UN NUEVO ENFOQUE JERARQUICO PARA LA REESCRITURA CONDICIONAL

M.Navarro
Facultad de Informática
U.P.V-E.H.U.
San Sebastian

F.Orejas
Facultad de Informática
Universidad Politécnica
Barcelona

RESUMEN

En este artículo se presenta un nuevo método de reescritura orientado a la ejecución de especificaciones condicionales y basado en la noción de jerarquía. Este método, como otros métodos jerárquicos, evita los problemas de terminación, en la evaluación de condiciones que puedan aparecer en la reescritura condicional.Se demuestra que el nuevo método es más general que el utilizado usualmente.

INTRODUCCION

Los sistemas de reescritura de términos son actualmente un concepto y una herramienta indisolublemente ligados a las especificaciones ecuacionales de tipos abstractos de datos,cuya importancia es bien conocida en el área de diseño de software. En concreto, por medio de técnicas de reescritura se pueden realizar las siguientes tareas:

a) Ejecución de especificaciones,obteniendo así prototipos en las primeras etapas del diseño.

b) Demostración de teoremas deducibles a partir de la especificación dada.

c) Demostración de propiedades sobre las especificaciones: consistencia, completitud,etc.

Para algunas clases de problemas las especificaciones ecuacionales son insuficientes,siendo necesario el uso de especificaciones condicionales; las cuales dan lugar a la reescritura condicional, que consiste básicamente en evaluar una condición asociada a una regla, previa a la aplicación de dicha regla.

Estos sistemas presentan nuevas dificultades, con respecto a los no condicionales, debido al problema específico de la terminación en la evaluación de la condición asociada a cada regla.

Como solución a tales problemas, algunos autores (BDJ 78, DRO 83, PEE 82, REM 83, REM 84, RZ 84) utilizan la llamada reescritura jerárquica, una forma restrictiva de la reescritura condicional. En ella,el sistema de reescritura viene organizado de forma jerárquica, de modo que la condición de cada regla contenga términos de menor jerarquía que la regla. Y donde la aplicación de una regla viene determinada por la evaluación de una condición (ya instanciados los términos) de menor jerarquía.

Sin embargo, en (NO 84) se demostró que la reescritura jerárquica puede producir resultados distintos (y por tanto incorrectos) de los que se obtendrían con la reescritura condicional usual y las condiciones que garantizan la equivalencia de ambas reescrituras son muy fuertes.

En este artículo se presenta una nueva forma de reescritura jerárquica mucho menos restrictiva que la usada hasta ahora,donde quedan también resueltos los problemas debidos a la evaluación de condiciones.

REESCRITURA CONDICIONAL Y REESCRITURA JERARQUICA

ción $-->_{SPi}$, asociada al sistema SPi].

Además, se restringe la instanciación de las reglas de tal modo que al reescribir un término de un nivel de jerarquía dado, las condiciones a evaluar sean de un nivel estrictamente menor:

Definición 2

Sea SP=(SP0,SP1,...,SPn) un SRJ. La relación de reducción jerárquica $-->_{H,SP}$ asociada a SP se define de la siguiente forma:

Dados s1,s2 ∈ T(Fn,X) (respectivamente s1,s2 ∈ T(Fn) para términos de base) $s1-->_{H,SP}s2$ si y sólo si existe una regla r=<t-->t' si t1=t'1 &...& tm=t'm> en algún SPi y una instanciación f: var(t)-->T(Fn,X) tales que

1. f(t) es un subtérmino de s1 en alguna posición d.
2. s2=s1[d<--f(t')]
3. Para todo j≤m, $f(tj)<-->_{H,SP}f(t'j)$
4. Para todo j≤m, f(tj),f(t'j) tienen nivel de jerarquía menor estrictamente que f(t).

Por ejemplo la especificación de los naturales dada anteriormente, se podría escribir en forma jerárquica utilizando dos niveles, en el primero estaría toda la especificación salvo la operación min (y las ecuaciones que la definen) que estaría en el segundo nivel.

En tal caso si quisieramos reescribir: min(min(s(0),s(s(0))),0) tendríamos que usar la secuencia de reescritura: min(min(s(0),s(s(0))),0) $-->_{4.}$ min(s(0),0) $-->_{5.}$0 pero no podríamos utilizar la secuencia: min(min(s(0),s(s(0))),0) $-->_{5.}$0 ya que para ello hay que evaluar la condición: 0≤min(s(0),s(s(0))) = t lo que viola la condición 4 de la definición de reducción jerárquica.

NUEVA FORMA DE REESCRITURA JERARQUICA

La reescritura jerárquica vista elimina el problema de la evaluación infinita de condiciones ya que no pueden darse situaciones de circularidad como la presentada anteriormente.

