

EVALUACIÓN ESTRUCTURAL DE PUENTES EXISTENTES

TÉCNICAS DE OBSERVABILIDAD

José Antonio LOZANO

Universidad de Castilla-La Mancha
Joseantonio.lozano@uclm.es
Ciudad Real, España

María NOGAL

Trinity College
nogalm@tdc.ie
Dublin, Irlanda

Lei JUN

Tongji University
1310269@tongji.edu.cn
Shanghai, China

Dong XU

Tongji University
Xu_dong@tongji.edu.cn
Shanghai, China

José TURMO

Universidad Politécnica de Cataluña
Jose.turmo@upc.edu
Barcelona, España

Gonzalo RAMOS

Universidad Politécnica de Cataluña
Gonzalo.ramos@upc.edu
Barcelona, España

Resumen

Cada vez es más importante el parque de puentes y estructuras ya construidas que es necesario mantener y evaluar su estado con el paso del tiempo, o tras haber sufrido alguna situación accidental, como puede ser un sismo. Hay diversas técnicas para ello y en esta comunicación se propone una nueva técnica de observabilidad que combina dos enfoques: uno simbólico y uno numérico. Para ilustrar el potencial de este método, se comparan los resultados obtenidos con el método propuesto con los de dos métodos alternativos presentados en la literatura.

Abstract

The number of existing bridges and structures already built, which must be maintained and structurally assessed during their life, or due to accidental loads, such as earthquakes, is constantly increasing. There are several techniques for structural assessment and this paper presents a new observability procedure that combines both a symbolical and a numerical approach. To illustrate the potential of the proposed method, the observability technique is compared with two alternative methods presented in the literature.

Palabras Clave: Técnicas de observabilidad, sistemas de identificación estructural, análisis numérico

Keywords: Observability technique, Structural system Identification, Numerical analysis



Introducción

La identificación estructural (Structural System Identification, SSI) sirve para estimar parámetros de estructuras construidas (tales como rigideces) a partir de la respuesta de la estructura [1]. Estas estimaciones sirven para calibrar los modelos de elementos finitos (MEFs), mejorando la precisión de la simulación de estructuras construidas [2].

En la literatura se han presentado numerosos métodos de identificación estructural. Estos métodos se pueden clasificar como paramétricos o no-paramétricos. Por un lado, los métodos paramétricos están basados en un enfoque directo en el que los parámetros del modelo representan directamente las propiedades físicas del modelo. Por otro lado, los modelos no-paramétricos están basados en un sistema de ecuaciones que carece de forma explícita de un significado físico. El desarrollo de la capacidad de computación de los ordenadores ha propiciado un significativo incremento de los métodos no-paramétricos, tales como las redes neuronales o los algoritmos genéticos [3]. Los métodos de identificación estructural también se pueden clasificar de acuerdo al tipo de excitación del ensayo de calibración como estáticos [3] o dinámicos [4].

Recientemente se han presentado diferentes trabajos sobre la aplicación paramétrica de las técnicas de observabilidad para la identificación estructural a partir de medidas estáticas [5-9]. Estos trabajos están basados en un análisis inverso del sistema de la matriz de rigidez de la estructura a partir de un enfoque puramente simbólico. Sin embargo, la implementación práctica del método de la observabilidad a la identificación estructural de estructuras reales hace necesario un enfoque numérico. Para suplir esta carencia, este artículo presenta la aplicación numérica de las técnicas de observabilidad. Para ello, se propone un algoritmo que reduce los efectos de los errores numéricos producidos por la falta de precisión de las medidas. Para validar este algoritmo se comparan los resultados obtenidos con los de dos métodos de identificación estructural alternativos presentados en la literatura.

Tras presentar el método de identificación estructural mediante técnicas de observabilidad, se presenta su aplicación numérica. Tras ello, se comparan los resultados de la observabilidad con los de dos métodos alternativos presentados en la literatura. Finalmente se presentan las conclusiones.

