Una forma cuadrática es semidefinida positiva si $r < n$, $s = 0$

v) Una forma cuadrática es semidefinida negativa si $s < n$, $r = 0$

vi) Una forma cuadrática es no degenerada si $r + s = n$

Teorema 2.3.1 (Teorema de Sylvester)**.** *Sea* $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *una forma cuadrática. Entonces* f *es definida positiva si y sólo si la matriz* $A = (a_{ij})$ *de* Q *en cualquier base de* E*, verifica que*

$$\delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

es decir, que sean positivos todos los menores principales de la matriz $A = (aij)$*.*

Corolario 2.3.2. Sea $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces f es definida negativa si y sólo si la matriz $A = (aij)$ de Q, en cualquier base de E, verifica que

$$\delta_{2i-1} < 0 \quad \text{y} \quad \delta_{2i} > 0 \ \forall 1 \leq i \leq n$$

es decir, si los menores principales van alternando de signo empezando por el signo negativo.

Observación 2.3.2. Debido a que dada una forma cuadrática Q definida sobre un espacio vectorial E de dimensión finita, existe una base en la cual la matriz es diagonal, tenemos que existe una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ para la cual

$$f(e_i, e_j) = 0$$

lo que nos permite definir ortogonalidad de vectores respecto la forma bilineal y escoger bases ortogonales.
Por dicho motivo a menudo a las formas bilineales simétricas se las denomina *métricas ortogonales*.

2.4. Valores extremales

Teorema 2.4.1. *El valor máximo que una forma cuadrática toma sobre la esfera unidad es el valor propio máximo de A.*

Demostración. En efecto, consideremos una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ para la cual la matriz A diagonaliza

$$D = S^t A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Podemos suponer que los valores propios están ordenados en orden decreciente,

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$$

Para todo vector x sobre la esfera unidad (esto es $\|x\| = 1$) se tiene

$$x = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

y

$$q(x) = \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} =$$
$$= \lambda_1 \mu_1^2 + \dots + \lambda_n \mu_n^2 \leq \lambda_1(\mu_1^2 + \dots + \mu_n^2) = \lambda_1.$$

□

Observación 2.4.1. Análogamente vemos que el valor *mínimo* que puede alcanzar la forma cuadrática sobre la esfera unidad es el valor propio mínimo pues

$$q(x) = \lambda_1 \mu_1^2 + \dots + \lambda_n \mu_n^2 \geq \lambda_n(\mu_1^2 + \dots + \mu_n^2) = \lambda_n.$$

2.5. Ejercicios resueltos

1. Dada la forma cuadrática definida en $\mathbf{R}^3$ de la siguiente forma

$$q(x, y, z) = 2x^2 - 8xy + y^2 - 16xz + 46yz + 5z^2.$$

Obtener una forma reducida mediante:

a) Método de Gauss.

b) Método de la congruencia pivote.

Solución:

a) $q(x, y, z) = (2x^2 - 8xy - 16xz) + y^2 + 46yz + 5z^2 =$
$$= 2(x^2 - 4xy - 8xz) + y^2 + 46yz + 5z^2 =$$
$$= 2(x - 2y - 4z)^2 - 8y^2 - 32z^2 - 32yz + y^2 + 46yz + 5z^2 =$$
$$= 2(x - 2y - 4z)^2 - 7y^2 - 27z^2 + 14yz =$$
$$= 2(x - 2y - 4z)^2 - 7(y^2 - 2yz) - 27z^2 =$$
$$= 2(x - 2y - 4z)^2 - 7(y - z)^2 + 7z^2 - 27z^2 =$$
$$= 2(x - 2y - 4z)^2 - 7(y - z)^2 - 20z^2 =$$
$$= \boxed{2(\overline{x})^2 - 7(\overline{y})^2 - 20(\overline{z})^2.}$$

$$\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\\ \overline{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) $$A = \begin{pmatrix}2 & -4 & -8\\ -8 & 1 & 23\\ -8 & 23 & 5\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -4 & -8 & 1 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 23 & 0 & 1 & 0\\ -8 & 23 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \underset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -4 & -8 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & -27 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 7 & -27 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 7 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 7 & -27 & 4 & 0 & 1\end{array}\right) \underset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 7 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -20 & 6 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{(4)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -20 & 6 & 1 & 1\end{array}\right)$$

(1) Cambiamos la segunda fila por la suma de la segunda más dos veces la primera y la tercera fila por la suma de la tercera más cuatro veces la primera.

(2) Sustituimos la segunda columna de la nueva matriz por la segunda más dos veces la primera y la tercera por la tercera más cuatro veces la primera.

(3) Cambiamos la tercera fila por la segunda más la tercera.

(4) Cambiamos la tercera columna por la segunda más la tercera.

Luego

$$\boxed{S^t = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 6 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 0\\ 0 & 0 & -20\end{pmatrix},}$$

y en esta nueva base

$$\boxed{q(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = 2\overline{x}^2 - 7\overline{y}^2 - 20\overline{z}^2.}$$

2. Reducir, por el método del endomorfismo asociado, la forma cuadrática definida en $\mathbf{R}^3$ siguiente:

$$q(x,y,z) = 2x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2y^2 + 2z^2.$$

Solución:

Calculemos los valores propios de A, para ello

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = -(t-1)^2(t-4),$$

luego

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\boxed{q(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \overline{x}^2 + \overline{y}^2 + 4\overline{z}^2}$$

Determinemos S:

$$v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\,(A - I) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

y los escogemos *ortonormales*:

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0\right), \qquad v_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right),$$

$$\begin{aligned} v_3 \in &\mathrm{Ker}(A - 4I) = \mathrm{Ker}(A - I)^{\perp} = \\ &= \{(x,y,z) \mid <(x,y,z),(1,1,1)>= 0\}^{\perp} = [(1,1,1)], \end{aligned}$$

que *normalizando* obtenemos $v_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

$$\Longrightarrow \quad S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{-\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S^t AS = D.$$

3. a) Estudiar si la forma cuadrática $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^2 + 2yz + z^2 + 2xz$ es o nó un prducto escalar euclídeo.

   b) Idem para $q(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2xz$.

   c) Idem para $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4xz + y^2 + 2yz + z^2$.

   Solución:

   Matriz de q:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Esta matriz no tiene rango máximo. Por lo tanto q *no* define un producto escalar euclídeo.

   b) Matriz de q:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   los elementos de la diagonal de la matriz no son positivos. Por lo que q *no* define un producto escalar euclídeo.

   c) Matriz de q:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando el teorema de inercia de Sylvester.

$\delta_1 = 1 > 1$, $\delta_2 = 0$. Por lo tanto *no* es un producto escalar euclídeo.

4. En $\mathbb{R}^3$ consideremos la forma cuadrática definida de la forma $\varphi(x) = 2x^2 - y^2 + z^2$ Determinar la matriz de φ en la base de $\mathbb{R}^3$ siguiente

   a) $\{(1,1,1),(1,-1,1),(1,0,-1)\}$,

   b) $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$,

   ¿Son φ-ortogonales dichas bases?

   Solución:

   La matriz de φ en la base *canónica* es $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) La matriz de cambio de base es $\quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\Longrightarrow A_1 = S^tAS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   b) La matriz de cambio de base es $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\Longrightarrow A_1 = S^tAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las bases a) y b) *no* son φ-ortogonales ya que las matrices de la forma cuadrática en dichas bases *no* son diagonales.

5. Sean

$$\begin{aligned} q_1(x,y,z) &= 2x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 - 2yz + 2z^2 \\ q_2(x,y,z) &= x^2 + 2xz + y^2 + z^2 \\ q_3(x,y,z) &= x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 4yz + 3z^2. \end{aligned}$$

¿Son equivalentes?

Solución:

Las matrices de las formas cuadráticas dadas en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, son respectivamente

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz A_1 son 3, 3, 0. Luego q_1 es una forma cuadrática semidefinida positiva de rango 2.

Los valores propios de la matriz A_2 son 1, 2, 0. Luego al igual que q_1, q_2 es una forma cuadrática semidefinida positiva de rango 2, por lo que son equivalentes.

Puesto que $\det A_3 \neq 0$, los valores propios de A_3 son los tres distintos de cero luego q_3 no puede ser equivalente a q_1 ni a q_2.

6. En $\mathbb{R}^3$ consideremos la forma bilineal siguiente

$$\varphi(u,v) = 2x_1x_2 - y_1y_2 + z_1z_2$$

siendo $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$.

a) Determinar la matriz de φ en la base natural de $\mathbb{R}^3$

b) Determinar la matriz de φ en la base $\{(1,2,6),(0,1,1),(0,0,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

c) Sea $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$ determinar $G = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(u,v) = 0 \, \forall v \in F\} (= F^{\perp_\varphi})$.

d) Determinar $\operatorname{Ker} \varphi$.

Solución:

a) La matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, de la forma cuadrática es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) La matriz de cambio de base es

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

luego

$$\begin{aligned} A_1 = S^tAS &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 34 & 4 & 18 \\ 4 & 0 & 3 \\ 18 & 3 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Busquemos una base de F

$$F = [(1,0,0),(0,1,1)] = [u,v]$$

luego

$$F^{\perp_\varphi} = \{x \in E \mid \varphi(x,u) = \varphi(x,v) = 0\}$$

esto es

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -y + z = 0.$$

Por lo tanto

$$F^{\perp_\varphi} = \{(x, y, z) \in E \mid x = 0, -y + z = 0\} = [(0, 1, 1)].$$

d)

$$\boxed{\operatorname{Ker} A = \{0\}.}$$

7. Determinar $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que 2 sea el valor máximo sobre la esfera unidad $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ de la forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$ que en la base canónica tiene por matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{pmatrix}.$$

Solución:

Valores propios de A:

$$3 + \lambda, \quad \lambda, \quad \lambda$$

$3 + \lambda > \lambda$, por lo tanto el valor propio mayor es $3 + \lambda$. Obliguemos a que dicho valor sea 2:

$$\boxed{3 + \lambda = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = 1.}$$

8. Consideremos la forma cuadrática definida en $\mathbb{R}^4$, siguiente

$$q(x, y, z, t) = 2x^2 - 8xy + y^2 - 16xz + 46yz + 5z^2 + t^2.$$

Clasificar la forma cuadrática $q_{|F}$ restricción de q al subespacio vectorial $F = \{(x, y, z, t) \mid x - t = 0, y + z = 0\}$.

Solución:

Determinemos la matriz de q en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 0 \\ -4 & 1 & 23 & 0 \\ -8 & 23 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Busquemos una base de F

$$F = [(1,0,0,1),(0,1,-1,0)].$$

Luego la restricción de q a F tiene por matriz en esta base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 0 \\ -4 & 1 & 23 & 0 \\ -8 & 23 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -40 \end{pmatrix}.$$

Esta forma cuadrática es no degenerada y no definida en signo ya que

$$\delta_1 = 3, \qquad \delta_2 = -136.$$

Observación 2.5.1. Si queremos determinar los valores extremales de $q_{|F}$ sobre la esfera unidad intersección con F debemos obtener la matriz de $q_{|F}$ en bases *ortonormales*.

9. Consideremos la forma cuadrática definida en $\mathbb{R}^3$, siguiente

$$q(x,y,z) = x^2 - 2xy + y^2 + z^2.$$

Determinar el valor máximo que toma la restricción de q al subespacio

$$F = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 0\}.$$

Solución:

La matriz de la forma cuadrática es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinemos una base ortonormal de F:

$$F = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \right].$$

Luego la matriz de $q_{|F}$ en esta base es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Puesto que los valores propios son $2 > \frac{2}{3}$, el valor máximo es 2.

10. En $\mathbb{R}^4$, consideramos la forma cuadrática $q(x,y,z,t) = x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2xt + 2yt + 2zt - t^2$. Encontrar dos subespacios F, G de dimensión máxima tales que $q_{|F}$ sea definida positiva y $q_{|G}$ sea definida negativa

Solución:

Matriz de q:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mediante la congruencia pivote encontramos que

$$S^tAS = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -3 & & \\ & & \frac{3}{4} & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

con

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea

$$F = [(1,0,0,0), (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0)], \quad A_{|F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$G = [(-2,1,1,0), (-1,0,0,1)], \quad A_{|q} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

11. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, consideremos $\varphi_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \quad i = 1, \dots, p+q$ y definimos para todo $x \in E$

$$q(x) = (\varphi_1(x))^2 + \ldots + (\varphi_p(x)^2 - (\varphi_{p+1}(x))^2 - \ldots - (\varphi_{p+q}(x))^2.$$

a) Probar que q es la forma cuadrática asociada a una cierta métrica ortogonal φ.

b) Supongamos que dicha forma cuadrática es definida positiva. Demostrar que $\dim E \leq p$.

Observación 2.5.2. $\mathcal{L}(E, R)$ indica el conjunto de todas las aplicaciones lineales de E en $\mathbb{R}$.

Solución:

a) Definamos $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ y comprobemos que φ así definida es una métrica ortogonal y que $\varphi(x,x) = q(x)$.

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x+y))^2 + \ldots + (\varphi_p(x+y))^2 - (\varphi_{p+1}(x+y))^2 - \ldots -$$
$$- (\varphi_{p+q}(x+y))^2 - (\varphi_1(x))^2 - \ldots - (\varphi_p(x))^2 + (\varphi_{p+1}(x))^2 - \ldots +$$
$$+ (\varphi_{p+q}(x))^2 - (\varphi_1(y))^2 - \ldots - (\varphi_p(y))^2 + (\varphi p(y))^2 + (\varphi_{p+1}(y))^2 + \ldots +$$
$$- (\varphi_{p+q}(y))^2 \underset{(a)}{=} \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)\varphi_i(y) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \varphi_i(x)\varphi_i(y)$$

(a) $\quad \varphi_i(x+y) = \varphi_i(x) + \varphi_i(y)$ por linealidad.

φ es obviamente una aplicación de $E \times E$ sobre $\mathbb{R}$, veamos que es bilineal y simétrica.

$$\varphi(x_1 + x_2, y) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_1 + x_2)\varphi_i(y) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \varphi_i(x_1 + x_2)\varphi_i(y) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p}(\varphi_i(x_1) + \varphi_i(x_2))\varphi_i(y) - \sum_{i=p+1}^{p+q} (\varphi_i(x_1) + \varphi_i(x_2))\varphi_i(y) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p}(\varphi_i(x_1)\varphi_i(y) + \varphi_i(x_2)\varphi_i(y)) - \sum_{i=p+1}^{p+q} (\varphi_i(x_1)\varphi_i(y) + \varphi_i(x_2)\varphi_i(y)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_1)\varphi_i(y) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \varphi_i(x_1)\varphi_i(y) + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_2)\varphi_i(y) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \varphi_i(x_2)\varphi_i(y) =$$
$$\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y),$$

$$\varphi(\alpha x, y) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)\varphi_i(y) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \varphi_i(\alpha x)\varphi_i(y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha\varphi_i(x)\varphi_i(y) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha\alpha_i(x)\varphi_i(y) =$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)\varphi_i(y) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha\varphi_i(x)\varphi_i(y) =$$

$$= \alpha(\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)\varphi_i(y) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \varphi_i(x)\varphi_i(y)) = \alpha\varphi(x, y),$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)\varphi_i(y) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \varphi_i(x)\varphi_i(y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(y)\varphi_i(x) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \varphi_i(y)\varphi_i(x) = \varphi(y, x).$$

luego φ es una métrica ortogonal.

Además

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)\varphi_i(x) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \varphi_i(x)\varphi_i(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (\varphi_i(x))^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} (\varphi_i(x))^2 = q(x)$$

b) puesto que $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ son elementos del *espacio dual* E^* de E, consideremos sus duales $\varphi_1^*, \dots, \varphi_p^*$ que son vectores de E. Si $\dim E \geq p$, necesariamente existe $x \neq 0$ independiente con $f_i^* \, i = 1, \dots, p$ tal que su dual x^* es

$$x^*(x) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi_1(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$$

por lo tanto

$$q(x) = (\varphi_i(x))^2 + \ldots + (\varphi_p(x))^2 - (\varphi_{p+1}(x))^2 - \ldots - (\varphi_{p+q}(x))^2 =$$
$$-(\varphi_p(x))^2 - \ldots - (\varphi_{p+q}(x))^2 \leq 0,$$

por lo que q no puede ser definida positiva, ¡ contradicción !. Luego:

$$\dim E \leq p.$$

12. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n, sobre un cuerpo conmutativo K, y sea φ una métrica ortogonal no degenerada definida sobre E.

    Sea F un subespacio no isótropo respecto de φ. Demostrar que existe un único automorfismo S_F de φ, tal que

$$S_F(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in F \\ -x & \text{si} \quad x \in F^{\perp}. \end{cases}$$

    Observación 2.5.3. se dice que S_F es automorfismo de φ si y sólo si $\varphi(S_F(x), S_F(y)) = \varphi(x, y)$.

    Solución:

    Decimos que un subespacio F es *no isótropo* si y sólo si $F \cap F^{\perp_\varphi} = \{0\}$.

    Puesto que φ es no degenerada $\operatorname{rad}\varphi = \{0\}$, luego:

$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E + \dim(F \cap \operatorname{rad}\varphi) = \dim E,$$

    luego $E = F + F^{\perp_\varphi}$ y $\forall x \in E$

    $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in F$ y $x_2 \in F^{\perp_\varphi}$ de forma única.

    Definimos S_F de la forma:

$$\forall x = x_1 + x_2 \in E$$

$$S_F(x) = x_1 - x_2 \in E.$$

Observamos que S_F así definida es tal que

$$S_F(x) = x \quad \text{si} \quad x \in F \quad \text{y} \quad S_F(x) = -x \quad \text{si} \quad x \in F^{\perp_\varphi}.$$

S_F es lineal pues dados $x, y \in E \quad x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2$

$$S_F(x+y) = S_F((x_1+x_2)+(y_1+y_2)) = S_F((x_1+y_1)+(x_2+y_2)) =$$
$$(x_1+y_1)-(x_2+y_2) = x_1 - x_2 + y_1 - y_2 = S_F(x) + S_F(y).$$

$$\text{y dado} \;\; \alpha \in K,\; \alpha x = \alpha x_1 + x_2,\; S_F(\alpha x) = \alpha x_1 - \alpha x_2 =$$
$$\alpha(x_1 - x_2) = \alpha S_F(x).$$

es además, biyectiva pues:

si $S_F(x) = 0$ es

$$x_1 - x_2 = 0, \Longleftrightarrow x_1 = x_2, \text{ con } x_1 \in F \text{ y } x_2 \in F^{\perp\varphi},$$

pero $F \cap F^{\perp_\varphi} = \{0\}$, luego

$$x_1 = x_2 = 0, \Longleftrightarrow x = 0.$$

Por tanto S_F es inyectiva y por ser E de dimensión finita es exhaustiva. Por lo que es un automorfismo de E.

Veamos que también, es automorfismo de φ:

tenemos que $\quad \varphi(S_F(x),(y)) = \varphi(x, S_F(y)) \quad$ pues

$\forall x = x_1 + x_2$ y $\forall y = y_1 + y_2$ es

$$\varphi(S_F(x_1+x_2),y) = \varphi((x_1-x_2),y) = \varphi(x_1,y) - \varphi(x_2,y) =$$
$$\varphi(x_1,y_1) + \varphi(x_1,y_2) - \varphi(x_2,y_1) - \varphi(x_2,y_2) =$$
$$\varphi(x_1,y_1) - \varphi(x_2,y_2)$$

$$\varphi(x, S_F(y_1+y_2)) = \varphi(x, y_1, -y_2) = \varphi(x_1,y_1) - \varphi(x_1,y_2) =$$
$$\varphi(x_1,y_2) + \varphi(x_2,y_1) - \varphi(x_1,y_2) - \varphi(x_2,y_2) =$$
$$\varphi(x_1,y_1) - \varphi(x_2,y_2)$$

luego, $\varphi(S_F(x), S_F(y)) = \varphi(x, S_F(S_F(y))) = \varphi(x, S_F^2(y)) \underset{(a)}{=} \varphi(x, y)$.