Sin embargo, en (NO 84) se demostró que la reescritura jerárquica puede producir resultados distintos (y por tanto incorrectos) de los que se obtendrían con la reescritura condicional usual.

Ejemplo 3

Sea SP=(SP1,SP2) con SP1 la especificación de los naturales y SP2= SP1 + operaciones:

foo:nat*nat-->nat

reglas:

1.foo(x,y)-->0 si x=s(y)

2.foo(x,y)-->
foo(s(foo(x,y)),foo(x,y))

Con la reescritura condicional usual se verifica que foo(0,0)<-->0, pero con la reescritura condicional jerárquica, se tiene foo(0,0)$<\!\!\not\!-\!\!>_H$0, debido a que: foo(0,0)$-->_H$foo(s(foo(0,0)),foo(0,0)) por 2., pero aquí no se puede aplicar la regla 1. al no estar permitido instanciar las variables x,y (de nivel 1) por los términos s(foo(0,0)), foo(0,0) (de nivel 2) respectivamente.

Con lo cual no siempre coinciden ambas reescrituras. Las condiciones que garantizan la equivalencia entre las dos reescrituras son las siguientes: completitud suficiente, confluencia y noetherianidad del sistema.

Definición 3

Sea SP=(SP0,SP1,...,SPn) un SRJ. SP es suficientemente completo si y sólo si para todo término t ∈ T(Fi+1,X), si el sort de t está en Fi entonces existe un término t' ∈ T(Fi,X) tal que $t<-->_{SP}t'$.(Para términos de base t ∈ T(Fi+1), t' ∈ T(Fi)).

En principio, pedir que el sistema sea confluente y noetheriano es razonable (para que $t=_{E}nt'$ si y solo si fn(t)=fn(t').Pero exigir además la completitud suficiente puede ser demasiado fuerte.

Esto nos lleva a buscar otra forma de

La reescritura condicional, en principio, aparece sólo como una extensión de la reescritura usual, ligada a las especificaciones condicionales. En concreto, cada regla condicional lleva asociada una condición, la cual debe verificarse para que dicha regla pueda ser aplicada. La evaluación de dicha condición se realiza, de forma natural, con el propio sistema de reescritura.

Ejemplo 1

Sea la siguiente especificación de los naturales (donde las ecuaciones de la especificación ya se han transformado en reglas):

S = sorts:

nat,bool

operaciones:

0:-->nat

s:nat-->nat

t,f:-->bool

≤:nat*nat-->bool

min:nat*nat-->nat

reglas:

1. 0≤x-->t
2. s(x)≤0-->f
3. s(x)≤s(y)-->x≤y
4. min(x,y)-->x si (x≤y)=t
5. min(x,y)-->y si (y≤x)=t

La evaluación del término min(s(0),s(s(0))) implica, para poder utilizar la regla 4. que nos dice que el mínimo es s(0), evaluar la condición: s(0)≤s(s(0)) = t

Aplicando las reglas del propio sistema, obtenemos la siguiente cadena de reducciones:

$s(0) \leq s(s(0)) \rightarrow_{3} 0 \leq s(0) \rightarrow_{1} t$

Con ello queda verificada la condición y, por tanto, el término min(s(0),s(s(0))) se evalua a s(0), por la regla 4.

En la reescritura convencional se exigen sólo dos condiciones para garantizar su buen funcionamiento: la confluencia, que asegura la unicidad de resultados, y la "noetherianidad" que asegura la terminación del proceso de reescritura. Cuando se trabaja con reescritura condicional aparece un nuevo problema de terminación debido a la evaluación de condiciones.

Por ejemplo,una regla del tipo:

f(x) --> x si f(f(x))=x

puede llevar a una secuencia circular infinita de evaluación de condiciones. Por ello, las condiciones de confluencia y noetherianidad sólo no aseguran el buen funcionamiento del sistema al usar reescritura condicional.

En general, se ha demostrado, independientemente de que el sistema sea confluente y noetheriano, la indecibilidad de la evaluación de condiciones (NO 84,BK 81,KAP 83).

Como se ha apuntado anteriormente, una de las formas más generalizadas de solucionar este problema es utilizar la <u>reescritura jerárquica.</u> La idea consiste en organizar la especificación (o sistema de reescritura) en una jerarquía de especificaciones (o sistemas), de tal manera que las condiciones que aparecen en las reglas de nivel i+1 sólo utilicen operaciones de nivel i (el nivel 0 contiene sólo reglas no condicionales). Concretamente:

Definición 1

Un <u>sistema de reescritura de términos jerárquico</u> (o SRJ) es una secuencia finita de sistemas de reescritura de términos, SP=(SP0,SP1,..., SPn),tal que para 0≤i<n se verifica:

1. $SP_i \subseteq SP_{i+1}$.
2. SP_{i+1} es consistente con respecto a SP_i, es decir, si $t1,t2 \in T(F_i,X)$ y $t1 \leftrightarrow_{SP_{i+1}} t2$ entonces $t1 \leftrightarrow_{SP_i} t2$
3. Si $<t \rightarrow t'$ si $t1=t'1$ & $t2=t'2$ &...& $tm=t'm> \in E_{i+1}-E_i$ entonces para todo $j \leq m$, $t_j,t'_j \in T(F_i,X)$ y $t \in T(F_{i+1},X) - T(F_i,X)$.