Análisis simbólico del método de la observabilidad

La identificación de los parámetros desconocidos en $[K]$ lleva a la necesidad de resolver un sistema no lineal de ecuaciones debido a que las rigideces aparecen multiplicadas por los desplazamientos en los nodos (en una estructura bidimensional, desplazamientos horizontales, u_k , y verticales, v_k , y giros, w_k en cada nodo k). En este sistema pueden aparecer productos de variables polinomiales (tales como $E_j A_j u_k$, $E_j A_j v_k$, $E_j I_j u_k$, $E_j I_j v_k$ y $E_j I_j w_k$). Para resolver el sistema no lineal obtenido, la Ecuación (1) se puede reordenar como sigue:

$$[K^*] \{\delta^*\} = \{f\}, \quad (1)$$

donde los productos de variables se introducen en el vector modificado de desplazamientos $\{\delta^*\}$. En este caso, la matriz de rigidez modificada $[K^*]$ pasa a ser una matriz conocida de coeficientes con dimensiones diferentes a la matriz de rigidez inicial $[K]$. Dependiendo de la información conocida, las variables en el vector $\{\delta^*\}$ pueden ser productos de tres variables (tales como $E_j I_j v_k$ o $E_j I_j w_k$), productos de dos variables (tales como $E_j I_j$ o $I_j w_k$) o variables aisladas (tales como E_j o w_k).

Tras introducir las condiciones de contorno y los incrementos de cargas en los nodos producidos en el ensayo estático, se puede asumir que un subconjunto de incrementos δ_1^* de $\{\delta^*\}$ y un subconjunto de fuerzas f_1 de $\{f\}$ son conocidas y que los conjuntos restantes δ_0^* de $\{\delta^*\}$ y f_0 de $\{f\}$ no lo son. Mediante condensación estática, el sistema (2) se puede dividir de la siguiente manera:

$$[K^*] \{\delta^*\} = \begin{bmatrix} K_{00}^* & K_{01}^* \\ K_{10}^* & K_{11}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_0^* \\ \delta_1^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{Bmatrix} = \{f\}, \quad (2)$$

donde K_{00}^* , K_{01}^* , K_{10}^* y K_{11}^* son las particiones de la matriz $[K^*]$ y δ_0^* , δ_1^* , f_0 , y f_1 son las particiones de $\{\delta^*\}$ y $\{f\}$, respectivamente.

Con el objetivo de juntar todas las incógnitas en un único vector, el sistema (2) se puede reordenar como sigue:

$$[B] \{z\} = \begin{bmatrix} K_{10}^* & 0 \\ K_{00}^* & -I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_0^* \\ f_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 - K_{11}^* \cdot f_1 \\ -K_{01}^* \cdot \delta_1^* \end{Bmatrix} = \{D\}, \quad (3)$$



donde I y O representan la matriz identidad y nula, respectivamente. En este sistema, el vector de incógnitas $\{z\}$, y el vector de observaciones $\{D\}$ están relacionados por una matriz de coeficientes conocida $[B]$.

Mediante técnicas de observabilidad se puede obtener el conjunto de parámetros de $\{z\}$ que se definen de forma inequívoca, es decir que son observables. Tal y como se presenta en [10-11], en este análisis basta con analizar el espacio nulo, $[V]$, de la matriz $[B]$.

La solución general del sistema (3) tiene la siguiente estructura:

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \delta_0^* \\ f_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{00}^* \\ f_{00} \end{Bmatrix} + [V]\{\rho\}, \quad (4)$$

donde $\begin{Bmatrix} \delta_{00}^* \\ f_{00} \end{Bmatrix}$ es una solución particular de (4) y $[V]\cdot\{\rho\}$ es el conjunto de todas las soluciones asociadas al sistema homogéneo de ecuaciones (espacio lineal de soluciones, donde las columnas de $[V]$ son las bases y los elementos en el vector $\{\rho\}$ son valores reales que representan los coeficientes de todas las posibles combinaciones lineales). Las variables observables serán aquellas cuyas filas asociadas del espacio nulo $[V]$ sean nulas.

Tal y como se especifica en [8], a partir de este procedimiento se pueden estimar las ecuaciones paramétricas de los parámetros observables.

