

4.º CONGRESO INFORMATICA Y AUTOMATICA

MADRID -16/19 OCTUBRE 1979

SESION

1

MODELIZACION Y FILTRADO DE SECUENCIAS
DE IMAGENES PERTURBADAS POR RUIDO BLAN
CO GAUSSIANO

por

L. BASAÑEZ - P. BRUNET
Instituto de Cibernética

RESUMEN

La restauración de imágenes perturbadas por ruido constituye un tema de gran interés y actualidad por su amplio campo de aplicaciones en áreas que van desde la bioingeniería hasta la robótica industrial.

Para la restauración de imágenes estáticas se han propuesto diversos métodos aplicables a distintos tipos de degradación de imágenes. Existe, sin embargo, poca literatura dedicada al caso de una sucesión de imágenes cuyo contenido varía ligeramente de una a otra como correspondería a objetos en movimiento observados por una cámara.

En esta comunicación se propone un modelo dinámico estocástico para representar una secuencia de imágenes degradadas por ruido blanco gaussiano superpuesto y a partir del modelo se establecen las ecuaciones de un Filtro de Kalman-Bucy que permite su restauración. El método propuesto puede tener en cuenta cambios bruscos de escena en la secuencia considerada.

A través de un adecuado tratamiento matemático se desarrolla en la comunicación un algoritmo que conlleva una sustancial reducción de los requerimientos de memoria y tiempo de cálculo, lo que hace viable la implementación real del filtro.

Finalmente, se presentan los resultados obtenidos de la aplicación del método a algunos casos prácticos.

1. INTRODUCCION

En los últimos años, la restauración de imágenes degradadas ha recibido gran atención que ha dado lugar al desarrollo de un número considerable de métodos digitales dirigidos principalmente a imágenes estáticas (1),(2). En muchos casos, la degradación se ha modelado como una combinación aditiva de procesos de emborronamiento y ruido.

El emborronamiento se representa generalmente por la convolución entre una función y la imagen original, siendo el ruido gaussiano y descorrelado con ésta última. Operadores de restauración basados en la minimización del error cuadrático medio han dado resultados satisfactorios en este caso. De forma semejante, y a pesar de su arbitrariedad y limitaciones, el filtrado inverso modificado para evitar los polos de la función de transferencia permite restauraciones aceptables (3).

La modelización de las propiedades de correlación de las imágenes mediante un sistema lineal con ruido blanco aditivo, constituye la base de otra familia de métodos. En estos casos, la imagen barrida es considerada como la salida de un sistema lineal estocástico y en consecuencia, el filtrado de Kalman-Bucy puede ser usado para la estimación de mínimos cuadrados de la imagen original.

En esta línea, Habibi (4) propone un método basado en la consideración de que cada punto de la imagen está correlado únicamente con puntos situados más arriba y a su izquierda, lo que corresponde a utilizar solamente los puntos adquiridos con anterioridad si se sigue un proceso de barrido tipo televisión. Jani y Angel (5) sugieren un modelo estocástico más complejo que supone la correlación de cada punto con todos sus vecinos más próximos. Este planteamiento conduce a un modelo markoviano vectorial de segundo orden para el que plantean las correspondientes ecuaciones del Filtro de Kalman-Bucy.

El tema abordado en esta comunicación consiste en un problema diferente aunque relacionado con el expuesto. Se trata de modelizar y restaurar secuencias de imágenes cuyo contenido varía lentamente a lo largo de la secuencia teniendo en cuenta la posibilidad de cambios bruscos de imágenes. Cada imagen, correspondiente a un instante de muestreo, está representada por el nivel de gris de una retícula de $n \times n$ puntos que define el estado del sistema, y está perturbada por ruido blanco gaussiano.

Aunque diversos autores han tratado el análisis de las secuencias de imágenes (6),(7), existe poca literatura dirigida específicamente a la restauración de las mismas. Una primera versión del algoritmo aquí expuesto ha sido presentada recientemente por los autores de esta comunicación (8).

