LUGARES GEOMÉTRICOS DE MAL CONDICIONAMIENTO Y CONSTELACIONES UTILIZADAS EN LA EXTRACCIÓN DE PARÁMETROS DE RUIDO

Joan O'Callaghan, Alexandre Alegret, Lluís Pradell, Ignasi Corbella
Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
E.T.S. d'Enginyers de Telecomunicació de Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya
Campus nord, C/. Sor Eulàlia d'Anzizu, s/n. Módulo D3. 08034 Barcelona.

ABSTRACT

An analysis of the problem of noise parameter extraction is done. It is found that the mathematical problem is ill-posed if all the reflection coefficients fall onto a line, circle or arc of a circle in the Smith chart. This is used to expand on existing criteria for selecting Γ_s and to rule out sources of accuracy degradation. Comparisons among several possible choices constellations of Γ_s are made.

1. INTRODUCCIÓN

La determinación experimental de los cuatro parámetros de ruido (NP's) de un cuadripolo lineal se basa en el ajuste de las medidas de factor de ruido (F) del dispositivo y coeficientes de reflexión de fuente (Γ_s) presentados al mismo con las ecuaciones teóricas que los relacionan.

Ciertas disposiciones geométricas en la carta de Smith de los Γ_s sintetizados provocan que el problema de extracción de los parámetros de ruido no tenga solución única o que el error en los NP's extraídos sea arbitrariamente alto. A estas disposiciones las llamamos lugares geométricos de mal condicionamiento (LGMC) del problema de extracción de parámetros de ruido.

El conocimiento de los LGMC del problema de extracción permite evitar su sintetización en el proceso de medida de los NP's de un dispositivo mediante estrategias de selección que se basan en distribuir los Γ_s a sintetizar en dos o más LGMC [1].

En este trabajo se presenta una descripción completa de los LGMC del problema de extracción que permite ampliar las estrategias de selección de Γ_s dadas hasta ahora [1].

2. LUGARES GEOMÉTRICOS DE MAL CONDICIONAMIENTO

El ajuste de datos se realiza mediante la ecuación:

$$F(\Gamma_s) = F_{min} + 4N\frac{|\Gamma_s - \Gamma_o|^2}{(1-|\Gamma_s|^2)(1-|\Gamma_o|^2)} \quad \text{con } \Gamma_o = \rho_o e^{j\theta_o} \text{ y } \Gamma_s = \rho_s e^{j\theta_s} \tag{1}$$

en la que F_{min}, N, $|\Gamma_s$-$\Gamma_o|$, $|\Gamma_s|$ y $|\Gamma_o|$ son independientes del plano de referencia [2]. Esta propiedad hace que la ecuación (1) sea preferible a otras que le son equivalentes ($F(Y_s)$ por ejemplo).

Se van a estudiar los LGMC del problema a partir de la expresión (1), para ello se linealiza con respecto a los NP's y se agrupan términos en función de su dependencia con Γ_s. De esta forma, (1) se puede expresar como:

$$F = x_1 + x_2\frac{1}{1-\rho_s^2} + x_3\frac{\rho_s\cos\theta_s}{1-\rho_s^2} + x_4\frac{\rho_s\sin\theta_s}{1-\rho_s^2} \tag{2}$$

donde los parámetros x_i están relacionados con los de ruido (F_{min},N,ρ_o,θ_o) de la siguiente forma:

$$x_1 = F_{min} - 4N\frac{1}{1-\rho_o^2} \qquad x_2 = 4N\frac{1+\rho_o^2}{1-\rho_o^2} \tag{3}$$

$$x_3 = -8N\frac{\rho_o\cos\theta_o}{1-\rho_o^2} \qquad x_4 = -8N\frac{\rho_o\sin\theta_o}{1-\rho_o^2}$$