[Notación: Cada sistema SP_i es de la forma (F_i,E_i), con F_i signatura, E_i conjunto de reglas. $T(F_i,X)$ indica la F_i-álgebra inicial generada por X. $\leftrightarrow_{SP_i}$ indica la congruencia generada por la relación de reducya que se permite cualquier instanciación de variables y sólo se restringe el que la condición sea evaluada con reglas de R1. En este caso, dicha evaluación es trivial al ser la condición: s(foo(x,y))=s(foo(x,y)).

Con ello se obtiene $foo(x,y) \langle\text{--}\rangle_{H'} 0$, mientras que como quedó visto en el Ejemplo 3. $foo(x,y) \langle\text{-}/\text{-}\rangle_H 0$. Por tanto $\text{--}\rangle_{H'} \not\subseteq \text{--}\rangle_H$.

CONCLUSIONES

Se ha dado una nueva forma de reescritura, $\text{--}\rangle_{H'}$, más general que la usual, $\text{--}\rangle_H$. Bajo las condiciones de confluencia, noetherianidad y completitud suficiente se verifica que la reescritura condicional usual es equivalente a la nueva reescritura jerárquica (pues $\text{--}\rangle_H \subseteq \text{--}\rangle_{H'} \subseteq \text{--}\rangle_{SP}$ y bajo estas condiciones $\langle\text{--}\rangle_H \simeq \langle\text{--}\rangle_{SP}$, por tanto $\langle\text{--}\rangle_{H'} \simeq \langle\text{--}\rangle_{SP}$).

Así todo, probablemente, ambas reescrituras no son equivalentes en todos los casos. Quedaría por ver qué otras condiciones, más débiles que las dadas, garantizan dicha equivalencia.

REFERENCIAS

(ADJ 76) THATCHER,J.W.; WAGNER,E.G.; WRIGHT,J.B. Specification of abstract data types using conditional axioms. IBM T.J. Watson Res. Center Rep. RC-6214, 1976.

(ADJ 78) THATCHER,J.W.; WAGNER,E.G.; WRIGHT,J.B. Data type specification: parameterization and the power of specification techniques. Proc. 10th STOC, 1978.

(BDJ 78) BRAND,D.; DARRINGUER,J.A.; JOYNER,W.H. Completeness of conditional reductions. IBM T.J. Watson Res.Center Rep. RC-7404, 1978.

(BK 81) BERGSTRA,J.A.; KLOP,J.W. Conditional rewrite rules: confluency and termination. Math. Center Amsterdam, Internal report.

(DRO 83) DROSTEN,K. Towards executable specification using conditional axioms. T.U. Braunschweig rep. 83-01 1983.

(KAP 83) KAPLAN,S. Conditional rewrite rules. Aparecerá en Theoretical Computer Science, 1983.

(NO 84) NAVARRO,M.; OREJAS,F. On the equivalence of hierarquical and non-hierarquical rewriting on conditional term rewriting systems. Proc. del EUROSAM 84, Springer-Verlag LNCS 174 pp.74-85, 1984.

(ORE 79) OREJAS,F. On the power of conditional specifications. Sigplan Notices 14, 7, 1979.

(PEE 82) PLETAT,U.; ENGELS,G.; EHRIGH,H-D. Operational semantics of algebraic specifications with conditional equations. Dormunt Univ. rep. 118/81, 1981.

(REM 82) REMY,J-L. Etude des systemes de reecriture conditionnels et applications aux types abstraits algebriques. These de doctorat. C.R.I. Nancy, 1982.

(RZ 84) REMY,J-L.; ZHANG,H. A system for validating conditional algebraic specifications of abstract data types. Proc. del E.C.A.I. Pisa, 1984.

(ZHA 84) ZHANG,H. REVEUR 4: Etude et mise en oeuvre de la reecriture conditionnelle. These de 3éme cycle. Nancy, France, 1984.

SUMMARY

In this paper we introduce a new rewriting method oriented towards the execution of conditional specifications and based on the notion of hierarchy. This method, as other hierarchical methods, avoids the termination problems when evaluating conditions. We prove that the new method is more general than the one most commonly used.

reescritura jerárquica menos restrictiva que la dada. La idea de tal reescritura consiste en organizar jerárquicamente sólo las reglas (y su aplicación) pero no las signaturas, es decir, un sistema de reescritura jerárquico será ahora SPn = (F; R1, ..., Rn), donde $R1 \subseteq R2 \subseteq \ldots \subseteq Rn$, son conjuntos de reglas con operaciones de F y tales que R1 sólo contiene reglas no condicionales.