2.- PLANTEAMIENTO DEL MODELO Y DESARROLLO DEL FILTRO

La información contenida en una imagen monocromática bidimensional discretizada en $n \times n$ puntos puede representarse en cada instante t_k mediante una matriz de niveles de gris $X^{(k)}$. Si $X_i^{(k)}$, $i=1\dots n$ son los vectores fila correspondientes a las líneas horizontales de la imagen,

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ \vdots \\ X_n^{(k)} \end{bmatrix} \quad [1]$$

La relación entre imágenes consecutivas en una sucesión lentamente cambiante, puede modelizarse como

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + u^{(k)} \quad [2]$$

donde $U^{(k)}$ representa un ruido blanco matricial, gaussiano y con covariancia $[a]$ que asegure la dependencia entre puntos cercanos de $x^{(k)}$ y $x^{(k+1)}$.

Supondremos que la observación de cada imagen de la secuencia es imperfecta, debido a la presencia de otro ruido blanco matricial aditivo $V^{(k)}$, cuyos elementos, correspondientes a los distintos puntos de la imagen, asumiremos independientes,

$$z^{(k)} = x^{(k)} + v^{(k)}$$

Con la introducción del vector $x^{(k)}$ de dimensión $N=n^2$,

$$x^{(k)} = [x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)}]^T$$

el modelo puede escribirse en forma vectorial:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + u^{(k)} \\ z^{(k)} &= x^{(k)} + v^{(k)} \end{aligned} \quad [3]$$

donde los ruidos tienen esperanza matemática nula y covariancias

$$\begin{aligned} E \begin{bmatrix} u^{(k)} & u^{(1)} \end{bmatrix}^T &= Q \delta_{k1} \\ E \begin{bmatrix} u^{(k)} & v^{(1)} \end{bmatrix}^T &= 0 \\ E \begin{bmatrix} v^{(k)} & v^{(1)} \end{bmatrix}^T &= r I \delta_{k1} \end{aligned}$$

con Q , I de dimensión $N \times N$.

En el supuesto de una variación suficientemente lenta del contenido de las imágenes en el tiempo, podrá aceptarse la hipótesis de que el nivel de gris de cada punto de la imagen $k+1$ depende únicamente -y a través del ruido de la dinámica $u^{(k)}$ - de los niveles del mismo punto y de sus 4 vecinos más próximos en la imagen k .

Teniendo en cuenta la definición del vector $x^{(k)}$, la hipótesis anterior conduce a la siguiente estructura para la matriz de covariancias Q :

$$Q = q \begin{bmatrix} Q_1 & I & \dots & 0 & 0 \\ I & Q_1 & & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & Q_1 & I \\ 0 & 0 & \dots & I & Q_1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & & 0 \\ 1 & \sigma & & 1 \\ & & \sigma & 1 \\ 0 & & 1 & \sigma \end{bmatrix} \quad [4]$$

donde

$$q\sigma = E \left[u_i^{(k)} \right]^2 \quad ; \quad q = E \left[u_i^{(k)} u_{i\pm 1}^{(k)} \right] = E \left[u_i^{(k)} u_{i\pm n}^{(k)} \right]$$

El filtro de Kalman-Bucy, conduce a las ecuaciones recursivas siguientes para el cálculo de la estimación de la imagen $\hat{x}^{(k)}$ y de su intervalo de confianza (determinable a partir de la matriz de covariancia P):

$$\hat{x}^{(k)} = \hat{x}^{(k-1)} + p^{(k-1)} \cdot [p^{(k-1)} + rI]^{-1} \cdot (z^{(k)} - \hat{x}^{(k-1)}) \quad [5.1]$$

$$p^{(k)} = p^{(k-1)} + Q - p^{(k-1)} \cdot [p^{(k-1)} + rI]^{-1} \cdot p^{(k-1)} \quad [5.2]$$

$$\text{con } x^{(0)} = z^{(0)} \quad \text{y} \quad p^{(0)} = rI \quad [5.3]$$

A cada iteración se tiene, a través de $p^{(k)}$, una medida de la bondad de $\hat{x}^{(k)}$, y por tanto del valor esperado de la diferencia cuadrática media entre imagen estimada y observada,

