després que jo acabés una frase; llavors, el va omplir amb un somriure, i em va dir, mirant-me als ulls: «Això només ho pot dir una filla de matemàtics.»

Nota de l'editor: Aquest relat breu és un capítol extret del llibre *Pantone 569*, de Gemma Brunat, obra premiada amb un accèssit al III Concurs Internacional d'(Auto)biografies Lingüístiques 2016, convocat pel Grup d'Estudi de Llengües Amenaçades (UB), L'Alzinar, la Fundació Aurèlia Figueras i la Xarxa Vives d'Universitats. Aquest llibre es pot consultar en línia a: `https://issuu.com/gemmabrunat/docs/pantone_569_versi__2`

Racó biogràfic

Pietro Mengoli (1627–1686), un matemàtic singular

M. Rosa Massa Esteve
Universitat Politècnica de Catalunya

Pietro Mengoli, que a la seva època era anomenat el *matemàtic bolonyès*, va ser un deixeble de Bonaventura Cavalieri (1598–1647) que va crear el mètode dels indivisibles per calcular quadratures. Mengoli coneixia bé les obres matemàtiques més importants del seu temps i els seus treballs responen a les preocupacions intel·lectuals del moment. Cal assenyalar que la seva producció científica queda emmarcada entre l'aparició de les obres *In Artem Analyticen Isagoge* (1591) de François Viète i *La Géométrie* de René Descartes (1596–1650) i les obres sobre el càlcul infinitesimal de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) del 1684 (vegeu la figura 1).

Figura 1. Pietro Mengoli (1627–1686)

Mengoli va néixer a Bolonya l'any 1626 o 1627. Encara que Fantuzzi (1788) afirma que va morir el 7 de juny del 1686 als 60 anys, en el llibre de batejos consta que va néixer el 10 de juliol de 1627.

Els anys més prolífics de Mengoli van coincidir amb el declivi de l'escola galileana i amb la desaparició dels principals protagonistes de la revolució científica italiana: Galileo Galilei (1564–1642), Benedetto Castelli (1577–1643), Evangelista Torricelli (1608–1647) i el seu mestre Cavalieri.

Hem de considerar la vida científica de Mengoli dividida en tres parts, fins l'any 1660, del 1660 al 1672, i des de l'any 1672 fins a la seva mort el 1686, etapa en la qual Mengoli, a banda de diversificar el camp de les seves investigacions, començà a deixar de ser citat en els cercles científics per quedar cada vegada més aïllat dels seus contemporanis.

Universitat de Bolonya (1648–1660)

El nom de Mengoli apareix en el registre de la Universitat de Bolonya en el període 1648–1686, en el qual havia substituït el seu mestre Cavalieri en la càtedra de mecànica.

Es va graduar en filosofia el 1650 i tres anys més tard, en lleis civils i canòniques.

En aquest primer període va escriure tres obres de matemàtica pura: *Novae Quadraturae Arithmeticae seu de Additione Fractionum* (Bolonya, 1650), *Via Regia ad Mathematicas per Arithmeticam, Algebram Speciosam et Planimetriam ornata, Maiestati Serenissimae D. Christinae Reginae Suecorum* (Bolonya, 1655) i *Geometriae Speciosae Elementa* (Bolonya, 1659).

La *Novae Quadraturae Arithmeticae*, obra del 1650, apareix citada en moltes cartes dels científics europeus i va provocar una discussió entre Leibniz i Henry Oldenburg (1615–1677), secretari de la Royal Society, sobre les sèries que va sumar Mengoli. L'obra tracta de sèries infinites, calcula les seves sumes i demostra les seves propietats. En el prefaci (12 pàgines sense numerar) demostra la divergència de la sèrie harmònica. A més del prefaci, consta de tres llibres en què els resultats s'ordenen en ordre creixent de dificultat. En el primer llibre, estudia les sèries de fraccions amb denominadors d'expressió actual: $n(n+1)$, que ell anomena *números plans*, amb n número natural, i demostra que la seva suma infinita val 1. En el segon llibre, tracta les fraccions amb denominadors $n(n+1)(n+2)$, que ell anomena números sòlids, amb n número natural, i demostra que la seva suma infinita val $1/4$. En el tercer llibre, s'estudien sèries més generals.

L'any 1655, Mengoli escrivia en vers una obra titulada *Via Regia ad Mathematicas per Arithmeticam, Algebram Speciosam, & Planimetriam, ornata Maiestatae Serenissimae D. Christinae Reginae Suecorum* dedicada a la reina Cristina de Suècia, en la qual li explicava una «via reial» per entendre les matemàtiques. En aquesta obra, Mengoli dividia les matemàtiques en tres parts: l'aritmètica, en la qual explicava les operacions amb els nombres; l'àlgebra especiosa, en la qual mostrava com utilitzar les lletres per resoldre equacions, i la planimetria, en la qual tractava de figures planes i les seves propietats. Mengoli assumia l'àlgebra com una part de les matemàtiques juntament amb l'aritmètica i la geometria. Encara que en l'obra no definia aquests termes, sí que explicava el terme *àlgebra especiosa* i en remarcava la utilitat.

Aquesta actitud cap a l'àlgebra difereix profundament de la del seu mestre Cavalieri, i de la d'altres com Torricelli que, en els seus escrits, exclouen deliberadament els càlculs algebraics. Al començament de la segona part de la Via Regia, dedicada a l'àlgebra especiosa, Mengoli la descrivia com un art d'aquesta manera (Mengoli, 1655, 19):

> Sobre la utilitat de l'àlgebra especiosa:
>
> «Una sola entre les matemàtiques s'anomenarà àlgebra especiosa, un art en el qual res s'amaga al que investiga. Si preguntes, «si és o no és», consisteix a respondre la veritat; si preguntes «quant és», aquest art ho fa prou satisfactòriament. Ja que als nombres genèrics [aquest art] els proporciona maneres aptes per fer i per provar les coses fetes i dites. Així és, a saber, que hi intervindran dos tipus de nombres generals, aquells que busques [incògnites] i aquells que pots donar [dades] arbitràriament.»