En el proceso de extracción de los NP's de un dispositivo se realizan m medidas ($m \geq 4$) del mismo, cada una de las cuales se representa con el par $(\Gamma_s, F)_i$. La sustitución de estos valores en (2) da lugar a una ecuación para cada medida del dispositivo. Si representamos estas ecuaciones en forma matricial obtenemos el sistema sobredeterminado $\mathbf{A}\mathbf{x} \cong \mathbf{b}$ con:

$$\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{b} = \left(F_1, F_2, \ldots, F_m\right)^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

de m ecuaciones y cuatro incógnitas, relacionadas estas últimas con los NP's de forma no lineal tal como se expresa en (3). Para que este sistema tenga solución única, el rango de **A** debe ser máximo (cuatro en este caso), si no lo es se tiene un LGMC. Para encontrar las expresiones de los LGMC del problema de extracción de los NP's basta, entonces, saber qué combinaciones de Γ_s hacen que el rango de la matriz de coeficientes **A** del sistema no sea máximo. Este análisis se puede hacer sobre la matriz de coeficientes $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ del sistema de ecuaciones normales (como se presenta en [1]) o sobre la matriz **A** del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} \cong \mathbf{b}$, siendo esta última opción la más adecuada para hallar una expresión compacta de los LGMC.

Aplicando esta última idea, expuesta en [3], consideramos que la matriz **A** está generada por cuatro vectores columna que dependen de los Γ_s :

$$\mathrm{A}(1, j) = 1 \qquad \mathrm{A}(2, j) = \frac{1}{1 - \rho_{s\_j}^{2}} \tag{5}$$

$$\mathrm{A}(3, j) = \frac{\rho_{s\_j} \cos\theta_{s\_j}}{1 - \rho_{s\_j}^{2}} \qquad \mathrm{A}(4, j) = \frac{\rho_{s\_j} \sin\theta_{s\_j}}{1 - \rho_{s\_j}^{2}} \qquad j = 1, \ldots, m$$

Con este concepto vectorial del problema, los LGMC se definen como los conjuntos de Γ_s que provocan que los vectores columna de **A** sean linealmente dependientes:

$$\alpha + \beta \frac{1}{1-\rho_s^2} + \gamma \frac{\rho_s \cos\theta_s}{1-\rho_s^2} + \delta \frac{\rho_s \sin\theta_s}{1-\rho_s^2} = 0 \tag{6}$$

Cualquier combinación $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, distinta de la trivial, dará lugar a la expresión de un LGMC. La expresión general de los LGMC:

$$\left(x - \frac{\gamma}{2\alpha}\right)^2 + \left(y - \frac{\delta}{2\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma^2 + \delta^2}{4\alpha^2} \tag{7}$$

se obtiene a partir de (6) tomando: $x=\mathrm{Re}[\Gamma_s]$, $y=\mathrm{Im}[\Gamma_s]$.

Si se analiza la expresión (7), se puede afirmar que *los LGMC del problema de extracción de NP's son circunferencias, arcos de circunferencia y rectas en la carta de Smith* (estas últimas aparecen cuando $\alpha=0$ en (6)), es decir, este problema presentará un error considerable cuando los Γ_s sintetizados se encuentren todos situados en o cerca de un LGMC.

Se ha simulado la extracción de NP's en el caso de trabajar con un LGMC, para ello se generan tres constelaciones mal condicionadas (una circunferencia, un arco de circunferencia y una recta) uno de cuyos puntos se separa una distancia d de su posición original. En sucesivas iteraciones se va disminuyendo esta distancia y se calcula la solución del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} \cong \mathbf{b}$ comparándola con la solución ideal (sin errores de medida en Γ_s ni en F). En la figura 1, se aprecia el resultado de este análisis, donde se aprecia que la curva de error en el vector solución **x** aumenta cuando d disminuye, llegando a un máximo en el que los errores de medida en Γ_s evitan que se tenga exactamente un LGMC.

Se puede demostrar, por otra parte, que tanto la formulación del problema (en el sentido de cuál de las expresiones equivalentes a (1) se linealiza) como el método de resolución (pseudoinversa o métodos de triangularización ortogonal [4]) del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} \cong \mathbf{b}$ no influyen en el error de extracción.

