

# Grau en Matemàtiques

---

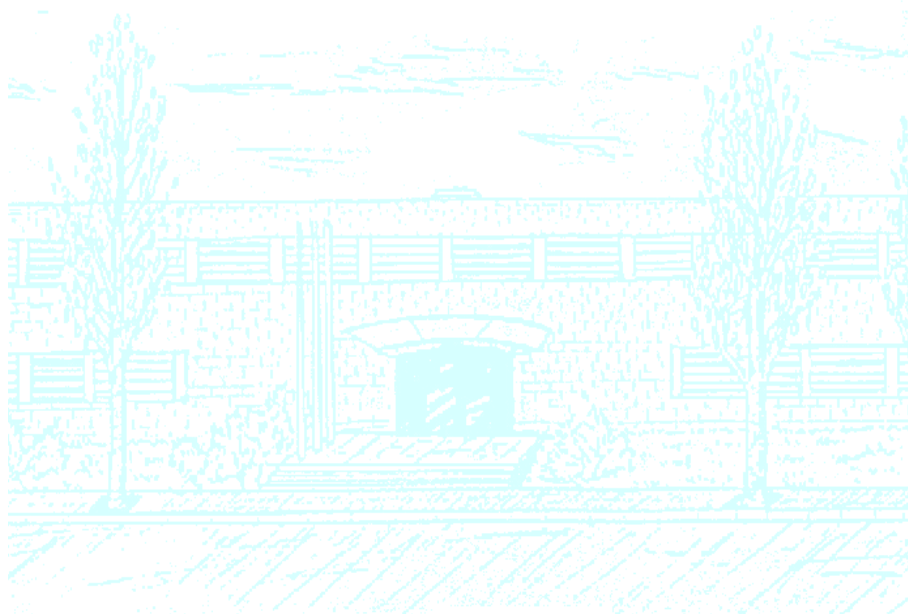
**Títol:** El Teorema dels 4 colors

**Autor:** Marta González i Sentís

**Director:** Oriol Serra Albó

**Departament:** Departament de Matemàtiques

**Convocatòria:** 2016-2017



Universitat Politècnica de Catalunya  
Facultat de Matemàtiques i Estadística,

Grau de Matemàtiques  
Treball de Final de Grau

# El Teorema dels 4 colors

Marta González i Sentís

supervisat per *Oriol Serra Albó*

Juny 2017

---

# Resum

La coloració de grafs és probablement un dels temes més importants de la Teoria de Grafs. En particular existeix un resultat molt significatiu afirmant que tot graf immergible en el pla té una coloració pròpia amb 4 o menys colors. És el cèlebre Teorema dels 4 colors.

En aquest treball ens centrem a estudiar aquest teorema, mostrant especial interès en les diferents perspectives que s'han utilitzat per a provar el resultat. Seguint aquest propòsit, el treball inclou varis enunciats equivalents al teorema i intents de demostració que no foren fructífers però que donaren eines molt útils i potents en aquesta branca de les Matemàtiques.

Donats aquests intents previs, el treball té com a objectiu descriure la demostració feta per Appel i Haken del teorema, més de 100 anys després de l'aparició de la conjectura i amb l'assistència d'ordinadors. L'ús extens d'ordinadors que es va fer va representar una gran innovació en la demostració d'una prova matemàtica.

El treball també descriu el teorema anàleg per a grafs immergibles en una superfície. El resultat va ser provat per a totes les superfícies exceptuant el pla amb una prova matemàtica estàndard molt abans que el cas planar fos resolt.

Finalment s'estudia l'aspecte algorísmic de la coloració de grafs planars i es presenten dos algorismes de 5-coloració, un d'ordre lineal i un d'ordre quadràtic. En un apèndix afegim la implementació d'aquests dos algorismes en C++.

**Paraules clau:** Teoria de grafs, coloració de grafs, grafs planars, Teorema dels 4 colors

---

# Abstract

Graph colouring is arguably one of the most important topics in Graph Theory. In particular, the so—called Four Color Theorem, which states that four colors suffice to colour any planar map with the condition that adjacent regions have distinct colours, is one of the most celebrated results in the area.

This work deals with the Four Color Theorem, giving a full description of the different historical attempts to prove the result and the definitive computer assisted proof of Appel and Haken more than 100 years after the result was first conjectured. The work describes the special innovative feature of this proof which involves the extensive use of computers.

The work also describes the analogous theorem for graphs embeddable in a surface, which was completely solved with a standard mathematical proof for all surfaces except for the plane well ahead in time before the planar case was solved.

The algorithmic aspect of coloring planar graphs is addressed, and two algorithms to color planar graphs with 5 colors are presented. The implementation of the algorithms in C++ is included in an appendix.

**Keywords:** Graph Theory, graph colouring, planar graphs, Four Colour Theorem

---

# Introducció

La Teoria de Grafs és una important branca de les Matemàtiques, concretament de la Matemàtica Discreta. L'objecte d'estudi, els grafs, són estructures que permeten copsar la relació entre objectes, representant aquests per vèrtexs i la relació existent entre dos objectes mitjançant arestes.

És precisament per això, que els grafs són eines especialment útils a l'hora de modelar certes estructures o mostrar enllaços entre objectes. S'utilitzen a àrees tant diverses com la bioquímica, amb l'estudi de la genètica o de processos neuronals; l'enginyeria, per exemple amb l'estudi de xarxes, o en les ciències de la computació, on nombrosos algorismes fan ús d'estructures de grafs. També s'utilitzen a la sociologia amb un important ús en l'anàlisi de les xarxes socials. Múltiples aplicacions dels grafs es poden trobar al llibre de Bondy [7].

Aquesta gran varietat de processos que poden modelar els grafs fan sorgir nous problemes a la Teoria de Grafs.

Aquest treball es centra en un dels problemes més coneguts i sobretot més estimulants de la Teoria de Grafs. Es tracta del problema dels 4 colors, que planteja si és possible assignar a cada vèrtex d'un graf planar un color de manera que vèrtexs adjacents no tinguin assignat el mateix color, emprant no més de 4 colors. La conjectura afirmant que és possible per a tot graf planar, va estar oberta durant més de cent anys fins a la seva demostració al 1976.

L'interès per a trobar-ne una resposta va permetre un ampli desenvolupament de la Teoria de Grafs, ja que foren molts matemàtics els que es van enfrontar a demostrar o per contra desmentir la conjectura. Gràcies a la seva demostració, ara ja podem parlar del Teorema dels 4 colors, teorema que dona nom a aquest treball.

La conjectura dels 4 colors data de 1852. El responsable, Francis Guthrie, mentre pintava el mapa d'Anglaterra, va pensar que havia descobert que sempre es podia pintar un mapa arbitrari amb 4 colors, amb el requisit que països amb frontera comú es pintessin de color diferent. Francis decidí compartir la seva descoberta amb el seu germà Frederick Guthrie, ambdós estudiants de matemàtiques, qui envià la observació al seu professor Augustus de Morgan. De Morgan, fascinat pel problema el difongué als seus estudiants i a altres matemàtics com Hamilton. És precisament una de les cartes d'aquell any de De Morgan el primer document que es conserva del problema dels 4 colors. Cal destacar però que en aquells primers anys es creia que el problema seria en poc temps resolt; res més allunyat de la realitat.

L'interès pel problema va minvar durant uns anys fins que el 1878 Cayley va fer una



---

publicació en una secció de la London Mathematical Society preguntant si la conjectura s'havia provat. Aquesta qüestió va fer ressorgir el problema, donant múltiples formulacions equivalents i inclús proves falses.

És el cas de la prova presentada per Kempe [12] un any més tard de la publicació de Cayley. No va ser fins 10 anys més tard que Heawood mostrà l'error dels arguments de Kempe. Un extracte de l'article on Heawood mostra l'error es pot trobar al llibre [5].

Tait també presentà una suposada prova de la conjectura [18], basant-se en una hipòtesi falsa. En aquest cas va ser Tutte [20] qui va presentar un contraexemple a aquestes hipòtesis. No obstant ambdues proves suposaren la incorporació de noves eines útils en el camp del Teorema dels 4 colors.

Heawood també va ser pioner en l'estudi de la colorabilitat de grafs immergibles en altres superfícies tancades diferents de l'esfera, donant-ne una fita superior. Cal destacar en aquest àmbit els llibres de Ringel [13] i White [23].

A partir del segle XX, es van produir avenços en posar fites al nombre de vèrtexs que havien de tenir els possibles contraexemples de la conjectura dels 4 colors. Aquests fets es basaven en trobar configuracions reductibles, primer ingredient clau en la prova actual com es veurà en el capítol 5. Birkhoff [6] és un dels matemàtics que treballà en aquesta direcció. Per altra banda al 1960, el segon ingredient clau va ser presentat per Heesch: la càrrega i descàrrega de configuracions.

Finalment al 1976, passats més de cent anys del plantejament del problema, Appel i Haken presentaren la demostració del Teorema dels 4 colors [1, 2, 3, 4] reunint la reductibilitat i la descàrrega.

Un dels aspectes que fa tant significatiu el Teorema dels 4 colors és precisament la seva demostració. La prova va suposar una revolució ja que incorporava, per primera vegada, l'ús extens d'ordinadors en una demostració matemàtica. És per això que es generà cert escepticisme sobre la seva validesa, en particular pel fet que part de la prova no es pot verificar a mà i la part que és suposadament verificable té una significativa llargada i complexitat. Els autors de la prova mostren aquest fet a un article de 1989 en la següent reflexió [3]: "This leaves the reader to face 50 pages containing text and diagrams, 85 pages filled with almost 2500 additional diagrams, and 400 microfiche pages that contain further diagrams and thousands of individual verifications of claims made in the 24 lemmas in the main sections of text. In addition, the reader is told that certain facts have been verified with the use of about twelve hundred hours of computer time and would be extremely time-consuming to verify by hand. The papers are somewhat intimidating due to their style and length and few mathematicians have read them in any detail." Tot i que fins al moment no s'ha pogut prescindir de l'assistència dels ordinadors en la prova l'escepticisme cap a ella s'ha reduït, en part per la presentació de noves proves al Teorema dels 4 colors. En destaquem les presentades per Robertson, Sanders, Seymour i Thomas [14], i Gonthier [9].

La memòria té com a objectiu estudiar el problema dels 4 colors de manera àmplia; donant els diferents punts de vista en que s'ha plantejat el problema i la seva resolució.

Al primer capítol introduïrem conceptes bàsics de la Teoria de Grafs necessaris per al desenvolupament de la memòria.

A continuació, en el capítol 2, donarem l'enunciat precís del Teorema dels 4 colors, i estudiarem l'equivalència entre les dues versions equivalents del teorema; l'enunciat per a la vèrtex-coloració i la cara-coloració. A més, posarem condicions sobre els grafs amb els que

---

estudiarem la 4-colorabilitat.

En el tercer capítol, mostrarem varis enunciats equivalents al Teorema dels 4 colors. Aquests enunciats plantejaren la possibilitat de demostrar el Teorema dels 4 colors des de perspectives diverses. Un exemple, és el treball de Tait. Precisament en el següent capítol, el quart, es mostra aquest intent de demostració juntament amb la demostració errònea de Kempe. Ambdós treballs foren previs a la prova d'Appel i Haken i resultaren ser equívocs.

En el capítol 5, ens centrem en la prova que va permetre resoldre el problema dels 4 colors. Es tracta de la demostració presentada per Kenneth Appel i Wolfgang Haken al 1976. Concretament estudiem els passos de la demostració i la innovació que va representar fer ús d'ordinadors en la prova.

Seguidament, en el capítol 6, plantegem el problema de la colorabilitat en grafs no planars. Comencem definint i repassant certs conceptes topològics, com la immersió d'un graf en una superfície, i estudiem quin és el nombre cromàtic d'aquests grafs.

Finalment afegim un últim apartat, el vuitè, on ens centrarem en els aspectes algorísmics de la coloració dels grafs planars. La prova de Robertson, Sanders, Seymour i Thomas proporciona un algorisme en temps polinomial per a acolorir un graf planar amb 4 colors però l'algorisme està formulat en el context de la teoria de menors i no hi ha una implementació pràctica que es pugui descriure fàcilment. En canvi la prova de que el nombre cromàtic d'un graf planar és com a molt cinc dona lloc a algorismes relativament senzills de coloració. En el treball se'n presenten dos, un desenvolupat per l'autora a partir de la prova de Heawood del teorema dels cinc colors, que té complexitat quadràtica, i un de complexitat lineal degut a Frederickson [10]. La implementació d'aquests algorismes en C++ es pot trobar a l'apèndix d'aquest treball.

El desafiament plantejat pel problema dels quatre colors ha estat una font inesgotable de tècniques, mètodes i noves nocions a la teoria de grafs. A més de les que es descriuen en el treball n'hi ha moltes d'altres que no hi surten mencionades, com la teoria de menors, els polinomis cromàtics o la teoria de matroides, per citar-ne només tres que constitueixen avui branques senceres de la matemàtica discreta. Aquest treball s'ha centrat en la pròpia prova del Teorema dels quatre colors i descriure, ni que sigui per damunt, qualsevol d'aquestes àrees hauria suposat ja un nou treball.



# Índex

<b>1</b>	<b>Grafs</b>	<b>1</b>
1.1	Estructures i definicions bàsiques . . . . .	1
1.2	Connectivitat . . . . .	2
1.3	Contracció d'arestes i subdivisions de grafs . . . . .	3
1.4	Planaritat i immersió de grafs a superfícies . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Enunciat Teorema</b>	<b>5</b>
2.1	Dualitat . . . . .	6
2.2	Grafs a considerar . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Enunciats equivalents</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Intents de demostració previs</b>	<b>13</b>
4.1	Demostració falsa de Kempe . . . . .	13
4.2	Teorema dels 5 colors . . . . .	18
4.3	Intent de demostració de Tait . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Demostració d'Appel i Haken</b>	<b>21</b>
5.1	Introducció . . . . .	21
5.2	6-connectivitat interna . . . . .	23
5.3	Reductibilitat . . . . .	30
5.3.1	Reductibilitat de configuracions. Comentari general sobre la seva prova	34
5.4	Descàrrega . . . . .	36
5.4.1	Mètode de descàrrega en la prova del Teorema dels 4 colors . . . . .	38
5.5	Resum demostració Teorema dels 4 colors . . . . .	39
5.6	Comentari final prova Appel i Haken . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Grafs no planars, com es veu modificat el teorema?</b>	<b>43</b>
6.1	Superfícies orientables . . . . .	48
6.2	Superfícies no orientables . . . . .	48
6.3	Conclusió . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Algorismes de coloració</b>	<b>51</b>
7.1	Algorisme 1: Prova de Heawood (codi <i>5CT_quadratic</i> ) . . . . .	51
7.2	Algorisme 2: Frederickson (codi <i>5CT_lineal</i> ) . . . . .	53
7.3	Comparació i conclusions . . . . .	56

---

<b>Apèndix: Codis dels algorismes de 5-coloració</b>	<b>59</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>72</b>

# Capítol 1

## Grafs

En aquest primer capítol introduïm les definicions bàsiques dels conceptes que apareixeran en la memòria. Per a fer-ho ens basarem i seguirem la notació del llibre *Graph Theory* de R.Diestel [8].

### 1.1 Estructures i definicions bàsiques

Un *graf*  $G = (V, E)$  és un parell ordenat format per un conjunt que denotarem per  $V$  i un conjunt  $E$  de parells no ordenats  $u, v$  d'elements de  $V$ . Els elements de  $V$  s'anomenen *vèrtexs* i els de  $E$  *arestes*. Si és necessari s'escriuran els conjunts  $V$  i  $E$  com a  $V(G)$  i  $E(G)$  respectivament per a diferenciar-los dels d'un altre graf. Si  $E$  no és un multiconjunt, aleshores el graf és *simple* i sinó es tracta d'un *multigraf*. Si no es diu el contrari considerarem tots els grafs simples i per tant no tindran arestes múltiples ni arestes del tipus  $\{a, a\}$ , que s'anomenen *llaços*.

El nombre de vèrtexs del graf, és a dir el cardinal de  $V$ , s'anomena l'*ordre* del graf mentre que el nombre d'arestes s'anomena la *mida* del graf. Denotarem per  $n$  l'ordre del graf i per  $m$  la mida del graf. Si  $n$  és finit el graf es diu que és finit mentre que en el cas contrari direm que és infinit.

Si  $\{u, v\}$  és una aresta de  $G$ , sovint escriurem l'aresta com a  $e = uv = vu$  enlloc de  $\{u, v\}$ . En aquest cas direm que  $u$  és *adjacent* a  $v$ , o equivalentment que  $u$  és *veí* de  $v$ . També es dirà que els vèrtexs  $u$  i  $v$  són *incidentes* a  $e$ , o que  $u$  i  $v$  són els seus *extrems*. El conjunt de veïns d'un vèrtex  $v$  es denota per  $N(v)$  i el cardinal d'aquest conjunt és el *grau* de  $v$ , que denotarem per  $d(v)$ . Si  $u \in N(v)$  ho expressarem per  $u \sim v$  i en cas contrari  $u \not\sim v$ .