Análisis numérico del método de la observabilidad

La aplicación numérica de las técnicas de observabilidad no es tan sencilla como podría parecer [12-13]. De hecho, la implementación directa del procedimiento descrito en la sección anterior puede conllevar los siguientes problemas: (1) Falta de observabilidad a lo largo del proceso recursivo. (2) Problemas numéricos asociados a la resolución del sistema de ecuaciones. (3) Incremento de los errores a lo largo del proceso recursivo. Para resolver todos estos problemas, se propone un nuevo algoritmo que combina dos enfoques: uno simbólico y uno numérico. Por un lado, el enfoque simbólico sirve para realizar el análisis de la observabilidad, eliminando los efectos de los errores numéricos en la identificación de la unicidad de las soluciones de los parámetros del sistema. Por otro lado,

el enfoque numérico permite la identificación numérica de los parámetros observados. Este enfoque mixto también incluye un proceso recursivo, en el que los parámetros observados se van introduciendo sucesivamente de forma simbólica.

El algoritmo propuesto cuenta con las siguientes fases: (1) Introducción de la información conocida. Esta información incluye la geometría del MEF, las deformaciones impuestas en las condiciones de contorno, los incrementos de carga en los nodos y los incrementos de deformaciones medidos durante el ensayo de carga estático. (2) Cálculo de las matrices particionadas K_{00}^* , K_{01}^* , K_{10}^* y K_{11}^* a partir de la información introducida. (3) Cálculo de la matriz de coeficientes $[B]$ y el vector de observaciones $\{D\}$. A partir de los valores de estas matrices se calcula $\{z\}$ mediante la Ecuación 3. (4) Determinación los N_i parámetros del vector $\{z\}$ cuyo valor se puede definir de forma inequívoca (esto es, que son observables) analizando el espacio nulo, $[V]$, de la matriz $[B]$. (5) Inicio del proceso recursivo (con contador i), si se observa algún parámetro, (N_i diferente de 0) para actualizar la información de entrada en el análisis de observabilidad. De esta forma, los parámetros observados se incluyen sucesivamente en la información de entrada en un nuevo análisis de la observabilidad a través del siguiente paso del proceso recursivo ($i=i+1$). (6) Repetición del proceso recursivo hasta que no se obtienen nuevas variables entre dos pasos sucesivos ($N_i=N_{i-1}$). (7) Determinación numérica de los parámetros observables al final de cada etapa del proceso recursivo.

Ejemplo 1 (viga biempotrada)

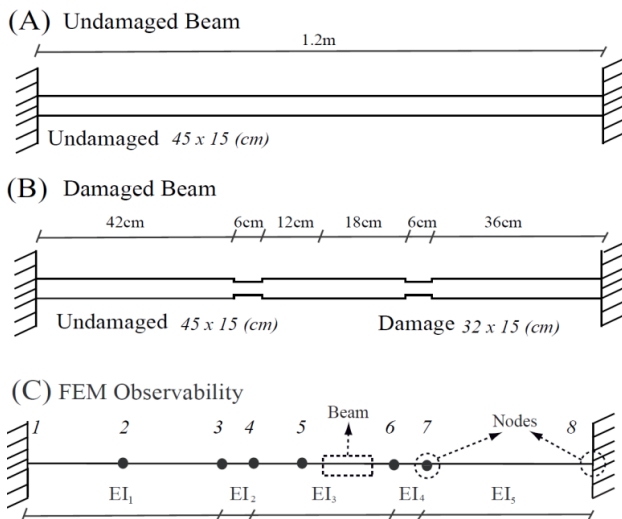
Este ejemplo está basado en dos vigas de laboratorio biempotradas presentadas en [14]. La primera de estas vigas (Figura 1.A) presenta una sección transversal constante de 15 cm de anchura por 45 cm de canto. La segunda viga (Figura 1.B) incluye dos daños de 6 cm de longitud simulados mediante una reducción del canto de la sección de un 30%. De esta forma la sección transversal de los daños es de 15 cm por 32cm. El módulo de elasticidad de ambas vigas es de $2,67 \times 10^3$ MPa. A efectos de la simulación únicamente se considera el mecanismo de flexión.

