Órdenes Parciales para Hesitant Fuzzy Sets

L. Garmendia[1], **R. González del Campo**[2], **J. Recasens**[3]

[1] *DISIA, Universidad Complutense de Madrid, Spain*
lgarmend@fdi.ucm.es

[2] *DSIC, Universidad Complutense de Madrid, Spain*
rgonzale@estad.ucm.es

[3] *3 Universitat Politecnica de Catalunya, Spain*
j.recasens@upc.edu

Resumen

Se define un nuevo orden parcial $\leq_{\mathbb{H}}$ en el conjunto $\mathbb{H}$ de subconjuntos finitos del intervalo unidad. Con este preorden $\leq_{\mathbb{H}}$ no es un retículo, pero sí lo son algunos subconjuntos de $\mathbb{H}$ interesantes. $\mathbb{H}$ se puede inyectar de forma natural en un retículo $(\overline{\mathbb{B}}, \leq_{\mathbb{B}})$. En $(\mathbb{H}, \leq_{\mathbb{H}})$ y $(\overline{\mathbb{B}}, \leq_{\mathbb{B}})$ se pueden definir t-normas.

Keywords: hesitant fuzzy sets, subconjuntos finitos del intervalo unidad, orden parcial.

Los hesitant fuzzy sets generalizan el concepto de conjunto borroso al permitir la posibilidad de asignar más de un valor del intervalo unidad a los objetos del universo de discurso. Son útiles cuando hay dudas (*hesitation*) al asignar valores numéricos a los objetos [1], [2].

Un tema relevante es cómo comparar hesitant fuzzy sets, lo que lleva a la cuestión de definir relaciones de orden en el conjunto $\mathbb{H}$ de los subconjuntos finitos de $[0,1]$. Hay una manera natural de comparar subconjuntos con el mismo cardinal: si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ (asumiendo como haremos durante todo el trabajo que los elementos de los subconjuntos están ordenados ($a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ y $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$)), la comparación punto a punto parece adecuada ($A \leq_{\mathbb{H}} B$ si, y sólo si, $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$). El problema surge al intentar comparar conjuntos de diferente cardinal.

Dado que comparar dos conjuntos del mismo cardinal es una tarea fácil, la idea para comparar dos conjuntos A y B de diferentes cardinales n y m es repetir sus elementos convenientemente para obtener dos sucesiones de la misma longitud.

Definición 1. *Sea* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in \mathbb{H}$ *y* $r \in \mathbb{N}$. $A_r \in [0,1]^{rn}$ *es el vector de* rn *coordenadas definido por* $A_r = (\overbrace{a_1, \ldots, a_1}^{r \text{ veces}}, \overbrace{a_2, \ldots, a_2}^{r \text{ veces}}, \ldots, \overbrace{a_n, \ldots, a_n}^{r \text{ veces}})$.

Definición 2. *Sean* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *y* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ *subconjuntos finitos del intervalo unidad y* $\mathrm{mcm}(n,m)$ *el mínimo común múltiplo de* n *y* m. *Reescribiendo* $A_{\frac{\mathrm{mcm}(n,m)}{m}} = (c_1, c_2, \ldots, c_{\mathrm{mcm}(n,m)})$ *y* $B_{\frac{\mathrm{mcm}(n,m)}{n}} = (d_1, d_2, \ldots, d_{\mathrm{mcm}(n,m)})$,

$$A \leq_{\mathbb{H}} B \text{ si, y sólo si } c_i \leq d_i \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, \mathrm{mcm}(n,m).$$

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto TIN 2012-32484.

Ejemplo 3. $A = \{0{,}2, 0{,}4\} \leq_{\mathbb{H}} B = \{0{,}3, 0{,}5, 0{,}8\}$, *porque* $\mathrm{mcm}(2,3) = 6$,

$$A_3 = (0{,}2, 0{,}2, 0{,}2, 0{,}4, 0{,}4, 0{,}4) \qquad B_2 = (0{,}3, 0{,}3, 0{,}5, 0{,}5, 0{,}8, 0{,}8)$$

y $0{,}2 \leq 0{,}3$, $0{,}2 \leq 0{,}5$, $0{,}4 \leq 0{,}5$, $0{,}4 \leq 0{,}8$.