(a) $\quad S_F^2 = Id$, pues

$$S_F^2(x) = S_F(S_F(x)) = S_F(S_F(x_1 + x_2)) = S_F(x_1 - x_2) = x_1 + x_2 = x$$

La unicidad es obvia:

Supongamos que existe g con

$$g(x) = x \quad \forall x \in F \quad \text{y} \quad g(x) = -x \quad \forall x \in F^{\perp_\varphi}$$

y puesto que $E = F \oplus F^{\perp_\varphi}$ es

$$\forall x \in E \quad x = x_1 + x_2 \quad \text{y} \quad g(x) = x_1 - x_2 = S_F(x).$$

Capítulo 3

Variedades lineales

3.1. Definiciones y ecuaciones paramétricas e implícitas

Nos situamos ahora en el espacio vectorial euclídeo ordinario $E = \mathbb{R}^n$ y consideramos un subespacio vectorial $F \subset \mathbb{R}^n$ y un vector $a \in \mathbb{R}^n$.

Definición 3.1.1. Llamaremos *variedad lineal* que pasa por el *punto* a y tiene por *dirección* F, al subconjunto

$$\boxed{V = a + F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = a + v,\ \forall v \in F\}.}$$

Definición 3.1.2. Llamaremos *dimensión* de la variedad V a la dimensión del subespacio director

$$\boxed{\dim V = \dim F.}$$

Las variedades lineales

i) de dimensión cero reciben el nombre de *puntos*,

ii) de dimensión uno reciben el nombre de *rectas*,

iii) de dimensión dos reciben el nombre de *planos*,

iv) de dimensión $n-1$ reciben el nombre de *hiperplanos*

v) de dimensión n recibe el nombre de *espacio afín*.

Sea $V = a + F$ una variedad lineal, entonces

$$\boxed{\forall\, x \in V \iff \forall\, x - a \in F}$$

por lo que la variedad puede expresarse de forma *implícita* como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal

$$\boxed{V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{ij} a_{ij}x_j = b_i\}.}$$

$$\boxed{\dim V = d \quad \iff \quad \text{el rango del sistema es } n - d}$$

3.1.1. Posiciones relativas

Definición 3.1.3. Diremos que dos variedades lineales $V_1 = a_1 + F_1$ y $V_2 = a_2 + F_2$ son *paralelas* si y sólo si

$$\boxed{F_1 \subset F_2 \qquad \text{o} \qquad F_2 \subset F_1.}$$

Proposición 3.1.1. *Sean $V_1 = a_1 + F$ y $V_2 = a_2 + F$ dos variedades lineales de $\mathbb{R}^n$. Entonces $V_1 = V_2$, si y sólo si $a_2 = a_1 + u$ para un cierto vector $u \in F$.*

Intersección de variedades

Proposición 3.1.2. *Dadas dos variedades $V_1 = a_1 + F_1$, $V_2 = a_2 + F_2$.*

a) Se cortan si y sólamante si, $a_1 - a_2 \in F_1 + F_2$.

b) Si la intersección es no vacía, esta es la variedad lineal

$$\boxed{V_1 \cap V_2 = x + (F_1 \cap F_2)}$$

con $x \in V_1 \cap V_2$.

Demostración. a) Si $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ entonces $\exists\, x \in V_1 \cap V_2$. Luego $x = a_1 + v_1$ con $v_1 \in F_1$ y $x = a_2 + v_2$ con $v_2 \in F_2$, de donde

$$\begin{aligned} a_1 + v_1 &= a_2 + v_2 \\ a_1 - a_2 &= -v_1 + v_2 \in F_1 + F_2. \end{aligned}$$

Veamos ahora la implicación contraria. Si $a_1 - a_2 \in F_1 + F_2$ entonces

$$a_1 - a_2 = v_1 + v_2 \in F_1 + F_2,$$

luego $x = a_1 + (-v_1) = a_2 + v_2$ y $x \in V_1, \qquad x \in V_2$.

b) Se deja como ejercicio.

$\square$

Proposición 3.1.3. *Sea $A = a + H$ con $\dim H = n - 1$. Si $V = b + G$ es tal que $V \cap A = \emptyset$. Entonces V es paralela a A.*

Demostración. Si V y A no son paralelas entonces $G \not\subset H$ por lo que $\exists v \in G$ con $v \notin H$ y por ser H de dimensión $n - 1$ se tiene que $[v] \oplus H = \mathbb{R}^n$.
De donde $G + H = \mathbb{R}^n$ y por lo tanto $a - b \in G + H$, es decir $V \cap A \neq \emptyset$, luego si $V \cap A = \emptyset$, V ha de ser paralela a A.

$\square$

Definición 3.1.4. Dadas dos variedades lineales $V_1 = a_1 + F_1$ y $V_2 = a_2 + F_2$, definimos *variedad lineal suma* como

$$\boxed{V_1 + V_2 = a_1 + [a_2 - a_1] + F_1 + F_2.}$$

Observación 3.1.1. Si $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ entonces

$$V_1 + V_2 = a_1 + F_1 + F_2,$$

Si $V_1 \parallel V_2$ y $F_1 \subset F_2$ (o $F_2 \subset F_1$) entonces

$$V_1 + V_2 = a_1 + [a_2 - a_1] + F_2, \qquad (\text{o } V_1 + V_2 = a_1 + [a_2 - a_1] + F_1)$$

Si V_1 y V_2 *se cruzan*, es decir ni son paralelas ni se cortan, entonces

$$\dim V_1 + V_2 = \dim F_1 + \dim F_2 + 1.$$

3.2. Sistemas de referencia

Sea $V = a + F \subset \mathbb{R}^n$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. $a = (a_1, \ldots, a_n)$, y $F = [v_1, \ldots, v_r]$

$$v_1 = (v_1^1, \ldots, v_n^1), \ldots, v_r = (v_1^r, \ldots, v_n^r)$$

Para todo $x \in V$ $x = a + v$ con $v \in F$ luego

$$(x_1, \ldots, x_n) = (a_1, \ldots, a_n) + \lambda_1(v_1^1, \ldots, v_n^1) + \ldots + \lambda_r(v_1^r, \ldots, v_n^r)$$

esto es

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 + \lambda_1 v_1^1 + \ldots + \lambda_r v_1^r \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda_1 v_n^1 + \ldots + \lambda_r v_n^r \end{array}\right\} \qquad (1)}$$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ reciben el nombre de *coordenadas intrínsecas* y el sistema (1) de *forma paramétrica* de la variedad.

Observación 3.2.1. Si $V = \mathbb{R}^n$ podemos *cambiar* el origen de coordenadas.

3.2.1. Cambio de sistema de referencia

Sean $\{a; v_1, \ldots, v_r\}$ y $\{b; w_1, \ldots, , w_d\}$ dos sistemas de referencia de una variedad lineal V.

Un punto x cualquiera de la variedad se expresa respecto los dos sistemas de referencia de la forma

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_d v_d \\ &= b + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_d w_d \end{aligned}$$

Si $S = (s_{ij})$ es la matriz de cambio de la base $\{w_i\}$ a la base $\{v_i\}$, es decir:

$$w_j = s_{1j} v_1 + \ldots + s_{dj} v_d, \qquad 1 \leq j \leq d$$

y $b = a + b_1 v_1 + \ldots + b_d v_d$ entonces

$$\begin{array}{l} x = a + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_d v_d = \\ a + b_1 v_1 + \ldots + b_d v_d + \mu_1 s_{11} v_1 + \ldots + \mu_1 s_{d1} v_d + \ldots + \mu_d s_{1d} v_1 + \ldots + \mu_d s_{dd} v_d \end{array}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11} & \ldots & s_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{d1} & \ldots & s_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix} = B + S \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix}.$$

equivalentemente se puede escribir

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_d \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.2.1. Sea $V = \mathbb{R}^2$ con la referencia natural $\{(0,0);(1,0),(0,1)\}$, y consideremos una nueva referencia $\{(1,0);(1,1),(1,-1)\}$.
Entonces:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.3. Distancias entre variedades

Sea A un espacio afín y supongamos que el espacio vectorial subyacente es euclídeo. Esto nos permite definir distancia entre dos puntos $a, b \in A$ de la manera siguiente.

Definición 3.3.1.

$$d(a,b) = \|b - a\|$$

Podemos generalizar esta definición a distancia entre variedades

Definición 3.3.2. la *distancia* entre las variedades $V_1 = a_1 + F_1$ y $V_2 = a_2 + F_2$ es

$$\boxed{d(V_1, V_2) = \min\{d(p,q) \mid \forall p \in V_1, q \in V_2\}}$$

Proposición 3.3.1. *la distancia entre las variedades* $V_1 = a_1 + F_1$ *y* $V_2 = a_2 + F_2$ *es*

$$\boxed{d(V_1, V_2) = \|\pi_{(F_1+F_2)^\perp}(a_1 - a_2)\|.}$$

Observación 3.3.1. Es claro que la distancia entre V_1 y V_2 no depende de los puntos de paso escogidos en las variedades.

Podemos expresar dicha definición en lenguaje matricial de la siguiente forma:

$$\boxed{d(V_1, V_2)^2 =< a_1 - a_2, a_1 - a_2 > -XM^{-1}X^t}$$

con

$$X = \big(< a_1 - a_2, v_1 > \quad \dots \quad < a_1 - a_2, v_s >\big)$$

siendo $\{v_1, \dots, v_s\}$ una base de $F_1 + F_2$, $M = (< v_i, v_j) >)_{i,j=1,\dots,s}$.

Casos particulares

1. $V_1 \subset \mathbb{R}^n$, con $\dim V_1 = n-1$: $a_1x_1+\dots+a_nx_n+a = 0$ y $V_2 = (b_1, \dots, b_n)$, entonces
$$d(V_1, V_2) = \frac{|a_1b_1 + \dots + a_nb_n + a|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

2. $V_1 = a + \lambda v$ una recta y $V_2 = \{b\}$ un punto en $\mathbb{R}^n$. Entonces
$$(d(V_1, V_2))^2 = \frac{\|b - a\|^2 \cdot \|v\|^2 - (< b - a, v >)^2}{\|v\|^2}.$$

   Observación 3.3.2. Si v es unitario es $d(V_1, V_2) = \|(b - a) \wedge v\|$.

   $V_1 \equiv a_1 + \lambda v$ y $V_2 = a_2 + \lambda v$ de $\mathbb{R}^3$, entonces
$$d(V_1, V_2) = \frac{\|(a_1 - a_2) \wedge v\|}{\|v\|}.$$

3. $V_1 \equiv a_1 + \lambda v_1$ y $V_2 = a_2 + \lambda v_2$ de $\mathbb{R}^3$ que se cruzan, entonces
$$d(V_1, V_2) = \frac{| < (a_1 - a_2), v_1 \wedge v_2 > |}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \frac{|\det(a_1 - a_2, v_1, v_2)|}{\|v_1 \wedge v_2\|}.$$

3.4. Ángulos entre variedades

Definición 3.4.1. Dadas dos variedades lineales $V_1 = a_1+F_1$ y $V_2 = a_2+F_2$, diremos que son ortogonales si y sólo si los subespacios vectoriales subyacentes son ortogonales:
$$F_1 \perp F_2.$$

Si adems $F_1 \perp F_2 = \mathbb{R}^n$ diremos que V_2 es el complemento ortogonal de V_1 que pasa por a_2 o que V_1 es el complemento ortogonal de V_2 que pasa por a_1.

Ejemplo 3.4.1. Sea $V_1 = \{(x, y, z) \mid x + y + z + 1 = 0\} = (-1, 0, 0) + [(1, -1, 0), (1, 0, -1)]$ y $V_2 = (3, 2, 1) + [(1, 1, 1)]$. Los subespacios $F_1 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ y $F_2 = [(1, 1, 1)]$ son complementarios por lo que V_2 es una variedad ortogonal y complementaria a V_1 que pasa por $(3, 2, 1)$.

3.4.1. Ángulos en $\mathbb{R}^3$

1.- Ángulo α entre las rectas $r \equiv p + \lambda v$ y $s \equiv q + \lambda w$

$$\cos \alpha = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

2.- Ángulo α entre la recta $r \equiv p + \lambda v$ y el plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

siendo $w = (a, b, c)$.

3.- Ángulo α entre el plano $\pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y el plano $\pi_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

$$\cos \alpha = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

siendo $v = (a_1, b_1, c_1)$ y $w = (a_2, b_2, c_2)$.

3.5. Áreas y volúmenes. El determinante de Gram

3.5.1. Volumen de un paralelepípedo

Definición 3.5.1. Dados $p_0, p_1, \ldots, p_n$, $n + 1$ puntos en $\mathbb{R}^m$, definimos el volumen del paralelepípedo que determinan, como

$$V(p_0, p_1 - p_0, \ldots, p_n - p_0) = +\sqrt{\det M^t G M}$$

Siendo G la matriz del producto escalar en la base dada, y M la matriz de la familia de vectores $v_1 = p_1 - p_0, \ldots, v_n = p_n - p_0$ en la base dada.

Observamos que M^tGM es la matriz del producto escalar de los vectores v_i y recibe el nombre de *matriz de Gram* y su determinante el nombre de *determinante de Gram*.

Casos particulares

i) Si $n = 1$, $V(p_0, p_1 - p_0)$ es la longitud del segmento $\overline{p_0p_1}$ determinado por esos dos puntos.

ii) Si $n = 2$, $V(p_0, p_1 - p_0, p_2 - p_0)$ es el área del paralelogramo determinado por p_0, p_1, p_2.

iii) Si $n > m$ el volúmen del paralelepípedo es cero.

3.6. Ejercicios resueltos

1. En el plano afín ordinario se consideran las referencias cartesianas $R \equiv (O, u_1, u_2)$; $\quad R' \equiv (O', u_1', u_2')$

   donde $OO' = 2u_1 - 3u_2$ $u_1' = u_1 + 3u_2$ $u_2' = -u_1 + 4u_2$. Hallar las ecuaciones que permiten pasar de R' a R. y las de R a R'.

   Solución:

   Estudiemos primero el paso de R' a R

   Sea $p \in \mathbb{R}^2$ cualquiera. En el sistema de referencia R es $p - O = xu_1 + yu_2$. En el sistema de referencia R' es $p - O' = x'u_1' + y'u_2'$, y $p - O, p - O' \in \mathbb{R}^2$.

   Si S es la matriz cambio de base de $\{u_1', u_2'\}$ a $\{u_1, u_2\}$ tenemos $S(p - O') = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ 3x' & 4y' \end{pmatrix}.$$

   Es decir $p - O' = (x' - y')u_1 + (3x' + 4y')u_2$.

   Por otra parte $p - O = p - O' + O' - O$, y puesto que conocemos el vector $O' - O$ en función de la base $\{u_1, u_2\}$: $O' - O = (2, -3)$, tenemos en definitiva

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x = x' - y' + 2 \\ y = 3x' + 4y' - 3 \end{array}\right\}.$$

Pasemos ahora a estudiar el paso de R a R'

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{4}{7}x + \dfrac{1}{7}y - \dfrac{5}{7} \\ y' = -\dfrac{3}{7}x + \dfrac{1}{7}y + \dfrac{9}{7} \end{array}\right\}.$$

2. En $\mathbb{R}^3$ consideremos la referencia $\mathcal{R}$ siguiente:

$$\{p = (1,1,1); u = (1,1,1), v = (1,1,0), w = (1,0,0)\}.$$

Determinar las ecuaciones en dicha referencia, de la recta cuya ecuación en la referencia ordinaria es

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{array}\right\}.$$

Solución:

Las ecuaciones del cambio de sistema de referencia vienen dadas de la manera

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}$$

esto es

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} \\ y = 1 + \overline{x} + \overline{y} \\ z = 1 + \overline{x} \end{array}\right\}.$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta nos queda

$$\left.\begin{array}{r} 1 + \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + 1 + \overline{x} + \overline{y} + 1 + \overline{x} = 3 \\ 1 + \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} - 1 - \overline{x} - \overline{y} + 1 + \overline{x} = 2 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r} 3\overline{x} + 2\overline{y} + \overline{z} = 0 \\ \overline{x} + \overline{z} = 0 \end{array}\right\}.$$

3. Encontrar un sistema de referencia para el cual la recta $r \equiv x+2z-4 = y = 0$ sea la recta $\overline{x} = -\frac{1}{3}$, $\overline{z} = -\frac{2}{3}$, y la recta $s \equiv 2x - z + 2 = 5x + 2y - 9 = 0$ se el eje $\overline{z}$.

Solución:

Observamos que $r \parallel \overline{y}, \Longrightarrow v_2 = (2,0,-1)$ (o $v_2 = a(2,0,-1)$)

$s = \overline{z} \Longrightarrow v_3 = (2,-5,4)$ (o $v_3 = b(2,-5-4)$)

Luego

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ b & 0 & -5 \\ c & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

obliguemos a que $(x',y',z') = (0,0,0) + \lambda(0,0,1)$ sea de s

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ b & 0 & -5 \\ c & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in s$$

$\Longrightarrow f = 2d + 2, \; e = \dfrac{-5d+9}{2}$

obliguemos a que $(x',y',z') = (-\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}) + \lambda(0,1,0)$ sea de r

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ b & 0 & -5 \\ c & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \lambda \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in r$$

$\Longrightarrow -2b - 15d + 47 = 0, \; -a - 2c + 15d - 8 = 0.$

Observación 3.6.1. Se han de escoger valores para a, b, c, d, e, f de manera que la matriz $\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ b & 0 & -5 \\ c & -1 & 4 \end{pmatrix}$ sea inversible.

4. a) Sea el espacio afín $\mathbb{R}^4$ y las variedades lineales siguientes:

$$V_1 = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \end{cases} \qquad V_2 = \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Determinar $V_1 \cap V_2$ y $V_1 + V_2$.

b) Sea

$$V_3 = \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + ax_4 = 0 \\ x_1 + bx_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

¿Para que valores de a y b es $V_1 \parallel V_3$?

Solución:

a) La variedad intersección viene dada por:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

ya que es la colección de puntos de $\mathbf{R}^4$ que verifican las ecuaciones de V_1 y las de V_2. Es una recta por ser el sistema compatible de rango 3.

Puesto que $V_1 \cap V_2 \neq 0$, tenemos que

$$a - b \in F + G, \quad \Longrightarrow \quad \boxed{V_1 + V_2 = a + F + G.}$$

Escojamos pues a, y determinemos $F+G$. Sea por ejemplo $a = (0, 0, -1, 0)$ $\in V_1$

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\} =$$
$$=[(1, 0, 1, -1), (-4, 1, -3, 6)]$$
$$G = \{(x_1, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} =$$
$$=[(-4, 1, -3, 6), (0, 0, 1, -1), (1, -1, 0, 0)]$$

luego

$$V_1 + V_2 =$$
$$(0, 0, -1, 0) + [(1, 0, 1, -1), (-4, 1, -3, 6), (0, 0, 1, -1), (1, -1, 0, 0)] = \mathbb{R}^4.$$

Observación 3.6.2. Se preveía este resultado ya que:

$$\dim V_1 = 2, \quad \dim V_2 = 3, \quad \text{y} \quad \dim V_1 \cap V_2 = 1$$

luego $\dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2 = 4$.

b) $V_1 \parallel V_3$ si y sólo si

$$\operatorname{rango} \begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix} = \max(\operatorname{rango}(A), \operatorname{rango}(B))$$

siendo A la matriz del sistema que define V_1 y B la matriz del sistema que define V_3.

$\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(B) = 2$.

Obliguemos a que rango $= \begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix} = 2$.

$$\operatorname{rango} = \begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix} = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & a \\ 1 & b & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2,$$

que se verifica si y sólo si

$$\boxed{a - 1 = b + 8 = 0.}$$

5. a) Determinar la proyección ortogonal de $P = (2, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$ sobre la variedad lineal $\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right\} \equiv V_1$.

b) Determinar la distancia de P a V_1

c) Determinar la recta que pasa por P y corta a las rectas V_1 y $x = z = 0$.