En aquest punt del desenvolupament del seu pensament, Mengoli considerava l'àlgebra sobretot un art per demostrar resultats ja coneguts més que un mètode per obtenir-ne de nous. Les seves idees sobre aquest llenguatge simbòlic s'entendran millor en les seves obres posteriors *Geometriae Speciosae Elementa* (1659) i *Circolo* (1672), en què desenvoluparà el llenguatge algebraic de Viète per obtenir nous resultats, entre els quals un nou mètode de quadratures.

Prior de Santa Maria Magdalena (1660–1672)

L'any 1660 va ser ordenat sacerdot i, des d'aquest moment i fins a la seva mort, va ser prior de l'església de Santa Maria Magdalena de Bolonya. Encara que entre 1660 i 1669 no va publicar res, a partir del 1670 van tornar a aparèixer obres seves: *Refrattioni e parallase solare* (Bolonya, 1670), *Speculationi di musica* (Bolonya, 1670) i *Circolo* (Bolonya, 1672).

En aquells anys la nova filosofia experimental es va introduir a Bolonya d'una manera organitzada (Cavazza, 1980: 105–123). Així, podem citar Geminiano Montanari (Mòdena, 1633 – Pàdua, 1687), astrònom, geofísic, biòleg, que va ocupar la càtedra de Matemàtiques de Bolonya; el 1664 i els catorze anys passats allà van ser els més fructífers de la seva vida. El matemàtic Montanari en un intent d'emular la Royal Society of London, el 1665 fundà l'Accademia della Traccia (Tabarroni, 1971: 485–487). En una carta a la Royal Society, Montanaria explica que «a partir dels experiments obtindran els axiomes i a partir dels axiomes, nous descobriments». El metge Malpighi i l'astrònom Cassini també en formen part. Què fa Mengoli? Mengoli està retirat a la seva església de Santa Maria Magdalena i l'única activitat en què col·labora és en l'astronomia. Mengoli feia observacions sobre els astres, eclipses, cometes... per trobar el «curs» del sol, amb la meridiana de Sant Petroni. Tots els càlculs i les observacions que va fer Mengoli a Sant Petroni es troben en un llibre de l'any 1670 titulat *Refrattioni e Parallasse Solare*.

L'obra, escrita en italià, té 64 pàgines, 28 pàgines de taules de paral·laxis del sol i de les declinacions dels punts de l'eclíptica. Conté, també, les seves observacions a la meridiana de Sant Petroni des de l'any 1655 fins a l'any 1668, i altres observacions anteriors fetes a diferents llocs i per diversos autors. Encara que el llibre és d'astronomia i inclou un gran nombre de taules i observacions, Mengoli el presenta com un llibre de matemàtiques tot seguint una estructura euclidiana. D'aquesta manera, consta de 7 definicions, 2 axiomes, 3 suposicions, 25 proposicions i 5 observacions.

Mengoli devia ser un observador poc acurat ja que el 1670, quan va escriure *Refrattioni e parallasse solare*, s'havia equivocat en els resultats d'algunes taules, fet que Cassini li va fer notar (Oldenburg, 1986: vol VII, 332-335). Cassini va criticar durament els principis i les conclusions que es deriven del llibre de Mengoli, en la tercera carta de les tres que, amb el títol complex *De solaribus hypothesibus et refractionibus epistolae tres*, es van publicar el 1692 a la Miscellanea italica physico-mathematica a Bolonya, o sigui que es van publicar quan Mengoli ja s'havia mort. Tanmateix, el 1672 Malpighi havia enviat a Oldenburg aquesta missiva que va ser publicada i comentada a les *Philosophical Transactions* (1672: 5001–5002; Baroncini i Cavazza, 1986: 37).

La *Speculationi di Musica* (Bolonya, 1670) és, després de la *Novae*, la segona obra de Mengoli més citada en la correspondència europea i és en la qual comença la part més filosòfica de la carrera de Mengoli. Aquí ens parla per primera vegada dels motius de la seva filosofia natural. L'obra té 300 pàgines, dividides en 25 capítols que anomena *especulacions*. Hi podem trobar una teoria del so original, el rebuig de la teoria de la consonància de Galileu i l'extraordinària fisiologia de la percepció musical que Mengoli fonamenta sobre l'existència de dos timpans a l'orella humana. Per demostrar-la, Mengoli va fer una dissecció de l'orella amb Galeatio Manzio, mestre d'anatomia de la Universitat de Bolonya. Per justificar la seva teoria del so, Mengoli utilitza els logaritmes. Aquesta obra sobre música va ser comentada i parcialment traduïda a les *Philosophical Transactions*, número 100, després d'una espera llarga dels científics londinencs que volien llegir el llibre.

Pel que fa al *Circolo* (1672), la descriurem més endavant en tractar el singular mètode de quadratures.

Últims anys (1672–1686)

Aquestes darreres obres ja reflecteixen el nou propòsit de Mengoli d'investigar, no únicament sobre matemàtiques pures, sinó també sobre matemàtiques mixtes, com ara l'astronomia, la cronologia i la música. A més, la seva investigació estava clarament dirigida a justificar els escrits bíblics i a fer apologia de la fe catòlica. Mengoli va continuar en aquesta línia, publicant dues obres sobre cosmologia i cronologia bíblica: *Anno* (Bolonya, 1673) i *Mese* (Bolonya, 1681), i les *Arithmetica rationalis* (Bolonya, 1674) i *Arithmetica realis* (Bolonya, 1675), sobre lògica i metafísica.