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i^{(k)} - \hat{x}_i^{(k-1)})^2 \right] &= E \left[\frac{1}{N} (z^{(k)} - \hat{x}^{(k-1)})^T \cdot (z^{(k)} - \hat{x}^{(k-1)}) \right] \\ &= \frac{1}{N} E \left[(x^{(k)} - \hat{x}^{(k-1)})^T (x^{(k)} - \hat{x}^{(k-1)}) + v^{(k)T} v^{(k)} \right] = \\ &= \frac{1}{N} \text{tr} (p^{(k-1)} + rI) \end{aligned}$$

ya que $E [v^{(k)T} x^{(k)}] = E [v^{(k)T} \hat{x}^{(k-1)}] = 0$ por las características del ruido de observación.

La ecuación anterior permite la detección, en tiempo real, de la existencia de cambios bruscos de escena en la secuencia de imágenes. En efecto, podrá asumirse esta conclusión si la diferencia cuadrática entre la imagen observada y la estimada es significativamente superior a su valor esperado,

$$\sum_{i=1}^N (z_i^{(k)} - \hat{x}_i^{(k-1)})^2 > \gamma \text{tr} [p^{(k-1)} + rI], \quad \gamma > 1 \quad [6]$$

y en este caso, deberá reinicializarse el filtro con la mejor información disponible de la nueva imagen, consistente en su primera observación:

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(k)} &= z^{(k)} \\ p^{(k)} &= rI \end{aligned} \quad [7]$$

En el caso de que la matriz de covariancias $p^{(k-1)}$ sea diagonal $p^{(k-1)} = \text{diag}(p_1^{(k-1)}, \dots, p_N^{(k-1)})$ (caso al que puede reducirse nuestro problema como se verá más adelante), la variancia esperada de cada una de las N diferencias

$$z_i^{(k)} - \hat{x}_i^{(k-1)}$$

es $p_i^{(k-1)} + r$, y por ello la variable

$$\epsilon = \sum_{i=1}^N \frac{(z_i - \hat{x}_i^{(k-1)})^2}{r + p_i^{(k-1)}} \quad [8]$$

se distribuye según una ley de χ^2 de $N = n^2$ grados de libertad. En consecuencia, podrá asumirse cambio de escena si:

$$\sqrt{2\epsilon} - \sqrt{2N-1} \quad [9]$$

es significativamente distinto de cero.

3. DEDUCCION DEL ALGORITMO DE RESTAURACION

La implementación de las ecuaciones [5] del filtro en la forma obtenida requiere el almacenamiento de matrices de orden $n \times n^2$, y tiempos de cálculo del orden de n^6 motivados por la inversión de las mismas.

Es posible, sin embargo, reducir apreciablemente ambos conceptos mediante un cambio de base adecuado. En efecto, se puede demostrar (ver Apéndice) que existe una matriz M tal que

$$M^T Q M = \Lambda_Q = \text{diag} (q_1 \dots q_N) \quad [10]$$

Si M diagonaliza también la matriz $P^{(k)}$,

$$M^T P^{(k)} M = \Lambda_P^{(k)} = \text{diag} (p_1^{(k)} \dots p_N^{(k)}) \quad [11]$$

entonces,

$$\begin{aligned} M^T P^{(k+1)} M &= \Lambda_P^{(k)} + \Lambda_Q - \Lambda_P^{(k)} M^T [P^{(k)} + rI]^{-1} M \Lambda_P^{(k)} \\ &= \Lambda_P^{(k)} + \Lambda_Q - \Lambda_P^{(k)} [\Lambda_P^{(k)} + rI]^{-1} \Lambda_P^{(k)} \end{aligned}$$