Asociado a cada nivel de jerarquía i-simo ($1 \leqslant i \leqslant n$) se define una relación de reducción $\rightarrow_{H',SPi}$ de la siguiente manera:

Definición 4

Sea SPn=(F;R1,...,Rn) un sistema de reescritura jerárquico (como se ha definido arriba). La nueva relación de reducción $\rightarrow_{H',SPn}$ asociada a SPn se define:

Dados dos términos $s1,s2 \in T(F,X)$, $s1 \rightarrow_{H',SPn} s2$ si y solo si existe una regla:

r=<t-->t' si t1=t'1 &...& tm=t'm> en algún Ri, y una instanciación f: var(t)-->T(F,X) tales que:

1. $\bar{f}(t)$ es un subtérmino de s1 en alguna posición d.

2. $s2 = s1[d \leftarrow \bar{f}(t')]$

3. $\forall j \leqslant m$, $\bar{f}(tj) \leftrightarrow_{H',SPi-1} \bar{f}(t'j)$

Es decir, el término s1 se reescribe en s2, si hay una regla r, en algún Ri, que nos define la transformación de s1 en s2 utilizando la regla no condicional t-->t' y además la condición se satisface usando reglas de nivel i-1.

Esta nueva reescritura jerárquica es más general que la anterior:

Teorema 1

Dada una especificación jerárquica SP=(F;R1,...,Rn), sea $\rightarrow_H$ la relación de reducción jerárquica dada en la definición 2 y sea $\rightarrow_{H'}$ la correspondiente a la definición 4. Se verifica:

1) $\rightarrow_H \subseteq \rightarrow_{H'}$

2) $\rightarrow_{H'} \not\subseteq \rightarrow_H$

Demostración

1) Demostraremos por inducción sobre n la proposición siguiente: "$\forall n$, si SP tiene n niveles, SP = (F; R1,...,Rn), entonces $\rightarrow_H \subseteq \rightarrow_{H'}$.

Para n=1, SP=(F;R1). Se cumple de forma trivial, pues R1 sólo contiene reglas incondicionales.

Supongamos la proposición cierta para n=k y demostrémosla para n=k+1. Sea SP=(F;R1,...,Rk+1).

Sean t,t' dos términos tales que $t \rightarrow_{H} t'$. Esto implica que existe una regla <r-->r' si t1=t'1 &...& tm=t'm> $\in$ Rk+1 y una instanciación f: var(r)-->T(F,X) tales que:

1. $\bar{f}(r)$ es un subtérmino de t en alguna posición d.

2. $t' = t[d \leftarrow \bar{f}(r')]$

3. $\bar{f}(ti) \leftrightarrow_H \bar{f}(t'i)$, para i=1...m

4. Nivel de jerarquía $(\bar{f}(ti),\bar{f}(t'i)) <$ nivel de jerarquía $(\bar{f}(r))$, para i=1...m

Ahora bien, como $\bar{f}(r)$ es un subtérmino de t, se tiene que: nivel de jerarquía $(\bar{f}(r)) \leqslant$ nivel de jerarquía $(t) \leqslant k+1$. Por ello obtenemos por 3. y 4.:

$\bar{f}(ti) \leftrightarrow_H \bar{f}(t'i)$ para i=1...m y

nivel de jerarquía $(\bar{f}(ti),\bar{f}(t'i)) \leqslant k$ lo que implica por consistencia:

$\bar{f}(ti) \leftrightarrow_{Rk,H} \bar{f}(t'i)$, para i=1...m.

Por hipótesis de inducción se tiene $\rightarrow_{Rk,H} \subseteq \rightarrow_{Rk,H'}$, por tanto:

5. $\bar{f}(ti) \leftrightarrow_{Rk,H'} \bar{f}(t'i)$ para i=1...m

De la definición de $\rightarrow_{H'}$ y los puntos 1. 2. y 5. se obtiene que $t \rightarrow_{H'} t'$ y queda probada la inducción.

2) Sea la especificación SH' = (F;R1,R2) donde F=signatura de los naturales + {foo: nat*nat-->nat}, R1= reglas de la especificación de los naturales y

R2= 1. foo(x,y)-->0 si x=s(y)

2. foo(x,y)-->

foo(s(foo(x,y)),foo(x,y))

Con la nueva reescritura $\rightarrow_{H'}$ se obtiene la siguiente secuencia de reescritura:

$foo(x,y) \rightarrow_2 foo(s(foo(x,y)), foo(x,y)) \rightarrow_1 0$