Gràcies a les cartes editades fa pocs anys per Baroncini i Cavazza (1986), podem conèixer millor els pensaments de Mengoli en aquest darrer període. Entre les cartes editades (64), totes elles de Mengoli, des de l'any 1674 fins al 1686, i de les quals no hi ha les respostes, 54 eren adreçades a la mateixa persona, concretament a Antonio Magliabechi (1633-1714), que era bibliotecari a Florència i, en certa manera, el contacte entre Mengoli i el món científic italià de l'època. Les cartes revelen que Mengoli, cap al final de la seva vida, se sentia molt sol i el neguitejava el pensament que les seves obres no fossin llegides per ningú.

Encara que en la correspondència queda ben palès que les obres de Mengoli eren conegudes i esperades a Europa, mentre encara vivia, sembla que va morir aïllat i ignorat.

El singular mètode de quadratures

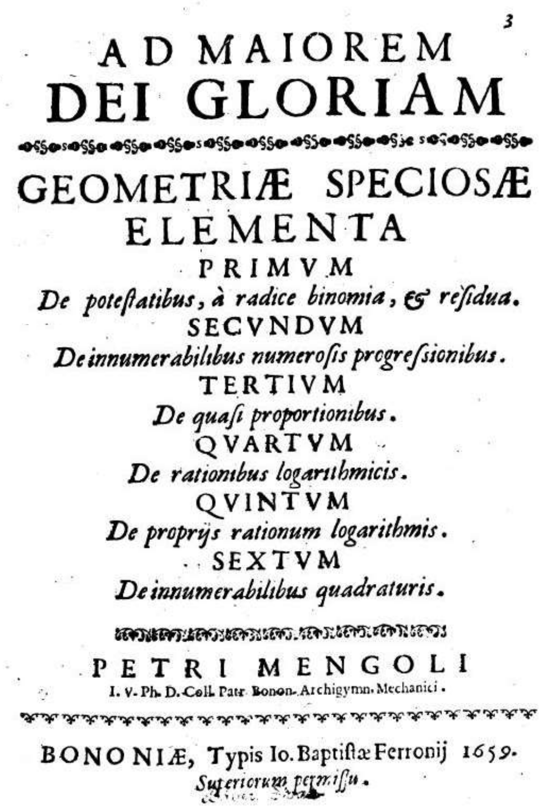
Les obres més importants sobre quadratures van ser *Geometriae Speciosae Elementa* (1659, en endavant *Geometria*) i *Circolo* (1672). A la *Geometria* Mengoli calculà i demostrà les quadratures de les figures geomètriques entre 0 i 1 i l'eix OX que, per qualssevol nombres naturals m y n, avui escriuríem

$$(m+1)\binom{m}{n}\int_0^1 x^n(1-x)^{m-n}dx = 1.$$

La *Geometria* és una obra de 472 pàgines de matemàtica pura. En aquest volum l'àlgebra va esdevenir una part essencial. El títol ja suggereix el singular desenvolupament de l'àlgebra especiosa que Mengoli anomenà *geometria especiosa*; utilitzant el llenguatge simbòlic de Viète, Mengoli va crear noves eines algebraiques a fi de determinar-ne les quadratures.

Està composta de sis capítols, que l'autor anomena *elements*, i d'una introducció titulada «Lectori Elementario», en què s'explicava cadascun dels capítols per separat. En el primer capítol, titulat «De potestatibus, à radice binomia et residua», Mengoli donava les deu primeres potències d'un binomi, expressades en lletres, tant pel que fa a la suma com pel que fa a la diferència, i explicitava que era possible estendre aquest resultat a potències més grans. El segon, titulat «De innumerabilibus numerosis progressionibus», conté càlculs de nombroses sumes de potències i productes de potències amb una notació pròpia, així com demostracions d'algunes identitats. En el tercer, que té com a títol «De quasi proportionibus», a partir de la definició dels conceptes *raó quasi nul·la, raó quasi infinita, raó quasi la igualtat* i *raó quasi un nombre*, desenvolupava una teoria de quasi proporcions, basant-se en la teoria de proporcions del Llibre V d'Euclides. En el quart capítol, titulat «De rationibus logarithmicis», basant-se també en el Llibre V d'Euclides, elaborava una completa teoria de proporcions logarítmiques. En el cinquè, titulat «De proprijs rationum logarithmis», construïa el logaritme d'una raó amb la teoria anterior i demostrava les seves propietats. Finalment, en el sisè, titulat «De innumerabilibus quadraturis», calculava les quadratures de figures mixtilínies desenvolupant l'àlgebra de Viète a través d'unes taules triangulars i la teoria de quasi proporcions (vegeu la figura 2).

Efectivament, la manipulació aritmètica de les expressions simbòliques va permetre a Mengoli obtenir nous resultats i nous procediments. Per exemple, en el *Elementum secundum*, va inventar una manera d'escriure i de calcular les sumes finites de potències i de productes de potències. No va escriure les sumes de potències donant valors o bé escrivint els nombres amb el signe + i punts suspensius, sinó que va representar els nombres amb lletres. D'aquesta manera, va crear una construcció original i avantatjosa que li permetés calcular aquestes sumes, que considerava expressions algebraiques noves.