y por tanto el cambio de base M también reduce $P^{(k+1)}$ a su forma diagonal. En consecuencia, si la condición inicial es tal que $P^{(0)} = M \Lambda_P^{(0)} M^T$ con $\Lambda_P^{(0)}$ matriz diagonal definida positiva arbitraria, las sucesivas matrices de covariancias $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(k)}$...serán todas ellas diagonalizadas por la misma M . En este caso, solo será necesario el almacenamiento de los N elementos de la diagonal de las matrices $P^{(k)}$, y la ecuación recursiva [5.2] se reducirá a,

$$p_i^{(k+1)} = p_i^{(k)} + q_i - \frac{[p_i^{(k)}]^2}{p_i^{(k)} + r} \quad i = 1 \dots N \quad [12]$$

Ahora bien, tal como se ha indicado anteriormente, 5.3, la condición inicial $P^{(0)}$ es diagonal y proporcional a I , con lo que esta última hipótesis se cumple y la ecuación [12] es válida.

La ecuación [5.1] se simplifica de un modo análogo. En con-

secuencia, una vez determinada la matriz M y los valores propios de Q en la forma detallada en el Apéndice, el algoritmo de filtrado se desarrollará en cada paso de acuerdo con el siguiente proceso:

- A partir de la observación $z^{(k)}$, efectuar el cambio de base

$$\theta^{(k)} = M^T \cdot z^{(k)} \quad [13]$$

- Obtener la estimación $\hat{y}^{(k)}$ en la nueva base (ecuación [5.1] modificada)

$$\hat{y}^{(k)} = \hat{y}^{(k-1)} + \Lambda_P^{(k-1)} [\theta^{(k)} - \hat{y}^{(k-1)}] \quad [14]$$

- Actualizar, mediante la relación de recurrencia [12] la matriz $\Lambda_P^{(k)}$.
- Si se desea observar la imagen filtrada, proceder al cambio de base inverso a [13]:

$$\hat{x}^{(k)} = M \hat{y}^{(k)} \quad [15]$$

Con este algoritmo es preciso almacenar las matrices M, Λ_Q , $\hat{y}^{(k-1)}$, $\hat{y}^{(k)}$, $z^{(k)}$, $\Lambda_P^{(k)}$, con un total de $6n^2$ variables (del mismo orden que la imagen) ya que como se muestra en el apéndice, el almacenamiento de M requiere únicamente el de n^2 variables.

El número de operaciones en cada paso es de $O(n^3)$, para las ecuaciones [13] y [15].

En cambio [12] y [14] solo requieren $O(n^2)$ operaciones. Por ello, es aconsejable calcular únicamente la expresión [15] para las imágenes que deban visualizarse ahorrando de esta forma un 50% del tiempo de cálculo en los pasos intermedios entre dos visualizaciones.

4. IMPLEMENTACION Y RESULTADOS

A fin de estudiar el comportamiento real del filtro, se ha escrito un programa de computador que ha permitido analizar diversos casos.

El programa consta de dos rutinas. La primera simula el sistema de adquisición de imágenes mediante la generación de secuencias de imágenes geométricas, que evolucionan en el tiempo a través de la gestión de imágenes reales previamente almacenadas. En ambos casos la rutina genera y adiciona ruido gaussiano pseudoaleatorio para obtener las imágenes perturbadas.

La segunda rutina implementa el algoritmo de filtrado descrito comenzando con el cálculo de las matrices M y Q que serán utilizadas posteriormente en las iteraciones.

Como ejemplo del funcionamiento del algoritmo se ha seleccionado un caso simple que permite apreciar claramente los resultados obtenidos, consistente en dos secuencias de imágenes

geométricas con transición brusca entre ambas (cambio de escena) discretizadas en 32 x 32 puntos.

El efecto de la restauración y de la detección de cambio de escena se muestra en la serie de figs. 1 que representan la salida del algoritmo en instantes equidistantes de tiempo. Por otra parte, la evolución de la variable ϵ , (8) indica la probabilidad de cambio de escena. (Figura 2).