Els grafs són estructures abstractes però es representen sovint geomètricament. Aquesta representació identifica vèrtexs amb punts de la superfície i arestes amb arcs simples, de tal manera que un vèrtex és incident a una aresta si i només si s'intersecten.

Hi ha certs grafs que tenen un nom propi per les seves característiques. Si l'ordre d'un graf és 0, es tracta del graf *nul* i es denota per  $\emptyset$ . Si tots els vèrtexs de  $G$  són adjacents dos a dos, aleshores el graf és *complet*. Un graf complet de  $n$  vèrtexs es denota per  $K_n$ . Un altre cas són els grafs bipartits. Un graf  $G$  és *bipartit* si existeix una partició de  $V$  en dos

conjunts  $V = U \cup W$  de manera que tota aresta de  $G$  tingui un extrem a cada conjunt. Els grafes bipartits complets es denotaran per  $K_{n_1, n_2}$  amb  $n_1$  el cardinal del primer conjunt i  $n_2$  el cardinal del segon. Finalment si tots els vèrtexs d'un graf tenen el mateix grau  $k$ , es diu que  $G$  és  $k$ -regular. En particular, un graf 3-regular s'anomena *cúbic*.

Un *subgraf*  $G' = (V', E')$  de  $G = (V, E)$  és un graf que verifica que  $V' \subset V$  i  $E' \subset E$  amb la premisa que els extrems d'una aresta de  $E'$  estiguin a  $V'$ . Ho podem denotar per  $G' \subset G$ . Si  $G' \subset G$  i  $G'$  conté totes les arestes  $xy \in E$  amb  $x, y \in V'$  aleshores  $G'$  és un *subgraf induït* per  $V'$ . Finalment,  $G'$  és un *subgraf generador* de  $G$  si  $G'$  és un subgraf de  $G$  amb  $V' = V$ .

Si  $U \in V(G)$  és qualsevol conjunt de vèrtexs de  $G$  podem definir  $G-U$  o  $G[V \setminus U]$  al graf obtingut a partir de  $G$  eliminant els vèrtexs de  $U$  i les arestes incidents a aquests. També podem definir la *substracció d'una aresta*  $e=xy$  d'un graf  $G$ ,  $G - e$ , com al graf obtingut de  $G$  eliminant l'adjacència entre  $x$  i  $y$ . Anàlogament es pot definir l'*addició d'una aresta*  $e = xy$ ,  $G + e$ , com el graf resultant d'afegir una aresta entre  $x$  i  $y$ , de manera que  $x$  i  $y$  passen a ser adjacents.

Es diu que  $G$  és *maximal en nombre d'arestes* respecte una propietat  $P$  si  $G$  té aquesta propietat però cap graf  $G + xy$  la verifica per a vèrtexs  $x, y$  no adjacents. En general, direm que un graf serà *maximal* o *minimal* respecte alguna propietat si ho és respecte el conjunt de vèrtexs.

Un *camí*  $P$  és un subgraf tal que  $V(P) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_k\}$ , amb  $v_i \neq v_j \forall i \neq j$  i  $E(P) = \{(v_i, v_{i+1}) : 0 \leq i < k\}$ . Un *cicle* és un camí verificant  $v_0 = v_k$ . En ambdós casos direm que  $P$  té *longitud*  $k$ . En el cas que  $G$  no contingui cap cicle i sigui connex, direm que  $G$  és un *arbre*.

## 1.2 Connectivitat

Un graf  $G = (V, E)$  és *connex* si tota parella de vèrtexs  $u, v$  estan enllaçats per un camí. Una *component connexa* és un subgraf maximal connex de  $G$ .

Diem que  $X$  *separa*  $G$  o que  $X$  és un *conjunt separador* si  $G - X$  no és connex.

Un *vèrtex de tall* és un vèrtex que separa dos vèrtexs de la mateixa component connexa. I una aresta que separa els seus extrems és un *pont*.

En particular  $G$  és  $k$ -connex si  $|G| > k$  i  $G - X$  és connex per a qualsevol conjunt de vèrtexs  $X$  amb  $|X| < k$ . El major enter  $k$  tal que  $G$  és  $k$ -connex és la *connectivitat*  $\kappa(G)$ .

Un subgraf connex maximal sense vèrtexs de tall és un *bloc*. Per tant pot ser un subgraf 2-connex maximal, un pont o un vèrtex aïllat, i en particular dos blocs només poden interseccionar com a màxim en un vèrtex de tall. Donat un graf  $G$  podem definir un graf associat a ell a partir dels seus blocs. Sigui  $A$  el conjunt de vèrtexs de tall de  $G$  i  $B$  el conjunt de blocs de  $G$ ; aleshores es defineix el *graf de blocs* com al graf bipartit  $A \cup B$  que té per a arestes  $aB$  si  $a \in B$ . Respecte el graf de blocs tenim el següent resultat en el cas de grafes

connexos:

**Proposició 1.1** El graf de blocs d'un graf connex és un arbre.

### 1.3 Contracció d'arestes i subdivisions de grafos

La *contracció d'una arista*  $e = xy$  en un graf  $G = (V, E)$  consisteix en suprimir els vèrtexs  $x$  i  $y$  i crear un nou vèrtex  $v$  adjacent als veïns de  $x$  i de  $y$  eliminant les possibles arestes múltiples que s'hagin creat. El graf resultant es denota com  $G/e$  i aquesta operació també s'anomena la *identificació de  $x$  i  $y$* .

L'operació de *subdividir una arista  $xy$*  consisteix en suprimir l'aresta i afegir un nou vèrtex  $z$  adjacent únicament a  $x$  i  $y$ . Un graf  $H$  és una *subdivisió* de  $G$  si  $H$  s'obté a partir de  $G$  subdividint arestes repetidament. Si  $H$  conté una subdivisió de  $G$  com a subgraf diem que  $G$  és un *menor topològic* de  $H$  i ho denotem per  $G=TX$ .

Per altra banda,  $H$  és un *menor* de  $G$ ,  $G \preceq H$ , si  $H$  és un subgraf d'un graf obtingut de  $G$  mitjançant l'eliminació d'arestes i de vèrtexs i contraent arestes.

### 1.4 Planaritat i immersió de grafos a superfícies

De manera natural un graf es representa geomètricament identificant els vèrtexs amb punts sobre una superfície (o una varietat en general) i les arestes amb corbes simples que uneixen els vèrtexs que la formen. Amb aquesta representació geomètrica, es diu que un graf és *planar* si admet una representació en el pla de manera que les arestes només es tallen en vèrtexs del graf, és a dir, no es creuen en punts diferents dels seus extrems.

Un graf planar dibuixat al pla té *cares*, a més de vèrtexs i arestes; on les cares són les diferents regions del pla delimitades per les arestes i els vèrtexs del graf.

Un graf planar és *maximal* si no es pot afegir una nova arista mantenint la planaritat. Diem que  $G$  és una *triangulació* si cada cara de  $G$  (inclosa l'exterior) està delimitada per 3 arestes (un triangle). En particular, qualsevol graf planar d'ordre més gran o igual a 3 és maximal si i només si és una triangulació planar.

És important remarcar el Teorema de Kuratowski i el Teorema de Wagner que donen una condició necessària i suficient per a un graf de ser planar:

**Teorema 1.2 (Kuratowski)**

Un graf és planar si, i només si,  $G \neq TK_5, TK_{3,3}$

**Teorema 1.3 (Wagner)**

Un graf és planar si, i només si,  $K_5 \not\preceq G, K_{3,3} \not\preceq G$

La prova dels dos teoremes es pot trobar, per exemple, en el text de Diestel *Graph Theory*, [8, Theorem 4.4.6].

Un graf planar és un exemple concret d'un concepte més general; les immersions dels grafos a les superfícies. Es diu que  $G$  és *immergible* en una superfície  $S$  si es pot dibuixar a  $S$  de manera que les arestes intersectin només en els seus extrems. Aquesta representació, si existeix, s'anomena una *immersió de  $G$  a  $S$* .



En particular, el *gènere d'un graf*  $G$  és el gènere mínim sobre les superfícies en que  $G$  pot ser immersida. Ho denotarem per  $\gamma(G)$ .

Al capítol 6 es recorden les definicions necessàries de gènere d'una superfície compacta per a definir el gènere d'un graf.

## Capítol 2

# Enunciat Teorema

Un dels problemes que sorgeix al treballar amb grafs és el problema d'acolorir-los de manera que vèrtexs adjacents tinguin assignats colors diferents. És el que anomenem obtenir una coloració pròpia d'un graf. I podem anar més enllà fins i tot; podem preguntar-nos quin és el mínim nombre de colors necessaris per a acolorir aquell graf, quin és el seu nombre cromàtic. Definim aquest conceptes:

### **Definició 2.1 (Vèrtex-coloració (pròpia))**

Una vèrtex-coloració (pròpia) d'un graf  $G = (V, E)$  és una assignació  $c: V \rightarrow S$  verificant  $c(v) \neq c(w)$  per a tota parella de vèrtexs  $v$  i  $w$  adjacents.

Normalment ens referim als elements de  $S$  com a colors i sovint s'empra el terme coloració per a referir-se a una vèrtex-coloració. D'ara en endavant i si no es diu el contrari usarem el terme coloració fent referència a la vèrtex-coloració. En particular, si existeix una coloració de  $G$  amb  $k$  colors ens referirem a ella com a una  $k$ -coloració.

Veiem ara què és el nombre cromàtic d'un graf  $G$ :

**Definició 2.2 (Nombre cromàtic)** El nombre cromàtic d'un graf  $G$  és el mínim enter  $k$  tal que existeix una  $k$ -coloració per a  $G$ . Es designa per  $\chi(G)$ .

En particular també es pot estudiar la coloració de les arestes i de les cares de manera que dos arestes (respectivament cares) que coincideixin en un vèrtex (respectivament aresta) tinguin associats colors diferents. Aquests conceptes es designen per *aresta-coloració* i *cara-coloració*. El problema d'acolorir les regions d'un mapa és de fet el problema d'assignar una cara-coloració a un graf. En aquests 2 casos també es pot estudiar el *nombre cromàtic d'una aresta-coloració* o el *nombre cromàtic d'una cara-coloració*.

Però què es coneix sobre el nombre cromàtic dels grafs? Si un graf  $G$  verifica certa propietat, com per exemple la de ser planar, podem afitar el seu nombre cromàtic?

Un dels resultats que es coneix actualment i que és fundamental en la teoria de grafs és el Teorema dels 4 colors enunciat a continuació:

**Teorema 2.1 (Teorema dels 4 colors)** Tot graf planar és 4-vèrtex-acolorible.

És a dir, tot graf immergible en el pla té una coloració pròpia amb com a màxim 4 colors. Aquest resultat central de la Teoria de Grafs centrarà l'estudi d'aquest treball.

## 2.1 Dualitat

El Teorema dels 4 colors implica, en particular, que tot mapa pot ser acolorit amb com a màxim 4 colors. Aquest fet es veu per dualitat. Definim primer el concepte de graf dual per a després poder veure una equivalència entre acolorir cares d'un graf i vèrtexs:

**Definició 2.3 (Graf Dual)** Donat un graf  $G = (V, E)$  amb conjunt de cares  $F$ , el graf dual de  $G$ , que direm  $G'$ , és el graf verificant  $V(G') = F$  i dos vèrtexs a  $G'$  són adjacents si les cares a  $G$  ho són (existeix una aresta separant ambdues cares a  $G$ ).

Podem veure un exemple de graf dual a la figura 2.1.

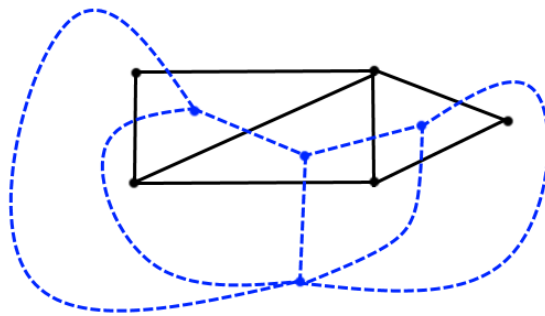


Figura 2.1: Graf en negre i el seu dual en blau

Tant les nocions de dualitat com les pròpies definicions de grafs planars o del gènere d'un graf són intuïtivament raonables i es poden donar de forma rigurosa en el context topològic. En aquest treball hem preferit obviar la fonamentació topològica d'aquestes nocions. Respecte la dualitat, es verifica que el dual d'un graf planar és planar i per tant es pot estudiar la 4-colorabilitat dels vèrtexs dels grafs duals.

Així, existeix la següent equivalència:

**Proposició 2.2** Acolorir les cares d'un graf és equivalent a acolorir els vèrtexs del seu graf dual.

Bàsicament una coloració de les cares d'un vèrtex dóna una coloració dels vèrtexs del graf dual i recíprocament. I per tant:

**Proposició 2.3** El nombre cromàtic de la coloració de vèrtexs és el mateix que el nombre cromàtic de la coloració de cares en grafs planars.

En definitiva, donada aquesta proposició, és el mateix determinar un o altre nombre cromàtic. D'ara en endavant en el treball parlarem indistintament de coloració de cares o de vèrtexs ja que podem reescriure una segona versió del Teorema dels 4 colors:

**Teorema 2.4 (Teorema dels 4 colors (II versió))** Tot graf planar és 4-cara-acolorible.

## 2.2 Grafos a considerar

Fem una consideració prèvia dels grafos amb els que es treballarà i es plantejarà el problema de la 4-colorabilitat.

La primera consideració, ja citada, és el fet que el problema dels 4 colors es planteja en grafos que siguin planars. En el capítol 7, s'estudiarà el mateix problema en el cas de grafos no planars.

La segona característica que s'imposa als grafos considerats és que siguin simples, és a dir que no existeixin arestes múltiples. Si es verifica la 4-colorabilitat en els grafos simples, el fet d'afegir arestes entre vèrtexs ja adjacents no suposa cap restricció addicional. Per tant, la mateixa coloració serà vàlida (pròpia), i en definitiva també serà certa la 4-colorabilitat en els multigrafos.

Finalment, és suficient provar la 4-colorabilitat dels grafos planars 2-connexos. Veiem com la 4-colorabilitat de qualsevol graf no connex o 1-connex està assegurada a partir d'aquest fet: Sigui  $G$  un graf no connex, aleshores  $\chi(G)$  és igual a la màxima  $\chi(H)$  amb  $H$  component connexa de  $G$ . Les components connexes aleshores són 2-connexes (la colorabilitat de les quals està provada per hipòtesi) o components 1-connexes que no són 2-connexes; la 4-colorabilitat de les quals provem a continuació.

Sigui  $G$  un graf 1-connex, que no és 2-connex. El graf de blocs d'un graf connex és un arbre. Per tant si la 4-coloració està assegurada en cada bloc 2-connex, només cal imposar que el vèrtex de tall que uneix dos blocs rebí el mateix color en els dos blocs. I aquestes imposicions es poden fer de forma seqüencial pel fet de ser un arbre. Fent una permutació dels colors en cada bloc podem obtenir doncs una 4-coloració de tot  $G$ .

En definitiva d'ara en endavant els grafos considerats seran grafos simples, planars i 2-connexos.



## Capítol 3

# Enunciats equivalents

El Teorema dels 4 colors té múltiples enunciats equivalents. En aquest capítol s'estudiaran alguns d'ells i les seves proves.

Abans de començar però, fem ènfasi en el fet que considerarem coloracions de grafs simples, planars i 2-connexos, tal i com s'ha argumentat a l'apartat 2.2.

Comencem veient que podem reduir l'estudi de la 4-vèrtex-coloració de grafs al cas de grafs cúbics amb la següent proposició:

**Proposició 3.1** Si el Teorema dels 4 colors es verifica en grafs cúbics planars, aleshores es verifica per a qualsevol graf planar.

**Prova:** Sigui  $G$  un graf planar. Afegir arestes no redueix el nombre cromàtic, per tant afegim arestes a  $G$  fins a obtenir un graf maximal (triangulació). Si aquest nou graf pot ser acolorit amb 4 colors, eliminant les arestes introduïdes obtenim una coloració pròpia del graf original  $G$ .

Ara considerem el graf dual. Degut a l'estructura d'una triangulació, els vèrtexs del graf dual tenen tots 3 veïns, és a dir el dual d'una triangulació és un graf 3-regular o equivalentment cúbic. Així, si provem la 4-colorabilitat dels grafs cúbics, passant al dual haurem provat la 4-colorabilitat de les triangulacions i per tant de tots els grafs planars. □

Per tant, ens podem restringir a verificar el Teorema dels 4 colors a grafs planars cúbics. De fet ens restringim més, concretament a grafs planars cúbics sense ponts, pel fet que a la demostració hem partit de triangulacions i al fer el dual no podem obtenir ponts (partirem d'un llaç). És més, és suficient provar la 3-aresta-colorabilitat d'aquests grafs: trobar 4-coloracions de les cares o dels vèrtexs d'un graf és equivalent al problema de trobar 3-aresta-coloracions de grafs cúbics sense ponts.