3. CONSTELACIONES DE Γ_s

Por lo visto anteriormente, el conjunto ('constelación') de Γ_s seleccionados determina el número de condición k(A) [4] del sistema sobredeterminado $\mathbf{Ax} \cong \mathbf{b}$ a resolver. Por ello, la selección de la constelación a utilizar tiene gran influencia en lo sensibles que serán los errores en los resultados (parámetros de ruido extraídos) con los errores en las medidas experimentales (en F y Γ_s).

Un criterio de selección adecuado [1] puede ser el de distribuir los Γ_s en dos LGMC diferentes, de forma que sea imposible que un tercer LGMC caiga cerca de los Γ_s seleccionados. Con los resultados anteriores puede verse que esto consistiría en escoger tres o más Γ_s sobre una recta o una circunferencia en la carta de Smith y otros tres en una segunda recta o circunferencia, bien diferenciada de la anterior.

Cabe también distinguir entre constelaciones 'locales' y 'globales', siendo éstas las que cubren toda la carta de Smith y aquéllas las que se centran en la región donde se espera hallar la Γ_o del dispositivo.

Nuestras simulaciones muestran que la constelación local descrita en [1] produce un error de ajuste menor que varias alternativas que podrían juzgarse razonables con los criterios expuestos anteriormente. La figura 2 muestra un ejemplo en el que se comparan el error de ajuste obtenido con dicha constelación local de *abanico* (con los Γ_s distribuidos sobre dos arcos de circunferencia de radios 0.3 y 0.6, siendo $|\Gamma_o|=0.5$) y una constelación global en la que los Γ_s forman una *cruz* [3] que cubre toda la carta de Smith. Sin embargo, esto sólo sucede si no hay un error de posicionamiento apreciable en la constelación local, es decir, si se puede prever Γ_o de antemano. La figura 3 muestra como los errores de extracción aumentan drásticamente con el error en la predicción de la fase de Γ_o para la constelación local, siendo aproximadamente constantes para el caso de la constelación global.

4. CONCLUSIONES

1. El problema de extracción de los parámetros de ruido está mal condicionado si los Γ_s se sitúan sobre una recta, circunferencia o arco de circunferencia en la carta de Smith.
2. El mal condicionamiento puede evitarse distribuyendo los Γ_s sobre dos LGMC distintos.
3. Una constelación local del tipo *abanico*, es adecuada para la extracción de parámetros de ruido siempre que se pueda prever Γ_o con exactitud.
4. En caso contrario, es mejor utilizar una constelación global; por ejemplo, una *cruz* que cubra toda la carta de Smith.

5. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por CICYT con los proyectos TIC 92-1020-C02-02, TIC 93-0672-C04-03 y MAT 95-1038-C02-02.