5. CONCLUSIONES

Un modelo dinámico estocástico que relaciona imágenes consecutivas de una sucesión, asumiendo que cada punto de una imagen está relacionado únicamente con el mismo punto y los vecinos más próximos de la imagen anterior, representa adecuadamente el proceso y permite el desarrollo de un filtro lineal para su restauración.

Este enfoque facilita la detección de cambios bruscos de escena y la reinicialización del filtro para lograr un período transitorio reducido.

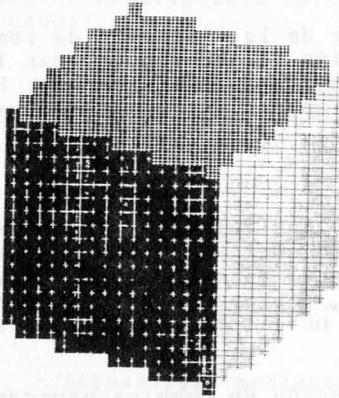
La implementación del filtro, prácticamente imposible en su forma original, se hace viable mediante un cambio de base adecuado. El algoritmo propuesto conduce a $O(n^3)$ operaciones por estimación lo que corresponde a $O(n)$ operaciones por punto de la imagen, y a la necesidad de almacenamiento para $6n^2$ valores. El uso directo de las ecuaciones del filtro requeriría memoria de $O(n^4)$ y tiempo de computador proporcional a n^6 .

La implementación en computador digital del filtro ha dado resultados claramente satisfactorios para diversos tipos de imágenes, avalando el enfoque propuesto.

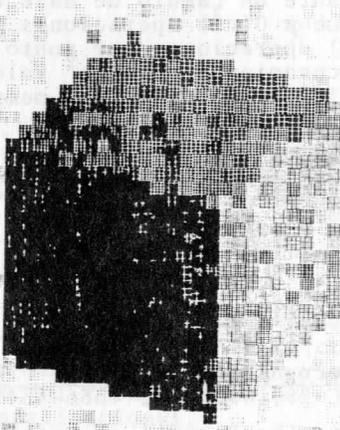
6. REFERENCIAS

- (1) A. Rosenfeld, A.C. Kak, "Digital Picture Processing", Ac. Press, 1976.
- (2) K.S. Fu, Rosenfeld, "Pattern Recognition and Image Processing". IEEE Trans. Computers, C-25, 1976, p. 1336-1345.
- (3) M.M. Sondhi, "Image Restoration: The Removal of Spatially Invariant Degradations". Proc. IEEE, 60, 1972, p.842-853.
- (4) A. Habibi, "Two-dimensional Bayesian Estimate of Images" Proc. IEEE, 60, 1972, p. 878-883.
- (5) A.K. Jain, E. Angel, "Image Restoration, Modelling and Reduction of Dimensionality". IEEE Trans. Computers, C-23, 1974., p. 470-476.
- (6) H.H. Nagel, "Analysis Techniques for Image Sequences". Proc. IJ CPR, Kyoto, Japan, nov. 7-10, 1978, -. 186-211
- (7) R. Jain, H.-H Nagel, "On the Analysis of Accumulative Difference Pictures from Image Sequences of Real World Scenes" IEEE Trans. Pattern Recognition and Machine Intelligence, PAMI-1, no. 2, 1979, p. 206-214.
- (8) L. Basañez, P. Brunet, "Linear Filtering Approach to Slow-varying Image Restoration". Proc. IJ CPR, Japan, Nov. 7-10, 1978, p. 747-749