Siguiendo las hipótesis propuestas en [14], se asume que se conoce la localización del daño pero no su magnitud. De esta forma se cuenta con un número de 5 rigideces a flexión, EI , desconocidas. Estas rigideces se numeran desde EI_1 a EI_5 .



El primer paso para realizar la identificación estructural del sistema consiste en definir un MEF que caracterice de forma adecuada las propiedades mecánicas desconocidas. El MEF seleccionado cuenta con 8 nodos y 7 elementos tipo viga. Este modelo se presenta junto con las rigideces de las vigas (EI_1 a EI_5) en la Figura 1.C. Para un determinado caso de carga, se conocen las fuerzas en todos los nodos excepto en las condiciones de contorno. Para estimar las rigideces desconocidas se miden 6 rotaciones (de w_2 a w_7). Los valores de estos parámetros se han obtenido a partir de los incrementos en las rotaciones nodales producidas por un ensayo estático que consistía en una carga puntual P de 200kN en centro luz (nodo 5). Los valores numéricos de estos giros se calcularon con el programa SAP2000.

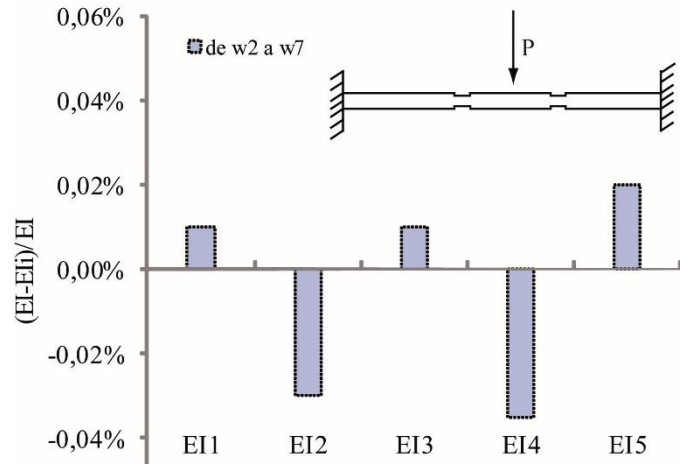
Figura 1. Ejemplo 1: (A) Viga sin daño, (B) Viga dañada y (C) MEF utilizado en la observabilidad



Las desviaciones porcentuales entre las rigideces estimadas, EI_i , y las reales, EI , se presentan en la Figura 2.

La Figura 2 muestra que las desviaciones entre las estimaciones y las rigideces reales son prácticamente despreciables. De hecho los máximos valores no superan el 0.04%.

Figura 2. Ejemplo 1: Desviaciones porcentuales entre las rigideces de flexión reales EI y las estimadas por la observabilidad EI_i .



Ejemplo 2 (viga continua)

La estructura analizada en este ejemplo corresponde con la viga continua de dos vanos presentada en la Figura 3.A. Esta viga tiene 60m de longitud y fue analizada originalmente en [15]. El MEF utilizado consiste en 61 nodos y 60 elementos tipo viga de 1m. Las propiedades mecánicas de la estructura incluyen una inercia de $0.04m^4$ y un módulo de elasticidad de $210GN/m^2$. A efectos de la simulación únicamente se considera el mecanismo de flexión. En este mecanismo se asumen como desconocidas las rigideces de cada uno de los elementos, por lo que se cuenta con un total de 60 incógnitas.