Solución:

a) $V_1 \equiv (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0) + \lambda(1, 0, -1) = A + \lambda v$

$P - A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$, $< v, v >= 2$, $\lambda = \frac{1}{2} < P - A, v >= -\frac{5}{4}$,

$\pi_{[v]}(P - A) = -\frac{5}{4}(1, 0, -1) = (-\frac{5}{4}, 0, \frac{5}{4}) = P' - A$

$\Longrightarrow \qquad \boxed{\pi_{V_1} P = A + \pi_{[v]}(P - A) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4})}$

b)

$$\boxed{d(P, V_1) = d(P, P') = \frac{\sqrt{102}}{4}}$$

c) La recta buscada es $(2, 1, 3) + \lambda((0, y, 0) - (2, 1, 3))$, (para $\lambda = 0$ obtenemos P y para $\lambda = 1$ el punto $(0, y, 0)$ del eje y). Obliguemos a que corte a V_1

$$\begin{array}{l} 2 - 2\lambda + 1 + \lambda y - \lambda + 3 - 3\lambda = 2 \\ 2 - 2\lambda - 1 - \lambda y + \lambda + 3 - 3\lambda = 1 \end{array} \Longrightarrow \quad y = \frac{2}{7}$$

$$\boxed{(2, 1, 3) + \lambda(-2, -\frac{5}{7}, -3)}$$

6. Estudiar la posición relativa entre las rectas r y s donde $r \equiv \{(x, y, z) \mid x - z = 0, x + y = 0\}$, y s la recta que pasa por $p = (1, 0, 0)$ y es perpendicular al plano $x + 2y + 4 = 0$.

Solución:

Expresemos las rectas en forma paramétrica

$$r \equiv (0, 0, 0) + \lambda(1, -1, 1) = p + \lambda v,$$

Si s es perpendicular al plano $x + 2y + 4 = 0$, la dirección de la recta es perpendicular al subespacio director del plano, luego

$$s \equiv (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0) = q + \lambda w.$$

Para estudiar la posición relativa basta calcular

$$\det(q - p, v, w)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Puesto que es distinto de 0, tenemos que

$$\dim[q-p, v, w] = 3$$

luego las rectas se *cruzan*.

7. Sean las rectas de $\mathbb{R}^3$, siguientes.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-\alpha}{-1}; \quad s \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}; \quad t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

a) Hallar α para que las rectas r y s se corten.

b) Hallar, para dicho valor de α, el plano π que contiene a r y s.

c) Dado el punto $p = (1, 1, 1)$, hallar la recta que contiene a p y se apoya

en s y t.

d) Hallar la ecuación de la recta que, apoyándose en s y t, es perpendicular a ambas; dar los puntos de corte de esta recta con s y con t.

Solución:

a) r y s son coplanarias si y sólo si los vectores

$$u = (2, 1, -1), v = (3, 1, 1) \quad \text{y} \quad a-b = (1, 0, \alpha)-(-1, 2, 0) = (2, -2, \alpha),$$

son linealmente dependientes. Es decir

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 14.$$

Puesto que r y s no son paralelas (u y v son independientes) se cortan.

b) El plano π que contiene a r y s es un punto de paso (por ejemplo el $(-1,2,0)$), más el subespacio director:

$$(-1,2,0)+[(2,1,1),(3,1,1)]$$

cuya ecuación en forma implícita es:

$$2x-5y-z+12=0.$$

c) Las rectas s y t las podemos expresar también:

$$s\equiv\begin{cases}x-3z+1=0\\ y-z-2=0\end{cases}\qquad t\equiv\begin{cases}2x-y=0\\ 3x-z=0,\end{cases}$$

es decir, como intersección de planos. De esta manera podemos dar el haz de planos que pasa por s,

$$\lambda(x-3z+1)+\mu(y-z-2)=0\quad(1)$$

(al variar λ y μ obtenemos todos los planos que contienen a s)

y el haz de planos que pasa por t

$$\lambda'(2x-y)+\mu'(3x-z)=0\quad(2)$$

(al variar λ' y μ' obtenemos todos los planos que contienen a t).

Del haz (1) tomamos el plano que pasa por $p=(1,1,1)$

$$\lambda(1-3+1)+\mu(1-1-2)=0\Longrightarrow\lambda=-2\mu$$

por lo tanto el plano es $\pi_1=2x-y-5z+4=0$. Tomemos del haz (2) el plano que pasa por $p=(1,1,1)$

$$\lambda'(2-1)+\mu'(3-1)=0\Longrightarrow\lambda'=-2\mu'$$

por lo tanto el plano es $\pi_2 = x - 2y + z = 0$. Luego la recta buscada será $\pi_1 \cap \pi_2$

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y - 5z + 4 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\}$$

d) El vector director de la recta que buscamos ha de ser perpendicular a $u = (3,1,1)$, y a $v = (1,2,3)$ vectores directores de las rectas s y t respectivamente, además el vector buscado puede obtenerse como diferencia de un punto de la recta s (esto es $p = (3\lambda - 1, \lambda + 2, \lambda)$), y un punto de la recta t (esto es $q = (\mu, 2\mu, 3\mu)$), ya que la recta buscada ha de apoyarse en ambas.

Sea pues $p - q = (3\lambda - \mu - 1, \lambda - 2\mu + 2, \lambda - 3\mu)$

$$\left.\begin{array}{r} < p - q, u >= 11\lambda - 8\mu - 1 = 0 \\ < pq, v >= 8\lambda - 14\mu - 1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{15} \quad \mu = -\frac{1}{30},$$

luego la recta buscada es

$$p + \lambda(p - q) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{31}{15}, \frac{1}{15}\right) + \lambda\left(-\frac{23}{30}, \frac{64}{30}, \frac{5}{30}\right)$$

y los puntos de intersección son:

$$\begin{array}{l} r_1 \cap s = p = \left(\dfrac{-4}{5}, \dfrac{31}{15}, \dfrac{1}{15}\right) \\ r_1 \cap t = q = \left(\dfrac{-1}{30}, \dfrac{-1}{15}, \dfrac{-1}{10}\right). \end{array}$$

8. Sea $E = \mathbb{R}^3$ el espacio afín. Sean P, Q, R tres puntos linealmente independientes de E.

   Probar que el punto:

$$M = \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R$$

es el baricentro del triángulo PQR.

Solución:

Si

$$M = \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R$$

tenemos

$$M - R = \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) R = \frac{1}{3}(P - R) + \frac{1}{3}(Q - R) =$$
$$= \frac{1}{3}((P - R) + (Q - R)) = \frac{2}{3}\left(\frac{(P - R) + (Q - R)}{2}\right).$$

Luego M es en efecto, el *baricentro* del triángulo.

(Podemos ver también que dos medianas se cortan en este punto).

9. En $\mathbb{R}^3$, sobre la superficie plana horizontal $z = 0$, se ha instalado una rampa que contiene a los puntos $p_1 = (-1, 2, 1)$ y $p_2 = (0, 1, 0)$. El plano π que contiene a la rampa es paralelo a la recta r intersección de los planos

$$\left.\begin{array}{ll} \pi_1: & 3x + y - 2z - 6 = 0 \\ \pi_2: & 4x - y + 3z = 0 \end{array}\right\}.$$

a) Determinar el plano π.

b) Determinar la recta t según la cual se deslizará una gota situada en p_1 *recta de máxima pendiente*.

c) Hallar el punto simétrico respecto a π_1, del punto proyección ortogonal de p_1 sobre el plano horizontal $z = 0$.

Solución:

a) El plano buscado será $\boxed{p_2 + \lambda(p_2 - p_1) + \mu u}$

u es el vector director de la recta $\pi_1 \cap \pi_2$.

Determinaremos u:

$u_1 = (3, 1, -2)$ es el vector director de π_1;

$u_2 = (4, -1, 3)$ es el vector director de π_2.

Luego $u_1 \wedge u_2$ es el vector director de $\pi_1 \cap \pi_2$ (obsérvese que u_i es perpendicular al subespacio director π_i para $i = 1, 2$ y en particular al subespacio director de $\pi_1 \cap \pi_2$; $u_1 \wedge u_2$ es ortogonal a u_1 y a u_2, luego $u_1 \wedge u_2$ ha de estar en el subespacio director de π_1 y de π_2, por lo tanto genera el subespacio director de $\pi_1 \cap \pi_2$)

$p_2 - p_1 = (1, -1, -1)$

$u_1 \wedge u_2 = (1, -17, -7)$

con lo que queda:

$$(0, 1, 0) + \lambda(1, -1, -1) + \mu(1, -17, -7) \equiv 5x - 3y + 8z + 3 = 0.$$

b) La recta t será $\lambda p_1 + u'$, siendo $u' = u \wedge v$ y $u = v \wedge v'$, con v vector director de π, $v = (5, -3, 8)$ y v' el vector director del plano $z = 0$, $v' = (0, 0, 1)$, (u es el vector director de la recta intersección de π con $z = 0$).

Luego

$$u = \left(\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-3, -5, 0)$$

y por lo tanto $\boxed{u' = 2(-20, 12, 17)}$ y la recta t es

$$\boxed{\frac{x+1}{-20} = \frac{y-2}{12} = \frac{x-1}{17}.}$$

c) La proyección ortogonal de p_1 sobre $z = 0$ es el punto $p_1' = (-1, 2, 0)$, el simétrico p_1'' de p_1' respecto π_1, es

$$p_1'' = p_1' - \frac{2}{\|u_1\|^2} < p_1' - b, u_1 > u_1$$

$b \in \pi_1$ cualquiera; por ejemplo $b = (2, 0, 0)$

u_1 el vector director de π_1, $p_1' - b = (-3, 2, 0)$, $< p_1' - b, u_1 >= -7$, $\|u_1\|^2 = 14$, por lo que

$$p_1'' = (-1, 2, 0) - \frac{2}{14}(-7)(3, 1, -2) = (2, 3, -2).$$

10. En $\mathbb{R}^3$, espacio vectorial euclídeo, se tiene la recta r de ecuación

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

y el punto $p = (0, 3, 3)$.

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r y al punto p.

b) Dado el plano π_2 de ecuación $x + 2y - 2z + 6 = 0$. Encontrar la ecuación de la recta s, de máxima pendiente de π_1 sobre π_2, y que pasa por p.

c) Determinar el punto p', proyección ortogonal de p sobre π_2.

Solución:

a) $\pi_1 = p + F$.

Sea $q = (2, 2, 2) \in r$ cualquiera.

El vector $(0, 3, 3) - (2, 2, 2) = (-2, 1, 1) \in F$, al igual que el vector director de la recta $(1, 1, -2)$. Ambos vectores son independientes, por lo que son generadores de F.

Luego el plano es

$$\boxed{(0, 3, 3) + \lambda(1, 1, -2) + \mu(-2, 1, 1), \equiv\ x + y + z - 6 = 0.}$$

b) La recta intersección de π_1 y π_2 es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z - 6 = 0 \\ x + 2y - 2z + 6 = 0 \end{array}\right\}$$

cuyo vector director es $(-4, 3, 1) = u$, luego el vector director de la recta buscada es $v = u \wedge u'$, siendo u' el vector director del plano π_1

Luego: $v = (2, 5, -7)$.

Por lo que, la recta de máxima pendiente es $r = p + \lambda v$:

$$\boxed{(0,3,3) + \lambda(2,5,-7), \;\equiv\; \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-3}{-7}.}$$

c) El punto p' buscado es

$$p' = p - \frac{1}{\|u\|^2} < p-a, u > u$$

siendo $a \in \pi_2$ cualquiera, por ejemplo el $(0, -3, 0)$ y u el vector director de π_2, $u = (1, 2, -2)$

$$p - a = (0, 6, 3), \; < p-a, n >= 6, \; \|u\|^2 = 9.$$

Luego

$$p' = (0,3,3) - \frac{1}{9}6(1,2,-2) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{13}{3}\right).$$

11. Sabiendo que $A = (2, 3, 1)$ y $B = (0, 1, 0)$, son los vértices de un triángulo equilátero determinar el tercer vértice sabiendo que está sobre el plano $y = 0$.

Solución

El vértice C tiene por coordenadas $(x, 0, z)$.

Obliguemos a que el triángulo sea equilátero:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{4+4+1} = 3 \\ d(A,C) &= \sqrt{(x-1)^2 + z^2} \\ d(B,C) &= \sqrt{(x-1)^2 + 1 + (z-1)^2} \end{aligned}$$

Luego

$$\left.\begin{aligned} (x-1)^2 + z^2 = 9 \\ (x-1)^2 + 1 + (z-1)^2 = 9 \end{aligned}\right\} \implies z = 1, x = \pm 2\sqrt{2} + 1$$

$$\boxed{C = (2\sqrt{2}, 0, 1), \quad \text{o} \quad C = (-2\sqrt{2}, 0, 1)}$$

12. Calcular el valor de a para el cual $\mathrm{d}(p, r) = 1$ siendo $p = (a, 1, 2)$ y $r \equiv \{(x, y, z) \mid y - 2 = 0, x - z = 0\}$.

Solución:

Expresemos la recta en forma paramétrica

$$(x, y, z) = (0, 2, 0) + \lambda \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = q + \lambda v.$$

Puesto que el vector director de la recta es unitario, podemos utilizar la siguiente fórmula para la distancia

$$d(p, r) = \|(p - q) \wedge v\|.$$

Calculemos

$$p - q = (a, 1, 2) - (0, 2, 0) = (a, -1, 2)$$

y si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base natural de $\mathbb{R}^3$

$$(p - q) \wedge v = \begin{vmatrix} e_1 & a & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ e_2 & -1 & 0 \\ e_3 & 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} - a\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

y obliguemos ahora a que el vector $(p - q) \wedge v$ tenga norma 1.

$$\frac{1}{2} + \left(\sqrt{2} - a\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{2} = 1.$$

Por lo que

$$\sqrt{2} - a\frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad a = 2.$$

13. Hallar la ecuación de la recta r de $\mathbb{R}^3$ que es paralela al plano $\pi_1 : 2x - y + z = 3$, cuya distancia al plano

$$\pi_2 \equiv \{(x,y,z) = (0,-2,1) + \lambda(1,1,0) + \mu(-1,0,1)\}$$

es $\sqrt{3}$ y que corta a la recta $s \equiv (1,3,-2) + \lambda(1,-3,-3)$.

Solución:

$r \equiv a + \lambda u$

$d(r, \pi_2) \neq 0, \quad \Longrightarrow \quad r \parallel \pi_2.$

Luego su vector director es $u = u_1 \wedge u_2$, siendo $u_1 = (2,-1,1)$, $u_2 = (1,1,0) \wedge (-1,0,1) = (1,-1,1)$, los vectores directores de π_i.

Luego $u = (0,-1,-1)$.

Determinemos $a \in r$:

tomamos $a \in r \cap s$. Puesto que $d(r,\pi_2) = d(a,\pi_2) = \sqrt{3}$, obliguemos a que $a = (1+\lambda, 3-3\lambda, -2-3\lambda) \in s$ diste $\sqrt{3}$ de π_2.

$$d(a,\pi_2) = \sqrt{3} = \left|\frac{1+\lambda-3+3\lambda-2-3\lambda-3}{\sqrt{1+1+1}}\right| \iff |-7+\lambda| = 3$$

Luego $-7+\lambda = \pm 3$ y $\lambda = 10$ ó 4

de donde

$a = (11,-27,-32)$ ó $(5,-9,-14)$

hay, pues, dos soluciones:

$$\boxed{r = (11,-27,-32) + \lambda(0,1,1) \qquad \text{ó} \qquad r = (5,-9,-14) + \lambda(0,1,1).}$$

14. Hallar el área del paralelogramo del espacio $\mathbb{R}^3$ con vértices primarios:

$$P_0 = (1,1,2), \quad p_1 = (2,0,-1), \quad p_2 = (3,1,5).$$

Solución:

En nuestro caso particular la base natural es ortonormal luego:

$$G = I \qquad \text{y} \qquad M = (p_1 - p_0, p_2 - p_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\det(M^t G M) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ -7 & 13 \end{pmatrix} = 94$$

de donde

$$\text{área del paralelogramo} \quad = \quad +\sqrt{94}.$$

15. En $\mathbb{R}^3$

   a) Calcular el área del triángulo de vértices $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (4, -2, 3)$ y $P_3 = (0, 2, 5)$

   b) Calcular el volumen del tetraedro de vértices $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (0, 1, 2)$, $P_3 = (1, 1, 1)$ y $P_4 = (2, 1, 1)$.

   c) Calcular el área del polígono de vértices $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (2, 0)$, $P_3 = (5, 1)$, $P_4 = (4, 3)$ y $P_5 = (0, 3)$

Solución:

a)

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\det M^t G M}, \quad G = Id, \;\; M = \begin{pmatrix} P_2 - P_1 & P_3 - P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{A = 9\sqrt{2}}$$

Observación 3.6.3. También se puede calcular el área haciendo:

$A = \dfrac{1}{2}\|(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1)\|.$

b)

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\det M^t G M} \underset{a)}{=} \frac{1}{6}|\det M|$$

$a)$ $G = Id$ y M es cuadrada

$$M = \begin{pmatrix} P_2 - P_1 & P_3 - P_1 & P_4 - P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{V = \frac{1}{6}}$$

c) El interior del polígono es la unión *disjunta* de los interiores de los triágulos $P_1P_2P_5$, $P_2P_5P_4$, $P_2P_4P_3$. Luego el área del polígono es la suma de las áreas de los tres triángulos.

$$\boxed{A = 11}$$

16. En $\mathbb{R}^3$, $p_1 = (1,0,1)$, $p_2 = (2,0,3)$, $p_3 = (1,2,1)$, son los tres vértices de un paralelogramo tal que p_2 y p_3 son contiguos a p_1.

a) Determinar el vértice p_4 opuesto a p_1.

b) Calcular el área del triángulo p'_2, p'_3, p'_4 siendo p'_i, $i = 2,3,4$ los puntos simétricos de p_i, $i = 2,3,4$ respecto a p_1 son:

Solución:

a) El vértice p_4 es tal que

$$(p_2 - p_1) + (p_3 - p_1) = p_4 - p_1,$$

$$p_2 - p_1 = (1,0,2)$$
$$p_3 - p_1 = (0,2,0).$$

Luego

$$p_4 - p_1 = (1,2,2)$$

y

$$p_4 = (1,2,2) + (1,0,1) = (2,2,3).$$

b) Si los puntos p_i' son simétricos respecto de p_1 de los puntos p_i, el área del triángulo p_2', p_3', p_4' es la misma que la del triángulo p_2, p_3, p_4, y esta es

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}V(p_1, p_2 - p_1, p_3 - p_1) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{\det\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

17. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $u_1 = (1, 1, 2)$ es un vector propio de valor propio 1, $u_2 = (2, 0, 4)$ es un vector propio de valor propio 2, y $u_3 = (3, 4, 5)$ es un vector del núcleo de f. Calcular la distancia del punto $(1, 1, 1)$ al conjunto antiimǵen por f del punto $(-2 - 8 - 4)$

Solución:

Tenemos que

$$\left.\begin{aligned} f(1,1,2) &= (1,1,2) \\ f(2,0,4) &= (4,0,8) \\ f(3,4,5) &= (0,0,0) \end{aligned}\right\}$$

Por lo que la matriz de la aplicación en la base canónica es

$$A = BS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -8 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es claramente 2

Observando la matriz A vemos que $f(1, 0, 0) = (-2, -8, -4)$ por lo que

$$\begin{aligned} &V = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = (-2, -8, -4)\} = (1, 0, 0) + \operatorname{Ker} f = \\ &= (1, 0, 0) + \lambda(3, 4, 5) \end{aligned}$$

que es una recta.

$$d((1, 1, 1), V) = \|(1, 1, 1) - (1, 0, 0) \wedge \frac{1}{\sqrt{50}}(3, 4, 5)\| = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{19}{2}}.$$

18. En el espacio euclídeo ordinario $\mathbb{R}^3$, consideremos el tetraedro que tiene tres de sus vértices en los puntos $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 0, 0)$, $C = (0, 2, 0)$ y el cuarto vértice D, variable sobre el plano $x_1+x_2+x_3 = 0$.

    Determinar el lugar geométrico que describe el vértice D cuando el volumen del tetraedro es dos.

    Solución:

    El volumen de un tetraedro de vértices A, B, C, D es :

$$V = \frac{1}{6}|\det(B - A, C - A, D - A)|$$

luego, si $D = (x_1, x_2, x_3)$ tenemos :

$$2 = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & -1 & x_1 - 1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|2x_3|$$

luego, $|x_3| = 6$ y $x_3 = \pm 6$.

Por otra parte D pertenece al plano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, por lo tanto el lugar geométrico buscado está formado por el par de rectas

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 6 \end{aligned}\right\}, \qquad \text{y} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = -6 \end{aligned}\right\}.$$

Capítulo 4

Movimientos

4.1. Aplicaciones afines

Sea $V = p + E$ una variedad lineal de dimensión n.

Definición 4.1.1. Una aplicación

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow V \\ a &\longrightarrow f(a) \end{aligned}$$

se dice que es afín si la aplicación

$$\begin{aligned} f_p : E &\longrightarrow E \\ a - p &\longrightarrow f_p(a-p) = f(a) - f(p) \end{aligned}$$

es lineal

Ejemplo 4.1.1. 1.