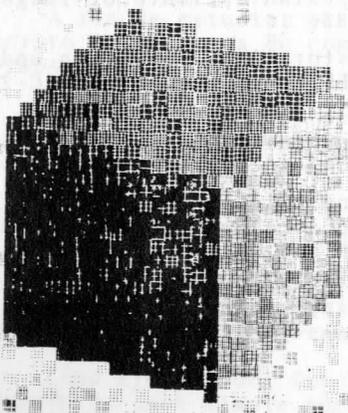
T=1



original

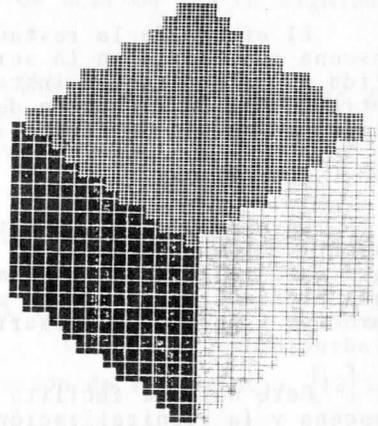


con ruido

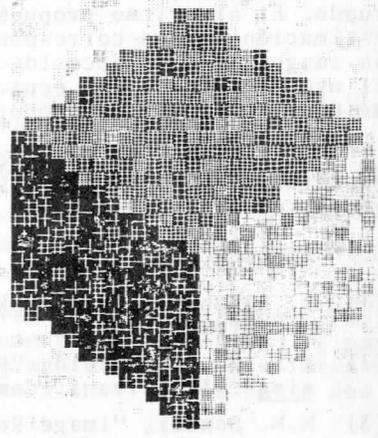


restauración

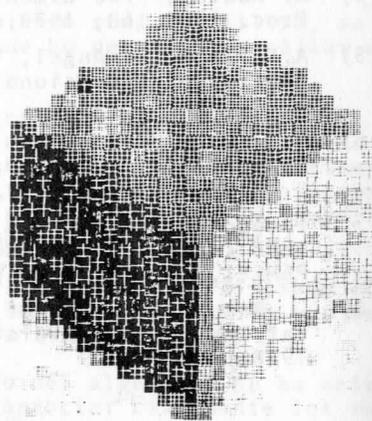
T=4



original



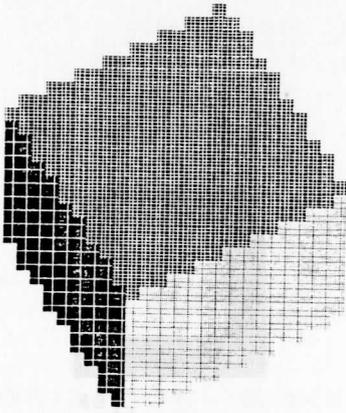
con ruido



restauración

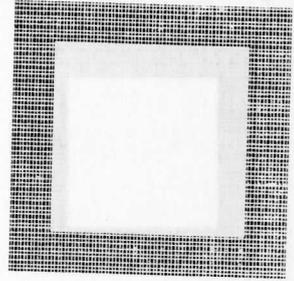
FIGURA 1

T=7

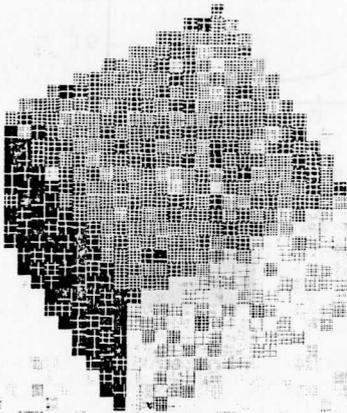


original

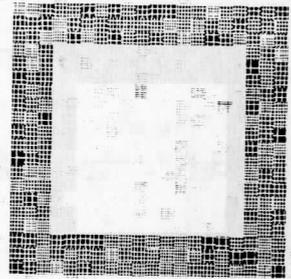
T=8



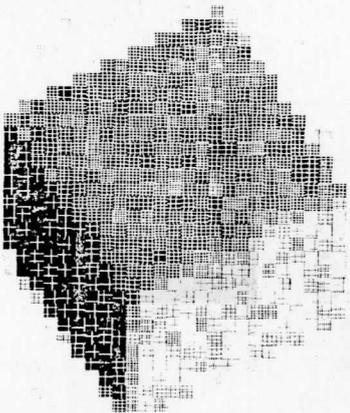
original



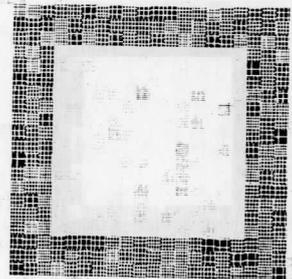
con ruido



con ruido



restauración

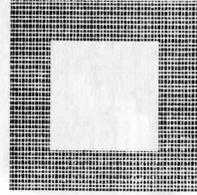
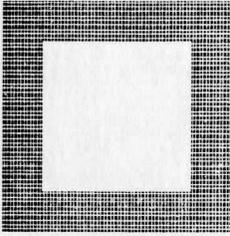


restauración

FIGURA 1

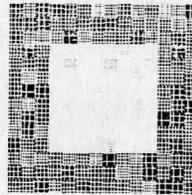
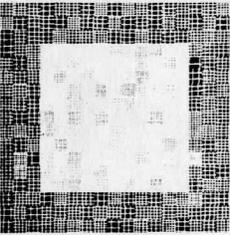
T=11

T=14



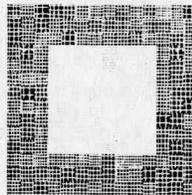
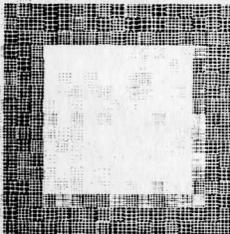
original

original



con ruido

con ruido



restauración