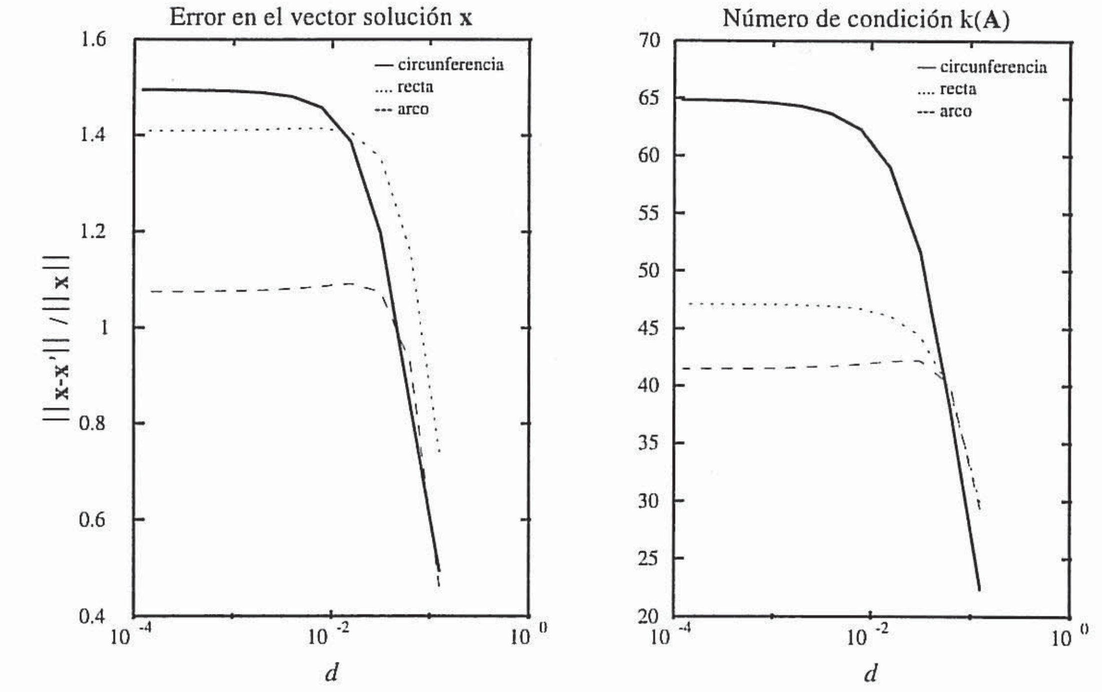

Figura 1: error en el vector solución **x** (**x** es el vector solución ideal y **x**' es el que se obtiene cuando se trabaja con un LGMC) y k(**A**) del sistema **Ax≅b** para tres LGMC distintos: una circunferencia, una recta y un arco de circunferencia.

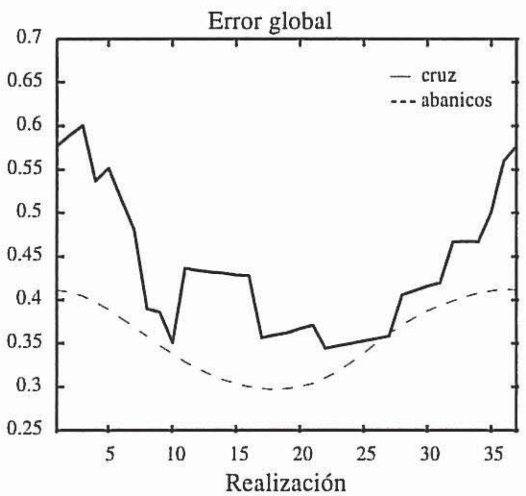

Figura 2: error de ajuste de la superficie de ruido para la *cruz* y los *abanicos* en el caso de tener a priori una buena aproximación del parámetro θ_0.

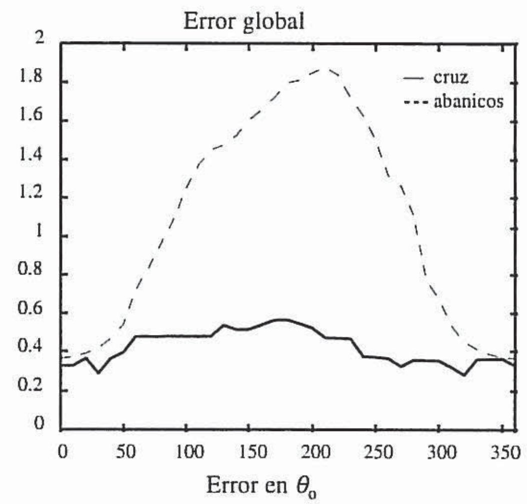

Figura 3: error de ajuste de la superficie de ruido para la *cruz* y los *abanicos* en función de la diferencia entre el θ_0 real y el supuesto.

[1] G. Caruso, M. Sannino, *Computer-Aided Determination of Microwave Two-Port Noise Parameters*, IEEE Transactions on MTT. Vol. 26. Núm. 9. Septiembre 1978. pp 639-42.

[2] J. Lange, *Noise Characterization of Linear Twoports in Terms of Invariant Parameters*, IEEE Journal of Solid-State Circuits. Vol. SC-2. Núm. 2. Junio 1967. pp 37-40.

[3] J. O'Callaghan, J.P. Mondal, *A Vector Approach for Noise Parameter Fitting and Selection of Source Admittances*, IEEE Transactions on MTT. Vol. 39. Núm. 8. Agosto 1991. pp 1376-1382.

[4] G.W. Stewart, *Introduction to Matrix Computations*. Nueva York: Academic Press. Computer science and applied mathematics, 1973.