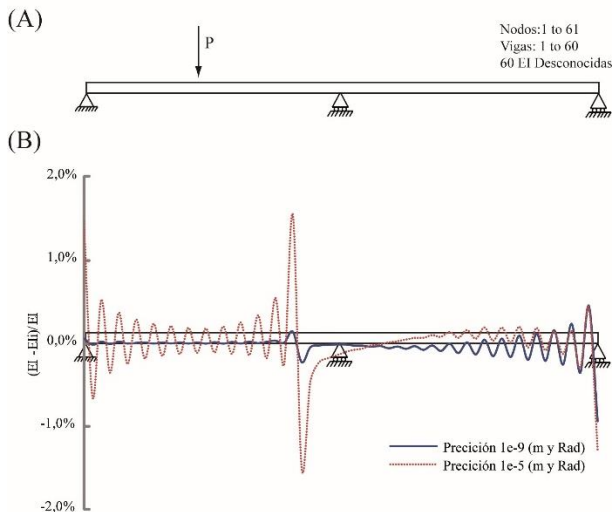
Para estimar el valor de las rigideces a flexión mediante técnicas de observabilidad, se ha utilizado el ensayo descrito en la Figura 3.A. Este ensayo consiste en la aplicación de una carga vertical P de 100kN en el nodo 16. Para determinar las 60 incógnitas de esta estructura son necesarias 60 medidas. Uno de los conjuntos de medidas adecuados incluye 58 deformaciones verticales (de v_1 a v_{30} y de v_{32} a v_{60}) y dos rotaciones (w_{29} y w_{30}). En este conjunto de medidas se inicia un proceso recursivo en las proximidades del apoyo central que fluye hacia ambos estribos. Para asegurar la observabilidad de todos los parámetros del sistema son necesarias 30 etapas recursivas.

Las desviaciones porcentuales entre las rigideces estimadas, EI_i , y las reales, EI , se presentan en la Figura 3.B. Para ilustrar el efecto de los errores en las medidas, esta figura incluye los resultados obtenidos por diferentes errores en las medidas: (1) Medidas sin



errores (preciones de $1e-9m$ en v y $1e-9rad$ in w) y (2) Errores tradicionales en las medidas (preciones de $1e-5m$ en v [16] y $1e-5rad$ in w [17]).

Figura 3. Ejemplo 2: (A) Geometría y caso de carga y (B) Desviaciones porcentuales entre las rigideces de flexión reales EI y las estimadas por la observabilidad EI_e .



La Figura 2.B muestra la importancia de la curvatura en la identificación estructural mediante las técnicas de observabilidad. De hecho, los mayores errores aparecen en las zonas de la viga con curvaturas nulas (concretamente en $x=0$, $x=27$ y $x=60m$) en el caso de carga. Para entender este resultado es necesario tener en cuenta que las rigideces de flexión se calculan por medio de las curvaturas de los elementos. En este caso, los efectos de la curvatura son superiores a los producidos por el proceso recursivo. Para reducir estos efectos es recomendable una adecuada selección del caso de carga.

Comparación con otros métodos de identificación estructural

En esta sección se compara el método de la observabilidad con dos métodos de identificación estructural alternativos propuestos en la literatura. Con este objetivo, en primer lugar se describen las principales hipótesis de cada método y finalmente se comparan los resultados.

Método 1 (Liao et al. [14])

Liao et al. propusieron un método para actualizar las características de un modelo de elementos finitos a partir de la respuesta pseudo-estática en un ensayo no-destructivo. Este método cuantifica la magnitud de los daños localizados en vigas mediante la comparación de las líneas de influencia obtenidas en la estructura dañada

y en la estructura sin dañar. Estas líneas se obtenían midiendo las deformaciones verticales en un punto cuando se pasaba una carga a lo largo de la directriz de la viga. De esta forma, el problema de actualización del modelo se transforma en un clásico problema de optimización que se resuelve de forma iterativa.

Para analizar la estructura del Ejemplo 1, Liao et al. [14] midieron 19 deformaciones verticales en cada línea de influencia. Los errores máximos obtenidos alcanzaron el 1.10%.

Método 2 (Abdo [15])

En el método propuesto por Abdo [15] los daños en las estructuras se localizan mediante el análisis del coeficiente de relación gris ("Grey Relation Coefficient") de sus elementos. Este coeficiente incluye cambios en las curvaturas entre la estructura dañada y la estructura sin dañar. Este método se propone únicamente para localizar daños y no proporciona información sobre la magnitud de los mismos.

Para localizar los daños en el Ejemplo 2, Abdo [15] midieron las deformaciones verticales en los 58 nodos intermedios tanto de la estructura dañada como de la estructura sin dañar.