3

AD MAIOREM
DEI GLORIAM

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ
ELEMENTA

PRIMVM
De poteſtatibus, à radice binomia, & reſidua.
SECVNDVM
De innumerabilibus numeroſis progreſsionibus.
TERTIVM
De quaſi proportionibus.
QVARTVM
De rationibus logarithmicis.
QVINTVM
De proprijs rationum logarithmis.
SEXTVM
De innumerabilibus quadraturis.

PETRI MENGOLI
I. V. Ph. D. Coll. Patr. Bonon. Archigymn. Mechanici.

BONONIÆ, Typis Io. Baptiſtæ Ferronij 1659.
Superiorum permiſſu.

Figura 2. Portada de *Geometriae Speciosae Elementa* (1659)

Va considerar un nombre qualsevol o *tota*, representat per la lletra t i el va dividir en dues parts a (abscissa) i $r = t - a$ (residu). A continuació, va considerar tota igual a $2, 3, \ldots$ i va posar exemples fins a 10. És a dir, si t és 2, a és 1 i r és 1. Si t és 3, a pot ser 1 o 2 i llavors r és 2 o 1, respectivament. Si t és 4, a pot ser 1, 2 o 3, i llavors r és 3, 2 o 1, respectivament, i així indefinidament. També va calcular els quadrats i els cubs de a, els productes de a i r, dels quadrats de a i r, etcètera. Per exemple, si t és 3, la suma valdrà 3, ja que és la suma de 1 i 2. Si t és 4, la suma valdrà 6, ja que és la suma de 1, 2 i 3, etcètera. Va escriure $O \cdot a$ per expressar les sumes des de $a = 1$ fins a $a = t - 1$,

$$O \cdot a = \sum_{a=1}^{t-1} a$$

Mengoli va ordenar totes aquestes sumes de potències i productes de potències en una taula triangular que va anomenar taula de les «espècies [tabula speciosa] i calculà i demostrà el valor d'aquests sumatoris, emprant el número t com a punt de partida per a la seva construcció (vegeu la figura 3).

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & O\cdot u & & & & \\ & & & O\cdot a & & O\cdot r & & & \\ & & O\cdot a^2 & & O\cdot ar & & O\cdot r^2 & & \\ & O\cdot a^3 & & O\cdot a^2r & & O\cdot ar^2 & & O\cdot r^3 & \\ O\cdot a^4 & & O\cdot a^3r & & O\cdot a^2r^2 & & O\cdot ar^3 & & O\cdot r^4 \end{array}$$

Figura 3. *Tabula speciosa*

Els termes d'aquesta taula són sumatoris del tipus següent:

$$O\cdot u = (t-1)$$
$$O\cdot a = 1+2+3+\cdots+(t-1)$$
$$O\cdot r = (t-1)+(t-2)+(t-3)+\cdots+1$$
$$O\cdot a^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+(t-1)^2$$
$$O\cdot ar = 1.(t-1)+2.(t-2)+\cdots+(t-1)\cdot 1$$

Al llarg del llibre Mengoli introdueix taules triangulars, derivades del triangle combinatori, com a eines útils per als seus càlculs. A l'*Elementum primum* els termes de les taules triangulars són números, representats per lletres, i són emprats per obtenir el desenvolupament de qualsevol potència d'un binomi. A l'*Elementum secundum* els termes de la taula són sumatoris de potències i de productes de potències i són emprades per obtenir-ne els valors. Finalment, a l'*Elementum sextum* i a *Circolo*, els termes de les taules triangulars són figures geomètriques (anomenades per Mengoli *formes*) i són emprades per obtenir les quadratures d'aquestes figures geomètriques. L'originalitat de Mengoli rau, no en la definició o la presentació de les taules triangulars, sinó en eltractament. D'una banda, Mengoli va emprar el llenguatge simbòlic i el triangle combinatori per crear noves taules amb expressions algebraiques i va establir clarament les seves lleis de formació; d'altra banda, va emprar les relacions entre les sumes i els nombres combinatoris del triangle aritmètic per demostrar un dels resultats importants del seu llibre: l'expressió del sumatori de les m potències dels primers $t-1$ enters.

Una altra contribució original de Mengoli va ser la justificació i l'ús de la noció de variable a l'*Elementum Tertium*. La seva idea era que les lletres, a més de representar un número donat o una incògnita, també poguessin representar variables, és a dir, quantitats indeterminades però determinables. Els sumatoris eren números indeterminats però quedaven determinats quan es coneixia el valor de t. Assignant diferents valors a t, Mengoli explícitament va introduir el concepte de variable, una noció que probablement no era coneguda, i va assenyalar la dependència entre el valor de t i el valor de la suma. Mengoli aplicà la seva idea de variable al càlcul de les quasi-raons d'aquestes sumes. La raó entre sumatoris és també indeterminada però és determinable i augmenta el valor de t. Efectivament, la raó no arriba a aquest valor, el qual pot ser interpretat com el valor actual; en canvi, tendeix a aquest valor a mesura que t augmenta. És en aquest sentit que Mengoli va entendre l'expressió «raó indeterminada determinable».

Mengoli va seguir donant exemples per clarificar la noció de raó quasi un número. Aquesta noció, juntament amb la idea de raó indeterminada determinable, les va fer servir per establir les definicions de raó quasi infinita, quasi nul·la, quasi la igualtat i quasi un nombre a l'*Elementum tertium* (Mengoli, 1659, 97–98),

1. Una raó indeterminada determinable que, en determinar-se, pot ser més gran que qualsevol [raó] donada, en la mida en què es va determinant, es dirà quasi infinita.