Per a mostrar-ne l'equivalència, definim prèviament el concepte de Coloració Tait i enunciem la Conjectura de Tait:

**Definició 3.1 (Coloració Tait)** Una coloració Tait d'un graf cúbic és una 3-aresta-coloració pròpia.

**Conjectura 3.1 (Tait)** Tot graf planar cúbic sense ponts admet una coloració Tait.

**Proposició 3.2** La Conjectura de Tait i el Teorema dels 4 colors són equivalents.

**Prova:** La demostració es basarà en provar que en un graf cúbic planar sense ponts una 3-aresta-coloració existeix si i només si existeix una 4-cara-coloració. A partir d'aquest fet i del Teorema 2.1, que redueix l'estudi de la 4-colorabilitat al cas de grafs cúbics tindrem l'equivalència entre ambdós enunciats. Cal doncs provar les 2 implicacions anteriors:

Prenem  $G$  graf planar cúbic sense arestes de tall. El Teorema dels 4 colors implica que les regions de  $G$  es poden acolorir amb 4 colors. Denotem els colors d'aquesta coloració amb els valors  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  i  $(1,1)$ , de manera que dues regions incidents a una mateixa aresta es pinten amb colors diferents. Aleshores, donada una aresta li assignem el color resultant de sumar els colors de les 2 regions que separa, fent la suma a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Com que les regions incidents a una aresta tenen assignats colors diferents, els colors que es poden obtenir de la suma són el  $(1,0)$ , el  $(0,1)$  i el  $(1,1)$ . Així, obtenim una 3-aresta-coloració de les arestes.

Cal comprovar que aquesta coloració és pròpia i aquest fet es prova gràcies a que el graf és cúbic. Per contradicció, suposem que 2 arestes incidents tenen el mateix color assignat (Veure figura 3.1). Al ser arestes incidents, les 2 separen una regió comuna que anomenarem  $A$ . Anomenem  $B$  i  $C$  les altres dues regions incidents a les arestes que considerem i  $a$ ,  $b$ ,  $c$  els colors assignats a les regions respectivament. Cal emfatitzar que totes les regions són diferents, pel fet que no existeix cap aresta de tall (veure apartat 2.2). Suposant ara que la coloració d'aquestes dues arestes és la mateixa, aleshores tenim que  $a+b$ , el color d'una de les arestes és el mateix que  $a+c$ , tal i com hem definit abans la coloració. Per tant:

$$a + b = a + c \implies b = c$$

que és una contradicció amb el fet que la coloració de les cares sigui pròpia.

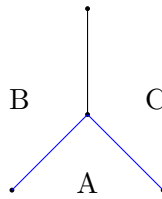


Figura 3.1: Suposem que la coloració obtinguda no és pròpia.

Recíprocament, suposem que tenim una 3-aresta-coloració amb colors  $x,y,z$ . Siguin  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  el conjunt d'arestes acolorides amb els colors  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivament. Aleshores, la unió de qualsevol parella de  $E_x, E_y, E_z$  forma una col·lecció de cicles disjunts; cicles pel fet de ser  $G$  graf 3-regular i disjunts pel fet de ser coloració pròpia.

I aquesta col·lecció inclou tots els vèrtexs pel fet de ser graf cúbic. Siguin  $H_1 = E_x \cup E_y$  i  $H_2 = E_y \cup E_z$  dues d'aquestes unions. A cada cara de  $G$  li assignem el color de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  definit de la següent manera: la  $i$ -èsima coordenada és la paritat del nombre de cicles d'  $H_i$  que contenen la cara al seu interior. Així podem obtenir 4 colors diferents per a les cares, els mateixos utilitzats abans:  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  i  $(1,1)$ .

Només cal provar que la coloració definida així és pròpia. Siguin  $F$  i  $F'$  2 cares incidents a una mateixa aresta  $e$ .  $F$  i  $F'$  són cares distintes, ja que partim de  $G$  un graf 2-connex. Aleshores l'aresta  $e$  pertany a un únic cicle  $C$  de  $H_1$  o  $H_2$  (o a un cicle de cada si  $e$  té assignat el color  $y$ ). Pel Teorema de la corba de Jordan, una de les dues cares  $F$ ,  $F'$  és dins de  $C$  i l'altre fora; mentre que els altres cicles de  $H_1$  i  $H_2$  no separen les dues cares

mantenint-les en el mateix costat. Així doncs, el cicle  $C$  fa canviar la paritat en  $H_1$ , en  $H_2$  o en ambdós. Per tant  $F$  i  $F'$  reben colors diferents en la coloració que hem construït.  $\square$

Aquesta proposició ens diu en particular doncs que si un graf cúbic (sense ponts) pot ser 3-aresta-acolorible aleshores pot ser 4-vèrtex-acolorible (o passant al dual 4-cara-acolorible) i el recíproc.

Passem ara a donar una nova formulació equivalent. La següent està relacionada amb la Conjectura de Tait però és necessari fer un lema previ per a poder-ne fer la demostració:

**Lema 3.3** Sigui  $G$  un graf cúbic. Aleshores  $G$  és 3-aresta-acolorible si i només si  $G$  està generat per una col·lecció de cicles disjunts de longitud parell.

**Prova:** Provem primer la suficiència. Com el nombre cromàtic dels cicles de longitud parell és 2 i són cicles disjunts els acolorim amb dos colors. I les arestes que manquen per a acolorir les pintem amb un tercer color. Així ja hem vist que el graf és 3-aresta-acolorible. L'altra implicació consisteix en definir quins són els cicles que generen aquest graf. Prenem dos colors de la coloració i les arestes que tenen assignats aquests dos colors. Per ser  $G$  un graf cúbic, aquestes arestes formaran una col·lecció de cicles. I pel fet de partir d'una coloració pròpia seran disjunts i tindran longitud parell.  $\square$

A partir del lema 2.3 veiem ara la formulació equivalent de Petersen:

**Conjectura 3.2 (Formulació equivalent de Petersen)** Qualsevol graf cúbic planar sense ponts està generat per una col·lecció de cicles disjunts de longitud parell.

**Proposició 3.4** El Teorema dels 4 colors és equivalent a la Formulació de Petersen

**Prova:** És immediat a partir de la Conjectura de Tait i el lema 2.3.





## Capítol 4

# Intents de demostració previs

### 4.1 Demostració falsa de Kempe

Un dels primers intents de demostració va ser dut a terme per Alfred Kempe al 1879, amb una suposada demostració que va ser àmpliament reconeguda. No va ser fins deu anys més tard que Percy Heawood va mostrar que la demostració de Kempe era incorrecta. Heawood no va poder trobar una demostració al Teorema dels 4 colors. No obstant, gràcies a algunes idees plantejades per Kempe, Heawood va demostrar el Teorema dels 5 colors.

Comencem mostrant la demostració errònea proposada per Kempe. Kempe presentà la demostració utilitzant 3 lemes que enunciarem; però el tercer no és cert i és el que fa fallar tota la demostració.

Presentem ara el concepte de cadena de Kempe, del qual la demostració es sustenta fortament:

**Definició 4.1** Una cadena de Kempe és un subgraf connex maximal format per vèrtexs de 2 colors.

Enunciem ara els 3 lemes:

**Lema 4.1** Tot graf connex planar amb tots els vèrtexs de grau major o igual a 3, té un node de grau menor o igual a 5.

**Prova:** Cal usar la fórmula d'Euler per a grafs planars connexos. Recordem-la: Sigui  $G = (V, E)$  un graf amb  $V$  el conjunt de vèrtexs i  $E$  el conjunt d'arestes. I sigui  $F$  el conjunt de cares del graf. Aleshores es verifica la següent relació:

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

La demostració d'aquesta fórmula es pot trobar al llibre de Wilson citat a la bibliografia amb el número [22].

La demostració del lema es basarà en provar que tot graf maximal planar té un vèrtex de grau menor o igual a 5, i per tant també serà cert per a un graf planar qualsevol.

Sigui  $G$  un graf maximal planar. Les cares d'un graf maximal planar són triangles per tant cada cara té exactament tres arestes que la delimiten i, en general per a tot graf, cada aresta es troba a dues cares. Es verifica doncs la relació:  $2|E| = 3|F|$ ; o equivalentment  $|F| = \frac{2|E|}{3}$

i substituint-ho a la fórmula d'Euler ens queda:

$$|V| - \frac{|E|}{3} = 2; \quad |E| = 3|V| - 6$$

Ara prenent aquest valor de  $E$  tenim:

$$\sum d(v) = 2|E| = 6|V| - 12$$

on usem que la suma dels graus dels vèrtexs és dues vegades el nombre d'arestes. Per tant el grau mitjà dels vèrtexs de  $G$  és:

$$\frac{\sum d(v)}{|V|} = \frac{6|V| - 12}{|V|} = 6 - \frac{12}{|V|} < 6$$

En definitiva, el grau mitjà dels vèrtexs és menor que 6 i per tant existeix un vèrtex de grau menor o igual a 5. □

**Lema 4.2** Sigui  $G$  un graf 4-vèrtex-acolorible que conté una cara de quatre costats. Siguin  $a, b, c, d$  els 4 vèrtexs d'aquesta cara de  $G$ . Aleshores  $G$  pot ser 4-acolorit de manera que  $a, b, c, d$  rebin només 3 colors.

**Prova:**

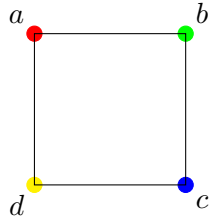


Figura 4.1: Suposem, sense pèrdua de generalitat, aquesta coloració

Prenem una 4-coloració dels vèrtexs de  $G$  (per hipòtesi sabem que existeix), i anomenem R,G,Y,B els 4 colors dels vèrtexs  $a, b, c, d$  respectivament corresponent a red, green, yellow i blue (veure figura 4.1).

Considerem ara la cadena de Kempe R-B que conté el vèrtex  $a$ , és a dir el subgraf connex maximal que conté  $a$  i els vèrtexs del qual estan acolorits amb R o B. Si la cadena no conté el vèrtex  $c$ , intercanviant els colors de tots els nodes de la cadena aconseguim una coloració pròpia amb només 3 colors G,B,Y (és el cas de l'esquema superior de la figura 4.2).

D'altra banda, si els nodes  $a$  i  $c$  pertanyen a la mateixa cadena R-B (esquema inferior de la figura 4.2) aleshores  $b$  i  $d$  estan separats per aquesta cadena R-B i per planaritat no poden pertànyer a la mateixa cadena G-Y. Intercanviant els colors en una d'aquestes cadenes G-Y, la que conté  $b$  o la que conté  $d$ , obtenim una 3-coloració d'aquests vèrtexs.

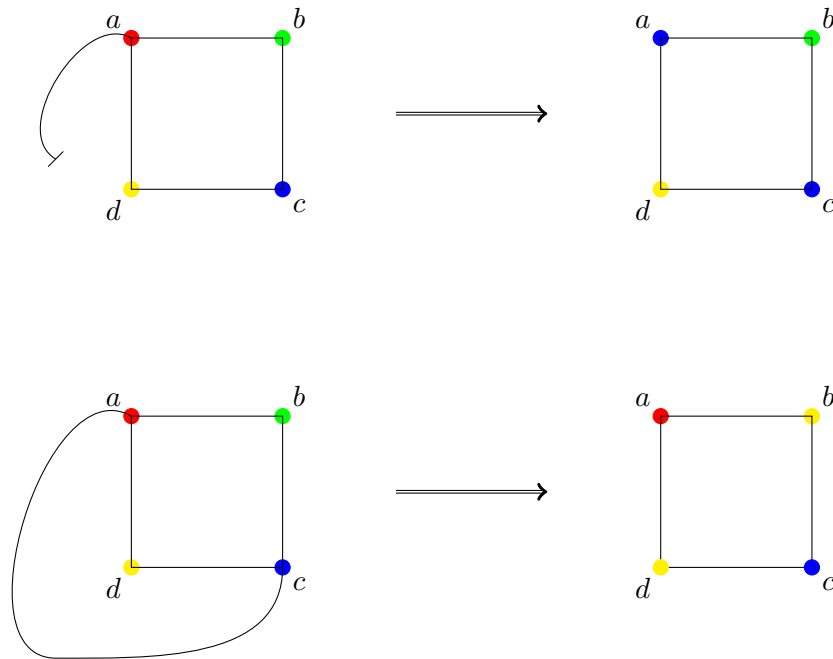


Figura 4.2: La cadena R-B que conté el vèrtex  $a$  en el primer cas no conté el vèrtex  $c$  i en el segon cas sí.

□

**Lema 4.3 (FALS)** Sigui  $G$  4-acolorible, planar connex que conté una cara de 5 costats. I siguin  $a, b, c, d, e$  els 5 vèrtexs d'aquesta cara de  $G$ . Aleshores  $G$  pot ser 4-acolorit de manera que  $a, b, c, d, e$  utilitzin només 3 colors.

**Prova:** Suposem aquesta coloració:

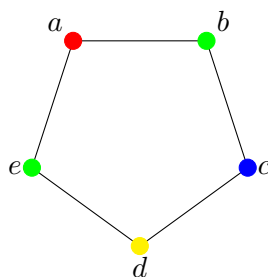


Figura 4.3: Coloració de la cara de 5 costats

Cal considerar diferents casos:

- Cas 1: Els vèrtexs  $a$  i  $c$  no pertanyen a la mateixa cadena R-B o els vèrtexs  $a$  i  $d$  no pertanyen a la mateixa cadena R-Y.  
Prenem una d'aquestes cadenes i intercanviem els colors, de manera que passa a usar únicament 3 colors.

- Cas 2 (**FALS**): Les cadenes R-B i R-Y connecten els vèrtexs del cicle:

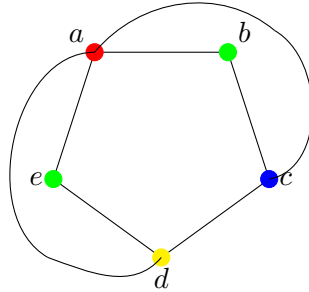


Figura 4.4

Aleshores la cadena G-Y que conté el vèrtex  $b$  no pot contenir el vèrtex  $d$  perquè hauria d'atravessar la cadena R-B. Per tant podem intercanviar els colors per a acolorir el vèrtex  $b$  amb Y.

Anàlogament, la cadena G-B que conté el vèrtex  $e$  no pot contenir el vèrtex  $c$  per la presència de la cadena R-Y. Intercanviem els colors a la cadena G-B. El resultat és la següent coloració usant només 3 colors:

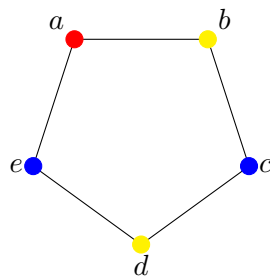


Figura 4.5

□

### Demostració errònea de Kempe del Teorema dels 4 Colors

La prova es fa per inducció forta sobre el nombre de vèrtexs  $|V(G)|$ .

El cas base és per a  $|V(G)| \leq 4$ . En aquests casos és immediat veure l'existència d'una coloració pròpia perquè el nombre de vèrtexs és inferior al nombre de colors disponibles.

Ara sigui  $G$  un graf planar qualsevol. Pel lema 4.1 sigui  $v$  un vèrtex que verifiqui  $deg(v) \leq 5$ . Suprimint el vèrtex  $v$  obtenim un graf  $G \setminus v$  amb 1 vèrtex menys i per hipòtesi d'inducció aquest nou graf és 4-acolorible.

Reintroduïm el vèrtex i li assignem un color. Per a fer-ho considerem diferents casos en funció del seu grau:

- $deg(v) \leq 3$ : Els veïns de  $v$  usen com a molt 3 colors diferents, i per tant queda un color lliure.
- $deg(v) = 4$ : Afegim arestes entre els veïns de  $v$  per a formar un cicle. Si obtenim una coloració pròpia del graf  $G$  amb arestes afegides, aquesta coloració dels vèrtexs també serà pròpia en el graf original  $G$ . Anomenem  $G'$  al graf  $G$  amb les arestes afegides. Ara suprimint el vèrtex  $v$ , obtenim un graf amb un vèrtex menys i per hipòtesis d'inducció és 4-acolorible. A més, els 4 veïns de  $v$  a  $G' \setminus v$  delimiten ara una cara i pel lema 4.2 existeix una 4-coloració de  $G'$  on aquests 4 vèrtexs només empen 3 colors, deixant així un disponible per al vèrtex  $v$ . Prenem aquesta 4-coloració i reinserim el vèrtex  $v$  amb el color lliure.
- $deg(v) = 5$ : (**FALS**, ja que fa ús del lema 4.3 que és fals) Farem un argument molt semblant al cas anterior de  $deg(v) = 4$ . Considerem el mateix graf  $G'$ , suprimim el vèrtex  $v$  i creem un cicle entre els veïns de  $v$ . Per hipòtesi existeix una 4-coloració de  $G' \setminus v$  i només cal assignar un color a  $v$ . Com els veïns de  $G$  delimiten una cara amb 5 vèrtexs, pel lema 4.3 aquests vèrtexs es poden acolorir amb 3 colors. Per tant manca un color que pot ser utilitzat per  $v$ .