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow V \\ a &\longrightarrow f(a) = a + v \end{aligned}$$

con v un vector fijo de E.

Tenemos $f_p(a-p) = f(a) - f(p) = (a+v) - (p+v) = a - p$ que claramente es lineal.

Dicha aplicación recibe el nombre de traslación.

2. Sea E un espacio vectorial que puede ser considerado como un espacio afín, (los vectores pasan a ser los puntos y el subespacio vectorial subyacente el conjunto de vectores $v - 0$. Sea f una aplicación lineal de este espacio vectorial en si mismo, esta aplicación es afín vista como aplicación de la variedad en si misma: $f(v) - f(0) = f(v - 0) = f(v)$.

Como consecuencia de la definición tenemos la siguiente proposición

Proposición 4.1.1. *Sea $f : V \longrightarrow V$ una aplicación afín. Entonces f es suma de una aplicación lineal definida sobre el espacio vectorial subyacente más una traslación.*

$$f(a) = f_p(a - p) + f(p)$$

Sea ahora V una variedad lineal de dimensión finita n y sea $f : V \longrightarrow V$ una aplicación afín. Escojamos un sistema de referencia $\{p; e_1, \ldots, e_n\}$.
En este sistema de referencia tenemos que cualquier punto de la variedad x se expresa de forma única como $x = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n + p = (x_1, \ldots, x_n)$. La aplicación lineal subyacente f_p tiene una representación matricial respecto la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, sea esta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

de manera que

$$f_p(x - p) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si en el sistema de referencia dado tenemos que $f(p) = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f_p(x - p) + f(p) = \\ \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.1}$$

La expresión (4.1) recibe el nombre de *expresión matricial de la aplicación afín.*

Observación 4.1.1. Podemos compactar esta expresión de la manera siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Supongamos ahora que el espacio vectorial subyacente es euclídeo, por lo que tenemos definida una distancia sobre la variedad.

Definición 4.1.2. Las aplicaciones afines que conservan la distancia se denominan *movimientos*.
Es decir, son aquellas aplicaciones tales que para cualquier par de puntos a y b de V se verifica

$$d(a, b) = d(f(a), f(b))$$

Si la aplicación es lineal se denomina isometría.

Ejemplo 4.1.2. En $\mathbb{R}^2$ definimos la aplicación afín siguiente:

$$f(x, y) = (x + 1, y + 2)$$

Dicha aplicación es en efecto, un movimiento, ya que si $a = (x_1, y_1)$ y $b = (x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de E, se tiene:

$$d(a, b) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Por otro lado, puesto que $f(a) = (x_1 + 1, y_1 + 2)$, $f(b) = (x_2 + 1, y_2 + 2)$ tenemos

$$d(f(a), f(b)) = \sqrt{(x_2 + 1 - x_1 - 1)^2 + (y_2 + 2 - y_1 - 2)^2} = d(a, b)$$

4.2. Isometrías en $\mathbb{R}^2$

4.2.1. Giros

Caso 1: Giro alrededor del origen de coordenadas

a) En la base canónica

$$f(x,y) = (x', y')$$

con

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

b) En una base ortonormal

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}', \bar{y}')$$

con

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\operatorname{sen}\alpha \\ \pm\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix}$$

El signo depende de la orientación de la base respecto la canónica, es decir sea S la matriz de cambio de base, si $\det S = 1$ es $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ si $\det S = -1$ es $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Ejemplo 4.2.1. Sea la base $u_1 = e_2, u_2 = e_1$. Entonces $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se tiene $S = S^{-1} = S^t$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Caso 2: Giro alrededor del punto (a, b)

Cambiamos de origen de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \left.\begin{array}{ll} \bar{x} & = x - a \\ \bar{y} & = y - b \end{array}\right\}$$

En este nuevo sistemas de referencia

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}', \bar{y}')$$

con

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix}$$

Deshaciendo el cambio

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix}$$

desarrollando obtenemos

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

4.2.2. Simetrías respecto a rectas

Caso 1: Simetría respecto a una recta que pasa por el origen

En la base canónica
Sea la recta $r \equiv (x,y) = \lambda(v_1, v_2)$. Entonces el simétrico de (x,y) respecto a r es

$$\boxed{(x',y') = 2\frac{\langle (v_1,v_2),(x,y)\rangle}{\|(v_1,v_2)\|^2}(v_1,v_2) - (x,y)}$$

Ejemplo 4.2.2 (Simetría respecto la recta $r \equiv x + 2y = 0$). $v = (-2,1)$, entonces

$$(x',y') = 2\frac{\langle (-2,1),(x,y)\rangle}{5}(-2,1) - (x,y) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$$

Se puede también hacer utilizando aplicaciones lineales:
Tomamos una base ortonormal u_1, u_2 con u_1 la dirección de la recta. Por lo que en esta base la aplicación es:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

Deshaciendo el cambio de base: llamando S a la matriz de cambio de base tenemos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observar que $S^{-1} = S^t$.

Ejemplo 4.2.3 (Simetría respecto la recta $r \equiv x + 2y = 0$). $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$, $S = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$
Observamos que $S^{-1} = S^t = S$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Caso 2: Simetría respecto a una recta cualquiera $r \equiv (p_1, p_2) + \lambda(v_1, v_2)$

Tomando como origen de coordenadas un punto cualquiera de la recta, podemos aplicar la fórmula anterior

$$(x' - p_1, y' - p_2) = 2\frac{\langle (v_1, v_2), (x - p_1, y - p_2)\rangle}{\|(v_1, v_2)\|^2}(v_1, v_2) - (x - p_1, y - p_2)$$

Operando obtenemos

$$\boxed{(x', y') = 2\left((p_1, p_2) + \frac{\langle (v_1, v_2), (x - p_1, y - p_2)\rangle}{\|(v_1, v_2)\|^2}(v_1, v_2)\right) - (x, y)}$$

Ejemplo 4.2.4 (Simetría respecto la recta $r \equiv x + 2y = 1$). $(p_1, p_2) = (1, 0)$, $(v_1, v_2) = (-2, 1)$

$$(x', y') = 2\left((1, 0) + \frac{\langle (-2, 1), (x - 1, y)\rangle}{5}(-2, 1)\right) - (x, y) =$$
$$\left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}\right)$$

También se puede hacer a través de aplicaciones lineales
Para ello tomamos como sistema de referencia
$R = \{(p_1, p_2); \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ donde la base es ortonormal y $\mathbf{u}_1$ la dirección de la recta. Por lo que en esta referencia la aplicación es:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = S^{-1}\left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix}\right),\ \begin{pmatrix}\bar{x}'\\ \bar{y}'\end{pmatrix} = S^{-1}\left(\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix}\right)$$

tenemos

$$\boxed{\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} S^{-1}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix} + S\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} S^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}$$

Observamos que se puede poner de la forma

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) S^{-1}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix} + S\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} S^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

4.3. Isometrías en $\mathbb{R}^3$

4.3.1. Rotaciones

Caso 1: Entorno un eje que pasa por el origen

Sea $(x, y, z) = \lambda(v_1, v_2, v_3)$ el eje de rotación, dicho eje es fijo por la aplicación, luego $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es un vector propio de valor propio 1. $[\mathbf{v}]^\perp$ es invariante puesto que los movimientos conservan ángulos.
Si $\mathbf{u} \in [\mathbf{v}]^\perp$, entonces el ángulo de rotación α coincide con el ángulo que forman $\mathbf{u}$ y $f(\mathbf{u})$, (en general es falso). Por lo tanto la aplicación restringida a $[\mathbf{v}]^\perp$ es un giro.
Sea $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, $\mathbf{u}_2$ un vector de $[\mathbf{v}]^\perp$ de norma 1, y $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2$. Entonces $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con la misma orientación que la base canónica (para probarlo basta ver que $\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) > 0$), y la matriz de la aplicación en dicha base es

$$\bar{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

Por lo que en la base canónica será

$$A = S\bar{A}S^{-1} = S\bar{A}S^t$$

$(S = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}$.)

Caso 2: Entorno un eje cualquiera $r \equiv \mathbf{p} + \lambda \mathbf{v}$

Tomando como sistema de referencia $R = \{\mathbf{p}; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ con $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, $\mathbf{u}_2 \in [\mathbf{v}]^\perp$ de norma 1 y $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2$ (como la de antes).
En este sistema de referencia las ecuaciones son

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

Deshaciendo el cambio tenemos

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - SAS^t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + SAS^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

Ejemplo 4.3.1. Ecuaciones de la rotación alrededor del eje $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(-2, 1, 1)$
Sistema de referencia $R = \{\mathbf{p} = (1, 0, 2); \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1), \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0),$ $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-2, 1, -5)\}$
Luego

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - SAS^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + SAS^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4.3.2. Simetría respecto un plano

Caso 1: plano que pasa por el origen, $\pi \equiv ax + by + cz = 0$

Sea u un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$ su simétrico respecto a π es

$$s(u) = 2u_1 - u$$

donde u_1 es la proyección ortogonal de u sobre el plano (que es un subespacio vectorial).
Equivalentemente

$$s(\mathbf{u}) = -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}$$

donde $\mathbf{v}_1$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre el subespacio ortogonal al plano es decir sobre el subespacio $[(a, b, c)]$. Por lo tanto

$$\boxed{(x', y', z') = (x, y, z) - 2\frac{\langle (a, b, c), (x, y, z)\rangle}{\|(a, b, c)\|^2}(a, b, c)}$$

Al igual que en $\mathbb{R}^2$ podemos resolverlo matricialmente:
Sea $u_1 = \dfrac{v}{\|v\|}$ vector director del plano normalizado. u_2, u_3 una base ortonormal del subespacio director del plano $u_2, u_3 \in [u_1]^{\perp}$
En dicha base, la matriz de la aplicación es

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En la base canónica será:

$$\boxed{A = S\bar{A}S^t}$$

siendo $S = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$.

Caso 2: plano cualquiera $\pi \equiv ax + by + cz = d$

Sea $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ un punto del plano. Tomando este punto como origen de coordenadas tenemos

$$s(u - p) - 2v_1 + u - p$$

donde v_1 es la proyección ortogonal de $u - p$ sobre el subespacio ortogonal al subespacio director del plano, es decir sobre el subespacio $[(a, b, c)]$.

Por lo tanto

$$(x', y', z') - (p_1, p_2, p_3) = (x, y, z) - (p_1, p_2, p_3) - 2\frac{\langle (a,b,c), (x-p_1, y-p_2, z-p_3)\rangle}{\|(a,b,c)\|^2}(a,b,c)$$

y simplificando

$$\boxed{(x', y', z') = (x, y, z) - 2\frac{\langle (a,b,c), (x-p_1, y-p_2, z-p_3)\rangle}{\|(a,b,c)\|^2}(a,b,c)}$$

También en este caso, podemos resolverlo matricialmente:
Consideremos la referencia
$R = \{\mathbf{p}; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ donde $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ es un punto del plano,
$\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ es el vector director del plano normalizado. $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ una base ortonormal del subespacio director del Plano $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in [\mathbf{u}_1]^{\perp}$
En dicha base, las ecuaciones de la simetría son

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}.$$

En la base canónica será:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - S\bar{A}S^t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + S\bar{A}S^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

siendo $S = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$ y $\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.4. Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler constituyen un conjunto de tres coordenadas angulares que sirven para especificar la orientación de un sistema de referencia de ejes ortogonales, normalmente móvil, respecto a otro sistema de referencia de ejes ortogonales normalmente fijos.

Fueron introducidos por L. Euler para estudiar la mecánica del sólido rígido concretamente para describir la orientación de un sistema de referencia un sólido rígido en movimiento.
Dada una base ortonormal positiva $u = \{u_1, u_2; u_3\}$ y un giro f podemos hallar una terna de ángulos ϕ, θ y ψ tales que

$$f = g_\phi \circ g_\theta \circ g_\psi$$

donde g_ϕ es una rotación de ángulo ϕ y eje u_3, g_θ una rotación de ángulo θ y eje $g_\phi(u_2)$ y g_ψ una rotación de ángulo ψ y eje $g_\theta \circ g_\phi(u_1)$.
Los movimientos resultantes de variar uno de los ángulos de Euler dejando fijos los otros dos. Tienen nombres particulares: precesión, nutación, rotación intrínseca.
Veamos como podemos calcular estos ángulos.
Si f es un giro de ángulo α y eje v orientado por v con

$$v = au_1 + bu_2 + cu_3, \quad \|v\| = 1$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= -(1-\cos\alpha)ac - b\operatorname{sen}\alpha) \\
\cos\theta &= \pm\sqrt{1-(\operatorname{sen}\alpha)^2}, \text{ ambos signos son correctos} \\
\operatorname{sen}\phi &= \frac{(1-\cos\alpha)ab + c\operatorname{sen}\alpha}{\cos\theta} \\
\cos\theta &= \frac{\cos\alpha + (1-\cos\alpha)a^2}{\cos\theta} \\
\operatorname{sen}\psi &= \frac{(1-\cos\alpha)bc + a\operatorname{sen}\alpha}{\cos\theta} \\
\cos\psi &= \frac{\cos\alpha + (1-\cos\alpha)c^2}{\cos\theta}
\end{aligned}$$

4.5. Ejercicios resueltos

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación afín defnida de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
x' &= (1-\frac{\mu}{3})x + \frac{\mu}{3}y + \frac{\mu}{3}z \\
y' &= \frac{\mu}{3}x + (1-\frac{\mu}{3})y + \frac{\mu}{3}z \\
z' &= \frac{\mu}{3}x + \frac{\mu}{3}y + (1-\frac{\mu}{3})z
\end{aligned}\right\}$$

Determinar para que valores de μ la aplicación es una simetría.

Solución:

La matriz de la aplicación es

$$A = \begin{pmatrix} (1-\frac{\mu}{3}) & \frac{\mu}{3} & \frac{\mu}{3} \\ \frac{\mu}{3} & (1-\frac{\mu}{3}) & \frac{\mu}{3} \\ \frac{\mu}{3} & \frac{\mu}{3} & (1-\frac{\mu}{3}) \end{pmatrix}$$

Ooservamos que para $\mu \neq 0$ 1 es valor propio de multiplicidad 2 Para que sea una simetría el otro valor propio ha de ser -1 y para ello $3-\mu = 1$ es decir $\mu = 2$

El plano de simetría es $\operatorname{Ker}(A - I)$

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -x + y + z = 0$$

Si $\mu = 0$ la aplicación es la identidad.

2. Estudiar la aplicación afín definida por las ecuaciones siguientes

$$\left.\begin{array}{ll} x' & \frac{1}{3}(2x + 2y + z + 1) \\ y' & \frac{1}{3}(-2x + y + 2z - 2) \\ z' & \frac{1}{3}(x - 2y + 2z + 4) \end{array}\right\}$$

Solución:

Escribimos la aplicación en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que f_p es ortogonal y f es una isometría.

Puesto que la matriz de f_p no es simétrica la aplicación lineal sólo tiene un valor propio y puesto que $\det f_p = 1$ este ha de ser 1.

Determinemos los vectores propios

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Ker}(f_p - I) = [(1,0,1)]$$

Busquemos puntos fijos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Este sistema es claramente incompatible, por lo que no hay puntos fijos.

Veamos si hay rectas fijas.

Si hay alguna recta fija esta debe tener la dirección del vector propio $v = (1,0,1)$, es decir ha de ser de la forma $r \equiv a + \lambda v$, por otra parte el punto de paso $a = (x,y,z)$ ha de verificar que $f(a) - a \in [v]$.

Veamos si hay algún punto a que verifica esta condición:

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lo que es lo mismo:

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1/3 \\ -2/3 \\ \lambda - 4/3 \end{pmatrix}$$

y este sistema es compatible si y sólo si $\lambda = 5/6$. En cuyo caso la recta es

$$\left.\begin{array}{rl} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z & = \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z & = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

3. Sea T un tetraedro regular de vértices A, B, C, D y de arista unidad. Consideremos la aplicación afín tal que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$, $f(D) = A$.

   a) Probar que f conserva la distancia.

   b) Determinar las puntos fijos.

   c) Probar que f es el producto de un giro por una simetría especular

   Solución:

   a) Consideremos el sistema de referencia $\{A; B-A, C-A, D-A\}$,

   Observación 4.5.1. Este sistema de referencia no es ortonormal, pues aunque los vectores tengan norma 1 en ángulo de los vectores dos a dos es 60^{O}, $< v_i, v_j >_{i \neq j} = 1/2$.

   Puesto que la aplicación es afín tenemos

$$\begin{array}{ll} f_A(B-A) & = f(B) - f(A) = C - B = C - A - (B - A) \\ f_A(C-A) & = f(C) - f(A) = D - C = D - A - (C - A) \\ f_A(D-A) & = f(D) - f(A) = A - B = -(B - A) \end{array}$$

   Por lo que en este sistema de referencia la expresión matricial de la aplicación es

$$f(X) = f_A(X-A) + f(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Sea $X - A = (x, y, z)$,

$$\begin{aligned}\|X-A\|^2 &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\ &= x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz\end{aligned}$$

$$\|f(X)-f(A)\|^2 =$$
$$\begin{pmatrix} -x-y-z & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x-y-z \\ x \\ y \end{pmatrix} =$$
$$x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz$$

c) Busquemos puntos fijos:

$$f(X) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema tenemos $X = (1/4, 1/4, 1/4)$, hay un único punto fijo que es el baricentro del tetraedro.

d) $\det(f_A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1$ -1 es el único valor propio de multiplicidad 1 de la aplicación f_A y $v = (1, -1, 1) = v_1 - v_2 + v_3$ es un vector propio, por lo que la recta $(1/4, 1/4, 1/4) + \lambda(1, -1, 1)$ es fija aunque no de puntos fijos.

La invariancia de la traza de f_A nos dice que $2\cos\theta - 1 = -1$, es decir $\cos\theta = 0$.

Por lo que la aplicación es una rotación seguida de una simetría.

Capítulo 5

Cónicas y cuádricas

5.1. Cuádricas en $\mathbb{R}^n$

Definición 5.1.1. Una *cuádrica* en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, que satisfacen la ecuación

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0.$$

Podemos suponer que $a_{ij} = a_{ji}$ ya que $a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i = (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j = \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_i x_j + \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_j x_i$.

Si $n = 2$, la cuádrica recibe el nombre de *cónica*.
Dada la cónica que tiene por ecuación

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0,$$

podemos expresarla matricialmente de la siguiente forma.
Consideremos las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

Observación 5.1.1. A y A_0 son simétricas, luego representan formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ y que las notaremos por φ y φ_0 respectivamente.
La cónica puede describirse como el conjunto de puntos

$$\{p = (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(p, p) = 0\}.$$

Observación 5.1.2. Algunos autores escriben A_∞ y φ_∞ en lugar de A_0 y φ_0.
Dada la cuádrica que tiene por ecuación

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0,$$

podemos expresarla en forma matricial de la siguiente manera. Consideramos las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix},\ A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = 0$$

Observación 5.1.3. A y A_0 son simétricas, luego representan formas cuadráticas en $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ y que las notaremos por φ y φ_0 respectivamente.
La cuádrica puede describirse como el conjunto de puntos

$$\{p = (x, y, z, 1) \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(p, p) = 0\}.$$

Observación 5.1.4. Al igual que para las cónicas, algunos autores escriben A_∞ y φ_∞ en lugar de A_0 y φ_0.

5.1.1. Clasificación de cónicas y cuádricas de $\mathbb{R}^3$

Cuadro de clasificación para las cónicas:

$$\det A \neq 0 \begin{cases} \det A_0 > 0 \quad \text{elipse} \begin{cases} \operatorname{tr} A_0 \cdot \det A > 0 & \text{elipse imaginaria} \\ \operatorname{tr} A_0 \cdot \det A < 0 & \text{elipse real} \end{cases} \\ \det A_0 = 0 \quad \text{parábola} \\ \det A_0 < 0 \quad \text{hipérbola} \end{cases}$$

$$\det A = 0 \begin{cases} \det A_0 > 0 \quad \text{un punto} \\ \det A_0 = 0 \begin{cases} \operatorname{rg} A = 2 & \text{par de rectas paralelas} \\ \operatorname{rg} A = 1 & \text{recta doble} \end{cases} \\ \det A_0 < 0 \quad \text{par de rectas que se cortan} \end{cases}$$

Observación 5.1.5. Si $A_0 = 0$ la ecuación dada es de grado uno como máximo.