Comparación entre los diferentes métodos

El método propuesto por Liao et al. [14] presenta varias ventajas. En primer lugar, permite la estimación de la magnitud de los daños en vigas midiendo únicamente deformaciones verticales. Además, el método es aplicable cuando las deformaciones se miden en diferentes localizaciones. Sin embargo, su mayor desventaja es su necesidad de medir deformaciones en la estructura sin daño, lo cual limita enormemente la aplicación práctica del método a estructuras fuera del laboratorio. La segunda desventaja es el requerimiento de un gran número de medidas para realizar las líneas de influencia. Finalmente, el método solo puede cuantificar daños previamente localizados.

El método propuesto por Abdo [15] se puede utilizar para la detección de daños a partir del comportamiento estático de la estructura. La mayor desventaja de este método es que los parámetros estructurales se evalúan mediante la comparación entre la estructura dañada y la estructura sin dañar, lo que como en el método anterior limita su aplicabilidad. Otra desventaja es que no permite



estimar la magnitud del daño ya que solo proporciona información de su localización.

Las principales características de los diferentes métodos analizados se comparan en la Tabla 1. Estas características hacen referencia a la necesitada de un proceso Iterativo (I) o Recursivo (R), el uso del método para la Localización (L), Cuantificación (C), o ambos (L+C), así como la necesidad de utilizar información de la Estructura Sin Dañar (ESD).

Tabla 1. Comparación de las principales características de los diferentes métodos, I/R: Proceso Iterativo / Recursivo, L/Q: Localización / Cuantificación del daño y ESD: Información de la Estructura Sin Dañar.

Método	I / R	L / C	ESD
Liao et al. [12]	I	L	✓
Abdo [13]	-	C	✓
Observabilidad	R	L+C	x

El análisis de esta tabla muestra que el método de Abdo [15] es el único que no utiliza ni un proceso iterativo ni un proceso recursivo. Por otro lado, el método de la observabilidad es el único que permiten tanto localizar como cuantificar el daño y no requiere de información de la estructura sin dañar.

En la Tabla 2 se presenta una comparación del número de medidas necesarias y la precisión máxima en las estimaciones en los ejemplos analizados por el método propuesto en la literatura (Método Original MO) y las técnicas de observabilidad (Obs).

Tabla 2. Comparación de los resultados de los Ejemplos 1 y 2. MO= Método Original, Obs: Observabilidad

Ejemplo	EI desconocidas	Medidas (MO / Obs)	Precisión Max. (MO / Obs)
Ejemplo 1	5	(19+19) / 6	1.10% / 0.04%
Ejemplo 2	60	(58+58) / 60	- / 1.23%

La Tabla 2 muestra que el número de medidas requeridas por el método de la observabilidad es significativamente inferior al de los métodos originales. Esta reducción es especialmente significativa en el Ejemplo 1, donde la reducción de las medidas requeridas por las técnicas de observabilidad alcanza el 84% respecto al método original. En este ejemplo también se mejora significativamente la precisión máxima de la estimación pasando del 1.10% del método original al 0.04%. En el caso del Ejemplo 2 se alcanza una precisión máxima de 1.23% con las técnicas de observabilidad. Cabe recalcar que con el método original no se obtenían estimaciones

de los errores al no permitir la cuantificación de los daños.

Conclusiones

Durante la vida útil de las estructuras las incertidumbres en los materiales y los estados tensionales pueden llevar a la reducción de las propiedades mecánicas en los elementos de las estructuras. Para calibrar los modelos de análisis a partir de la respuesta obtenida en ensayos no destructivos se suelen utilizar métodos de identificación estructural. Entre los métodos propuestos en la literatura destaca el método de la observabilidad para la identificación paramétrica a partir de ensayos estáticos. Pese a que conceptualmente resulte muy interesante realizar una identificación matemática de los parámetros, esta característica reduce la aplicabilidad del procedimiento a estructuras reales. Es por ello que en este artículo se presenta la aplicación numérica de las técnicas de observabilidad. Con este objetivo se propone un nuevo algoritmo que combina dos enfoques uno simbólico (para determinar la unicidad de las soluciones) y uno numérico (para obtener un valor de las estimaciones). Este algoritmo se ha comparado con dos métodos de identificación estructural alternativos presentados en la literatura.