restauración

FIGURA 1

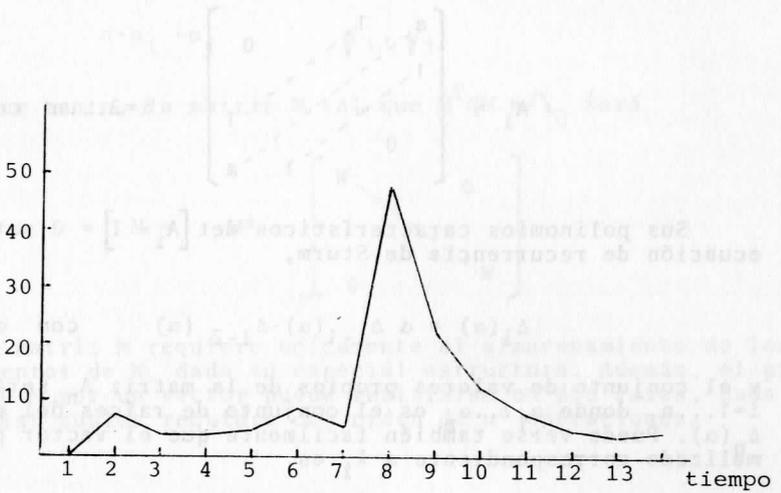


FIGURA 2

Evolución temporal de la diferencia $\sqrt{2\epsilon} - \sqrt{2N-1}$

la diagonalización de Q, obteniéndose una matriz tridiagonal Q* cuyos n² elementos diagonales son $\sigma - \alpha_1, \dots, \sigma - \alpha_n$. Dado que

$$W^T [Q_1 - \alpha_i I] W = \text{diag}(\sigma - \alpha_1 - \alpha_i, \dots, \sigma - \alpha_n - \alpha_i)$$

podemos concluir que los n² valores propios de Q son

$$\sigma - \alpha_i - \alpha_j \quad \forall i, \forall j$$

y que por tanto, la matriz M tal que $M^T Q M = \bigwedge_Q$ será

$$M = W^* \cdot \begin{bmatrix} W & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W \end{bmatrix}$$

La matriz M requiere unicamente el almacenamiento de los n² elementos de W, dada su especial estructura. Además, el producto de M por un vector puede realizarse en dos fases, cada una de las cuales requiere del orden de n³ operaciones.