Cuadro de clasificación para las cuádricas de $\mathbb{R}^3$

$\diamond$ Caso $\det A \neq 0$

$$\begin{cases} \det A_0 \neq 0 \begin{cases} \det A > 0 \begin{cases} A_0 \text{ d. en s.: elipsoide imaginario} \\ A_0 \text{ no d. en s.: hiperboloide de una hoja} \end{cases} \\ \det A < 0 \begin{cases} A_0 \text{ d. en s.: elipsoide real} \\ A_0 \text{ no d. en s.: hiperboloide de dos hojas} \end{cases} \end{cases} \\ \det A_0 = 0 \begin{cases} \det A > 0 \text{ paraboloide hiperbólico} \\ \det A < 0 \text{ paraboloide elíptico} \end{cases} \end{cases}$$

$\diamond$ Caso $\det A = 0$

$$\begin{cases} \det A_0 \neq 0 \begin{cases} A_0 \text{ d. en s.: punto} \\ A_0 \text{ no d. en s.: cono} \end{cases} \\ \det A_0 = 0 \begin{cases} \operatorname{rg} A = 3,\ \operatorname{rg} A_0 = 2 \begin{cases} A_0 & \text{semid.: cilindro elíptico (a)} \\ A_0 & \text{no semid.: cilindro hiperbólico} \end{cases} \\ \operatorname{rg} A = 3, \operatorname{rg} A_0 = 1 \text{ cilindro parabólico} \\ \operatorname{rg} A = 2, \operatorname{rg} A_0 = 2 \text{ par de planos que se cortan (b)} \\ \operatorname{rg} A = 2, \operatorname{rg} A_0 = 1 \text{ par de planos paralelos (c)} \\ \operatorname{rg} A = 1, \operatorname{rg} A_0 = 1 \text{ plano doble} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \text{real si } A \text{ no semid.} \\ \text{imaginario si } A \text{ semid.} \end{cases}$$

(b) $\begin{cases} \text{reales si } A_0 \text{ no semid.} \\ \text{imaginarios con } \cap \text{ real si } A_0 \text{ semid.} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \text{reales si } A \text{ no semid.} \\ \text{imaginarios si } A \text{ semid..} \end{cases}$

También pueden clasificarse las cuádricas a través del rango e índice de las formas cuadráticas A y A_0 asociadas.

Ejemplo 5.1.1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tenemos:
$r = \operatorname{rang} A = 3$, $i = \text{índice}\, A = 1$
$r_0 = \operatorname{rang} A_0 = 1$, $i_0 = \text{índice}\, A_0 = 0$
Luego la cuádrica es un *cilindro parabólico*.

5.2. Forma reducida de una cónica y de una cuádrica

Definición 5.2.1. Decimos que una cuádrica

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = X^tA_0X + 2LX + c = 0.$$

es con centro si el sistema

$$A_0X = -L^t$$

tiene solución

Ejemplo 5.2.1. Sea

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tiene solución única $C = (1, 2)$.

Una cuádrica puede tener centro único (si $\det A_0 \neq 0$), una variedad lineal de centros o no tener centro.

a) Cónicas y cuádricas con centro

Existe una referencia respecto la cual la cónica o cuádrica se expresa de la forma

$$\lambda_1 \overline{x} + \lambda_2 \overline{y} + \lambda = 0, \qquad \text{para cónicas,}$$

$$\lambda_1 \overline{x} + \lambda_2 \overline{y} + \lambda_3 \overline{z} + \lambda = 0, \qquad \text{para cuádricas.}$$

Los valores λ_i son los valores propios de la matriz A_0 y λ es el valor que toma el (o los) centro(s) sobre la cónica o cuádrica.

Una referencia para la cual la cónica o cuádrica adopta la forma reducida es la formada por una base ortonormal de vectores propios de A_0 y como origen de coordenadas un centro.

b) Cónicas y cuádricas sin centro

Existe una referencia respecto la cual la cónica o cuádrica se expresa de la forma

$$\lambda_1 \overline{x} + 2\beta \overline{y} = 0, \qquad \text{para cónicas,}$$

$$\lambda_1 \overline{x} + \lambda_2 \overline{y} + 2\beta \overline{z} = 0, \qquad \text{para cuádricas.}$$

siendo λ_i los valores propios de la matriz A_0.

Existen distintas maneras de obtener el valor de β y la referencia especial.

Tal y como hemos dicho anteriormente, Los invariantes (rango e índice) de las dos formas cuadráticas asociadas a una cuádrica permiten clasificarla, presentamos a continuación un cuadro con los invariantes y forma reducida de las cónicas y cuádricas de $\mathbb{R}^3$.

Cónicas	$r(A)$	$r(A_0)$	$i(A)$	$i(A_0)$	ec. reducida
Elipse real	3	2	1	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Hipérbola	3	2	1	1	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Elipse imag.	3	2	0	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
Parábola	3	1	1	0	$y^2=2px$
rectas img. con $\cap$ real	2	2	0	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
Rectas no $\parallel$	2	2	1	1	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
Rectas $\parallel$	2	1	1	0	$x^2=a^2$
Rectas img. $\parallel$	2	1	0	0	$x^2=-a^2$
Recta	2	0	1	0	$ax+by=0$
Recta doble	1	1	0	0	$x^2=0$
$\emptyset$	1	0	0	0	$1=0$
$\mathbb{R}^2$	0	0	0	0	$0=0$

Cuádricas	$r(A)$	$r(A_0)$	$i(A)$	$i(A_0)$	ec. reducida
Elipsoide real	4	3	1	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Hiperboloide de 1 hoja	4	3	2	1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
Hiperboloide de 2 hojas	4	3	1	1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
Elipsoide imag.	4	3	0	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$
Paraboloide elip.	4	2	1	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+2\beta z=0$
Paraboloide hiper.	4	2	2	1	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+2\beta z=0$
Cono img. con vértice real	3	3	0	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
Cono real	3	3	1	1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
Cilindro real elíp.	3	2	1	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Cilindro hiperb.	3	2	1	1	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Cilindro img.	3	2	1	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
Cilindro parab.	3	1	1	0	$y^2=2px$
planos img. con $\cap$ real	2	2	0	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
Planos no $\parallel$	2	2	1	1	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
planos $\parallel$	2	1	1	0	$x^2=a^2$
Planos img. $\parallel$	2	1	0	0	$x^2=-a^2$
plano	2	0	1	0	$ax+by=0$
plano doble	1	1	0	0	$x^2=0$
$\emptyset$	1	0	0	0	$1=0$
$\mathbb{R}^3$	0	0	0	0	$0=0$

5.3. Estudio particular de cónicas y cuádricas

Definición 5.3.1. Llamaremos *polar* de un punto $p \in \mathbb{R}^2$ respecto a una cónica a la variedad lineal

$$(x_0, y_0, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Si el punto p pertenece a la cónica y no es un centro, la polar es la recta *tangente* a la cónica en dicho punto.

Definición 5.3.2. Llamaremos *polar* de un punto $p \in \mathbb{R}^3$ respecto cuádrica a la variedad lineal

$$(x_0, y_0, z_0, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Si el punto p pertenece a la cuádrica y no es un centro, la polar es el plano tangente a la cuádrica en dicho punto.
Si el punto es un centro la polar de dicho punto es todo el espacio afín.

Asíntotas de una hipérbola

Definición 5.3.3. Se llaman asíntotas de una hipérbola a las polares (afines) de los puntos impropios de la cónica.
Si las asíntotas son perpendiculares entonces la hipérbola recibe el nombre de *equilátera*.

Observación 5.3.1. Las *asíntotas* són las rectas que pasan por el centro y tienen por dirección las direcciones isótropas de A_0. (Se dice que un vector $v \neq 0$ es isótropo respecto una métrica A_0 si y sólo si $v^t A_0 v = 0$).

Ejemplo 5.3.1. Las asíntotas de la hipérbola $6xy - 2x - 1 = 0$. las obtenemos de la siguiente forma.
Las direcciones isótropas son (x_0, y_0) tales que

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 6x_0y_0 = 0.$$

Luego son

$$v_1 = (1,0), \quad v_2 = (0,1).$$

Determinemos el centro de la hipérbola

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad C = \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Luego las asíntotas son

$$(x,y) = \left(0, \frac{1}{3}\right) + \lambda(1,0), \qquad (x,y) = \left(0, \frac{1}{3}\right) + \lambda(0,1).$$

Cono tangente

Llamaremos *cono tangente* a la cuádrica Q desde el punto p de $\mathbb{R}^3$ al conjunto de rectas que pasan por p y son tangentes a la cuádrica:

$$\{x \mid (\varphi(p,p)\varphi(x,x)) - (\varphi(x,p))^2 = 0\} \qquad \text{(a)}$$

siendo φ la forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^4$ que define a la cuádrica Q (los puntos x y p están situados en el hiperplano afín $\mathcal{A} = \{t = 1\}$). Los puntos de tangencia del cono con la cuádrica son los puntos x tales que verifican por una parte la ecuación (a) y por otra la ecuación de la cuádrica $\varphi(x,x) = 0$. Esto es

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,x) = 0 \\ \varphi(x,p) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(b)}$$

Dicho conjunto recibe el nombre de *contorno aparente* desde p.

Observación 5.3.2. El conjunto aparente está en el plano polar respecto la cuádrica del punto p.

Cilindro proyectante

Consideremos una cuádrica Q en $\mathbb{R}^3$ y un punto $p = (x_0, y_0, z_0, 0) \in \mathbb{R}^4$, es decir un punto impropio del hiperplano afín $\mathcal{A} = \{t = 1\}$. Llamaremos *cilindro proyectante* de la cuádrica Q en la dirección de $p = (x_0, y_0, z_0, 0)$ (es decir un punto impropio) al conjunto de rectas paralelas a la dirección de p y son tangentes a la cuádrica:

$$\{x \in \mathcal{A} \mid (\varphi(p,p)\varphi(x,x)) - (\varphi(x,p))^2 = 0\}$$

siendo φ la forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^4$ que define a la cuádrica Q. Los puntos de tangencia del cilindro con la cuádrica son los puntos x tales que

$$\left.\begin{array}{r}\varphi(x,x)=0\\ \varphi(x,p)=0\end{array}\right\}.$$

Dicho conjunto recibe el nombre de *contorno aparente* desde p.

5.4. Ejercicios resueltos

1. Clasificar las cónicas siguientes

   a) $x^2+2xy+y^2+2x-1=0$,

   b) $2xy+2x-2y+1=0$,

   c) $x^2+y^2-2x+2y-3=0$.

   Solución:

   Utilizando la tabla de clasificación:

   a) los determinantes de las matrices A y A_0 son:

   $$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0,\qquad \begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0.$$

   La cónica es una *parábola*.

   b) los determinantes de las matrices A y A_0 son:

   $$\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=-3\neq 0,\qquad \begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1<0.$$

   Luego la cónica es una *hipérbola*.

   c) los determinantes de las matrices A y A_0 son:

   $$\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\-1&1&-3\end{vmatrix}=-5\neq 0,\qquad \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1>0$$

la cónica es una elipse.

Veamos si es real, para ello calculamos $\mathrm{tr}A_0 \cdot \det A = 2 \cdot (-5) < 0$,

luego la *elipse es real*.

2. Clasificar las cuádricas siguientes

   a) $4x^2 + z^2 + 4xz - 4y + 1 = 0$.

   b) $x^2 + y^2 + 9z^2 - 6xz + 2x - 2y + 2 = 0$.

   c) $xy + yz + xz - 1 = 0$.

Solución:

Utilizando la tabla:

a) los rangos de las matrices A y A_0 son:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A tiene un menor de orden 3 no nulo: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, luego la matriz A tiene rango tres.

$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Claramente el rango de A_0 es 1.

La cuádrica es un *cilindro parabólico*.

b) los determinantes de las matrices A y A_0 son

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} < 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

La cuádrica es un *paraboloide elíptico*.

c) los determinantes de las matrices A y A_0 son

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} < 0, \qquad \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} < 0.$$

A_0 no está definida en signo ya que la traza de A_0 es nula, (los valores propios no pueden tener todos el mismo signo), por lo que la cuádrica es un *hiperboloide de dos hojas*.

3. Determinar la recta tangente a la cónica

$$9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$$

en el punto $(-1, 2)$.

Solución:

Observamos que el punto (-1,2) es de la cónica y aplicamos la definición

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -9 \\ 0 & 4 & -8 \\ -9 & -8 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$18x - 18 = 0.$$

Esto es, la recta tangente es la recta:

$$\boxed{x = 1.}$$

4. Determinar la recta polar a la cónica

$$8x^2 + 2y^2 - 4y + 2 = 0$$

en el punto $(0, 1)$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Luego la polar es *todo el plano*.

Observación 5.4.1. el punto $(0, 1)$ es centro de la cónica, de donde el resultado.

5. Determinar el plano tangente al hiperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0, z_0) de la cuádrica.

Solución:

Apliquemos la definición

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & & \\ & \frac{1}{b^2} & & \\ & & -\frac{1}{c^2} & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} - 1 = 0.$$

6. Determinar el plano tangente al hiperboloide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

en el punto $(2, 0, 0)$. Determinar la intersección del hiperboloide con el plano obtenido.

Solución:

El plano tangente es

$$\frac{2x}{4}+\frac{0y}{9}-\frac{0z}{16}-1=0.$$

Esto es, el plano

$$x=2.$$

Intersecando el hiperboloide con el plano tenemos

$$\left.\begin{aligned} x=2\\ \frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0\end{aligned}\right\}$$

dicho sistema de ecuaciones determina el par de rectas

$$\left.\begin{aligned} x=2\\ \frac{y}{9}-\frac{z}{16}=0\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} x=2\\ \frac{y}{9}+\frac{z}{16}=0\end{aligned}\right\}.$$

Observación 5.4.2. Para cada punto p de la cuádrica, el plano tangente a p corta a la cuádrica según un par de rectas que se cortan en p.

Las cuádricas que son cortadas por los planos tangentes según rectas reciben el nombre de *regladas*.

7. Para que valores de α la cuádrica

$$x^2+2\alpha xy+2xz+z^2-2x+4y-z+1=0$$

tiene centro. Para dichos valores hallar el centro.

Solución:

Resolvamos el sistema del centro

$$\begin{pmatrix}1&\alpha&1\\ \alpha&0&0\\ 1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Observamos que este sistema es compatible si y sólo si $\alpha\neq 0$ y en dicho caso el centro es único y vale

$$\boxed{C=(-\frac{2}{\alpha},\frac{1}{2\alpha},\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{2}).}$$

8. Dada la cónica $4x^2 + ay^2 + 2x - 2 = 0$. Dar, para todo valor de $a \in \mathbb{R}$, su forma reducida canónica así como el sistema de referencia para el cual la cónica adopta su forma reducida.

Solución:

Sean

$$A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

las formas bilineal y lineal asociadas a la cónica.

A_0 es diagonal, luego

$$D_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad S = I.$$

Sea Z tal que $A_0 Z = -L^t$, sistema compatible $\forall a \in \mathbb{R}$, que tiene solución única si a $\neq 0$, y una recta de soluciones para $a = 0$. sea $z = (-\frac{1}{4}, 0)$ la (o una de las) solución del sistema.

Entonces en el sistema de referencia:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

la cónica adopta la forma reducida:

$$\boxed{4x_1^2 + ay_1^2 + d = 0 \quad \text{con} \quad d = Z^t A_0 Z + 2LZ + c = -\frac{9}{4}.}$$

Observación 5.4.3. Aún en el caso $a = 0$ en que el centro no es único, el valor de d es independiente del centro escogido (dos posibles centros difieren de un vector que pertenece al núcleo de A_0).

Tenemos:

$a > 0$	elipse
$a < 0$	hipérbola
$a = 0$	par de rectas paralelas $(x = \pm\frac{3}{4})$.

Observación 5.4.4. Para clasificarla simplemente nos basta con hacer:

$$\left.\begin{array}{r} a > 0 \\ \det A < 0 \\ \det A_0 > 0 \end{array}\right\} \qquad \text{elipse}$$

$$\left.\begin{array}{r} a < 0 \\ \det A > 0 \\ \det A_0 < 0 \end{array}\right\} \qquad \text{hipérbola}$$

$$\left.\begin{array}{r} a = 0 \\ \det A = \det A_0 = 0, \ \operatorname{rang} A = 2 \end{array}\right\} \qquad \text{par de rectas paralelas.}$$

9. Dada la cónica

$$3x^2 + \alpha y^2 + 2x - 2 = 0.$$

Dar, para todo valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, su forma reducida canónica así como el sistema de referencia para el cual la cónica adopta su forma reducida.

Solución:

Determinantes de las matrices A y A_0:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -7\alpha, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha$$

$\det A \neq 0$ si y sólo si $\alpha \neq 0$, en cuyo caso:

Si $\alpha > 0$ $\det A_0 > 0$, $\det A < 0$ y $\operatorname{traza} A_0 \cdot \det A < 0$. Es una elipse real.

Si $\alpha < 0$, entonces $\det A_0 < 0$ por lo que es una hipérbola.

Si $\alpha = 0$ es $\det A = \det A_0 = 0$, $\operatorname{rango} A = 2$, por lo que es un par de rectas paralelas.

Para todo valor de α, la cónica tiene centro:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Para todo $\alpha \neq 0$, la cónica tiene centro único y es $C = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$,

para $\alpha = 0$, la cónica tiene una recta de centros que es $3x + 1 = 0$.

Los valores propios de A_0 son 3 y α y una base ortonormal de vectores propios es $\{(1,0),(0,1)\}$.

Para todo α podemos tomar como origen de coordenadas el punto $C = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, (observar que para $\alpha = 0$, este punto está en la recta de centros).

Tenemos pues, el sistema de referencia

$$\boxed{R = \left\{\left(-\frac{1}{3}, 0\right); (1,0),(0,1)\right\}.}$$

Para tener la forma reducida falta determinar el valor que toma la cónica sobre el (o los) centros de la cónica

$$d = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \alpha \cdot 0 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 2 = -3$$

Observar que para $\alpha = 0$ el valor de d no depende del centro escogido dentro de la recta de centros.

La forma reducida de la cónica es

$$\boxed{3\overline{x}^2 + \alpha\overline{y}^2 - 3 = 0.}$$

10. Dada la cuádrica $x^2 + 2xz + z^2 + 2x + 2y + 1 = 0$. Dar su forma reducida canónica, así como la referencia especial para la cual la cuádrica toma su forma reducida.

Solución:

Sean $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(X^tA_0X + 2LX + c = 0)$.

Existe S ortogonal tal que $A_0 = S^t D_0 S$ con D_0 diagonal,

$$D_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \qquad S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(S^t es la matriz de vectores propios de A_0).

Sea $X = SX_1 + Z, \quad \Longrightarrow \boxed{X_1^t D_0 X_1 + 2MX_1 + d = 0}$

con $M = (Z^t A_0 + L)S = Z^t A_0 S + N_1 + N_2$, y $LS = N_1 + N_2$ de forma que si $r = \operatorname{rg} A_0$ $\;N_1$ tiene nulas las $n-r$ últimas componentes y N_2 las $n-r$ primeras, y $\;d = Z^t A_0 Z + 2LZ + c$.

Observación 5.4.5. $N_2 \neq 0$ ya que $r \neq \operatorname{rg}(A_0|L)$ y en la matriz D_0 los valores propios nulos han sido colocados al final.

$$LS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= N_1 + N_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0) + (0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Busquemos Z de forma que $\boxed{M = N_2}$, esto es: tal que $Z^t A_0 S + N_1 = 0$, (este sistema es siempre compatible por construcción).

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego $Z^t = (-\frac{1}{2}, 0, 0)$, y para esta Z la ecuación de la cuádrica es:

$\boxed{X_1^t D_0 X_1 + 2N_2 X_1 + d = 0}$

con

$$d = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 = \frac{1}{4},$$

y la ecuación es

$$\boxed{2x_1^2 + 2y_1 + \sqrt{2}z_1 + \frac{1}{4} = 0.}$$

Escribamos ahora, $2x_1^2 + 2(l_2y_1 + l_3z_1) + \frac{1}{4} = 0.$ y hagamos el cambio

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \\ y_2 &= -\frac{1}{\beta}(l_2y_1 + l_3z_1) = -\frac{\sqrt{6}}{3}(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}z_1) \\ z_2 &= \ldots\ldots \end{aligned}$$

con $\beta^2 = l_2^2 + l_3^2 = 1 + \frac{1}{2}\,, \beta > 0,$

z_2 tal que la matriz S_1 resultante sea ortogonal; sea pues $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}y_1 + \frac{\sqrt{6}}{3}z_1$.