□

Veiem ara perquè la demostració que feu Kempe és incorrecta. La prova falla en el lema 4.3, concretament la demostració del cas 2 és falsa. L'error es troba en el fet que modificar una cadena de Kempe pot fer modificar la segona cadena. Això succeeix si les cadenes intersequen en algun vèrtex, cosa que pot succeir perquè tenen un color en comú (recordem que les cadenes són G-B i G-Y). I per tant canviar els colors de la primera cadena, modifica la segona cadena de manera que no obtenim el resultat esperat de prescindir d'un color. Veiem un contraexemple al lema 4.3, cas 2. El contraexemple l'hem extret del llibre de Wilson *Graphs, Colourings and the Four-colour Theorem* [22] i en aquest cas tracta d'acolorir les cares:

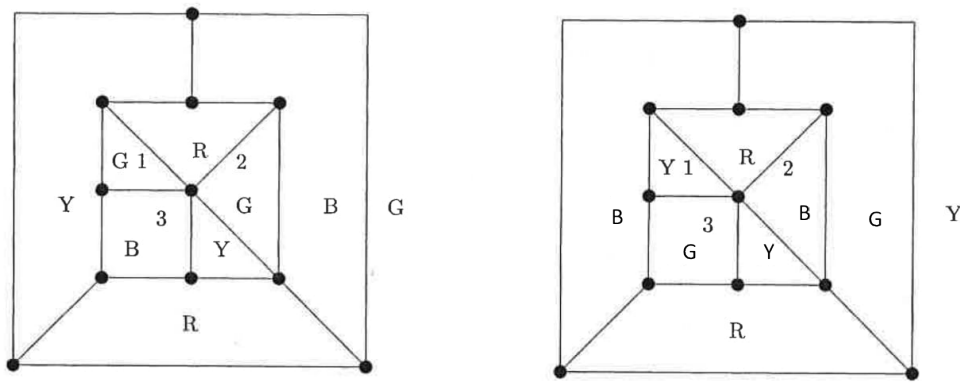


Figura 4.6: Coloració original a l'esquerra i coloració després de fer les dues modificacions en els colors de les cadenes de Kempe

La figura ens mostra a l'esquerra la coloració original. Com en aquest exemple estem intentant acolorir cares, es tracta del dual del nostre problema. Per tant una cara de 5 costats en aquest cas correspon a les 5 cares internes de la configuració. En aquest contraexemple veiem que, després de fer les dues recoloracions les 5 cares continuen usant 4 colors, mentre que segons el lema 4.3 les dues recoloracions haurien d'haver fet disminuir aquesta xifra a 4.

És interessant observar una condició necessària per tal que es produeixi un contraexemple al procediment mostrat per Kempe. Per tal que les cadenes G-Y i G-B es puguin intersecar cal que les cadenes R-B i R-Y també intersequin. Això es deu al fet que, sino per planaritat, les cadenes G-Y i G-B no es poden intersecar tal i com succeeix a la figura 4.4.

## 4.2 Teorema dels 5 colors

Així doncs el treball de Kempe no aconseguia provar el Teorema dels 4 colors. No obstant, les seves idees van fer possible demostrar el Teorema dels 5 colors, afegint-hi un altre lema substitutori del fals:

**Lema 4.4** Sigui  $G$  un graf planar 5-acolorible que conté una cara de 5 costats. I siguin  $a, b, c, d, e$  els 5 vèrtexs d'aquesta cara de  $G$ . Aleshores  $G$  pot ser 5-acolorit de manera que  $a, b, c, d, e$  utilitzin només 4 colors.

**Prova:** Prenem una coloració del graf  $G$ . Suposem, sense pèrdua de generalitat, que els vèrtexs d'aquesta cara tenen la següent coloració assignada: els colors R,O,Y,G,B pels vèrtexs  $a, b, c, d, e$  respectivament:

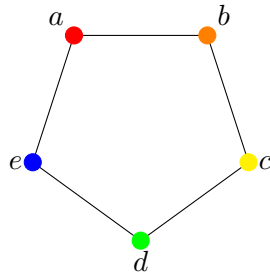


Figura 4.7: Coloració que assumim dels vèrtexs d'una cara de 5 costats

Aleshores, considerem 2 casos diferents:

- Cas 1: La cadena R-Y que conté el vèrtex  $a$  no conté el vèrtex  $c$ . Aleshores, podem intercanviar els colors d'aquesta cadena de manera que només modifiquem el color del vèrtex  $a$  que passa a ser Y. Així hem colorejat els vèrtexs amb només 4 colors.
- Cas 2: La cadena R-Y que conté el vèrtex  $a$  també conté el vèrtex  $c$ . Així, la cadena O-G que conté el vèrtex  $b$  queda "aïllada" dels altres vèrtexs d'aquesta cara. Intercanviem els colors d'aquesta cadena de manera que el vèrtex  $b$  té assignat el color G, i només tenim 4 colors diferents.

□

Així doncs aquest lema aconseguim, afegint un color a la coloració dels vèrtexs de la cara, eliminar l'error que cometiem a la prova del lema 4.3 ja que la demostració del lema 4.4 no precisa l'intercanvi de colors a 2 cadenes de Kempe, sinó en 1. Veiem ara la demostració del Teorema dels 5 colors; molt similar a la demostració de Kempe, emprant el lema 4.4 en lloc del lema 4.3.

**Teorema 4.5 (Teorema dels 5 colors)** Tot graf planar té una coloració pròpia amb 5 colors.

**Prova:** La demostració es fa per inducció forta sobre el nombre de vèrtexs  $|V(G)|$ . Sigui  $G$  un graf planar. Pel lema 4.1 sigui  $v$  un vèrtex que verifiqui  $\deg(v) < 5$ . Suprimint el vèrtex  $v$  obtenim un graf  $G \setminus v$  amb 1 vèrtex menys i per hipòtesi d'inducció aquest nou graf és 5-acolorible.

Aleshores reintroduim el vèrtex i li assignem un color. Si  $\deg(v) \leq 4$ , els veïns usen com a màxim 4 colors i per tant en queda un lliure per a  $v$ . Altrament, si  $\deg(v) = 5$ , afegim arestes entre els veïns de  $v$  per a formar un cicle. Sigui  $G'$  aquest nou graf. Suprimint el vèrtex  $v$  a  $G'$ , obtenim un graf amb un vèrtex menys i per hipòtesi d'inducció és 5-acolorible. A més, els 5 veïns de  $v$  a  $G' \setminus v$  delimiten una cara i pel lema 4.4 existeix una 5-coloració on aquests 5 vèrtexs només utilitzen 4 colors, deixant així un disponible per al vèrtex  $v$ . Prenem aquesta 5-coloració i reinserim el vèrtex  $v$  amb el color lliure.

Aquesta 5-coloració pròpia a  $G'$  ho és també a  $G$ .

□

### 4.3 Intent de demostració de Tait

Nombrosos matemàtics han intentat resoldre el problema dels 4 colors des que es presentà el problema. Al 1884, cinc anys més tard que Kempe presentés la seva demostració del Teorema dels 4 colors, Peter Guthrie Tait proposà una nova manera d'enfocar la resolució del problema.

La idea era provar un dels enunciats equivalents que hem presentat en el capítol anterior. Concretament volia provar el resultat 3.1, és a dir provar l'existència d'una 3-aresta-coloració per a qualsevol graf. El seu objectiu però, no era provar l'existència d'aquestes 3-aresta-coloracions de forma directe, sinó provar una condició suficient, la hamiltoniïtat dels grafs. Introduïm ara els conceptes de camí, cicle i graf hamiltonià per a poder continuar amb la conjectura de Tait:

**Definició 4.2 (Camí/cicle hamiltonià)** Camí/cicle(respectivament) en un graf que passa per cada vèrtex del graf exactament un cop.

**Definició 4.3 (Graf hamiltonià)** Graf que conté un cicle hamiltonià.

Tait va veure que per a provar l'existència de 3-aresta-coloracions era suficient provar l'existència de cicles hamiltonians en els grafs. Enunciem i demostrem aquest resultat:

**Proposició 4.6** Si un graf planar cúbic  $G$  sense ponts és hamiltonià aleshores  $G$  té una 3-aresta-coloració.



**Prova:** Definirem aquesta 3-aresta-coloració.

Primer de tot veiem, a partir de la fórmula d'Euler, que el nombre de vèrtexs d'un graf cúbic és parell:

Com  $G$  és cúbic podem relacionar el nombre d'arestes  $E$  i el nombre de vèrtexs  $V$ :  $E = \frac{3V}{2} \Rightarrow 2E = 3V$ . I aquesta última igualtat ens indica que el terme  $V$  és parell.

Per tant, el nombre de vèrtexs és parell i el cycle hamiltonià, que té longitud  $V$ , té longitud parell.

Ara, podem acolorir les arestes del cycle hamiltonià amb dos colors, alternant-los. Només ens cal un tercer color per les arestes del graf que no es troben en el cycle. Aquesta coloració és pròpia gràcies al fet que el graf és cúbic. Les arestes que no pertanyen al cycle hamiltonià només incideixen amb arestes del cycle (i per tant de diferent color) per ser  $G$  cúbic. □

La prova del Teorema dels 4 colors es podia plantejar ara en termes de l'existència de cicles hamiltonians en grafs cúbics planars sense ponts. Tait enuncià una conjectura al respecte; l'existència de cicles hamiltonians en grafs planars cúbics sense ponts.

La prova de la conjectura, juntament amb la proposició 4.6 i l'enunciat equivalent entre 3-aresta-coloracions de grafs cúbics i 4-vèrtexs coloracions (proposició 3.2), suposarien la prova del Teorema dels 4 colors.

La conjectura, però, va ser descartada al 1946, amb la presentació d'un contraexemple per part de Tutte. La figura 4.8 [25] correspon al contraexemple de la conjectura de Tait.

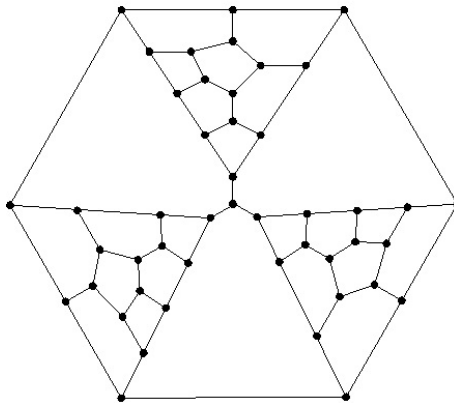


Figura 4.8: Contraexemple de la conjectura de Tait

## Capítol 5

# Demostració d'Appel i Haken

### 5.1 Introducció

La prova del Teorema dels 4 colors va ser publicada al 1977 per Kenneth Appel i Wolfgang Haken. Per primera vegada en la demostració d'un resultat d'aquesta magnitud, es feia ús d'ordinadors a la prova, fet que va fer suscitar certa polèmica i escepticisme. Tanmateix, una segona prova del Teorema va ser presentada al 1997 per part de Robertson, Sanders, Seymour i Thomas. Aquesta segona versió, amb les mateixes idees que la primera però força més simplificada, va resultar en un important progrés ja que s'apropà a l'objectiu de proveir una prova que pogués ser verificada en la seva completitud a mà.

Veiem quina és l'estratègia de la demostració. De la mateixa manera que la demostració errònea que presentà Kempe, la prova presentada per Appel and Haken dels 4 colors es fa per inducció sobre el nombre de vèrtexs del graf,  $|V(G)|$ . El cas base és el cas  $|V(G)| \leq 4$ . D'aquesta manera associant a cada vèrtex un color diferent tenim una coloració pròpia que empra 4 colors o menys. Aleshores, el pas inductiu general és eliminar un o varis vèrtexs, obtenint així un graf  $G'$  amb menys vèrtexs que l'inicial  $|V(G')| < |V(G)|$ . Per hipòtesi d'inducció aquest nou graf  $G'$  admet una 4-coloració, i el problema ara és modificar la coloració per tal d'estendre-la a tot  $G$ . En particular ens centrarem en fer la prova en grafs maximals en nombre d'arestes, és a dir triangulacions, ja que si provem el Teorema dels 4 colors en grafs maximals l'haurem provat per a tot graf planar.

Com a exemple, ja hem vist que si tenim un vèrtex amb  $deg(v) \leq 4$  podem estendre la coloració de  $G' = G \setminus v$  a tot  $G$  (si fa falta modificant la coloració en una cadena de Kempe, tal i com es va comentar al teorema 4.2). Aquest fet fa que sigui una configuració reductible, com ara veurem. Definim a continuació els conceptes de configuració i configuració reductible:

#### **Definició 5.1 Configuració**

Una configuració  $K$  és una parella  $K = (G, \gamma)$  on  $G$  és una triangulació, excepte potser en una regió, i  $\gamma$  és una aplicació  $\gamma : G \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Direm que la configuració  $K$  apareix a un graf  $T$  si  $G$  és subgraf de  $T$ , i es compleix que  $\forall v \in G, \gamma(v) = deg(v)$  a  $T$ .

Bàsicament, una configuració és un instrument que ens permet captar l'estructura d'una part d'una triangulació més gran. Això es deu al fet que la configuració ens indica l'existència d'uns certs vèrtexs a  $T$ , les adjacències entre ells i els seus graus dins de  $T$ . Sovint, però,

també parlarem de la completació lliure de  $K$  referint-nos a una configuració  $K = (G, \gamma)$  incloent tots els veïns dels vèrtexs de  $G$  encara que no apareguin a la configuració. Aquests vèrtexs afegits es representen formant un cicle, i els anomenarem anell o frontera de la configuració.

Veiem ara el significat de configuració reductible, central en el desenvolupament de la prova.

**Definició 5.2 Configuració reductible**

Una configuració és reductible si no pot aparèixer a cap contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors.

És a dir, si  $K = (G, \gamma)$  és una configuració reductible que apareix a  $T$  i qualsevol graf amb menys vèrtexs que  $T$  pot ser acolorit, aleshores  $T$  també és 4-acolorible.

Recuperem ara les configuracions que Kempe usà en la seva demostració errònea del Teorema dels 4 colors; els vèrtexs de grau menor o igual a 5. En particular es pot provar que els vèrtexs de grau menor o igual a 4 són reductibles, mentre que no es coneix la prova de la reductibilitat del vèrtex de grau 5. Enunciem la la reductibilitat dels vèrtexs de grau menor o igual a 4 i la seva prova:

**Proposició 5.1** Un vèrtex de grau menor o igual a 4 és una configuració reductible.

**Prova:** Partim d'una triangulació  $T$  que contingui aquesta configuració i suposem que  $T$  és contraexemple minimal del teorema dels 4 colors. Aleshores el graf resultant de sostreure el vèrtex  $v$ ,  $T \setminus v$ , és 4-acolorible per ser  $T$  contraexemple minimal. Aquesta coloració estén a tot  $T$  de forma trivial si la desigualtat en el grau és estricte o gràcies al teorema 4.2 si  $deg(v) = 4$  (considerant els veïns de  $v$  els vèrtexs de la cara). És a dir, si la configuració d'un vèrtex de grau menor a 4 apareix a  $T$ , aquest no pot ser contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors i per tant la configuració és reductible. □

Introduïm un últim concepte abans d'iniciar el plantejament de l'estratègia de la demostració. És la noció de conjunt no evitable:

**Definició 5.3 Conjunt no evitable**

Un conjunt no evitable és un conjunt de configuracions que verifica que cada graf maximal planar en conté almenys una d'elles.

Els conceptes de configuracions reductibles i conjunts no evitables són la base de la prova. Concretament l'objectiu és

Trobar un conjunt no evitable on totes les configuracions siguin reductibles.

Això implicaria clarament el Teorema dels 4 colors. Bàsicament, si s'obtingués aquest conjunt evitable format per configuracions reductibles, tota triangulació  $T$  contindria una configuració reductible i per tant no podria ser contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors. La no existència de contraexemples minimal del Teorema dels 4 colors juntament amb la veracitat de la 4-colorabilitat en el cas base ( $|V(G)| = 4$ ) prova la no existència de contraexemples en general i per tant la veracitat del teorema.

La demostració duta a terme per Appel i Haken o posteriorment per Robertson, Sanders, Seymour i Thomas segueix precisament aquest objectiu. Mentre que en el primer cas el

conjunt no evitable està format per 1476 configuracions, el segon va reduir aquest nombre a 633.

A continuació es mostren 3 enunciats i 3 apartats diferents, on es desenvoluparà la prova de cadascun d'ells respectivament. La demostració del Teorema dels 4 colors és el resultat dels següents 3 enunciats:

Teorema 1: Tot  $T$  contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors és una triangulació internament 6-connexa.