La comparación de los resultados de los diferentes métodos analizados muestra que las técnicas de observabilidad requieren de un menor número de medidas y permiten obtener estimaciones más precisas. Además, a diferencia de los otros métodos analizados, no se requieren mediciones en estructuras equivalentes sin daños. Estas características muestran la conveniencia de utilizar las técnicas de observabilidad propuestas para la identificación estructural.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer la financiación recibida por el Ministerio de Economía, Industria y Competitividad y por los fondos FEDER a través del proyecto de investigación BIA2013-47290-R dirigido por José Turmo.

Referencias

- [1] H. Adeli, X. Jiang, Dynamic fuzzy wavelet neural network model for structural system identification, *Journal of Structural Engineering*, 132 (2006), 102-111.
- [2] M. Sanayei, G. Imbaro, J. McClain, I. Brown, Structural Model Updating Using Experimental Static Measurements, *Journal of Structural Engineering*, 123 (1997), 792-798.



- [3] C. Chisari, C. Bedon, C. Amadio Dynamic and static identification of base-isolated bridges using Genetic Algorithms. *Engineering Structures* 102 (2015), 80–92.
- [4] G. Degrande G. Lombaert. An efficient formulation of Krylov's prediction model for train induced vibrations based on the dynamic reciprocity theorem, *Acoustical Society of America*. 110 (2001), 1379-1389.
- [5] J.A. Lozano-Galant, M. Nogal, E. Castillo, J. Turmo, Application of observability techniques to structural system identification, *Computer-aided Civil and Infrastructure Engineering*, (2013), 434-450.
- [6] J.A. Lozano-Galant, J. Turmo, M. Nogal, I. Paya-Zaforteza, Structural system identification of cable-stayed bridges by observability techniques, *Structure and Infrastructure Engineering*, 10 (2014), 1331-1344.
- [7] E. Castillo, M. Nogal, J.A. Lozano-Galant, J. Turmo, Solving some special cases of polynomial equations appearing frequently in physical and engineering problems, *Mathematical problems in engineering*, aceptado 2016.
- [8] E. Castillo, J.A. Lozano-Galant, M. Nogal, J. Turmo, New tool to help decision making in Civil Engineering, *Journal of Civil Engineering and Management*, 21 (2015), 689-697.
- [9] J.A. Lozano-Galant, M. Nogal, E. Castillo, J. Turmo, Selection of measurements in static structural identification of bridges using observability tres, *Computers and Concrete*, 15 (2015), 771-794.
- [10] E. Castillo, A.J. Conejo, J.M. Menendez, P. Jimenez, The observability problem in traffic network model, *Computer-aided Civil and Infrastructure Engineering*, (2008), 208-222.
- [11] E. Castillo, A.J. Conejo, R.E. Pruneda, C. Solares, Observability in linear systems of equations and inequalities: applications. *Computers & operations research*, (2007), 1708-1720.
- [12] M. Nogal, J.A. Lozano-Galant, J. Turmo, Numerical damage identification of structures by observability techniques based on static loading tests, *Structure and Infrastructure Engineering* (2014), 1216-1222.
- [13] L. Jun, J.A. Lozano-Galant, M. Nogal, D. Xu, J. Turmo, Analysis of measurement and simulation errors in structural system identification by observability techniques, *Structural control Health Monitoring*, aceptado 2016.
- [14] J. Liao, G. Tang, L. Meng, H. Liu, Y. Zhang, Finite element model updating based on field quasi-static generalized influence line and its bridge engineering applications. *Procedia Engineering*, 31 (2012), 348-353.
- [15] M.A. Abdo, Parametric study of using only static response in structural damage detection. *Engineering Structures*, 34 (2012), 124-131.
- [16] C. Lü, W. Liu, Y. Zhang H. Zhao Experimental estimating deflection of a simple beam bridge model using grating eddy current sensors. *Sensors (Basel)*. 12 (2012), 9987-10000.
- [17] B. Geoffrey, A. Mark Alkali-Aggregate Reaction and Structural Damage to Concrete: Engineering Assessment, Repair and Management. Boca Raton: CRC Press; 2011.