La relación entre los sistemas de referencia es $X_1 = S_1^tX_2$ y por tanto

$$\boxed{X = SS_1^tX_2 + Z}$$

con

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix},$$

Con este nuevo cambio la ecuación queda de la forma

$$2x_2^2 - \sqrt{6}y_2 + \frac{1}{4} = 0.$$

Ahora, hacemos la traslación

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_3 \\ y_2 &= y_3 + \frac{\sqrt{6}}{24} \\ z_2 &= z_3 \end{aligned}\right\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left.\begin{aligned} x_2 &= x_3 \\ -\sqrt{6}y_2 + \frac{1}{4} &= -\sqrt{6}y_3 \\ z_2 &= z_3 \end{aligned}\right\}$$

esto es

$$X_2 = IX_3 + T,$$

y la ecuación final es:

$$\boxed{2x_3^2 - \sqrt{6}y_3 = 0.}$$

Las ecuaciones del sistema de referencia son

$$\boxed{X = SS_1^t(X_3 + T) + Z}$$

La cuádrica es un *cilindro parabólico*.

11. Determinar la referencia especial métrica así como la ecuación reducida métrica de la cuádrica

$$4x^2 + z^2 - 4xz - 4y - 2z = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que $(r, r_0, i, i_0) = (3, 1, 1, 0)$, se trata de un cilindro parabólico.

Los valores propios de la matriz A_0 son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Referencia especial métrica:

u_1 es un vector propio de valor propio 5 y de norma 1: $u_1 \in \operatorname{Ker}(A_0 - 5I)$, $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1)$.

$u_2 = (x, y, z)$ es un vector de norma 1 y tal que $(x, y, z, 0) \in \operatorname{Ker} A$ luego $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$. Notar que $u_2 \in \ker A_0$ luego necesariamente es un vector perpendicular a u_1 (son vectores propios de A_0 de valor propio distinto).

$u_3 = (x, y, z) \in \ker A_0$ pero $(x, y, z, 0) \notin \ker A$. Puesto que u_3 es perpendicular a u_1 y u_2 podemos obtenerlo haciendo $u_1 \wedge u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{30}}(1, 5, 2)$.

El origen de coordenadas es un *vértice* de la cuádrica. La variedad lineal de vértices viene dada por

$$\text{cuádrica} \cap H_\lambda^{\perp_A}$$

siendo $H_\lambda = \{(x, y, z, 0)\}$ con $\{(x, y, z)\}$ el subespacio de vectores propios de A_0 de valor propio no nulo, y $H_\lambda^{\perp_A}$ el subespacio ortogonal con respecto la métrica A, de H_λ.

En nuestro caso $H_\lambda = [(-2, 0, 1, 0)]$, luego $H_\lambda^{\perp_A}$ viene dado de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{5} + 2x.$$

Intersecando dicha variedad con la cuádrica tenemos que la variedad de vértices es

$$(0, -\frac{9}{100}, \frac{1}{5}, 1) + [(1, -1, 2, 0)]$$

Podemos tomar como vértice $v = (0, -\frac{9}{100}, \frac{1}{5}, 1)$.

En el sistema de referencia $R = \{v; u_1, u_2, u_3\}$ la cuádrica adopta la forma

$$5x^2 + 2\beta z = 0,$$

falta determinar el valor de β. Para ello, tomamos el vector u_3 y consideramos $\frac{1}{\sqrt{30}}(1, 5, 2, 0)$. Entonces

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{9}{100} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{30}}.$$

12. Determinar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1 = (1, -2)$ y $F_2 = (1, 4)$, y que pasa por el punto (5,1).

Solución:

Sabemos que

$$\begin{aligned} d(F_1, F_2) &= 2c \\ d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2a \end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sqrt{(1-1)^2 + (-2-4)^2}}{2} = 3 \\ a &= \frac{\sqrt{(5-1)^2 + (1+2)^2} + \sqrt{(5-1)^2 + (1-4)^2}}{2} = 5. \end{aligned}$$

Además sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$ por lo que

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$$

Luego, y en el sistema de referencia:

$$\begin{aligned} &\overline{O} = \frac{F_1 + F_2}{2} = (1, 1) \\ &v_1 = (0, 1) \quad \text{vector unitario en la dirección de } F_2 - F_1 \\ &v_2 = (1, 0) \quad \text{vector unitario y perpendicular a } v_1 \end{aligned}$$

la ecuación de la elipse es:

$$\frac{\overline{x}^2}{25} + \frac{\overline{y}^2}{16} = 1.$$

En el sistema de referencia ordinario:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la ecuación de la elipse es:

$$\begin{gathered} \frac{(y-1)^2}{25} + \frac{(x-1)^2}{16} = 1 \Longleftrightarrow \\ 25x^2 + 16y^2 - 50x - 32y - 359 = 0. \end{gathered}$$

13. Hallar el lugar geométrico de los polos de las normales a la hipérbola: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

Solución:

La normal a la hipérbola en un punto de ésta, es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto, y la recta tangente es la polar del punto de contacto.

Polar del punto: (x_0, y_0)

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \qquad \boxed{\frac{xx_0}{4} - yy_0 = 1}.$$

Recta normal: vector director $(\frac{x_0}{4}, -y_0)$ y punto de paso (x_0, y_0):

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\frac{x_0}{4}, -y_0) \qquad \equiv \qquad 4y_0x + x_0y - 5x_0y_0 = 0$$

Polo de dicha recta: para ello tomamos dos puntos cualesquiera de dicha recta, la intersección de sus polares nos proporcionará el punto buscado.

Sea $(x_0, y_0) \in r$ su polar es $\frac{xx_0}{4} - y_0y = 1$.

Sea $(0, 5y_0) \in r$, su polar es $\begin{pmatrix} 0 & 5y_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow$
$-5y_0y - 1 = 0$.

El punto buscado es:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_0x}{4} - y_0y - 1 = 0 \\ 5y_0y + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} x &= \frac{16}{5x_0}, \\ y &= -\frac{1}{5y_0}. \end{aligned} \qquad \text{a}$$

La ecuación del lugar geométrico la podemos obtener eliminando x_0, y_0 de la ecuación (a), imponiendo que (x_0, y_0) sea un punto de la hipérbola.

$$\frac{x_0^2}{4} - y_0^2 = 1$$

$$x_0 = \frac{16}{5x}, \qquad y_0 = -\frac{1}{5y}.$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{-x^2 + 64y^2 - 25x^2y^2 = 0}.$$

14. Probar que las normales, por el vértice de un cono real de los planos tangentes, engendran otro cono con los mismos ejes que el primero.

Solución:

Podemos suponer que tenemos la ecuación del cono referida a sus ejes principales, por lo tanto será:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0$$

y puesto que el cono es real, es

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{33} < 0.$$

El vértice del cono es obviamente el origen de coordenadas.

Consideremos un punto cualquiera del cono, distinto del vértice, $p = (x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$. La ecuación del plano tangente al cono por dicho punto es la polar de dicho punto.

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

esto es

$$a_{11}x_0x + a_{22}y_0y + a_{33}z_0z = 0.$$

La recta normal a dicho plano, pasando por $(0,0,0)$ tendrá por vector director a:

$$(a_{11}x_0, a_{22}y_0, a_{33}z_0),$$

luego la ecuación de dicha recta es:

$$(x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(a_{11}x_0, a_{22}y_0, a_{33}z_0).$$

Obtendremos el lugar geométrico eliminando los parámetros λ, x_0, y_0 y z_0 de la ecuación de la recta.

El parámetro λ se puede eliminar expresando la recta en forma continua, los otros parámetros imponiendo que son las coordenadas de un punto del cono.

$$\frac{x}{a_{11}x_0} = \frac{y}{a_{22}y_0} = \frac{z}{a_{33}z_0} = \lambda,$$

$$a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 = 0.$$

De donde

$$\frac{x^2}{a_{11}} + \frac{y^2}{a_{22}} + \frac{z^2}{a_{33}} = 0,$$

que es la ecuación canónica de un cono referido al mismo sistema de referencia que el primero, luego tienen los mismos ejes.

15. Determinar las asíntotas de la hipérbola $4xy - 2x - 1 = 0$.

Solución:

Las direcciones isótropas son (x_0, y_0) tales que $4x_0y_0 = 0$. Luego son

$$v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (0, 1).$$

Determinemos el centro de la hipérbola

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad C = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Luego las asíntotas son

$$\boxed{(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right) + \lambda(1, 0), \qquad (x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right) + \lambda(0, 1).}$$

16. Probar que una condición necesaria y suficiente para que una hipérbola sea equilátera es que la traza de la matriz A_0 sea nula.

Solución:

Puesto que la traza de una matriz es invariante por cambio de base, podemos suponer que la hipérbola está en forma reducida normal

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Las asíntotas de la hipérbola son las rectas

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Estas rectas son perpendiculares si y sólo si

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 0$$

y esto es así, si y sólo si $a = b$,

por lo que

$$\operatorname{traza} A_0 = \frac{1}{a^2} + \left(-\frac{1}{b^2}\right) = 0.$$

17. Determinar μ de forma que

$$3x^2 - 5y^2 - 2xy - 4x + 2 + \mu(x^2 - 2y^2 - xy) = 0$$

sea una hipérbola equilátera. Para este valor de μ encontrar centro, ecuación canónica, asíntotas y focos.

Solución:

Esta cónica será una hipérbola si $\det A \neq 0$ y $\det A_0 < 0$, siendo A y A_0 las matrices de las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$y $\mathbb{R}^2$ asociadas.

Para que una hipérbola sea equilátera ha de verificarse además que sus asíntotas sean perpendiculares, lo que es equivalente a que la traza de A_0 sea nula.

Escribamos pues las matrices A y A_0

$$A=\begin{pmatrix}3+\mu & -1-\frac{\mu}{2} & -2\\ -1-\frac{\mu}{2} & -5-2\mu & 0\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad A_0=\begin{pmatrix}3+\mu & -1-\frac{\mu}{2}\\ -1-\frac{\mu}{2} & -5-2\mu\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}A_0 = 3+\mu-5-2\mu = 0 \Longrightarrow \mu=-2,$$

y para este valor de μ es $\det A = 2 \neq 0$, $\det A_0 = -1 < 0$.

Luego para $\mu=-2$ es en efecto una hipérbola equilátera.

Busquemos pues, para dicho valor, el centro de la cónica.

El centro de la cónica es la solución del sistema de ecuaciones $Z^tA_0 + L = 0$, siendo $Z^t=(x,y)$ y $L=\begin{pmatrix}-2 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{r}x-2=0\\ -y=0\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{r}x=2\\ y=0\end{array}\right\}$$

luego $Z^t=(2,0)$.

La ecuación canónica es $\mu_1x^2+\mu_2y^2+d=0$, donde μ_i son los valores propios de A_0 y $d=LZ+c$.

$$A_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \text{luego} \quad \mu_1=1, \quad \mu_2=-1 \quad d=\begin{pmatrix}-2, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}+2=-2.$$

$\Longrightarrow$ la ecuación canónica es: $x^2-y^2-2=0, \equiv \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1.$

Se llaman *ejes* de una cónica a las rectas que pasan por el centro y que tienen la dirección de los vectores propios de A_0 (matriz simétrica real)

$$A_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{luego} \quad e_1=(1,0)\,, e_2=(0,-1)$$

es una base ortonormal de vectores propios.

$$\Longrightarrow \text{ los ejes son } \begin{array}{ll} v_1 \equiv (2,0)+\lambda(1,0) \Longleftrightarrow & y=0, \\ v_2 \equiv (2,0)+\lambda(0,1) \Longleftrightarrow & x=2. \end{array}$$

$\diamond$ Las asíntotas de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ son: $\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}$ que para $a=b=\sqrt{2}$ son $\boxed{x=\pm y}$.

Las ecuaciones de las asíntotas en el sistema de referencia natural son: $(X=SY+Z)$ $\boxed{x-2=\pm y}$

$\diamond$ Los focos de la hipérbola son: $(\pm c,0)$ siendo $c^2=a^2+b^2$, que para $a=b=\sqrt{2}$ es $c=2$, y en el sistema de referencia natural son: $(X=SY+Z)$ $F_1=(4,0)$, $F_2=(0,0)$.

18. Determinar λ de manera que la cónica

$$(5+2\lambda)x^2-(3+\lambda)y^2-(2+\lambda)xy+2x-4y+1=0$$

sea una hipérbola equilátera

Solución:

Sabemos que una hipérbola es equilátera si y sólo si la traza de A_0 es nula. Obliguemos pues, a que

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 5+2\lambda & -\frac{1}{2}(2+\lambda) \\ -\frac{1}{2}(2+\lambda) & -(3+\lambda) \end{pmatrix}=0,$$

$$(5+2\lambda)-(3+\lambda)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda=-2.$$

Comprobemos que en efecto, para $\lambda=-2$ la cónica es una hipérbola

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A \neq 0, \quad \text{y} \quad \det A_0 < 0$$

por lo que la cónica es una hipérbola.

19. a) ¿Para que valores de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la cuádrica

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + \lambda(x - a + \mu y)z = 0 \quad \text{con } a, r \neq 0.$$

tiene centro?.

b) Determinar el centro para los casos en que ello sea posible.

c) Probar que los centros describen un hiperboloide de una hoja y de revolución.

Solución:

a) El sistema de centro es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\lambda\mu}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda\mu}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\lambda a}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(a)}$$

$$\det A_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\lambda\mu}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda\mu}{2} & 1 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2 - \lambda^2\mu^2.$$

Se tiene que

i) si $\det A_0 \neq 0$, el sistema es compatible y determinado.

ii) si $\det A_0 = 0$, equivalentemente $4 = \lambda^2(1 + \mu^2)$, (por lo que $\lambda \neq 0$), en dicho caso para que las cuádricas tengan centro se ha de cumplir que

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda\mu}{2} & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda\mu}{2} & 1 & -\frac{\lambda a}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda a}{2} & -r^2 \end{vmatrix} = 0.$$

(Si $\det A \neq 0$ la cuádrica sería un paraboloide que no tiene centro).

Calculemos pues, dicho determinante

$$\det A = -r^2 - \frac{a^2\lambda^2}{4} + \frac{r^2\lambda^2\mu^2}{4} + \frac{\lambda^2 r^2}{4}.$$

Si $\det A = 0$ entonces

$$r^2\frac{a^2\lambda^2}{4} = \frac{r^2\lambda^2}{4}(1+\mu^2).$$

Teniendo en cuenta que $1+\mu^2 = \dfrac{4}{\lambda^2}$ ha de ser $\dfrac{a^2\lambda^2}{4} = 0$, pero $a \neq 0$ y $\lambda \neq 0$.

Luego si $\det A_0 = 0$, la cuádrica no tiene centro.

b) Resolviendo el sistema del centro (a) obtenemos, para cada valor de λ y μ verificando la condición i), las coordenadas del centro.

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{a\lambda^2}{4-\lambda^2-\lambda^2\mu^2} \\ y &= -\frac{a\lambda\mu^2}{4-\lambda^2-\lambda^2\mu^2} \\ z &= \frac{2a\lambda}{4-\lambda^2-\lambda^2\mu^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

c) Describamos de forma implícita la “superficie”que tenemos definida en forma paramétrica, descrita por los centros

$$\begin{aligned} &\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &(\lambda,\mu) \longrightarrow \Big(-\frac{a\lambda^2}{4-\lambda^2-\lambda^2\mu^2}, -\frac{a\lambda^2\mu}{4-\lambda^2-\lambda^2\mu^2}, \frac{2a\lambda}{4-\lambda^2-\lambda^2\mu^2}\Big). \end{aligned}$$

Para ello eliminemos los parámetros λ y μ de las ecuaciones (b)

Primero observamos que si $z = 0$ entonces $x = y = 0$, luego $(0,0,0)$ está en el lugar geométrico buscado. Sea pues $z \neq 0$, entonces

$$\lambda = -\frac{2x}{z}, \qquad \mu = \frac{y}{x}$$

y sustituyendo en la tercera ecuación tenemos la siguiente ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 - ax = 0 \qquad \text{(c)}$$

y observamos que $(0,0,0)$ verifica la ecuación.

La ecuación (c) es en efecto, un hiperboloide de una hoja y de revolución.

Observación 5.4.6. Una cuádrica se dice de *revolución* si tiene al menos, dos valores propios iguales.

20. Consideremos la cuádrica

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2z = 0$$

y el punto $p = (0, 1, -1)$.

a) Determinar el cono tangente a Q desde p.

b) Determinar el contorno aparente desde p.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi(p,p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\Longrightarrow$$

$$\varphi(x,p) = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x + y - z + 1,$$

$$\varphi(x,x) = x^2 + y^2 + 2xy - 2z.$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} 3(x^2 + y^2 + 2xy - 2z) - (x + y - z + 1)^2 = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y + 4z - 1 = 0. \end{aligned}$$

b) El conjunto buscado es

$$\left. \begin{aligned} (x+y)^2 - 2z = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{aligned} \right\}.$$

21. Consideremos la cuádrica

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$$

y el punto $p = (0, 1, 1, 0)$.

a) Determinar el cilindro proyectante de Q en la dirección de p.

b) Determinar el contorno aparente desde p.

Solución

a) La matriz de la cuádrica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} \varphi(p,p) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2, \\ \varphi(x,p) &= \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y + z - 1, \\ \varphi(x,x) &= x^2 + y^2 + z^2 - 2z. \end{aligned}$$

Luego

$$2(x^2 + y^2 + z^2 - 2z) - (y + z - 1)^2 = 0.$$

b) El conjunto pedido es

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

22. Consideremos la cuádrica

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4z - 4 = 0.$$

Determinar un punto p situado en el eje z tal que si se ilumina la cuádrica desde p, los puntos situados por encima del plano $z = 0$ quedan a la sombra.

Solución:

La matriz de la cuádrica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

El punto p tiene por coordenadas $(0, 0, z_0, 1)$. El plano polar de p respecto la cuádrica es

$$\begin{aligned} \varphi(x,p) = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \\ = -2z - 2z_0 - 4. \end{aligned}$$

Observamos que dicho plano es el que contiene al contorno aparente del cono tangente a la cuádrica desde p.

Obliguemos a que dicho plano sea el plano $z = 0$, tenemos entonces

$$z_0 = -2.$$

23. En $\mathbb{R}^3$ consideremos una elipse E y un plano π_1 no paralelo al plano de la elipse π_E. Hallar el lugar geométrico de los vértices de los conos que pasan por la elipse y que son cortados por π_1 siguiendo una circunferencia.

Solución:

Elijamos el sistema de referencia más adecuado para esta situación.

Puesto que si π_1 corta a los conos según circunferencias cualquier plano paralelo a este cortará también según circunferencias (aunque de distinto radio), podemos considerar π el plano paralelo a π_1 pasando por el centro de la elipse.

Tomamos como plano xy el plano de la elipse π_E. Obviamente tomamos como origen de coordenadas O, el centro de la elipse. Escogemos como eje x a la recta intersección del plano π con π_E (Observar que dichos planos no son paralelos), el vector e_1 será un vector unitario en esta dirección. Como eje y tomamos la recta ortogonal respecto la métrica que define la elipse, al eje x en el plano xy pasando por O y como vector e_2 un vector unitario en dicha dirección. Finalmente como eje z la recta de máxima pendiente del plano π sobre π_E pasando por O y como vector e_3 un vector unitario en la dirección del eje z.

Con este sistema de referencia la elipse tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La ecuación del plano π es $y = 0$.

Sea $p = (x_0, y_0, z_0)$ un punto del lugar geométrico, es decir el vértice de uno de los conos . Busquemos la ecuación del cono, esto es la ecuación del cono de vértice p y que pasa por la elipse E.