Teorema 2: Tota configuració del conjunt de configuracions trobat per Appel i Haken (respectivament Robertson, Sanders, Seymour i Thomas) és reductible.

Teorema 3: El conjunt de configuracions trobat per Appel i Haken (respectivament Robertson, Sanders, Seymour i Thomas) és un conjunt no evitable per als grafs internament 6-connexos.

Observem que aquests 3 enunciats són essencialment l'objectiu descrit abans afegint-li una condició tècnica, la propietat dels grafs de ser internament 6-connexos, que s'explicarà a l'apartat 5.2

Tot i que sembli comprensible primer trobar el conjunt no evitable i després verificar-ne la reductibilitat, a la pràctica aquest procés es va fer de manera inversa. És a dir, els conjunts no evitables es construïen de manera que evitessin certes configuracions de les quals no se n'havia pogut corroborar la reductibilitat. És per això que es desenvoluparà primer el capítol de reductibilitat i després el de trobar aquest conjunt no evitable, mètode conegut com a descàrrega.

## 5.2 6-connectivitat interna

El primer teorema a provar afirma que tot  $T$  contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors ha de tenir una estructura determinada; ser una triangulació internament 6-connexa. Definim doncs què caracteritza aquesta estructura.

### Definició 5.4 Graf internament 6-connex

Un graf  $G$  és internament 6-connex si  $\forall X \subseteq V$  amb  $|X| \leq 5$ ,  $G \setminus X$  és connex o  $|X|=5$  i  $G \setminus X$  té exactament 2 components connexes, una d'elles amb un únic vèrtex.

En particular és un graf 5-connex i tots els vèrtexs tenen grau major o igual a 5.

Suposar que  $G$  és triangulació ho podem fer ja que és suficient provar el Teorema dels 4 colors per a grafs maximals en nombre d'arestes, que són triangulacions.

Per a provar aquest primer enunciat caldrà provar varis lemes. Els dos primers ens permetran demostrar-ne la 5-connectivitat:

**Lema 5.2** Sigui  $T$  triangulació, contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors. Aleshores qualsevol conjunt separador en  $T$  indueix com a mínim un cicle.

**Prova:** Per reducció a l'absurd, sigui  $S$  un conjunt separador de  $T$  que no induex un cicle.  $S$  desconnecta  $T$  en  $E$  i  $D$ , i podem dibuixar  $T$  en el pla de manera que  $E$  quedi a l'esquerra de  $S$  i  $D$  a la dreta:

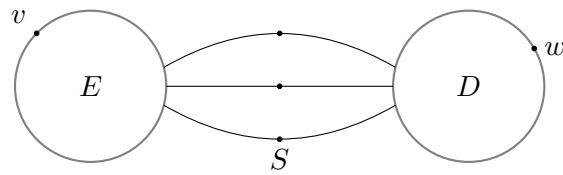


Figura 5.1:  $T$  conté un conjunt separador  $S$

Ara prenem un vèrtex  $v$  a la frontera de  $E$  i un vèrtex  $w$  de la frontera de  $D$ . Podem afegir l'aresta  $vw$  mantenint la planaritat del graf. Però això contradiu el fet que  $T$  és un graf maximal planar. □

**Proposició 5.3** Si  $G$  és contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors, aleshores  $G$  és 5-connex.

**Prova:** Suposem que  $G$  no és 5-connex. Pel lema 5.2,  $G$  ha de contenir un triangle o un rectangle separador (conjunts separadors de mida 3 o 4 que formen un cicle). Veiem que no pot contenir cap d'aquestes dues estructures:

i)  $G$  no conté cap triangle separador:

Si  $G$  conté un triangle separador  $T$ , considerem les dues parts no buides en que  $T$  separa el graf. Aquestes dues parts només intersecten en els tres vèrtexs de  $T$  i cadascuna té un nombre de vèrtexs menor a  $G$ . Per ser  $G$  contraexemple minimal, ambdues parts poden ser 4-acolorides; coloracions que assignen 3 colors diferents pels 3 vèrtexs de  $T$  (degut al fet que  $T$  és un triangle, un  $K_3$ ). Ara, fent una permutació dels colors d'un dels subgrafs podem fer coincidir les 2 coloracions de  $T$  per a obtenir una coloració de tot el graf  $G$ . I aquest fet és una contradicció amb el fet que  $G$  fós contraexemple del Teorema dels 4 colors.

ii)  $G$  no conté cap rectangle separador:

Suposem que  $G$  conté un rectangle separador  $R$ . Siguin  $H_1$  i  $H_2$  les parts internes i externes, respectivament, en que el rectangle  $R$  separa  $G$ . Anomenem  $a, b, c, d$  els vèrtexs de  $R$  en ordre (veure figura 5.2)

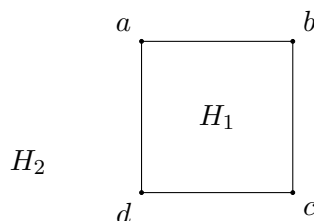


Figura 5.2: Rectangle separador  $R$  juntament amb les parts interna i externa,  $H_1$  i  $H_2$ , en que separa el graf

Definim  $G_1$  com  $H_1$  incloent els vèrtexs  $a, b, c, d$  (és a dir  $G$  sense l'interior del rectangle) i afegint l'aresta  $ac$ . Com el nombre de vèrtexs a  $G_1$  és menor que el de  $G$  i  $G$  és contraexemple minimal del teorema dels 4 colors, podem acolorir  $G_1$  amb 4 colors; coloració que

empra 3 colors diferents pels 3 vèrtexs  $a, b, c$  pel fet de formar un  $K_3$ . De forma similar definim  $G_2$  com  $H_2$  incloent l'aresta  $ca$ . I acolorim  $H_2$  amb 4 colors. Aquesta coloració també utilitzarà 3 colors pels vèrtexs  $a, b, c$ . A la figura 5.3 es pot veure l'estructura de  $G_1$  i  $G_2$ .

Ara prenem les 2 coloracions i les intentem unir fent una permutació en 1 de les 2 coloracions. Aquesta unió es podrà fer d'aquesta manera excepte en el cas en el que una coloració assigni el mateix color als vèrtexs  $b$  i  $d$  i l'altra els hi assigni colors diferents. Veiem què fer en aquesta situació. Suposem sense pèrdua de generalitat, que a  $G_1$  tenim una coloració que usa el mateix color per als vèrtexs  $b$  i  $d$ , mentre que a  $G_2$  la coloració assigna colors diferents a  $b$  i  $d$  tal i com mostra la figura 5.3

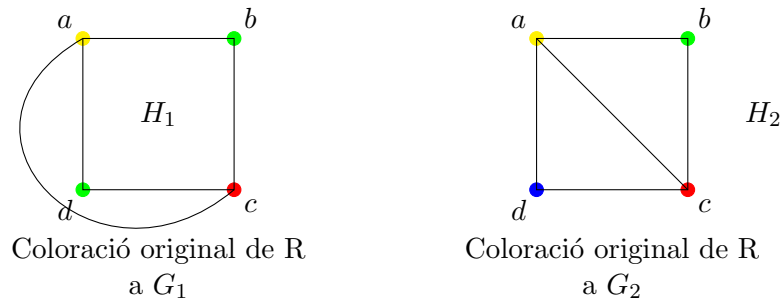


Figura 5.3: Coloracions originals de R a  $G_1$  i  $G_2$

I considerem 2 casos:

**1r cas** A  $G_2$ , la cadena de Kempe G-B que conté el vèrtex  $d$  no conté el vèrtex  $b$ . Com ja hem fet en anteriors ocasions podem modificar els colors d'aquesta cadena de manera que els vèrtexs  $b$  i  $d$  usin el mateix color.

**2n cas** La cadena de Kempe G-B que conté el vèrtex  $b$  a  $G_2$  també conté el vèrtex  $d$ . En aquest cas, considerem la cadena de Kempe que conté el vèrtex  $a$  de colors Y-R. Degut a la planaritat del graf i al fet que aquesta cadena no interseca amb l'anterior, la nova cadena considerada no pot contenir el vèrtex  $c$ .

Intercanviem els colors de la cadena Y-R per a obtenir el mateix color als vèrtexs  $a$  i  $c$  (figura 5.4).

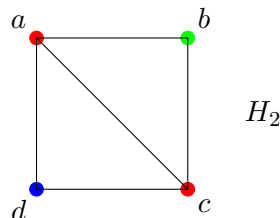


Figura 5.4: Coloració modificada de R a  $G_2$

Ara, redefinim  $G_1$  com  $H_1$  amb l'aresta  $bd$  i acolorim  $G_1$  (veure figura 5.5). Aquesta nova

definició ens permetrà una coloració dels vèrtexs del rectangle que encaixi amb alguna de les anteriors obtingudes de  $G_2$ .

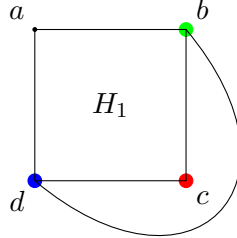


Figura 5.5: Coloració obtinguda del rectangle  $R$  per a la segona definició de  $G_1$

Tal i com mostra la figura 5.5 els vèrtexs  $b, c$  i  $d$  usen 3 colors diferents perquè formen un  $K_3$ . I el vèrtex  $a$  pot ser del mateix color que  $c$  o diferent. En el primer cas l'emparallem amb la coloració modificada de  $G_2$ , i en el segon cas amb la coloració original de  $G_2$  mostrada a la dreta de la figura 5.3.

□

Una condició necessària per a ser contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors és doncs ser 5-connex. La definició d'internament 6-connex, però, és una condició més forta. Els cicles separadors de longitud 5 en els grafs internament 6-connexos han de separar una component connexa de només 1 vèrtex. Veiem la següent proposició que afirma que es verifica aquesta condició per a tot contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors. A la demostració hi ha diversos arguments que es repeteixen a l'analitzar els diferents casos. Per completesa s'han inclòs tots:

**Proposició 5.4** Sigui  $T$  triangulació que conté un cicle  $C$  de longitud 5 tal que l'interior i l'exterior de  $C$  contenen almenys 2 vèrtexs de  $T$ . Aleshores  $T$  no pot ser contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors.

**Prova** Suposem que  $T$  és contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors. El mètode per a dur a terme la prova és molt semblant a l'anterior proposició 5.3. Tractarem d'acolorir l'interior i l'exterior delimitat per  $C$  i després encaixarem ambdues coloracions. Definim doncs  $G_1$  com el graf format per  $C$  i el seu exterior. I  $G_2$  com el graf que conté  $C$  i el seu interior.

La diferència respecte a la demostració de la proposició 5.3 és que ara podem afegir un vèrtex a  $G_1$  i a  $G_2$  sense perdre la 4-colorabilitat d'aquests grafs. Això es deu a que la hipòtesi és que l'interior i l'exterior de la triangulació original contenen almenys 2 vèrtexs, i per tant els nous grafs que denotarem per  $G'_1$  i  $G'_2$  encara tindran menys vèrtexs que l'original.

Usem aquest fet i definim els grafs de la següent manera:  $G'_1$  com a  $G_1$  més un vèrtex unit a tots els vèrtexs del cicle  $C$  i  $G'_2$  de forma anàloga com a  $G_2$  més un vèrtex unit a tots els vèrtexs de  $C$ .

Per ser  $T$  contraexemple minimal,  $G'_1$  i  $G'_2$  poden ser 4-acolorits; coloracions que inclouen una 3-coloració de  $C$  (ja que cal un color extra pel vèrtex que és adjacent a tots els vèrtexs

de  $C$ ). La coloració de  $C$  serà doncs, en ambdós casos, de l'estil (R,G,B,G,B) amb un vèrtex diferenciat; aquell que té assignat un color exclusivament per a ell.

La unió de les dues coloracions està diferenciada en funció d'on es troba el vèrtex diferenciat en els dos grafs  $G'_1$  i  $G'_2$ .

Cas a: Els vèrtexs marcats coincideixen Amb una simple permutació dels colors obtenim una coloració de  $C$  idèntica i per tant  $T$  és 4-acolorible.

Cas b: Els 2 vèrtexs marcats són adjacents Suposem que les coloracions de  $C$  són: a  $G_1$  (R,G,B,G,B); amb vèrtex marcat  $v_1$  i a  $G_2$  (B,R,G,B,G) amb vèrtex marcat  $v_2$ , tal i com es mostra a la figura 5.6. Diferenciem els subcasos b.1 i b.2:

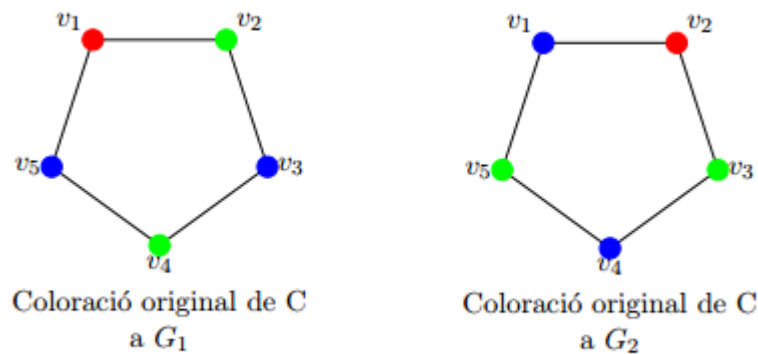


Figura 5.6: Coloracions originals de  $C$  a  $G_1$  i  $G_2$

b.1) No existeix cadena de Kempe a  $G_2$  de  $v_1$  a  $v_4$  En aquest cas intercanviem els colors a la cadena que conté  $v_1$  i el vèrtex diferenciat passa a ser  $v_1$ , el mateix que a  $G_1$ . Ens trobem doncs en el primer cas.

b.2) La cadena de Kempe de  $G_2$  que conté el vèrtex  $v_1$  també conté el vèrtex  $v_4$  Cal per tant modificar una cadena de Kempe diferent. Per planaritat sabem que la cadena G-Y que conté  $v_3$  no pot contenir  $v_5$ . Modifiquem doncs aquesta cadena de Kempe obtenint el color groc al vèrtex  $v_3$ .



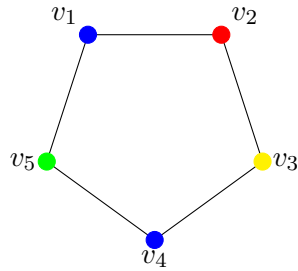


Figura 5.7: Coloració modificada de  $C$  a  $G_2$

Ara passem a treballar amb la coloració de  $G_1$ . El mètode que es seguirà serà obtenir una coloració col·lapsant el cicle  $C$ . És a dir identificarem els vèrtexs  $v_1$  i  $v_4$  i obtindrem una coloració que imposarà que aquests vèrtexs tindran assignat el mateix color. Podem col·lapsar aquest parell de vèrtexs, i per tant assigna'ls-hi el mateix color perquè no poden ser originalment adjacents. Això es deu a que si fossin adjacents a  $T$ , existiria un cicle separador de longitud 3, el cicle  $v_1v_5v_4v_1$ , contradicció amb el fet que tot  $T$  contraexemple minimal és 5 connex (proposició 5.3).

Anomenem  $G_1''$  el graf resultant de  $G_1$  col·lapsant els vèrtexs  $v_1$  i  $v_4$ . De la mateixa manera que  $G_1$ , aquest nou graf pot ser 4-acolorit gràcies a la hipòtesi que  $T$  és contraexemple minimal. Sense pèrdua de generalitat podem suposar la coloració de  $G_1''$  mostrada a la figura 5.8.

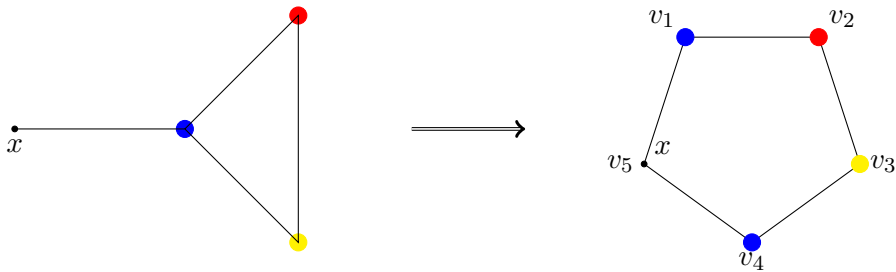


Figura 5.8: Coloració modificada de  $C$  a  $G_1$ , induïda per la coloració del graf  $G_1''$

L'únic color que queda per a determinar és el corresponent al vèrtex  $v_5$ . Denotem per  $x$  aquest color. Tota coloració de  $G_1''$  induïx de forma immediata una coloració pròpia a  $G_1$ . Així estudiem els possibles valors de  $x$ ; verd, groc o vermell.