2. I si pot ser més petita que qualsevol [raó] donada, en la mida en què es va determinant, es dirà quasi nul·la.

3. I si pot ser més petita que qualsevol raó més gran que la igualtat; i més gran que qualsevol raó més petita que la igualtat, en la mida en què es va determinant, es dirà quasi la igualtat. O bé dit d'una altra manera, que pugui ser més a prop de la igualtat, que qualsevol raó donada que no sigui la igualtat, en la mida en què sigui tal, es dirà quasi d'igualtat.

4. I si pot ser més petita que qualsevol raó més gran que una raó proposada; i més gran que qualsevol raó més petita que la mateixa raó proposada, en la mida en què es va determinant, es dirà quasi igual a aquesta raó. O bé d'una altra manera, que pugui ser més a prop de qualsevol raó proposada que qualsevol altra raó que no sigui igual a

aquesta, en la mida en què sigui tal, es dirà quasi igual a la raó proposada.

5. I els termes de raons quasi iguals entre si es diran quasi proporcionals.

6. I els termes de raons que són quasi d'igualtat es diran quasi iguals.

Amb aquestes definicions, va obtenir raons entre tot tipus de sumatoris i el nombre t. Recordem que aquests sumatoris es formen emprant t i que tenen $t-1$ sumands amb diferents exponents. Va calcular a què tendien aquestes raons quan el nombre de sumands augmenta, i va obtenir moltes quasi raons. En notació actual, concretament, en el Teorema 42, Mengoli va demostrar que

$$(m+n+1)\binom{m+m}{n}\sum_{a=1}^{a=t+1} a^m(t-a)^n$$

tendeix a t^{m+n+1} quan t tendeix a infinit, en el sentit que la seva raó pot esdevenir arbitràriament a prop de la igualtat fent t suficientment gran.

Mengoli va començar l'element sisè titulat *De innumerabilibus quadraturis* explicant el seu sistema de coordenades, definint l'abscissa i descrivint individualment les ordenades de les figures geomètriques a través de les seves abscisses. Mengoli proposà un segment de qualsevol mesura, amb el nom de *rationalis*, i el va posar en una línia recta que va anomenar *tota* i que representà amb la lletra t (de vegades amb la lletra u, si valia 1). Va definir una base com un segment de línia recta de mida t o 1 i utilitzà la paraula *abscissa* com la x que s'empra actualment, encara que dins d'aquesta base. Sempre treballava dins d'una base finita on l'abscissa és representada per la lletra a i el residu per la lletra $r = t - a$ o bé $r = 1 - a$, segons fos la base un valor donat t o bé la unitat 1. Pel que fa a l'ordenada, Mengoli utilitzava aquesta paraula en lloc de la paraula *applicata* que s'utilitzava en aquella època. Definia les ordenades per cada valor de l'abscissa de la base, primer les ordenades de les figures conegudes, tals com el quadrat (o el rectangle) i el triangle, a partir de la seva construcció sobre cada punt de la base.

En el cas de les figures mixtilínies (figures determinades per una part recta i per l'altra part corba), Mengoli no va definir les ordenades mitjançant la seva construcció, sinó que va explicar que eren iguals a les abscisses o a les potències de les abscisses. Així, en les ordenades de la paràbola, deia «una ordenada qualsevol és abscissa al quadrat», en notació actual, $y = x^2$. Quan feia les demostracions, la igualtat entre les ordenades i les abscisses o les potències de les abscisses era també expressada mitjançant la proporció següent, en què 1 era la mida de l'interval i y l'ordenada corresponent a l'abscissa x''

$$(1 : y) = (1 : x)^m.$$

Mengoli definia les figures geomètriques que volia quadrar com «esteses per les seves ordenades», les va anomenar formes i les va expressar mitjançant una expressió algebraica $FO.\ a^m r^n$, on $FO.$ denota la forma, a l'abscissa x i r el residu $(1-x)$. Mai no va esmentar la paraula *corba*, sinó que va parlar de *figura* o *forma*, mot que s'utilitzava en els segles anteriors i que s'identificava amb la mesura de la qualitat d'una quantitat, com ara a l'obra de Nicolau Oresme (1323-1382) que du per títol *Tractatus de latitudinibus formarum* (1346). La connexió entre la figura (que no representava) i l'expressió algebraica (corba) que descrivia la figura era la teoria de proporcions d'Euclides. Així doncs, quan demostrava les propietats de les corbes que descrivien la figura (creixent, punt màxim,...) emprava directament l'expressió algebraica i les propietats de les proporcions sense preocupar-se de la representació gràfica de la figura.

Tanmateix, Mengoli volia assegurar-se que cadascuna d'aquestes expressions algebraiques definides per expressar les figures geomètriques, que eren objectes algebraics nous, podia ser identificada amb la figura geomètrica corresponent a través d'una construcció. Així, a la tercera proposició d'aquest element sisè, demostrava que proposada una expressió algebraica associada a una forma o figura geomètrica i donada una abscissa, sempre es podia construir una ordenada corresponent a aquesta abscissa dins d'aquesta figura geomètrica. Mengoli ho plantejava amb la paraula *problema*, ja que es tractava d'una construcció i no d'un teorema, i el resolia per a una forma concreta, $FO.10a^2r^3$.