Para ello busquemos la familia de rectas que pasan por p

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \lambda(x - x_0) \\ y_1 &= y_0 + \lambda(y - y_0) \\ z_1 &= z_0 + \lambda(z - z_0) \end{aligned}\right\}$$

Obliguemos a que estas rectas sean tangentes a la elipse (es decir determinen el cono). Los puntos $(x, y, 0)$, intersección de la familia de rectas con el plano $z = 0$, han de ser de la elipse. Luego han de verificar que

$$\frac{(x_0 + \lambda(x - x_0))^2}{a^2} + \frac{y_0 + \lambda(y - y_0)^2}{b^2} - 1 = 0$$

por lo que, eliminando el parámetro λ tenemos la ecuación del cono $(\lambda = -\dfrac{z_0}{z - z_0})$ tenemos

$$\frac{(zx_0 - xz_0)^2}{a^2} + \frac{(zy_0 - yz_0)^2}{b^2} - (z - z_0)^2 = 0.$$

Cortamos ahora, el cono por el plano $y = 0$, y obligamos a que la intersección sea una circunferencia. La ecuación de la circunferencia es

$$\left.\begin{aligned}(x-a_1)^2+(z-a_2)^2=r^2\\ y=0\end{aligned}\right\}$$

(Notar que los ejes x y z son perpendiculares).

Hagamos pues $y = 0$ en la ecuación del cono

$$\frac{z_0^2}{a^2}x^2+\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)z^2-\frac{2x_0z_0}{a^2}xz-z^2-2zz_0=0$$

y esta ecuación ha de ser

$$x^2+z^2-2a_ax-2z_2z+a_1^2+a_2^2-r^2=0,$$

por lo que

$$\left.\begin{aligned}\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{a^2}-1=0\\ x_0=0\end{aligned}\right\}$$

que es la ecuación de una hipérbola contenida en el plano yz.

24. Sean r y s dos rectas que se cruzan en $\mathbb{R}^3$ y se considera el haz de planos que pasa por s. Probar que el conjunto de las proyecciones ortogonales de la recta r sobre cada uno de los planos del haz describe una cuádrica. Clasificarla.

Solución:

Empecemos escogiendo un buen sistema de referencia

eje x la recta s

eje z recta perpendicular común a r y s

eje y la recta perpendicular al plano xz pasando por la intersección de las rectas x y z.

(los ejes son pues, perpendiculares).

Puesto que el eje del haz de planos es el eje x la ecuación del haz de planos es

$$ay + bz = 0 \qquad (1)$$

(Para cada a y b tenemos un plano que contiene al eje x).

Puesto que la recta r es perpendicular al eje z, la ecuación de la recta es

$$\left.\begin{aligned} z &= a \\ y &= mx \end{aligned}\right\}$$

La proyección de la recta r sobre el plano xy (que es uno del haz) es la intersección del plano ortogonal al xy y que contiene a r. De hecho el lugar geométrico es la intersección de los planos ortogonales a los del haz que contienen a la recta r.

Busquemos pues el haz de planos de eje r

$$\lambda(y - mx) + \mu(z - a) = 0 \qquad (2)$$

Para que los dos haces de planos sean ortogonales han de serlo los vectores directores

vector director del primer haz $v_1 = (0, a, b)$,

vector director del segundo haz $v_2 = (-\lambda m, \lambda, \mu)$.

Obliguemos a que sean perpendiculares

$$v_1.v_2 = a\lambda + b\mu = 0. \qquad (3)$$

Entonces de 1), 2), y 3) tenemos

$$\left.\begin{aligned} ay + bz &= 0 \\ \lambda(y - mx) + \mu(z - a) &= 0 \\ a\lambda + b\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= c\lambda \\ z &= c\mu \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y(y - mx) + z(z - a) &= 0 \\ y^2 - mxy + z^2 - az &= 0 \end{aligned}$$

Vemos pues, que el lugar geométrico buscado es en efecto, una cuádrica. Clasifiquémosla

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{m}{2} & 0 \\ -\frac{m}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $\det A_0 = -\dfrac{m^2}{4}$. Luego si $m \neq 0$ la cuádrica tiene centro único. Si $m = 0$ el sistema del centro es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

sistema compatible indeterminado luego tiene una variedad de centros.

Para $m \neq 0$ los valores propios de A_0 son

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + m^2}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{1 + m^2}}{2},$$

puesto que $1 + m^2 > 1$ tenemos que $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 < 0$.

Para $m = 0$ los valores propios son de A_0 son

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0.$$

Capítulo 6

Variedades implícitas. Extremos ligados

6.1. Definición y ejemplos

Definición 6.1.1. Sea $V \neq \emptyset$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Diremos que V es una *variedad implícita* de dimensión d si existe un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y una aplicación $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^q$ con $n \geq q$ tal que

1. $V = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$
2. $d = n - q$
3. $f \in C^\infty$
4. $\operatorname{rango} df_x = q, \ \forall x \in V$, ($df_x$ es la diferencial de f en x).

En dicho caso decimos que V es la variedad implícita definida en U por la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo 6.1.1. Sea $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}3 \mid x + y + z = 0; x^2 + y = 0\}$ $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y)$.

$$\operatorname{rango} df_x = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Por lo tanto el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x^2 + y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

define una variedad implícita de dimensión 1.

Las variedades implícitas de dimensión 1 dentro de $\mathbb{R}^n$, reciben el nombre de curvas.
Las variedades implícitas de dimensión $n-1$ dentro de $\mathbb{R}^n$, reciben el nombre de hipersuperfícies, y en el caso particular de $n = 3$ de superfície.

6.2. Sistemas de coordenadas

Sea V una variedad implícita de dimensión d contenida en $\mathbb{R}^n$. Un *sistema de coordenadas* de V es una aplicación $\varphi W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

1. W es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ y $\varphi \in C^\infty W \longrightarrow \mathbb{R}^n$
2. $\varphi(W) \subset V$
3. $\text{rango}\, d\varphi_x = d,\ \forall x \in W$

Si $\varphi(W) = V$ entonces diremos que el sistema de coordenadas es *global*.

Ejemplo 6.2.1. Sea V la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Entonces

$$\begin{aligned} \varphi : (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (3\cos t, 2\mathrm{sen}\, t), \end{aligned}$$

es un sistema de coordenadas para la curva.
Observamos que $\varphi(0, 2\pi) \neq V$ ya que $(3, 0) \notin \varphi((0, \pi))$ por lo tanto el sistema de coordenadas no es global

6.3. El espacio tangente

Sea V una variedad implícita

$$\{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_q(x_1, \ldots, x_n)) = 0\}$$

de dimensión d y $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función C^∞ de un intervalo I de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$.

Diremos que α está definida sobre V si $\alpha(I) \subset V$ que explícitamente escribimos

$$\left.\begin{array}{ll} f_1(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)) & = 0 \\ & \vdots \\ f_q(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)) & = 0 \end{array}\right\}$$

Definición 6.3.1. Sea $x_0 \in V$, diremos que un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es tangente a V en x_0 si $v = \alpha'(t_0)$ siendo $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función C^∞ definida sobre V y $\alpha(t_0) = x_0$

Al conjunto de todos los vectores tangentes a V en x_0 lo denotamos por $T_{x_0}V$

Proposición 6.3.1. *Sea V una variedad implícita $\{x \in U \mid f(x) = 0\}$ y sea φ un sistema de coordenadas de V tal que $x_0 = \varphi(y_0)$ con $y_0 \in W$. Entonces*

$$T_{x_0}V = d\varphi_{y_0}(\mathbb{R}^d) = \operatorname{Ker} df_{x_0} \tag{6.1}$$

Consideremos ahora, una superficie en $\mathbb{R}^3$ definida de forma implícita, es decir de la forma

$$S = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0, \text{rango} f_p = 1\}.$$

(f es una función diferenciable en el abierto de definición de la función).

Proposición 6.3.2. *Sea $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$, el plano tangente a S en el punto p, viene dado por la siguiente ecuación*

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{|p}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}_{|p}(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}_{|p}(z - z_0) = 0.$$

Una curva en $\mathbb{R}^3$ puede estar definida de forma implícita como intersección de dos superficies, es decir de la forma

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0\}.$$

(siendo f_1 y f_2 dos funciones diferenciables en el abierto de definición). Por lo que, de la proposición 6.3.2 tenemos

Corolario 6.3.1. Sea $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$, la recta tangente a C en el punto p, viene dado por la intersección de los planos tangentes en el punto, a las superficies que definen la curva. Es decir mediante el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x}_{|p}(x-x_0)+\frac{\partial f_1}{\partial y}_{|p}(y-y_0)+\frac{\partial f_1}{\partial z}_{|p}(z-z_0)=0\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}_{|p}(x-x_0)+\frac{\partial f_2}{\partial y}_{|p}(y-y_0)+\frac{\partial f_2}{\partial z}_{|p}(z-z_0)=0\end{aligned}\right\}.$$

6.4. Extremos condicionados

Sea U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y f, g_j, $j = 1, \ldots, \ell < n$ funciones diferenciables en U de clase C^2 por lo menos.
Nos planteamos el problema de hallar extremos relativos de la función $f(x)$ para los puntos x que satisfacen $g_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, \ell < n$.
De forma más precisa

Definición 6.4.1. Diremos que $f(p)$ con $p \in U$ es un *mínimo* de f condicionado a las restricciones $g_i(x) = 0$, $j = 1, \ldots, \ell < n$ si

$$f(p+q) \geq f(p)$$

para todo $q \in \mathbb{R}^n$ con $\|q\| < \varepsilon$ para un cierto $\varepsilon > 0$ conveniente. tal que

$$g_j(p+q) = 0,\ j = 1, \ldots, \ell < n.$$

Análogamente

Definición 6.4.2. Diremos que $f(p)$ con $p \in U$ es un *máximo* de f condicionado a las restricciones $g_i(x) = 0$, $j = 1, \ldots, \ell < n$ si

$$f(p+q) \leq f(p)$$

para todo $q \in \mathbb{R}^n$ con $\|q\| < \varepsilon$ para un cierto $\varepsilon > 0$ conveniente. tal que

$$g_j(p+q) = 0,\ j = 1, \ldots, \ell < n.$$

Si suponemos que

$$V = \{x \in U \mid g_1 = 0, \ldots, g_\ell = 0\}$$

es no vacío y que $\operatorname{rank} d(g_1, \ldots, g_\ell)_x = \ell$ para todo $x \in V$, tenemos que V es una variedad implícita y el problema se traduce a buscar extremos relativos de una función definida sobre la variedad.

6.4.1. Multiplicadores de Lagrange

En los problemas de optimización, el método de los multiplicadores de Lagrange, es un procedimiento para encontrar los máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a restricciones. Este método reduce el problema restringido con n variables a uno sin restricciones de $n+k$ variables, donde k es el número de restricciones, y cuyas ecuaciones pueden resolverse de una manera más sencilla. Estas nuevas variables introducidas, una para cada restriccin, reciben el nombre *multiplicadores de Lagrange*.
El método de los multiplicadores de Lagrange consiste pues en buscar los extremos condicionados de una función con k restricciones, calculando los extremos sin restricciones de una nueva función construida como una combinación lineal de la función y las restricciones, donde los coeficientes de las restricciones son los multiplicadores.
Sea $f(x)$ una función definida sobre un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se desea buscar los extremos de esta función con las restricciones $g_j(x)=0$, $j=1,...,\ell$.
Se construye la función

$$h(x,\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell)=f(x)+\lambda_1 g_1(x)+\ldots+\lambda_\ell g_\ell(x)$$

y se trata de buscar un extremo de la función h
Los posibles extremos de h son los puntos (x,λ_i) tales que

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i}+\textstyle\sum_{1\le j\le \ell}\lambda_j\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}=0\\ \frac{\partial h}{\partial \lambda_i} &= g_i(x)=0\end{aligned}$$

Ejemplo 6.4.1. Dada la función $f(x,y)=x^2y$ los extremos condicionados de dicha funcin cuya restricción $g(x,y)=x^2+2y^2-6$.
Construimos la función $h(x,y,\lambda)=x^2y+\lambda(x^2+2y^2-6)$
Resolvamos la ecuación $\dfrac{\partial h}{x}=0,\ \dfrac{\partial h}{y}=0,\ \dfrac{\partial h}{\lambda}=0,$

$$\left.\begin{aligned}2xy+2x\lambda &=0\\ x^2+4y\lambda &=0\\ x^2+2y^2-6 &=0\end{aligned}\right\}$$

Cuyas soluciones son

$i)\quad (2,1),\lambda=-1,\quad ii)\quad (-2,1),\lambda=-1,\quad iii)\quad (2,-1),\lambda=1,$
$iv)\quad (-2,-1),\lambda=1,\quad v)\quad (0,\sqrt{3}),\lambda=0,\quad vi)\quad (0,-\sqrt{3}),\lambda=0.$

En los puntos $(2,1)$, $(-2,1)$ la función toma el valor 4, en los puntos $(2,-1)$, $(-2,-1)$ el valor -4 y en los otros dos puntos se anula.
Luego el valor máximo es 4 y el mínimo es -4.

6.5. Ejercicios resueltos

1. Consideremos la superficie

$$xy + yz + e^{xy} + e^{yz} - 2 = 0$$

a) ¿ Es el punto $(1,0,-1)$ de la superficie?.

b) Determinar el plano tangente en el punto $(0,1,0)$.

Solución:

Primeramente especificamos la función f y sus derivadas parciales.

$$f(x,y,z) = xy + yz + e^{xy} + e^{yz} - 2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y + ye^{xy}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x + z + xe^{xy} + ze^{yz} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= y + ye^{yz}. \end{aligned}$$

a) Claramente el punto verifica la ecuación, ahora bien

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{|p} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}_{|p} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}_{|p} = 0.$$

Luego el punto no es de S.

b) Claramente el punto verifica la ecuación y

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{|p} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}_{|p} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}_{|p} = 2.$$

Luego el punto es de S y el plano tangente en dicho punto es

$$2(z-0) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = 0.$$

2. Determinar los extremos locales de la función

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2xz - yz,$$

ligados a la condición $x - y - z - 6 = 0$.

Solución:

Llamemos $g(x,y,z)$ a la función que define implícitamente la superficie. Consideremos la función

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

Busquemos los puntos de la superficie para los cuales se anula la diferencial de la función L

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= x + 2z + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= y - z - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2x - y - \lambda = 0 \\ x - y - z - 6 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= -4 \\ \lambda &= 5 \end{aligned}$$

El Hessiano de L en el punto $p = (3,1,-4)$ y $\lambda = 5$ es

$$H_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Busquemos el espacio tangente a la variedad en el punto p, para ello empezamos determinando el vector normal en p a la variedad

$$\bigtriangledown g_p = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)_p = (1,-1,-1).$$

Por lo tanto

$$T_pV = [(1,0,1),(0,1,-1)].$$

Restrinjamos H_p a T_pV, nos queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

que es una forma cuadrática definida positiva, luego p es el único punto donde se alcanza un extremo ligado y es un mínimo.

3. Determinar los extremos locales de la función

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3,$$

ligados a la condición $g(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Solución:

Consideremos la función

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

Busquemos los puntos de la curva para los cuales se anula la diferencial de la función L

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 3x^2 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} x_1 = \sqrt{\dfrac{5}{2}} & x_2 = -\sqrt{\dfrac{5}{2}} \\ y_1 = \sqrt{\dfrac{5}{2}} & y_2 = -\sqrt{\dfrac{5}{2}} \\ \lambda_1 = -\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}} & \lambda_2 = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{array}$$

El Hessiano de L es

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} 6x + 2\lambda & 0 \\ 0 & 6y + 2\lambda \end{pmatrix}$$

Dicho Hessiano en el punto $p = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ $\lambda = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$ es

$$H_p = \begin{pmatrix} 3\sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix},$$

que es definida positiva, luego la restricción al espacio tangente a la variedad seguirá siendo definida positiva. Por lo tanto en p se alcanza un mínimo relativo.

En el punto $p = \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ $\lambda = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$ es

$$H_p = \begin{pmatrix} -3\sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \\ 0 & -3\sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix},$$

que es definida negativa, luego la restricción al espacio tangente a la variedad seguirá siendo definida negativa. Por lo tanto en p se alcanza un máximo relativo.

Capítulo 7

Curvas y superfícies parametrizadas

7.1. Curvas parametrizadas

Definición 7.1.1. Una *parametrización regular* de una curva C es una aplicación φ de un intervalo I de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)), \end{aligned}$$

tal que
a) φ es diferenciable en I.
b) $d\varphi \neq 0 \ \ \forall t \in I$.

Sea C una curva parametrizada por

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)), \end{aligned}$$

Consideremos ahora la función

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| dt = \int_{t_0}^{t} \|\varphi'(t)\| dt.$$

Si $t \geq t_0$ entonces $s \geq 0$ y es igual a la longitud de la curva comprendida entre t_0 y t.

Puesto que $s'(t) = \left\| \dfrac{d\varphi}{dt} \right\|$, s puede utilizarse para parametrizar la curva y le llamaremos *parámetro arco*.
Dada una curva C definida de forma paramétrica por φ, la *recta tangente* a la curva en un punto t_0 es la recta que pasa por $\varphi(t_0)$ y su dirección es $\varphi'(t_0)$.
Dada una curva φ parametrizada por t y por el parámetro arco. El vector tangente $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{dt}$ puede calcularse mediante el parámetro arco y tenemos la siguiente proposición.

Proposición 7.1.1.

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{ds}.$$

Teniendo en cuenta la definición de s,

Observamos que

$$\left\| \frac{d\varphi}{ds} \right\| = \frac{\left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\|}{\left\| \frac{ds}{dt} \right\|} = 1.$$

Luego $\dfrac{d\varphi}{ds}$ es un vector unitario que lo llamaremos *vector tangente unitario* y lo denotaremos por $\mathbf{t}$.
El vector tangente unitario puede deducirse directamente de $\varphi(t)$ de la forma

Proposición 7.1.2.

$$\varphi' = \mathbf{t}\|\varphi'\|,$$

Demostración. Basta observar de la definición de s, que $\dfrac{ds}{dt} = \left\| \dfrac{d\varphi}{dt} \right\|$. $\square$

Definición 7.1.2. Dada una curva C, expresada mediante el parámetro arco $\varphi(s)$, llamaremos *vector curvatura* en el punto $p \in C$ al vector $\mathbf{k}$ definido por

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(s) = \mathbf{t}'(s).$$

El vector $\mathbf{k}$, puede obtenerse directamente de cualquier parametrización $\varphi(t)$ sin calcular su expresión mediante el parámetro arco. Para ello basta utilizar la regla de la cadena

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{t}}{dt}}{\left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\|}.$$

La norma del vector curvatura se denomina *curvatura* de la curva.
La curvatura k se expresa en función de $\varphi(t)$ de la siguiente manera:

$$k(t) = \frac{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|}{\|\varphi'(t)\|^3}.$$

7.1.1. Triedro de Frenet

Dada una curva C parametrizada por el parámetro arco $\varphi(s)$. Se denomina *triedro de Frenet* a los vectores definidos por

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \varphi'(s) \\ \mathbf{n}(s) &= \frac{\mathbf{k}\ (s)}{\|\mathbf{k}(s)\|} \\ \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \end{aligned}\right\}.$$

Podemos determinar el triedro de Frenet directamente de cualquier parametrización $\varphi(t)$, de la curva aunque esta no esté expresada mediante el parámetro arco:

Proposición 7.1.3.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{t}(t) &= \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \\ \mathbf{n}(t) &= \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t) \\ \mathbf{b}(t) &= \frac{\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)}{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|} \end{aligned}\right\}.$$

Definición 7.1.3. a) Dada una curva C llamaremos *plano normal* de C en un punto $p \in C$ al plano que pasa por p y tiene por subespacio director el generado por el vector normal principal $\mathbf{n}$ y el vector binormal $\mathbf{b}$.
b) Dada una curva C llamaremos *plano osculador* de C en un punto $p \in C$ al plano que pasa por p y tiene por subespacio director el generado por el vector tangente $\mathbf{t}$ y el vector normal principal $\mathbf{n}$.
c) Dada una curva C llamaremos *plano rectificante* de C en un punto $p \in C$ al plano que pasa por p y tiene por subespacio director el generado por el vector tangente $\mathbf{t}$ y el vector binormal $\mathbf{b}$.