- $x$ =verd: La coloració de  $G_1$  associada encaixa amb la coloració modificada de  $C$  a  $G_2$  que es mostra a la figura 5.7.
- $x$ =groc: Permutant els colors verd i groc, aquesta coloració encaixa amb la de  $G_2$  original.
- $x$ =vermell: Fixem-nos que en aquest cas el vèrtex diferenciat de  $G_1$  ha saltat de  $v_1$  a  $v_3$ . El següent pas ara és repetir l'argument intercanviant els rols de  $G_1$  i  $G_2$  (Això ho podem fer perquè efectivament partim del fet que els vèrtexs diferenciats són adjacents). Fent això, el vèrtex diferenciat de  $G_2$  passa de  $v_2$  a  $v_4$ . Repetint-ho dues vegades més; obtenim com a vèrtex marcat de  $G_2$  el vèrtex  $v_1$  (passa de  $v_4$  a  $v_1$ ). Hem

obtingut com a vèrtex marcat de  $G_1$   $v_1$ , el mateix que en la coloració de  $G_1$  original. Ens trobem doncs en el cas a).

Cas c: Els 2 vèrtexs marcats no són el mateix ni adjacents Podem suposar doncs que el vèrtex marcat a  $G_1$  és  $v_1$  i el de  $G_2$  és  $v_3$  tal i com mostra la figura 5.9

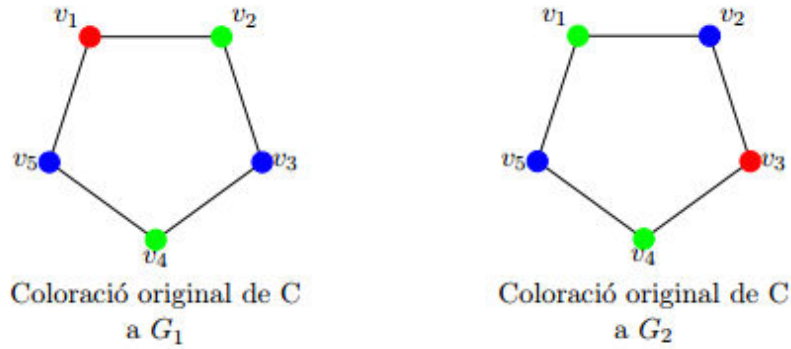


Figura 5.9: Coloracions originals de  $C$  a  $G_1$  i  $G_2$

Obtenir com a vèrtex marcat el  $v_2$  en el graf  $G_2$  i, per tant trobar-nos en el cas b, es podrà fer si no existeix cadena de Kempe B-R de  $v_2$  a  $v_5$ . En tal cas ho aconseguirem simplement intercanviant els colors de la cadena de Kempe R-B que conté  $v_3$ .

Altrament, si els vèrtexs  $v_2$  i  $v_5$  es troben a la mateixa cadena de Kempe R-B, per planaritat sabem que la cadena G-Y que conté  $v_4$  no pot contenir  $v_1$ . Intercanviem els colors de la cadena de  $v_4$  obtenint la coloració de la figura 5.10.

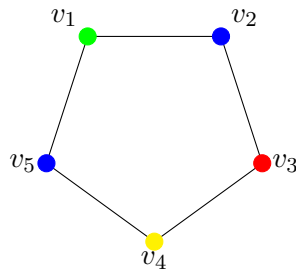


Figura 5.10: Coloració modificada de  $C$  a  $G_2$

Seguint els mateixos arguments que en el cas b, definim ara una nova coloració de  $G_1$ , induïda a partir d'una coloració del graf  $G_1$  col·lapsant dos vèrtexs. Concretament el nou graf és el resultat de col·lapsar el graf  $G_1$  identificant els vèrtexs  $v_2$  i  $v_5$  (la coloració d'aquest nou graf ens induirà una coloració de  $G_1$  amb la mateixa assignació per a  $v_2$  i  $v_5$ ). El graf obtingut és 4-acolorible per hipòtesi d'inducció i podrà ser unit a una de les coloracions de  $G_2$  que s'han definit. Sense pèrdua de generalitat la coloració obtinguda és:

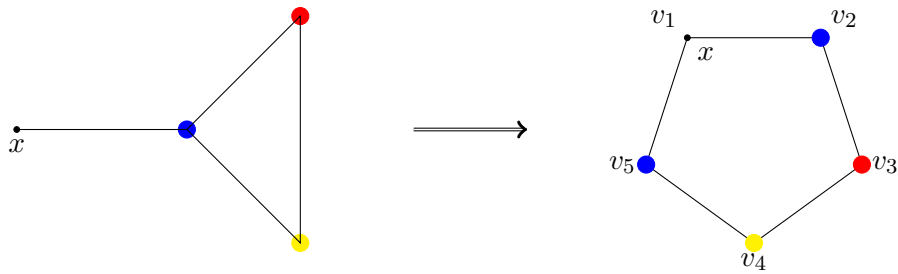


Figura 5.11:  $G_1''$  induïx una coloració de  $C$  a  $G_1$ . Coloració modificada respecte la original

Només cal considerar els possibles valors de  $x$ ; verd, groc o vermell.

- $x=\text{verd}$ : La coloració de  $G_1$  modificada encaixa amb la coloració modificada de  $C$  a  $G_2$  que es mostra a la figura 5.10.
- $x=\text{groc}$ : Permutant els colors verd i groc, aquesta coloració encaixa amb la de  $G_2$  original.
- $x=\text{vermell}$ : En aquest cas el vèrtex marcat a  $G_1$  és  $v_4$  i a la coloració original de  $G_2$  és  $v_3$ . Ens trobem en el cas b), els vèrtexs marcats són adjacents.

□

En definitiva, els resultats dels lemes i proposicions 5.2, 5.3 i 5.4 mostren que efectivament tot contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors ha de ser una triangulació internament 6-connexa. A partir d'ara doncs treballarem només amb aquests grafs.

Passem ara al següent apartat, on s'estudiarà la reductibilitat de certes configuracions en aquest tipus de grafs.

### 5.3 Reductibilitat

Fins ara hem vist que tot contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors ha de ser un graf internament 6-connex. El següent pas natural seria intentar trobar un conjunt de configuracions no evitables per a després demostrar-ne la reductibilitat. Aquesta però no va ser la metodologia emprada per Appel i Haken a la seva prova. Aquests matemàtics usaren les ja demostrades reductibilitats de certes configuracions per a trobar conjunts no evitables que les incloguessin. I també excloure dels conjunts no evitables aquelles configuracions la reductibilitat de les quals es resistia a ser provada.

En definitiva, els conjunts no evitables es construïen fent ús de la reductibilitat d'algunes configuracions. És per això que presentarem i estudiarem primer la reductibilitat de certes configuracions per a després, en la següent secció introduïr el mètode de descàrrega usat per a trobar els conjunts no evitables.

Recordem primer la definició de reductibilitat; una configuració és reductible si no es pot trobar en un contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors. És a dir, que si existeix una 4-coloració pròpia de tot el graf excloent la configuració, la coloració es pot estendre a la configuració i per tant a tot el graf original.

En aquesta secció es presentaran els tipus d'arguments utilitzats per a provar la reductibilitat de configuracions i es conclourà amb un comentari general de la prova de la reductibilitat de les 1476 configuracions de la prova original del teorema i l'ús dels ordinadors en aquesta.

Comencem doncs mostrant 2 exemples de configuracions reductibles que ens mostraran diferents tipus de raonaments que s'han utilitzat per a provar la reductibilitat d'una configuració. La primera configuració és un vèrtex de grau 5 amb 3 veïns consecutius de grau 5. La completació lliure d'aquesta configuració es coneix amb el nom de diamant de Birkhoff (veure figura 5.12). I la segona configuració que tractarem consisteix en un vèrtex de grau 6 amb 3 veïns consecutius de grau 5, que anomenarem configuració de Franklin.

**Proposició 5.5** El diamant de Birkhoff és reductible

**Prova** Prenem  $T$  una triangulació que conté la configuració que estem estudiant, un vèrtex de grau 5 amb 3 veïns consecutius de grau 5. I suposem que  $T$  és un contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors.

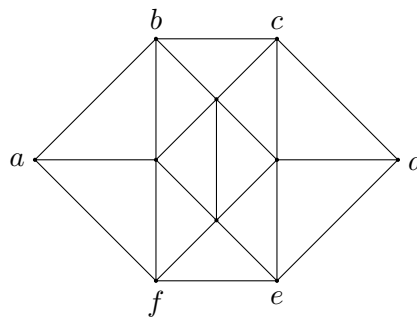


Figura 5.12: Configuració de Birkhoff; configuració d'un vèrtex de grau 5 amb 3 veïns consecutius de grau 5 (vèrtexs interiors) incloent un anell al seu voltant

Considerem ara  $T'$  el graf obtingut suprimint tots els vèrtexs interiors de la configuració i col·lapsant dos vèrtexs de l'anell de la frontera del diamant. Concretament identifiquem els vèrtexs  $b$  i  $f$ . Aquests dos vèrtexs no són adjacents al graf  $T$  ja que si ho fossin existiria un cicle separador de longitud 3, contradicció amb el fet que  $T$  és contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors (veure proposició 5.3). Per tant  $b$  i  $f$  poden ser acolorits amb el mateix color a  $T$ . Ara, el graf col·lapsat  $T'$  conté menys vèrtexs que el graf original per tant pot ser 4-acolorit.

L'anell de la configuració a  $T'$  és el següent i sense pèrdua de generalitat podem considerar aquesta coloració:

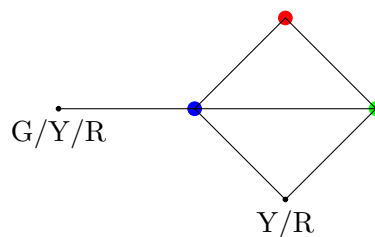


Figura 5.13

La prova es basarà en considerar totes les possibles coloracions de  $T'$  i demostrar que es poden estendre a coloracions de tot  $T$ . Concretament ens centrarem en les coloracions de la figura 5.13 ja que són els vèrtexs incidents als vèrtexs que hem eliminat, i aquests últims són els que queden per a acolorir.

Tenim 2 opcions pel vèrtex  $a$  i 3 pel vèrtex  $e$ , en total 6 possibilitats. D'aquestes, 5 estenen trivialment. El cas difícil és el cas:

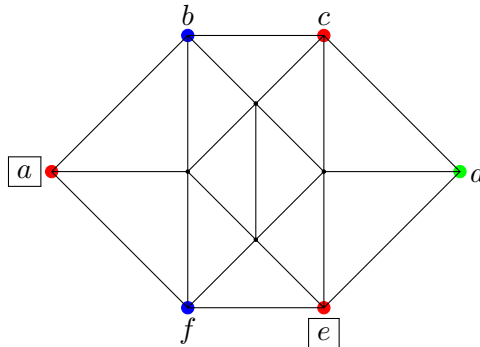


Figura 5.14: Coloració de l'anell que no estén trivialment als vèrtexs interiors

Cal considerar per separat tres possibles casos:

- a) Els tres vèrtexs vermells de la frontera pertanyen a la mateixa cadena de Kempe R-Y. Per tant, la cadena de Kempe B-G que conté el vèrtex  $f$  no conté cap altre vèrtex de l'anell. Modifiquem la seva cadena de Kempe, de tal manera que canvia de color a verd. Aquesta coloració de l'anell estén trivialment.
- b) El vèrtex  $e$  no pertany a cap de les cadenes de Kempe R-Y dels vèrtexs  $a$  i  $c$ . Modifiquem el seu color a groc i podem estendre la coloració a l'interior del diamant de Birkhoff.
- c) El vèrtex  $a$  o  $c$  pertany a una cadena R-Y diferent dels altres dos. Intercanviant els colors d'aquesta cadena obtenim també una coloració extensible trivialment.

□

**Proposició 5.6** La configuració de Franklin (figura 5.15) és reductible.

**Prova**

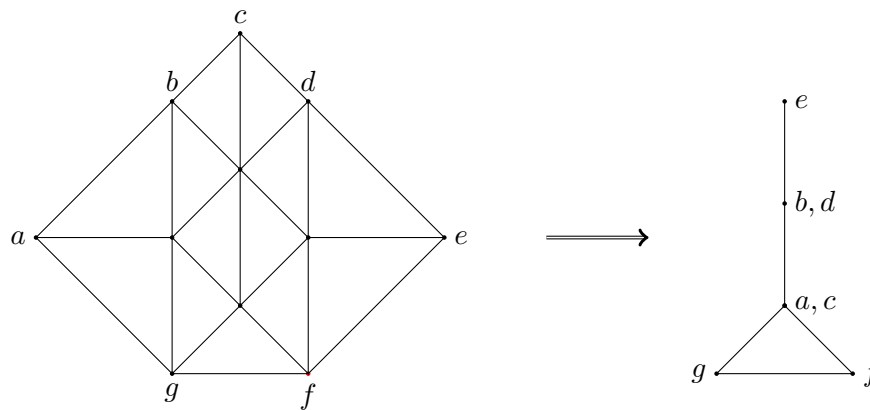


Figura 5.15: Configuració d'un vèrtex de grau 6 amb 3 veïns de grau 5 consecutius. A la dreta graf resultant de col·lapsar algun dels vèrtexs

Sigui  $T$  una triangulació que contingui la configuració de Franklin i que sigui un contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors.

El primer pas de la prova, el mateix que en el cas anterior, és considerar un nou graf, resultant de suprimir els vèrtexs de l'interior i quedant-nos només amb la frontera o anell. A continuació col·lapsem el graf indentificant els vèrtexs  $b$  i  $d$ , i  $a$  i  $e$  (veure dreta de la figura 5.15). Veiem perquè podem estendre una coloració d'aquest nou graf de manera que la coloració sigui pròpia. Els vèrtexs  $b$  i  $d$  no poden ser veïns en el graf  $T$ , ja que si ho fossin tindriem un triangle separador i això es contradiu amb el resultat ja provat de la proposició 5.3. Per altra banda els vèrtexs  $a$  i  $e$  no poden ser originalment adjacents ja que això implicaria l'existència d'un cycle de longitud 5 separador de dues regions amb més de 2 vèrtexs a cadascuna de les components connexes, contradicció amb el fet de ser contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors per la proposició 5.4.

L'objectiu ara és doncs estendre la coloració del graf  $T'$  (concretament dels vèrtexs adjacents a la configuració suprimida) a tot  $T$ . Existeixen essencialment 5 coloracions possibles (llevat de permutacions dels colors). D'aquestes 5 coloracions, 3 es poden ampliar a l'interior de la configuració de forma trivial i en les altres dues són necessaris arguments de cadenes de Kempe. Veiem quins són aquests dos últims casos:

El primer cas és el següent:

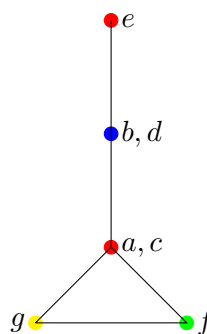


Figura 5.16

L'argument és l'habitual. No poden existir alhora cadenes de Kempe B-G de  $b$  a  $f$  i una cadena R-Y de  $e$  a  $g$ . Per tant o bé podem canviar  $f$  a blau o  $e$  a color groc, obtenint així coloracions ampliades a l'interior de l'anell.

Per l'últim cas (figura 5.17) el raonament és anàleg i ens permet afirmar que podem modificar el color de  $f$  a groc o  $e$  a vermell, obtenint així una coloració trivialment estenible a la configuració de l'interior.

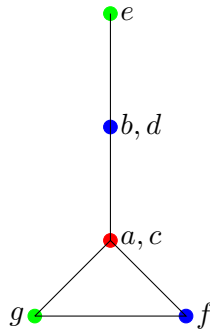


Figura 5.17

□

### 5.3.1 Reductibilitat de configuracions. Comentari general sobre la seva prova

Fins ara hem comprovat la reductibilitat de dues configuracions; la configuració d'un vèrtex de grau 5 amb 3 vèrtexs consecutius de grau 5 (la completació lliure de la qual s'anomena diamant de Birkhoff) i la configuració d'un vèrtex de grau 6 amb 3 veïns consecutius de grau 5 (configuració de Franklin).

El procediment que hem dut a terme en aquests dos exemples és el mateix i ens indica quins són els passos del procediment general: Es pren una triangulació  $T$  on la configuració hi aparegui, i es suposa  $T$  contraexemple minimal del Teorema dels 4 colors. Per ser contraexemple minimal, es defineix  $T'$  una triangulació a partir de  $T$  amb  $|V(T')| < |V(T)|$  (s'eliminen els vèrtexs de la configuració). Per hipòtesi d'inducció  $T'$  és 4-acolorible i ara cal considerar totes les possibles coloracions de l'anell de la configuració. L'objectiu és estendre la coloració de l'anell a la configuració. Per tant, per a cada coloració es comprova si és possible; bé de forma directe o bé usant arguments de cadenes de Kempe.

Aquest és en definitiva el procediment general per a provar la reductibilitat de qualsevol configuració.

Si la reductibilitat és provada estenent la coloració de forma directe o usant arguments de cadenes únicament, es diu que es tracta de D-reductibilitat. Són els arguments que ja presentà Kempe, i que hem usat per exemple en la prova que un vèrtex de grau menor o igual a 4 és reductible (proposició 5.1).