Després de definir aquestes figures geomètriques i assignar les corresponents expressions algebraiques, Mengoli procedeix a treballar amb aquests nous objectes algebraics, ordenant-los en unes taules triangulars, inspirades pel triangle combinatori, a fi de poder calcular al mateix temps totes les quadratures de les figures de la taula (vegeu la figura 4).

$$\begin{array}{ccccccc} & & & FO\cdot u & & & \\ & & FO\cdot a & & FO\cdot r & & \\ & FO\cdot a^2 & & FO\cdot ar & & FO\cdot r^2 & \\ FO\cdot a^3 & & FO\cdot a^2r & & FO\cdot ar^2 & & FO\cdot r^3 \end{array}$$

Figura 4. *Tabula formosa*

La forma del vèrtex, $FO.u.$, representa un quadrat de base 1. Les dues formes de la primera fila representen dos triangles. El primer $FO.a.$, està determinat per la bisectriu del primer quadrant $y = x$, l'eix d'abscisses i la recta $x = 1$. El segon triangle, $FO.r.$, és determinat per la recta $y = 1 - x$ traçada des de l'extrem $(1, 0)$ al $(0, 1)$ i l'eix d'abscisses. Les tres formes de la segona fila són figures determinades per les ordenades d'una paràbola, l'eix d'abscisses i la recta $x = 1$. La primera, $FO.a2.$, determinada per les ordenades $y = x^2$, la segona, $FO.ar.$, per les ordenades $y = x.(1-x)$ i la tercera, $FO.r2.$, per les ordenades $y = (1-x)^2$ i així descriuríem les altres files.

En la carta dedicatòria d'aquest element de la seva *Geometria*, Mengoli ja havia calculat el valor d'aquestes figures pel mètode dels indivisibles i ara el vol demostrar per un altre camí. Els valors estan relacionats amb els coeficients del binomi. De fet, multiplicà cada terme $FO.a^n r^{m-n}$. de la *tabula formosa*, primer pel coeficient del binomi $\binom{m}{n}$ i després pel nombre d'ordre de la fila més una unitat, i així va obtenir una nova taula anomenada tabula quadraturarum (vegeu la figura 5), els termes de la qual valen 1.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & FO\cdot u & & & \\ & & FO\cdot 2a & & FO\cdot 2r & & \\ & FO\cdot 3a^2 & & FO\cdot 6ar & & FO\cdot r^2 & \\ FO\cdot 4a^3 & & FO\cdot 12a^2r & & FO\cdot 12ar^2 & & FO\cdot 4r^3 \end{array}$$

Figura 5. *Tabula quadraturarum*

En notació moderna demostra:

$$(m+n+1)\binom{m+n}{n}\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = 1.$$

Aquesta és una demostració a la manera d'Arquimedes, però utilitzant el mètode de les quasi raons en comptes del mètode de doble desigualtat. Una altra diferència amb el mètode d'exhaustió és que s'hi utilitza directament la figura que es vol quadrar entre la circumscrita i la inscrita. Aquí, en canvi, no s'ha calculat el valor de l'àrea sinó que és un pas intermedi amb una figura nova: la figura adscrita formada per rectangles finits.

A més, la demostració de Mengoli era independent del grau i li servia per a qualsevol figura de la taula. L'àlgebra li proporcionava un mètode per calcular alhora totes aquestes quadratures (que ja coneixia) i no li calia fer cada vegada la quadratura d'una corba per trobar una regla que li permetés generalitzar.

Tanmateix, la figura que Mengoli volia quadrar era el cercle. I és per aquest motiu que va calcular les àrees en l'interval (0,1), també en una obra posterior, *Circolo*, en la qual interpola la taula de figures (Tabula Formosa) i la taula de valors de les àrees d'aquestes figures calculades en la *Geometria*. Així, el 1672 va publicar *Circolo*. A les pàgines inicials explica que l'any 1660 ja havia obtingut la quadratura del cercle, encara que sense donar-la a conèixer. Aleshores es decidia a publicar-la ja que necessitava aquest resultat per a les regles dels solsticis i dels equinoccis. Aquesta obra va ser comentada i explicada per Leibniz, uns anys més tard, en els seus manuscrits (Massa-Esteve, 2017a).

L'obra consta de 60 pàgines i la seva estructura és diferent de la *Geometria*, sense definicions, sense teoremes ni problemes. Conté 160 paràgrafs numerats, sense demostracions; en el text únicament hi apareixen taules triangulars, càlculs i explicacions sense cap figura geomètrica. Mengoli obté la quadratura del cercle amb una aproximació del valor de amb onze decimals exactes, mitjançant l'àrea entre 0 i 1 de la figura descrita per l'expressió algebraica $y = x^{1/2}(1-x)^{1/2}$ i l'eix de abscisses (correspon al semicercle de radi 1/2).

Va ser precisament en el *Circolo* en què les taules triangulars van esdevenir veritables protagonistes. Mengoli va trobar l'instrument generalitzador a les taules triangulars i en l'àlgebra, ja que les taules es podien estendre indefinidament, eren fàcils de construir i les expressions algebraiques li permetien identificar les figures dins de la taula. Primer, Mengoli va interpolar les figures geomètriques que ja havia quadrat a la *Geometria* i després les va disposar en una taula triangular fins a obtenir una taula triangular interpolada, la *tabula formosa* interpolada (vegeu la figura 6).

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & FO.\,u. & & & \\
 & & FO.\,a^{1/2}. & & FO.\,r^{1/2}. & & \\
 & FO.\,a. & & FO.\,(ar)^{1/2}. & & FO.\,r. & \\
FO.\,a^{3/2}. & & FO.\,(a^2r)^{1/2}. & & FO.\,(ar^2)^{1/2}. & & FO.\,r^{3/2}.
\end{array}
$$

Figura 6. *Tabula formosa* interpolada

D'altra banda, Mengoli va calcular també una taula interpolada de valors de les quadratures, que de fet no és més que el triangle harmònic interpolat, i per homologia va identificar els valors de les dues taules. Amb l'ajuda de les propietats del triangle combinatori, Mengoli va ser capaç d'omplir el triangle combinatori interpolat, excepte per a un nombre desconegut a, que està estretament relacionat amb la quadratura del cercle ($1/2a = \pi\pi/8$. Mengoli va calcular successives aproximacions del nombre a i va obtenir una aproximació del nombre π amb onze decimals exactes.