Dada una curva C parametrizada por el parámetro arco $\varphi(s)$, observamos que $\mathbf{b}'(s)$ tiene la dirección de $\mathbf{n}(s)$

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s) = \tau(s)(\mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{b}(s)).$$

El coeficiente $\tau(s)$ recibe el nombre de *torsión* de la curva.
La torsión se puede calcular directamente de cualquier parametrización $\varphi(t)$, aunque esta no sea mediante el parámetro arco, de la siguiente forma

Proposición 7.1.4.

$$\tau(t) = -\frac{det(\varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'''(t))}{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|^2}.$$

7.2. Superficies parametrizadas

Definición 7.2.1. Una *parametrización regular* de una superficie S de $\mathbb{R}^3$, es una aplicación φ de un conjunto abierto $\mathcal{U}$ del plano $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{U} &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longrightarrow (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)), \end{aligned}$$

tal que
a) φ es diferenciable en $\mathcal{U}$.
b) la matriz de la diferencial (o jacobiano) de φ es de rango máximo, esto es

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2, \quad \forall (u,v) \in \mathcal{U}.$$

Proposición 7.2.1. *La segunda condición de la definición anterior es equivalente a*
b') $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \mathcal{U}.$

Demostración. Supongamos que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2, \quad \forall (u,v) \in \mathcal{U},$$

existirá pues, algún menor de orden dos de la matriz no nulo para todo $(u, v) \in \mathcal{U}$.
Describamos todos los menores

$$a = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ahora bien

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v} = (c, -b, a),$$

luego es no nulo para todo $(u, v) \in \mathcal{U}$.
Recíprocamente, si

$$(c, -b, a) \neq 0, \ \forall (u, v) \in \mathcal{U}$$

algún valor de a, b o c es no nulo por lo que algún menor de orden dos de la matriz es no nulo y la matriz tendrá rango dos.

□

7.2.1. Primera y segunda forma fundamental

A una superficie parametrizada regular $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se le puede asociar dos formas cuadráticas llamadas *primera y segunda forma fundamental* de la siguiente manera

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad II = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} E &=< \varphi_u, \varphi_u >, \\ F &=< \varphi_u, \varphi_v >, \\ G &=< \varphi_v, \varphi_v >, \\ e &= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ f &= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ g &= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

Curvatura de Gauss y curvatura media

Definición 7.2.2. Llamaremos *curvatura de Gauss* a

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

y *curvatura media* a

$$H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}.$$

Estos valores permiten clasificar los puntos de la superficie:
- elíptico si $K > 0$
- hiperbólico si $K < 0$
- parabólico si $K = 0$, $H \neq 0$
- plano si $K = H = 0$.

7.3. Ejercicios resueltos

1. Probar que

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow ((2\cos t - 1)\cos t, (2\cos t - 1)\mathrm{sen}\, t) \end{aligned}$$

es una parametrización de una curva en $\mathbb{R}^2$.

Solución:

Claramente $\varphi \in C^\infty$, estudiemos el rango de su diferencial

$$\begin{aligned} d\varphi &= (-2\mathrm{sen}\, t \cos t - (2\cos t - 1)\mathrm{sen}\, t, -2\mathrm{sen}^2 t + (2\cos t - 1)\cos t) = \\ &= (-2\mathrm{sen}\, 2t + \mathrm{sen}\, t, 2\cos 2t - \cos t). \end{aligned}$$

Comprobemos que $d\varphi \neq (0,0)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Para ello calculemos $\|d\varphi\|^2$.

$$\begin{aligned} \|d\varphi\|^2 &= 4\mathrm{sen}^2 2t + \mathrm{sen}^2 t - 4\mathrm{sen}\, 2t \cdot \mathrm{sen}\, t + 4\cos^2 2t + \cos^2 t - 4\cos 2t \cos t = \\ &= 5 - 4\cos t > 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Luego en efecto, φ es una parametrización.

2. Probar que
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (t+1, t^2+3) \end{aligned}$$
es una parametrización de una curva en $\mathbb{R}^2$.

Solución:

Claramente $\varphi \in C^\infty$. Calculemos $d\varphi$,
$$d\varphi = (1, 2t) \neq (0,0), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

3. Determinar la recta tangente a la curva
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow (t, t^2, t^3) \end{aligned}$$
en el punto $t = 1$.

Solución:

Calculemos el punto de paso de la recta
$$\varphi(1) = (1,1,1),$$
y ahora la dirección
$$d\varphi_{|t=1} = (1, 2t, 3t^2)_{|t=1} = (1,2,3).$$
La recta buscada es pues,
$$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(1,2,3).$$

4. Expresar mediante el parámetro arco la curva $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ siguiente
$$\varphi(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t).$$

Solución:

Calculemos $\varphi'(t)$

$$\varphi'(t) = e^t(\cos t) - \operatorname{sen} t) + e^t(\operatorname{sen} t + \cos t) + e^t).$$

Luego

$\|\varphi'(t)\| =$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t - 2\cos t \operatorname{sen} t) + e^{2t}(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 2\cos t \operatorname{sen} t) + e^{2t}},$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| dt = \int_0^t \sqrt{3} e^t = \sqrt{3}(e^t - 1).$$

Despejando t, tenemos que

$$t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right).$$

Sustituyendo t en la curva tenemos

$$\begin{aligned} \psi : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\longrightarrow \psi(s) = \varphi(t(s)), \end{aligned}$$

$$\varphi(t(s)) = ((\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)\cos\ln(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1), (\frac{s}{\sqrt{3}} + 1)\operatorname{sen}\,\ln(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1), \frac{s}{\sqrt{3}} + 1),$$

donde $I = (-\sqrt{3}, \infty)$.

5. Dada la curva

$$\varphi(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t),$$

con $a > 0$.

Determinar el vector tangente unitario así como el vector curvatura.

Solución:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (-a\operatorname{sen} t, a\cos t), \\ \|\varphi'(t)\| &= \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t} = a, \\ \mathbf{t} &= (-\operatorname{sen} t, \cos t), \\ \mathbf{k} &= -\frac{1}{a}(\cos t, \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

6. Consideremos la curva C definida por

$$\begin{aligned}\varphi : (-\pi, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{ch} t).\end{aligned}$$

Calcular la curvatura de dicha curva.

Solución:

Calculemos $\varphi'(t)$ y $\varphi''(t)$

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= (-\mathrm{sen}t, \cos t, \mathrm{sh}t) \\ \varphi''(t) &= (-\cos t, -\mathrm{sen}t, \mathrm{ch}t),\end{aligned}$$

tenemos que:

$$k(t) = \frac{\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 t + \mathrm{ch}^2 t}}{(\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 t})^3} = \frac{\sqrt{2}}{(\mathrm{ch}t)^2},$$

7. Sea C la curva de $\mathbb{R}^3$ parametrizada de la forma

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow (1 + t, 2t^2, t^2).\end{aligned}$$

Determinar el plano osculador en $t = 1$.

Solución:

Para ello calculamos el vector binormal (que es el vector normal a dicho plano)

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= (1, 4t, 2t) \\ \varphi''(t) &= (0, 4, 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(t) &= \frac{(1, 4t, 2t) \wedge (0, 4, 2)}{\|(1, 4t, 2t) \wedge (0, 4, 2)\|} \\ \mathbf{b}(1) &= \frac{1}{\sqrt{20}}(0, -2, 4).\end{aligned}$$

Luego el plano osculador es

$$-2y + 4z + a = 0,$$

y como tiene que pasar por $\varphi(1) = (2, 2, 1)$ es $a = 0$.

8. Consideremos la curva C parametrizada por

$$\begin{aligned} \varphi : (-\pi, \pi) &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ t \quad &\longrightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{ch} t). \end{aligned}$$

Calcular la torsión de dicha curva.

Solución:

Calculemos las derivadas sucesivas de φ

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (-\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sh} t), \\ \varphi''(t) &= (-\cos t, -\operatorname{sen} t, \operatorname{ch} t), \\ \varphi'''(t) &= (\operatorname{sen} t, -\cos t, \operatorname{sh} t). \end{aligned}$$

Luego

$$\tau(t) = -\frac{(\operatorname{sh} t + \operatorname{sh} t)}{(\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t})^3} = -\frac{2\operatorname{sh} t}{(\operatorname{ch} t)^3}.$$

Observación 7.3.1. La curva no es plana ya que su torsión no es nula.

9. Estudiar el triedro de Frenet, curvatura y torsión de la curva

$$\varphi(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt), \quad a > 0, b \neq 0.$$

Solución:

Calculemos las derivadas sucesivas de φ

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (-a \operatorname{sen} t, a\cos t, b) \\ \varphi''(t) &= (-a\cos t, -a \operatorname{sen} t, 0) \\ \varphi'''(t) &= (a \operatorname{sen} t, -a\cos t, 0). \end{aligned}$$

Luego

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

y por tanto

$$\mathbf{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a \operatorname{sen} t, a\cos t, b).$$

Calculemos
$$\varphi'(t) \wedge \varphi''(t) = (ab \operatorname{sen} t, -ab \cos t, a^2)$$
y
$$\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\| = \sqrt{a^2b^2 + a^4}$$
luego
$$\mathbf{b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b \operatorname{sen} t, b \cos t, a)$$
Finalmente
$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0).$$

Para obtener la curvatura aplicamos la fórmula y tenemos
$$k(t) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
Igualmente obtenemos la torsión
$$\tau(t) = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

10. Determinar el triedro de Frenet en $t = 1$, de la curva
$$\varphi(t) = (1 + t, -t^2, 1 + \frac{2}{3}t^3).$$

Solución:

Calculemos $\varphi'(1)$ y $\varphi''(1)$.
$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (1, -2t, 2t^2), \\ \varphi'(1) &= (1, -2, 2). \\ \varphi''(t) &= (0, -2, 4t), \\ \varphi''(1) &= (0, -2, 4). \end{aligned}$$
Luego
$$\mathbf{t}(1) = \frac{1}{3}(1, -2, 2).$$

Por otra parte

$$\varphi'(1) \wedge \varphi''(1) = (-4, -4, -2),$$

luego

$$\mathbf{b}(1) = \frac{1}{3}(-2, -2, -1).$$

Ya para terminar

$$\mathbf{n}(1) = \mathbf{b}(1) \wedge \mathbf{t}(1) = \frac{1}{3}(-2, 1, 2).$$

11. Consideremos la curva

$$\varphi(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t, a).$$

a) Expresar la curva en función del parámetro arco.

b) Calcular la curvatura y la torsión de dicha curva.

Solución:

a) Sabemos que: fijado $t_0 \in I$ $\quad s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\varphi'(t)\|\, dt, \qquad t \in I$

Determinemos $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = (-2\operatorname{sen} t + 2\operatorname{sen} 2t, 2\cos t - 2\cos 2t, 0)$$

de donde: $\|\varphi'(t)\|^2 \;=\; 8(1 - \cos t) \;=\; 16\operatorname{sen}^2 t/2$

y por lo tanto: $s = \int_0^t 4\operatorname{sen} t/2\, dt \;=\; -8\cos t/2 + 8.$

b) Recordemos que:

$$k(t) = \frac{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|}{\|\varphi'(t)\|^3} \qquad \text{y} \qquad \tau(t) \;=\; -\frac{\det(\varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'''(t))}{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|^2}$$

necesitamos pues, determinar $\varphi''(t)$ y $\varphi'''(t)$.

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= (-2\cos t + 4\cos 2t, -2\operatorname{sen} t + 4\operatorname{sen} 2t, 0),\\ \varphi'''(t) &= (2\operatorname{sen} t - 8\operatorname{sen} 2t, -2\cos t + 8\cos 2t, 0).\end{aligned}$$

Por lo que calculando tenemos:

$$k(t) = \frac{12(1-\cos t)}{(4\operatorname{sen} t/2)^3} = 3/8\frac{1}{\operatorname{sen} t/2} \qquad \text{y} \qquad \tau(t) = 0.$$

De la observación directa de φ tenemos que la curva está contenida en el plano $z = 0$, por lo tanto la curva es plana y su torsión es nula.

12. Probar que

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longrightarrow (u+v, u-v, u^2+v^2). \end{aligned}$$

es una parametrización regular de una superficie.

Describir implícitamente dicha superficie.

Solución:

Las funciones φ_i son polinómicas, luego son de clase C^∞ para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Veamos si se verifica la condición b)

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} = 2, \ \forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Para la descripción implícita de la superficie, observamos que de

$$\begin{aligned} x &= u+v \\ y &= u-v \\ z &= u^2+v^2 \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} x^2 &= u^2+v^2+2uv \\ y^2 &= u^2+v^2-2uv \\ z &= u^2+v^2 \end{aligned}$$

de donde

$$x^2+y^2 = 2z.$$

Observamos que esta superficie es un paraboloide elíptico.

13. Dada la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$. Probar que $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida de la forma $\varphi(u,v) = (u+v, u-v, 4uv)$ es una parametrización de S.

    Solución:

    Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$; φ es una parametrización si:

    a) $\varphi \in C^\infty(U;\mathbb{R}^3)$,

    b) $\operatorname{rang} d\varphi_{(u,v)} = 2$ para todo $(u,v) \in U$.

    Las funciones componentes de φ son polinómicas, luego φ es C^∞ en todo $\mathbb{R}^2$.

    Veamos si se verifica la condición b)

$$D\varphi = \begin{pmatrix} D_u\varphi_1 & D_v\varphi_1 \\ D_u\varphi_2 & D_v\varphi_2 \\ D_u\varphi_3 & D_v\varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4u & 4v \end{pmatrix}$$

    Claramente esta matriz es de rango 2 para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, luego φ es una parametrización. Y puesto que recorre todo S:

$$\begin{gathered} \varphi(u,v) = (x,y,z) = (u+v, u-v, 4uv) \\ x^2 - y^2 = (u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv = z. \end{gathered}$$

    Tenemos que φ es una parametrización de S.

14. Sea r la recta tangente en el punto (0,0,0) a la curva C_1 definida de forma implícita por

$$\left.\begin{aligned} e^{(1-x)yz} + x - 1 = 0 \\ (1-x-y)z = 0, \end{aligned}\right\}$$

    y s la recta tangente en el punto $(0,0,0)$ a la curva

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow (e^t - 1, e^{2t} - 1, e^{3t} - 1). \end{aligned}$$

    Determinar el ángulo que forman las rectas r y s.

Solución:

Las funciones que determinan C_1 son

$$f_1 = e^{(1-x)yz} + x - 1, \qquad \text{y} \qquad f_2 = (1 - x - y)z.$$

Las derivadas parciales correspondientes son

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = -yze^{(1-x)yz} + 1, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = -z, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = e^{(1-x)yz} z(1-x), & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = -z, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} = e^{(1-x)z} y(1-x). & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = 1 - x - y. \end{array}$$

que en el punto $p = (0, 0, 0)$ valen

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}_{|p}, \frac{\partial f_1}{\partial y}_{|p}, \frac{\partial f_1}{\partial z}_{|p} \right) = (1, 0, 0), \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}_{|p}, \frac{\partial f_2}{\partial y}_{|p}, \frac{\partial f_2}{\partial z}_{|p} \right) = (0, 0, 1)$$

respectivamente.

Luego la recta r tangente en el punto $(0, 0, 0)$, es

$$\left. \begin{array}{r} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} .$$

Respecto la segunda curva tenemos

$$\varphi'(t) = (e^t, 2e^{2t}, 3e^{3t}).$$

Ahora bien si $\varphi(t_0) = (0, 0, 0)$ es $t_0 = 0$ y $\varphi'(0) = (1, 2, 3)$. Luego la recta s tangente en el punto $(0, 0, 0)$ es

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 3).$$

Puesto que ya conocemos los vectores directores de las rectas r y s podemos conocer su ángulo

$$\cos\theta = \frac{< (0, 1, 0), (1, 2, 3) >}{\|(0, 1, 0)\| \|(1, 2, 3)\|} = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

15. Determinar la curvatura de Gauss de la superficie parametrizada siquiente:

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u\text{sen}v, v).$$

Solución:

Determinemos las matrices I, y II para ello necesitamos:

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (\cos v, \text{sen}v,\ 0) \\
\varphi_v &= (-u\text{sen}v, u\cos v,\ 1) \\
\varphi_{uu} &= (0,\ 0,\ 0) \\
\varphi_{uv} &= (-\text{sen}v, \cos v,\ 0) \\
\varphi_{vv} &= (-u\cos v, -u\text{sen}v,\ 0).
\end{aligned}$$

Pasemos a calcular las formas fundamentales:

$$\begin{aligned}
&E =< \varphi_u, \varphi_u >= \cos^2 v + \text{sen}^2 v = 1, \\
&F =< \varphi_u, \varphi_v >= -u \cos v \,\text{sen}\, v + u \,\text{sen}\, v \cos v = 0, \\
&G =< \varphi_v, \varphi_v >= u^2 \,\text{sen}^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = u^2 + 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} \cos v & -u\,\text{sen}\, v & 0 \\ \text{sen}\, v & u \cos v & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+1}} = 0, \\
f &= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} \cos v & -u\,\text{sen}\, v & -\text{sen}\, v \\ \text{sen}\, v & u \cos v & \cos v \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{u^2+1}}, \\
g &= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} \cos v & -u\,\text{sen}\, v & -u\cos v \\ \text{sen}\, v & u \cos v & -u\,\text{sen}\, v \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2+1}} = 0.
\end{aligned}$$

Luego sustituyendo los valores de E, F, G, e, f, g hallados, en la fórmula de la curvatura tenemos:

$$K = -\frac{1}{(u^2+1)^2}.$$

16. Probar que la superficie $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida de la forma: $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 + v^3)$ es tal que para $v > 0$ sus puntos son elípticos, para $v < 0$ hiperbólicos, y para $v = 0$ son parabólicos.

Solución:

Sean K y H las curvaturas de Gauss y media de la superficie. Sabemos que un punto p de la superficie es:

- elíptico si $K > 0$
- hiperbólico si $K < 0$
- parabólico si $K = 0$, $H \neq 0$
- plano si $K = H = 0$

Calculemos, pues, las curvaturas de Gauss y media:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}.$$

Siendo:

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \qquad II = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

la primera y segunda forma fundamental de la superficie.

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (1,\, 0,\, 2u) \\ \varphi_v &= (0,\, 1,\, 3v^2) \\ \varphi_{uu} &= (0,\, 0,\, 2) \\ \varphi_{uv} &= (0,\, 0,\, 0) \\ \varphi_{vv} &= (0,\, 0,\, 6v). \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
E &= < \varphi_u, \varphi_u > = 1 + 4u^2 \\
F &= < \varphi_u, \varphi_v > = 6uv^2 \\
G &= < \varphi_v, \varphi_v > = 1 + 9v^4 \\
e &= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 9v^4}} \\
f &= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = 0 \\
g &= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{6v}{\sqrt{1 + 4u^2 + 9v^4}}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en K y H tenemos:

$$K = \frac{12v}{(1 + 4u^2 + 9v^4)^2}, \qquad H = \frac{2 + 18v^4 + 6v + 24u^2v}{2(1 + 4u^2 + 9v^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

De donde se obtienen los resultados:

$$\begin{cases}
K < 0 & \text{para} \quad v > 0 \\
K = 0 & \text{para} \quad v = 0 \quad \text{y} \quad H_{v=0} \neq 0 \\
K < 0 & \text{para} \quad v < 0.
\end{cases}$$

Bibliografía

1. M. A. Barja, M. I. García, M. C. Hernando, M. D. Magret, F. Planas, C. Puig: *Àlgebra Lineal. Problemes resolts i comentats.* Col·lecció Aula Pràctica. Edicions UPC, 1993.

2. J. de Burgos: *Álgebra lineal*. McGraw Hill, 1993.

3. R. Carbó, J. A. Hernández: *Introducción a la teoría de matrices.* Alhambra, 1983.

4. M. Castellet, I. Llerena: *Àlgebra lineal i geometria.* Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1988.

5. J. W. Daniel, B. Noble: *Álgebra Lineal Aplicada.* Prentice-Hall, 1989.

6. M. I. García: *Problemas resueltos de álgebra lineal y geometría*. Ed. CPDA, 1991.

7. M. I. García, *Matrices positivas y aplicaciones*. Editado por la autora, (Sept. 2008). ISBN: 978-84-612-6101-7

8. M. I. García, S. Tarragona: *Sistemas lineales discretos. Teoría y problemas*, Editado por las autoras, 2005.

9. E. Hernández: *Álgebra y geometría.* Addison Wesley UAM, 1994.

10. D. C. Lay: *Linear Algebra and its Applications.* Addison-Wesley, 1994.

11. G. Strang: *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1982.

12. J. R. Torregrosa, C. Jordan: *Álgebra Lineal y sus aplicaciones, teoría y problemas resueltos.* Colección Schaum's. McGraw Hill, 1987.

13. S. Xambó: *Álgebra Lineal y Geometrías Lineales*. Editorial Eunibar, 1977.