També és possible partir d'un graf  $T'$  definit com el graf  $T$  reemplaçant la configuració per una altra més petita, és a dir amb menys vèrtexs. La hipòtesi d'inducció continuarà sent

certa i en alguns casos ens serà útil per a definir la coloració de la configuració. Aquest tipus de reductibilitat es coneix amb el nom de C-reductibilitat.

De fet, la reductibilitat de les configuracions estudiades en aquest capítol ha estat possible gràcies a un cas especial de C-reductibilitat. És el cas en que  $T'$  s'obté a partir de la contracció d'algunes arestes de la frontera de la completació lliure.

Les C- i D- reductibilitat poden ser automatitzades i dutes a terme per ordinador. Bàsicament cal prendre totes les coloracions de l'anell de la configuració i comprovar si es poden estendre a coloracions de la configuració. En el cas de les cadenes de Kempe, a més, cal considerar les possibles particions dels 4 colors en parelles, que en són 3. Per a cada partició el nombre de parelles incompatibles de colors és finit, per tant el nombre de canvis en les coloracions que hem de provar és finit. En definitiva podem escriure un codi que verifiqui la D-reductibilitat de qualsevol configuració.

En el cas de la C-reductibilitat el procediment és més complex ja que a priori no coneixem quina substitució de la configuració ens permetrà verificar-ne més fàcilment la seva reductibilitat. A mesura que avançaven en la prova i anaven coneixent la reductibilitat de les configuracions, Appel i Haken provaren amb els reemplaçaments més 'atractius' i si no en podien comprovar la reductibilitat els canviaven.

Cal destacar que la prova de la reductibilitat ha de ser realitzada per un ordinador per la quantitat de configuracions que cal provar; algunes d'elles amb anells que poden arribar a tenir 14 vèrtexs que suposen 200.000 coloracions a ser comprovades. A dia d'avui, no s'espera que aquesta part de la prova pugui ser verificada a mà.



## 5.4 Descàrrega

El mètode de descàrrega sorgeix a partir de la necessitat de trobar conjunts no evitables per a després intentar-ne provar la seva reductibilitat. Tots els mètodes de descàrrega depenen fortament de la fórmula d'Euler. Concretament tots els mètodes de descàrrega es sostenen de l'equació  $\sum_v (6 - d(v)) = 12$ , igualtat que es basa en la fórmula d'Euler per a grafs planars que ja hem usat en el capítol 4. Així doncs, fem primer la prova d'aquesta igualtat:

**Lema 5.7** En una triangulació es verifica que  $\sum_v (6 - d(v)) = 12$

**Prova:** Siguin  $V, E$  i  $F$  els vèrtexs, arestes i cares respectivament de la triangulació. Per ser triangulació, es té que cada cara té exactament 3 arestes. Per tant es verifica la igualtat  $3|F| = 2|E|$  o equivalentment  $6|F| - 4|E| = 0$ , que és la forma en que la usarem.

Per altra banda, tot graf verifica  $\sum_v d(v) = 2|E|$ .

Usant totes aquestes propietats tenim:

$$\sum_v (6 - d(v)) = \sum_v 6 - \sum_v d(v) = 6|V| - 2|E| = 6|V| - 2|E| + (6|F| - 4|E|) = 6(|V| - |E| + |F|) = 12$$

□

La idea de descàrrega va ser introduïda per primer cop per Heesch, i el plantejament és el següent: A cada vèrtex del graf se li assigna una 'càrrega' de  $6 - d(v)$ , de manera que la càrrega total del graf és 12 pel lema anterior. Així, els vèrtexs de grau 5 tenen càrrega 1, els de grau 6 tenen càrrega nul·la i els de grau superior tenen càrrega negativa. L'objectiu del mètode és repartir la càrrega positiva dels vèrtexs entre els veïns, de manera que tots passin a tenir càrrega nul·la o negativa. Pel lema anterior 5.7 i pel fet que la càrrega es conserva, és a dir la càrrega total del graf sempre ha de ser 12, no podem descàrregar completament el graf. Existiran certs 'obstacles' que ho impediràn, obstacles que seran configuracions. I aquest conjunt de configuracions formaran un conjunt no evitable ja que la presència d'alguna d'elles estarà assegurada per a evitar la possible descàrrega del graf.

Els diferents mètodes per a repartir la càrrega s'anomenen regles de descàrrega i cada regla de descàrrega dóna com a resultat varis conjunts no evitables. La modificació de les regles de descàrrega és doncs la base de la prova dels 4 colors per a obtenir diferents conjunts no evitables.

Fem un comentari ara sobre com notarem els conjunts no evitables. Com vem provar al lema 4.1 tot graf planar contindrà un vèrtex de grau  $\leq 5$ . L'única configuració la reductibilitat de la qual no està provada és el vèrtex de grau 5. Així doncs, els vèrtexs de grau 2, 3 i 4 sempre apareixeran als conjunts no evitables i caldrà afegir altres configuracions, que puguin ser candidates a ser reductibles. És per això que quan definim els conjunts no evitables no anomenarem cada vegada aquestes 3 configuracions tot i que estaran contingudes. O el que és el mateix, per a trobar els conjunts no evitables partirem de grafs internament 6 connexos.

A més, utilitzarem la notació que utilitzaren Appel i Haken a la seva prova. Un vèrtex de grau 5 serà representat per ●, i un vèrtex de grau 6 per ○. Els vèrtexs de grau superior

seran representats per un cercle amb el grau escrit a l'interior: ⑦, ⑧, ⑨, ...

Presentem primer 3 exemples de conjunts no evitables i l'algorisme de descàrrega que els fa conjunts no evitables. És a dir, definirem 3 regles de descàrrega i per a cada una d'elles presentarem un conjunt no evitable associat, sense el qual les triangulacions es descarregarien completament. El primer conjunt no evitable que mostrem ja el coneixem; és el donat pel lema 4.1 que acabem de citar. A diferència d'abans però no el trobem a partir de la fórmula d'Euler sinó a partir d'una regla de descàrrega.

**Algorisme 1** No modifiquem les càrregues originals.

Aquesta regla de descàrrega demostra que el conjunt  $U_1 = \{ \bullet \}$ , un vèrtex de grau 5, és un conjunt no evitable.

**Proposició 5.8** El conjunt  $U_1 = \{ \bullet \}$  és un conjunt no evitable.

**Prova:** Sigui  $G$  un graf que no conté cap vèrtex de grau 5. Com es tracta d'una triangulació internament 6-connexa, tots els vèrtexs tenen grau més gran o igual a 5; en particular en aquest cas més gran o igual a 6. Per tant, tots els vèrtexs tenen càrrega més petita o igual a 0, que contradueix el fet que la càrrega total del graf hagi de ser positiva.  $\square$

**Algorisme 2** Cada vèrtex de grau 5 dóna una càrrega de  $\frac{1}{5}$  a cada veí de grau  $\geq 7$ .

**Proposició 5.9** El conjunt  $U_2 = \{ \bullet \text{---} \bullet, \bullet \text{---} \circ \}$  és un conjunt no evitable.

**Prova:** Suposem  $G$  un graf que no conté cap de les dues configuracions de  $U_2$ . Aleshores aplicant la regla de descàrrega definida a l'algorisme 2 les càrregues queden repartides de la següent manera:

- Vèrtex de grau 5: No poden tenir veïns de grau 5 o 6. Per tant tots els seus veïns tenen grau  $\leq 7$ . Assignant a cada veí una càrrega de  $\frac{1}{5}$ , el vèrtex de grau 5 queda totalment descarregat (passa a tenir càrrega nul·la).
- Vèrtex de grau 6: No es veuen afectats per la regla de descàrrega per tant continuen tenint càrrega nul·la.
- Vèrtexs de grau  $k \leq 7$ : Per ser triangulació no poden tenir dos veïns consecutius de grau 5, perquè serien adjacents entre ells i tindriem la primera configuració de  $U_2$ . Així, tenen com a màxim la meitat de veïns de grau 5.  
Es verifica: càrrega  $\leq 6 - k + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot k = 6 - k + \frac{1}{10} \cdot k = 6 - \frac{9}{10} \cdot k \leq 6 - \frac{9}{10} \cdot 7 < 0$ , negativa.

Hem vist doncs que tots els vèrtexs tenen càrrega negativa o neutre, contradicció amb la fórmula 5.7. Per tant, alguna de les configuracions de  $U_2$  ha d'aparèixer en tota triangulació internament 6-connexa, o el que és el mateix  $U_2$  forma un conjunt no evitable.

Mostrem una tercera i última regla de descàrrega i un conjunt no evitable que genera abans de fer un comentari general sobre els mètodes de descàrrega i el procediment dut a terme per part d'Appel i Haken a la prova del Teorema dels 4 colors:

**Algorisme 3** Cada vèrtex de grau 5 dóna una càrrega de  $\frac{1}{3}$  a cada veí de grau  $\geq 7$ .

**Proposició 5.10** El conjunt  $U_3 = \{ \bullet \text{---} \bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \text{---} \circ \end{array} \}$  és un conjunt no evitable.

**Prova:** Suposem que  $G$  no conté cap d'aquestes dues configuracions. Estudiem quina càrrega té cada vèrtex (en funció del grau) després d'aplicar-hi aquesta regla de descàrrega:

- Vèrtex de grau 5: Un vèrtex de grau 5 no pot tenir un veí de grau 5 ja que aquesta és una de les configuracions del conjunt  $U_3$ . I tampoc pot tenir dos veïns consecutius de grau 6 ja que, per ser triangulació, obtindriem la segona configuració de  $U_3$ . Per tant el vèrtex de grau 5 no pot tenir més de 2 veïns de grau 6; i en conseqüència com a mínim 3 de grau  $\geq 7$ . Calculem la càrrega després d'haver aplicat l'algorisme 3: càrrega  $\leq 6 - 5 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 0$
- Vèrtex de grau 6: La càrrega d'aquests vèrtexs no es veu modificada. Al finalitzar l'algorisme mantenen la seva càrrega nul·la.
- Vèrtex de grau 7: Els únics veïns que cal considerar són els vèrtexs de grau 5 ja que són els únics que interactuen en l'algorisme de descàrrega. Un vèrtex de grau 7 pot tenir com a màxim 3 veïns de grau 5, pel fet que dos vèrtexs de grau 5 no poden ser adjacents. Així doncs: càrrega  $\leq 6 - 7 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 0$
- Vèrtex de grau  $k \geq 8$ : Pel mateix argument que en els altres casos tenen com a màxim la meitat de veïns de grau 5. Al finalitzar el mètode de descàrrega es té: càrrega  $\leq 6 - k + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot k = 6 - \frac{5}{6} \cdot k \leq 6 + \frac{5}{6} \cdot 8 < 0$

Tornem a tenir tots els vèrtexs amb càrregues negatives per tant no es verifica la proposició 5.7. Aquesta contradicció es deu al fet que no pot ser que cap de les configuracions del conjunt  $U_3$  no aparegui en una triangulació.  $U_3$  és un conjunt no evitable.

### 5.4.1 Mètode de descàrrega en la prova del Teorema dels 4 colors

Fins ara hem introduït el concepte de regla de descàrrega i varis exemples de com un algorisme determinat o regla de descàrrega permet demostrar que un conjunt de configuracions sigui un conjunt no evitable.

A la prova presentada per Appel i Haken, un conjunt de regles de descàrrega donaven com a resultat un conjunt de configuracions no evitables. Si els conjunts obtinguts eren massa extensos o no se'n podia provar la reductibilitat de totes les configuracions contingudes, el mètode de descàrrega havia de ser modificat. És a dir, les regles de descàrrega havien de ser canviades per a trobar un conjunt no evitable format per configuracions, la reductibilitat de la qual pogués ser provada.

Heesch, al 1971, presentà dos característiques que tota configuració havia d'evitar per tal que la seva reductibilitat fos possible de ser provada; configuracions que anomenà "geogràficament bones". Concretament una configuració s'anomena "geomètricament bona" si no conté cap d'aquests dos obstacles:

- un vèrtex a la configuració amb 4 o més veïns consecutius a l'anell de la configuració
- un vèrtex amb 3 veïns a l'anell de la configuració no necessàriament consecutius

La presència d'aquests obstacles evita que la configuració sigui provada reducible. I de fet, un tercer obstacle per a la prova de la reduïbilitat i que per tant cal evitar és:

- una parella de vèrtexs adjacents, ambdós de grau 5, cadascun d'ells adjacents únicament a un vèrtex de la configuració (el mateix pels dos)

Tota configuració que eviti aquests 3 obstacles és candidata doncs a ser provada la seva reduïbilitat. Per tant, a la prova dels 4 colors, l'algorisme de descàrrega era modificat per tal d'excloure les configuracions que no complissin aquests requisits.

## 5.5 Resum demostració Teorema dels 4 colors

Podem mostrar ara un quadre explicatiu del procediment de la demostració del Teorema dels 4 colors extret del llibre *The four-color problem* de Saaty i Kainen ([16]):

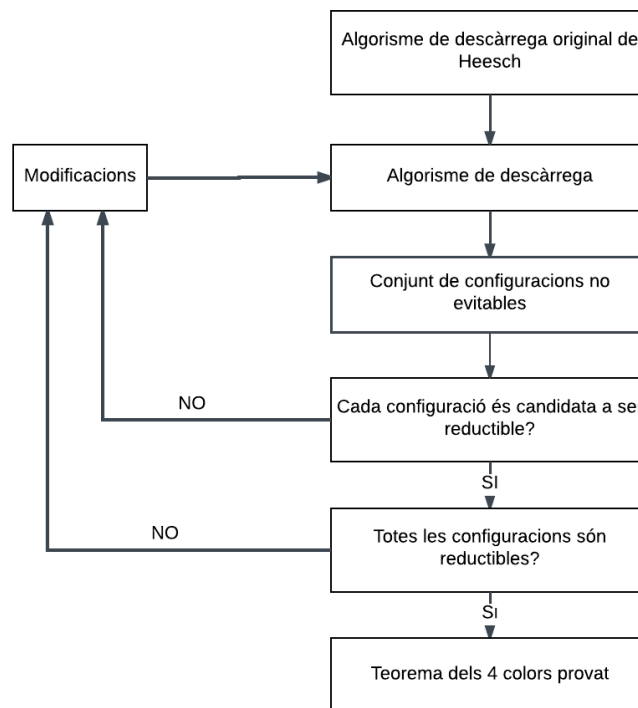


Figura 5.18: Procés de la demostració feta per Appel i Haken del Teorema dels 4 colors

Appel i Haken partiren de l'algorisme de descàrrega dissenyat per Heesch per a fer-hi les successives modificacions. Partint d'un algorisme de descàrrega, el següent pas era aplicar-lo per a obtenir un conjunt de configuracions no evitables, part que era assistida amb ordinadors. Tot algorisme de descàrrega dóna com a resultat un conjunt no evitable, i cal que aquest conjunt estigui format per configuracions geogràficament bones, és a dir configuracions pausibles de ser reducibles. Com hem comentat abans, es comprovava per tant que les configuracions omittissin 3 particulars estructures en el seu interior. En el cas

que les configuracions no fóssin geogràficament bones, calia doncs retornar al pas anterior i modificar les regles de descàrrega per a obtenir un nou conjunt no evitable.

Si el conjunt no evitable era efectivament un conjunt verificant aquestes bones propietats, s'estudiava la reductibilitat de cadascuna de les configuracions. Si la reductibilitat era certa en totes les configuracions, s'havia assolit l'objectiu; s'havia trobat un conjunt no evitable format per configuracions reductibles i el Teorema dels 4 colors estava provat. Per altra banda, si el conjunt contenia alguna configuració de la qual no se n'havia pogut verificar la reductibilitat, calia modificar l'algorisme de descàrrega (modificant-ne les regles de descàrrega) per a poder trobar un conjunt de configuracions no evitables diferent i tornar a intentar provar la seva reductibilitat.

Appel i Haken trobaren finalment al 1976 un conjunt no evitable de configuracions reductibles, és a dir, la prova del teorema dels 4 colors. Per a fer-ho van ser necessaris centenars de modificacions en les regles de descàrrega, fins a obtenir l'algorisme final incloent 487 regles i un conjunt no evitable format per 1476 configuracions.

Posteriorment, però, s'han presentat proves alternatives que redueixen aquests nombres i per tant també el temps computacional. És remarcable destacar la feina de Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour i Robert Thomas, que al 1997, presentaren una prova alternativa del teorema dels 4 colors amb les mateixes idees però amb un algorisme de descàrrega molt més curt, amb un conjunt no evitable de 633 configuracions i 32 regles de descàrrega; prova que ha permès una més fàcil verificació del codi de l'algorisme i per tant de la validesa de la prova. Els documents d'aquesta nova prova (codis i conjunt de configuracions emprats) es poden trobar a la web de Thomas [19]. A més, el 2005, Gonthier [9] va presentar una prova utilitzant programari de demostració de teoremes de propòsit general. Aquests algorismes, donat un codi, demostren la seva correctesa lògica. Així doncs, Gonthier va aplicar aquest tipus d'algorismes als codis usats en la prova del Teorema dels 4 colors, verificant-ne així la seva correctesa i per tant fiabilitat.