Algunes reflexions

Aquestes obres de Mengoli revelen que la seva base no era el mètode dels indivisibles del seu mestre Cavalieri, sinó el triangle aritmètic i la teoria de quasi proporcions com a desenvolupament de l'àlgebra de Viète. En aquest sentit, va elaborar una teoria numèrica de sumes de potències i productes de potències i *límits* d'aquestes sumes que no tenien res a veure amb les *Omnes lineae* de Cavalieri. No queda clara la raó per la qual Mengoli no va seguir el camí del seu mestre. Potser perquè el mètode de Cavalieri havia rebut moltes crítiques i Mengoli no podia deixar de ser sensible a aquestes. Després de mostrar que coneixia el mètode dels indivisibles i que podia aplicar-lo, Mengoli assegurava que volia buscar nous mètodes, amb fonaments més sòlids, introduint en els càlculs l'àlgebra de Viète a través de les taules triangulars i la teoria de les quasi proporcions. Segurament perquè desitjava allunyar-se del mètode dels indivisibles i de les seves crítiques, Mengoli va moure's cap a aquest llenguatge algebraic nou. En aquest sentit podem dir que era «modern»,. però Mengoli era clàssic en la seva forma de presentar l'obra i en el seu pensament, ja que un dels seus grans pilars van ser els *Elements* d'Euclides. La teoria de proporcions euclidiana va ser una de les bases de la seva matemàtica. Amb la teoria de proporcions va construir la teoria de quasi proporcions que, tanmateix, mostra un Mengoli innovador, ja que treballà amb l'infinit, comparà infinits de diferent ordre i demostrà nombroses quasi proporcions. Les característiques del pensament algebraic i geomètric en les investigacions de Mengoli es van complementar per aconseguir nous i millors resultats.

Encara que el seu mètode fos innovador és una realitat que molts matemàtics de l'època no el van llegir causa de la seva manera d'escriure enrevessada i poc clara. Mengoli va elaborar un llenguatge algebraic propi, en què la notació, a mesura que s'avançava, es complicava cada vegada més. A més, els procediments que va utilitzar per introduir l'àlgebra a la geometria no coincidien amb les tendències del moment. També hi van poder influir factors externs, ja que durant la segona meitat de l'any 1600 a Bolonya va tenir lloc una crisi cultural força greu, i els científics amb més renom la van abandonar, com ara Cassini, que es va traslladar a París (per dirigir l'Observatori Reial) i Montanari a Pàdua (Pepe, 1981, 56–101). Els centres connectats amb els ambients europeus estaven limitats als centres florentins, al voltant de la cort dels Mèdicis, i als romans, lligats a la Cúria, de manera que els de Bolonya quedaven fora d'aquests contactes.

Un altre aspecte que podria ajudar a explicar l'oblit en què va caure la seva obra és el gir intel·lectual de Mengoli en la seva investigació a partir de l'any 1660. Després del *Circolo*, que li havia de permetre esbrinar les regles dels solsticis i dels equinoccis, no va escriure més obres de matemàtica pura, sinó obres relacionades amb la cronologia i la cosmologia bíblica i que, a més, no concordaven amb el pensament filosòfic de l'època.

Potser no hi ha una única raó i és la conjunció de tots aquests arguments que pot encaminar-nos a trobar una resposta al perquè de l'allunyament dels seus contemporanis.

Però si en la seva època la utilització del llenguatge algebraic va ser un hàndicap per a la seva difusió, és precisament aquesta característica peculiar que, actualment, fa més interessant l'estudi de la seva obra. Mengoli «va conjuntar perfectament» de manera singular en la seva obra la matemàtica clàssica representada en aquest cas per Euclides (teoria de proporcions), Arquimedes (mètode d'exhaustió), el mètode dels indivisibles del seu mestre Cavalieri i la matemàtica innovadora en aquell moment, representada per l'àlgebra de Viète. Com afirmava ell al començament de la seva *Geometria* (Mengoli, 1659, 2–3):

> «Ambdues geometries, l'antiga d'Arquimedes i la nova dels indivisibles de Bonaventura Cavalieri (preceptor meu), així com també l'àlgebra de Viète, han estat tractades amb bastant encert per persones cultes; d'elles, ni confusament ni com si fos una barreja, sinó per una perfecta conjunció, en resulta una de nova, l'espècie pròpia del nostre treball, que no podrà desagradar a ningú.»

Referències

[1] G. Baroncini & M. Cavazza. *La corrispondenza di Pietro Mengoli*. Florència: Olschki (1986).

[2] M. Cavazza. «Bologna and the Royal Society in the Seventeenth-Century». A *Notes and Records of the Royal Society of London* 35 (1980), núm. 2, 105–123.

[3] Fantuzzi. *Notizie degli scrittori bolognesi*. Bologna: Stamperia di S. Tommaso d'Aquino (1788).

[4] M.S. Mahoney. «The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century». A: S. Gaukroger [ed.]. *Descartes' philosophy, mathematics and phisics*. Brighton: Totowa, Barnes and Noble/Harvester (1980), 141–156.

[5] P. Mancosu. *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. Oxford: Oxford University Press (1996).

[6] M. Rosa Massa-Steve. «Mengoli on Quasi Proportions». *Historia Mathematica* 24 (1997), núm. 2, 257–280.