Proposición 4. $\leq_{\mathbb{H}}$ *es un orden parcial en* $\mathbb{H}$ *con* $\{0\}$ *y* $\{1\}$ *cota inferior y superior respectivamente.*

Este orden parcial respeta el orden puntual en $[0,1]$ y la ordenación usual de los intervalos de $[0,1]$. Otro ejemplo: si $A = \{a_1, a_2\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, entonces $A \leq_{\mathbb{H}} B$ si y sólo si, $a_1 \leq b_1$ y $a_2 \leq b_2$, y $B \leq_{\mathbb{H}} A$ si, y sólo si, $b_2 \leq a_1$ y $b_3 \leq a_2$.

$(\mathbb{H}, \leq_{\mathbb{H}})$ no es un retículo. Por ejemplo, los conjuntos $A := \{0{,}2, 0{,}4\}$ y $B = \{0{,}1, 0{,}3, 0{,}6\}$ carecen de supremo y de ínfimo. Sin embargo, si uno de los cardinales de A y B es múltiplo del otro, entonces estos conjuntos poseen supremo e ínfimo. De este hecho se sigue el siguiente resultado.

Proposición 5. *Sea* $R = r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ *una sucesión de números naturales con* r_{i+1} *múltiplo de* r_i *para cada* $i \geq 0$, $\mathbb{H}_{r_i}$ *el conjunto de subconjuntos finitos de* $[0,1]$ *de cardinal* r_i *y* $\mathbb{H}_R = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{H}_{r_i}$. *Entonces* $(\mathbb{H}_R, \leq_{\mathbb{H}})$ *es un retículo.*

$(\mathbb{H}, \leq_{\mathbb{H}})$ no es un retículo porque le ”faltan“ objetos. Si añadimos los conjuntos del intervalo unidad con algunos elementos repetidos, los llamados bolsas o multiconjuntos [3], obtenemos un retículo $(\overline{\mathbb{B}}, \leq_{\mathbb{B}})$ en el que $(\mathbb{H}, \leq_{\mathbb{H}})$ está inmerso.

A partir de una t-norma usual (i.e., definida en $[0,1]$) se pueden generar sendas t-normas en $(\mathbb{H}, \leq_{\mathbb{H}})$ y en $(\overline{\mathbb{B}}, \leq_{\mathbb{B}})$.

Proposición 6. *Sean* $A = \{a_1, , \ldots, a_n\}$ *y* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ *dos subconjuntos finitos de* $[0,1]$ *y* T *una t-norma tal que* $a < a'$ *y* $b < b'$ *implica* $T(a,b) < T(a', b')$. *Escribamos* $A_{\frac{\mathrm{lcm}(n,m)}{m}} = (c_1, c_2, \ldots, c_{\mathrm{mcm}(n,m)})$ *y* $B_{\frac{\mathrm{lcm}(n,m)}{n}} = (d_1, d_2, \ldots, d_{\mathrm{mcm}(n,m)})$. *Entonces*

$$\mathbb{T}(A,B) = \{T(c_1, d_1), T(c_2, d_2), \ldots, T(c_{\mathrm{mcm}(n,m)}, d_{\mathrm{mcm}(n,m)})\}$$

es una t-norma en $(\mathbb{H}, \leq_{\mathbb{H}})$.

Referencias

[1] V. Torra. Hesitant fuzzy sets. International Journal of Intelligent Systems, 25(6), 529–539, 2010.

[2] V. Torra and Y. Narukawa. On hesitant fuzzy sets and decision. En 18th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1378–1382, 2009.

[3] R:R: Yager. On the theory of bags. International Journal of General Systems, 13(1), 23–37, 1986