[7] M. Rosa Massa-Esteve *Estudis matemàtics de Pietro Mengoli (1625–1686): Taules triangulars i quasi proporcions com a desenvolupament de l'àlgebra de Viète.* Tesi doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona (1998). `http://www.tdx.cat/TDX-0506108-144848`.

[8] M. Rosa Massa-Esteve. «La théorie euclidienne des proportions dans les "Geometriae Speciosae Elementa"(1659) de Pietro Mengoli». *Revue d'Histoire des Sciences* 56 (2003), núm. 2, 457–474.

[9] M. Rosa Massa-Esteve. «Algebra and Geometry in Pietro Mengoli (1625–1686)». *Historia Mathematica* 33 (2006), 82–112.

[10] M. Rosa Massa-Esteve. *L'algebrització de les matemàtiques. Pietro Mengoli (1625–1686).* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans (2008).

[11] M. Rosa Massa-Esteve - Delshams, Amadeu (2009). «Euler's Beta integral in Pietro Mengoli's Works». *Archive for History of Exact Sciences*, 63, 325–356.

[12] M. Rosa Massa-Esteve (2016). «Nous resultats i procediments en les matemàtiques del segle XVII: càlcul de màxims a Pietro Mengoli (1626/1627-1686)». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 31 (2016), núm. 1, 51–71.

[13] M. Rosa Massa-Esteve «Mengoli's mathematical ideas in Leibniz's excerpts». BSHM Bulletin: *Journal of the British Society for the History of Mathematics* 32 (2017a), núm. 1, 40–60.

[14] M. Rosa Massa-Esteve (2017b). «Les observacions i mesures de Pietro Mengoli (1627–1686) a la meridiana de Sant Petronio». A: J. Batlló i P. Bernat (eds.) *Explorant la volta del cel*, 139–151. Barcelona: SCHCT.

[15] P. Mengoli. *Via Regia ad mathematicas per arithmeticam, algebram speciosam and planimetriam, ornata Maiestati Serenissimae D. Christinae Reginae Suecorum.* Bolonya (1655).

[16] P. Mengoli. *Geometriae Speciosae Elementa*. Bolonya (1659).

[17] P. Mengoli. *Circolo*. Bolonya (1672).

[18] P. Mengoli. *Anno*. Bolonya (1673).

[19] Nastasi - Scimone. «Pietro Mengoli and the Six-Square Problem». *Historia Mathematica* (1994), 10–27.

[20] A. Natucci. «Mengoli». A: C.C. Gillispie [ed.]. *Dictionary of Scientific Biography.* Nova York: Scribner's (1970-1991), 303–304.

[21] H. Oldenburg. *The Correspondence of Henry Oldenburg.* 13 vol. Madison: University of Wisconsin Press (1986). [Editat per Rupert Hall & Marie Boss Hall]

[22] L. Pepe. «Il Calcolo infinitesimale in Italia agli inizi del secolo XVII». *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* 1 (1981), núm. 2, 43–101.

[23] G. Tabarroni. «Geminiano Montanari». A: C.C Gillispie [ed.]. *Dictionary of Scientific Biography.* Nova York: Scribner's, 9 (1971–1991), 485–487.

[24] G. Vacca. «Sulle scoperte di Pietro Mengoli». *Atti dell'Accademia Nacionale del Lincei-Rendiconti* XXIV (1915), 5.

Problemes

Juanjo Rué
Universitat Politècnica de Catalunya

Nova remesa de d'incògnites matemàtiques per als àvids entusiastes de la resolució de problemes. En aquesta ocasió, tenim quatre problemes de diferent temàtica, i proposats per amics i col·laboradors de totes les geografies: per començar, Miquel Amengual, des de Cala Figuera, ens proposa un problema geomètric molt maco en honor al meu antecessor en aquesta secció, Carles Romero. Xavier Ros-Otón, des de Zuric, ens fa arribar un problema d'anàlisi molt interessant. José Luis Díaz-Barrero, des de Barcelona ens farà passar una bona estona treballant amb un dels seus problemes de desigualtats tan complicats...i alhora tan entretinguts! I finalment Joaquim Nadal, des de Llagostera, ens suggereix un problema de recurrències dobles per treballar-hi una estona. A tots ells els agraeixo la disponibilitat i el bon gust matemàtic en les propostes que ens han fet!
Pel que fa a les solucions dels problemes proposats al número passat: hem rebut solucions de Miquel Amengual, d'Esteve Casas, des de Sant Celoni i de Joaquim Nadal. Moltes gràcies també per les propostes de solucions, totes elles plenes d'enginy i bones idees. Quant a l'últim problema, proposat per l'editorial, malauradament no hem rebut cap solució correcta. Com veureu, es requeria d'una combinació d'arguments combinatoris, junt amb una idea analítica, a fi d'arribar a una contradicció. Amb vista a les solucions i noves propostes de problemes: podeu fer-nos arribar la informació a l'adreça de correu electrònic següent:

`juan.jose.rue@upc.edu`

Les propostes de solucions (i també nous problemes proposats) seran especialment benvinguts si estan escrits en TEX o LaTEX i amb les figures corresponents. Això facilitarà molt l'edició i la feina de tots. Moltes gràcies...i a resoldre problemes s'ha dit!

Problemes proposats

A145. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Dedicat a Carles Romero i Chesa. Quatre circumferències $O_1\,(r_1)$, $O_2\,(r_2)$, $O_3\,(r_3)$ i $O_4\,(r_4)$ són mútuament tangents exteriorment i la recta l és una tangent comuna a $O_1\,(r_1)$, $O_2\,(r_2)$ i $O_3\,(r_3)$.