## 5.6 Comentari final prova Appel i Haken

La demostració d'Appel i Haken no només suposava la prova d'una conjectura oberta durant més de 100 anys, sinó que a més introduïa múltiples innovacions.

La primera d'elles era l'ús d'ordinadors per a provar un teorema matemàtic. L'ús és present a varies etapes de la demostració:

- El mètode de descàrrega per a obtenir un conjunt no evitable, la reductibilitat del qual fos probable. Es partia d'un algorisme inicial i s'anaven fent successives modificacions. Aquestes modificacions tenien l'objectiu d'evitar possibles errors, com la sobrecàrrega dels vèrtexs (evitar que la regla de descàrrega permeti que vèrtexs amb càrregues negatives passin a tenir càrregues positives) i també la finalitat de definir successius conjunts no evitables per a poder-ne provar la reductibilitat d'algun d'ells.
- La reductibilitat de les configuracions; comprovant si certes coloracions de l'anell extenen de forma directa a l'interior de la configuració o si extenen fent previament canvis en les cadenes de Kempe.

De fet, l'ús dels ordinadors en la prova d'Appel i Haken és vital per la quantitat de càlculs requerits. Un exemple d'aquest fet el trobem al llibre *The four-color problem* de Saaty ([16])

on es mostra un graf planar que no conté cap configuració reductible amb llargada de la frontera de l'anell menor a 11. Una frontera de l'anell d'11 vèrtexs suposa 7381 coloracions diferents de l'anell, un nombre de coloracions i modificacions associades no assumible per a un humà.

Ara bé, la demostració presentada també suposà un debat sobre què és una prova. Tot i que tradicionalment totes les proves estaven escrites sobre paper, la visió moderna és favorable a la idea que tots els mitjans són acceptables sempre i quan s'hagi donat suficient atenció a la verificabilitat i s'hagi reproduït suficients cops. I l'alta potència dels ordinadors en l'actualitat i la qualitat del software matemàtic permet que moltes proves siguin fàcils de verificar i reproduir.

Així doncs, arrossegar algun error en aquesta prova és altament improbable: Per una banda Appel i Haken utilitzaren arguments probabilístics que indicàven quines eren les configuracions més probables de ser reductibles. I per altra banda i com ja hem comentat, per les exhaustives comprovacions i verificacions que s'han realitzat.



## Capítol 6

# Grafs no planars, com es veu modificat el teorema?

Fins ara hem considerat el problema d'acolorir grafs planars, és a dir grafs que tenen una immersió en el pla. Però, que succeix en el cas de grafs no planars? Quin és el nombre cromàtic de grafs sabent que poden ser dibuixats en altres superfícies?

Concretament ens fem aquesta pregunta centrant-nos en el cas de superfícies compactes i connexes, prenent grafs immergibles en aquestes superfícies.

El resultat que es coneix és sorprenent: es té una fórmula que dóna el nombre cromàtic per a qualsevol superfície exceptuant l'esfera, i aquesta va ser abans demostrada i va resultar molt menys difícil de determinar que el nombre cromàtic del pla. La fórmula dóna el nombre necessari de colors per a acolorir qualsevol graf a partir del gènere de la superfície on és immergible.

Per a poder veure quina és aquesta fórmula repassem primer la classificació de les superfícies, i els seus invariants topològics que ens seran necessaris per a determinar el nombre cromàtic dels grafs.

**Teorema 6.1** Sigui  $M$  una superfície compacta i connexa. Aleshores  $M$  és homeomorfa a exactament una de les següents superfícies:

- Esfera;  $\mathbb{S}^2$
- Suma connexa de  $g$  tors;  $g\Pi^2$
- Suma connexa de  $g$  plans projectius;  $g\mathbb{P}^2$

A més, tota superfície  $M$  té associats 2 invariants: la característica d'Euler i la orientabilitat. A partir d'aquests invariants podem trobar a quina de les 3 superfícies del teorema 6.1 és homeomorfa una superfície donada  $M$ . La característica d'Euler es calcula a partir d'un altre invariant, el gènere d'una superfície, que en termes generals, fa referència al nombre de forats en una superfície. Per altra banda una superfície  $M$  és orientable si no conté una banda de Möbius. Així doncs, es té la següent taula que mostra la característica d'Euler denotada per  $\mathcal{E}$  (normalment es denota per  $\chi$  però d'aquesta manera la distingim del nombre cromàtic) i la orientabilitat de les tres superfícies que hem citat:



Superfície	$\mathcal{E}$	Orientabilitat
$\mathbb{S}^2$	2	Orientable
$g\Pi^2$	$2-2g$	Orientable
$g\mathbb{P}^2$	$2-g$	No Orientable

Figura 6.1: Invariants dels 3 tipus de superfícies compactes i connexes

En aquesta taula, el valor de  $g$  correpon al gènere de la superfície, que en el cas de l'esfera és 0. A més, per a diferenciar les superfícies orientables de les no orientables, usarem la notació  $S_k$  per a les superfícies orientables i  $N_k$  per a les superfícies no orientables amb  $k$  el gènere de la superfície.

Feta aquesta breu introducció sobre les superfícies que considerem, passem a estudiar el nombre cromàtic dels grafs immergibles en aquestes superfícies, compactes i connexes.

Com hem comentat, existeix una fórmula que dóna aquest nombre cromàtic i és vàlida per a tots els casos excepte per al cas de la superfície no orientable de gènere 2, l'ampolla de Klein (el nombre cromàtic de la qual es coneix i és 6) i l'esfera o equivalentment el pla, donant lloc al problema dels 4 colors en grafs planars. Fem èmfasi en mostrar perquè és equivalent conèixer el nombre cromàtic de l'esfera que el del pla. Això es deu al fet que un graf té una immersió a l'esfera si i només si en té una al pla. Donada una immersió a l'esfera prenem un punt  $P$  a l'interior d'una cara. Per la projecció estereogràfica de  $\mathbb{S}^2 \setminus P$  podem obtenir una immersió del graf  $G$  en el pla. Recíprocament, cada punt d'una immersió en el pla li correspon l'únic punt  $A$  de  $\mathbb{S}^2 \setminus P$ , que és la intersecció de l'esfera amb la recta  $PA$ , obtenint així una immersió del graf a l'esfera.

Primerament, al 1890, Heawood va demostrar una cota inferior per al nombre de colors que són necessaris per acolorir un graf que admet una immersió en una superfície d'un gènere determinat (exceptuant com hem dit el cas de l'esfera). La igualtat però només va poder ser demostrada pel cas del tor, i es conjecturà si aquesta igualtat era certa. No va ser fins al 1968 que es va completar la prova de la cota superior per part de Ringel i Youngs [13] i que per tant es provà la fórmula. L'expressió definida per Heawood i que a continuació emprarem es coneix com a nombre de Heawood.

Definim ara el concepte de nombre cromàtic d'una superfície:

**Definició 6.1** El nombre cromàtic d'una superfície  $M$ ,  $\chi(M)$  és el nombre mínim de colors necessaris per a acolorir tots els grafs que siguin immergibles a  $M$ .

Així doncs el nombre de Heawood ens dóna el nombre cromàtic de les superfícies que hem comentat.

Definim ara alguns conceptes més fent referència a la immersió de grafs a superfícies. Concretament les propietats de gènere i característica d'Euler en el cas de grafs:

**Definició 6.2** El gènere d'un graf  $G$  és el gènere mínim sobre les superfícies en que  $G$  pot ser immergida. Ho denotarem per  $\gamma(G)$ .

Així doncs, per exemple, el gènere d'un graf planar és 0 ja que per la definició de planar és immergible en el pla i el pla té gènere 0 i per tant  $G$  no pot tenir gènere menor.

Veure però quin és el gènere d'un graf en general pot ser difícil ja que implica determinar si

un graf és immergible en una superfície.

De fet, aquest gènere ens permet calcular la característica d'Euler d'un graf:

**Definició 6.3** La característica d'Euler d'un graf és la màxima característica d'Euler de les superfícies on és immergible.

Per tant es pot calcular a partir del gènere del graf amb la fórmula descrita a la figura 6.1. Pel fet que el gènere d'un graf està definit com el gènere mínim sobre les superfícies en que  $G$  pot ser immergida, la característica d'Euler prenent aquest gènere serà màxim. Definit ja tots aquests conceptes iniciem la prova de la fórmula de Heawood. El nostre objectiu serà doncs el següent:

**Teorema 6.2 Teorema de Ringel-Youngs**

El nombre cromàtic d'una superfície  $M$  diferent de l'esfera és

$$\chi(M) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}}}{2} \right\rfloor & \text{si } M \neq N_2 \\ 6 & \text{si } M = N_2 \end{cases}$$

Fixem-nos que prenent  $\mathcal{E}=2$ , la característica d'Euler de l'esfera, el resultat que s'obté és 4. Això va fer pensar que la conjectura de la 4-colorabilitat dels grafs planars podria ser certa. No obstant, no s'ha pogut provar aquesta fórmula en el cas dels grafs planars com ja hem comentat ja que els arguments de la prova no són vàlids en aquest cas. Per a fer la demostració del Teorema 6.2 primer provarem la cota superior, que ja va ser provada per Heawood i després veurem la cota inferior usant un resultat de Ringel i Youngs.

Veiem primer doncs el resultat de Heawood.

**Teorema 6.3** El nombre cromàtic d'una superfície  $M$  verifica:

$$\chi(M) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2} \right\rfloor$$

per a tot  $M$ ,  $M \not\cong \mathbb{S}^2$ .

Aquest resultat és vàlid per a tota superfície de característica d'Euler diferent a 2. Passem ara a fer-ne la demostració. Per a fer-ho enunciem i fem la prova de 2 lemes:

**Lema 6.4** Sigui  $G$  un graf  $k$ -crític, és a dir tal que  $\chi(G) = k$  i  $\chi(G \setminus v) = k - 1 \forall v \in G$ . Aleshores  $\delta(G) \geq k - 1$ .

**Prova:** Recordem que  $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \delta(v)$ .

Per reducció a l'absurd suposem que no és cert i que per tant existeix un vèrtex  $v$  amb  $\delta(v) \leq k - 2$ . Aleshores per ser  $G$   $k$ -crític,  $G \setminus v$  és  $(k - 1)$ -acolorible. Prenent aquesta coloració i pel fet que el grau de  $v$  és menor o igual a  $k - 2$ , el vèrtex  $v$  és pot acolorir, obtenint així una  $(k - 1)$ -coloració de  $G$ . Per tant hem obtingut una contradicció amb el fet que  $\chi(G) = k$ .

□

**Lema 6.5** Sigui  $G$  un graf amb  $|V(G)| = p$ ,  $|E(G)| = q$ ,  $|F(G)| = r$  i tal que  $G$  és immergible a una superfície  $M$ . Aleshores  $q \leq 3 \cdot [p - \mathcal{E}(M)]$ .

**Prova:** Cada cara està limitada per com a mínim 3 arestes i cada aresta separa 2 cares. Pel doble comptatge es té:  $2q \geq 3r$ .

Per altra banda, per la fórmula de la característica d'Euler tenim que  $p - q + r = \mathcal{E}(M)$ . Per tant:

$$q = 3q - 2q \leq 3q - 3r = 3(q - r) = 3 \cdot [p - \mathcal{E}(M)]$$

□

**Prova Teorema:** Prenem  $G$  un graf  $k$ -crític. Aleshores:

$$2q = 2|E| = \sum_{v \in V} d(x) \geq p \cdot \delta(G) \geq p \cdot (\chi - 1)$$

on a la última desigualtat hem usat el lema 6.4. Ens queda doncs:

$$2q \geq (\chi - 1) \cdot p$$

I per tant:

$$\left. \begin{array}{l} 2q \geq (\chi - 1)p \\ q \leq 3 \cdot [p - \mathcal{E}(M)] \end{array} \right\} \implies (\chi - 1)p \leq 6 \cdot [p - \mathcal{E}(M)]; \quad \chi - 1 \leq 6 \cdot \left[1 - \frac{\mathcal{E}(M)}{p}\right] \quad (6.1)$$

Fins aquí hem trobat una fórmula per a  $\chi$  en funció de  $\mathcal{E}(M)$  i del nombre de vèrtexs  $p$ . Però ens interessa que la fórmula només depengui de  $\mathcal{E}(M)$ . Per a això diferenciem dos casos  $\mathcal{E}(M) \leq 0$  i  $\mathcal{E}(M) = 1$ :

- $\mathcal{E}(M) \leq 0$  Usem ara el fet que el nombre cromàtic d'un graf sempre és menor que el seu nombre de vèrtexs:  $p \geq \chi$ . Obtenim doncs:

$$\chi - 1 \leq 6 \cdot \left[1 - \frac{\mathcal{E}(M)}{p}\right] \leq 6 \cdot \left[1 - \frac{\mathcal{E}(M)}{\chi}\right]$$

on hem fet ús del fet que  $\mathcal{E}(M)$  és menor o igual a 0 per a obtenir l'última desigualtat. D'aquesta expressió s'obté la següent inequació de segon grau:

$$\chi^2 - \chi \leq 6\chi - \mathcal{E}(M) \implies \chi^2 - 7\chi + \mathcal{E}(M) \leq 0$$

que té per a arrels  $\frac{7 \pm \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2}$ .

L'inequació ens queda doncs:

$$\left(\chi - \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2}\right) \cdot \left(\chi - \frac{7 - \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2}\right) \leq 0$$

Considerant que  $\mathcal{E}(M) \leq 0$ , l'arrel amb el signe negatiu és negativa i per tant el segon terme és positiu. Això implica que per a verificar-se la inequació cal que el primer terme sigui negatiu:

$$\chi - \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2} \leq 0 \implies \chi \leq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2}$$

Obtenint doncs la desigualtat que estàvem buscant.

- $\mathcal{E}(M) = 1$  Partim de nou de l'equació 6.1 i substituïm  $\mathcal{E}(M) = 1$ :

$$\chi - 1 \leq 6 \cdot \left[1 - \frac{1}{p}\right] < 6 \implies \chi < 7$$

on s'ha emprat el fet que el nombre de vèrtexs dels grafs considerats és finit. Per tant, en particular  $\chi \leq 6$  i aquest és exactament el valor que s'obté de la fórmula donada pel teorema 6.3 prenent  $\mathcal{E}(M) = 1$ :

$$\chi \leq 6 = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24}}{2} \right\rfloor$$

□

Notem que hem donat una prova general pel cas  $\mathcal{E}(M) \leq 0$  i que per altra banda hem obtingut una prova pel cas  $\mathcal{E}(M) = 1$ . Aquesta prova però no inclou el cas mancant  $\mathcal{E}(M) = 2$  i per això no es pot generalitzar el resultat a l'esfera.

Cal ara demostrar l'altra desigualtat per a obtenir doncs la prova del Teorema 6.2.

**Teorema 6.6** El nombre cromàtic d'una superfície  $M$  verifica:

$$\chi(M) \geq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2} \right\rfloor \quad M \neq \mathcal{K}$$

$$\chi(\mathcal{K}) = 6$$

sent  $\mathcal{K}$  l'ampolla de Klein.

Per a fer-ne la prova caldrà diferenciar el cas de les superfícies orientables de les superfícies no orientables. La idea serà saber quin és el màxim  $K_n$  immergible en una superfície  $M$ . Obtenint que el graf complet de  $\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2} \right\rfloor$  vèrtexs és immergible en una superfície de gènere  $\mathcal{E}(M)$  ja haurem demostrat que el nombre cromàtic de  $M$  ha de ser major al nombre de Heawood.

En ambdós casos farem ús de dos lemes que ens donen la fórmula per a calcular el gènere d'un graf  $K_n$ .

## 6.1 Superfícies orientables

**Lema 6.7** El gènere (orientable) de  $K_n$  és

$$\gamma(K_n) = \frac{(n-3) \cdot (n-4)}{12} \quad \forall n \geq 3$$

No donarem la demostració d'aquest lema degut a la seva extensió. La prova es divideix en 12 casos depenent del residu de  $n$  mòdul 12 i es pot trobar en el llibre de Ringel [13]. Passem ara doncs a provar el teorema 6.6 en aquest primer cas de superfícies orientables:

### Prova del Teorema 6.6 per a superfícies orientables

És suficient veure que el graf complet de  $\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2} \right\rfloor$  vèrtexs es pot immernir a  $S_k$ , superfície orientable de gènere  $k$ , ja que aquest graf necessita tants colors com vèrtexs en una coloració pròpia.

Definim  $m := \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2} \right\rfloor$  i considerem el graf complet  $K_m$ . Notem que en una superfície

orientable  $\mathcal{E}(M) = 2 - 2k$ , per tant en aquest cas podem escriure  $m$  com a  $m = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24(2 - 2k)}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48k}}{2} \right\rfloor$ . Calculem el gènere de  $K_m$  a partir del lema anterior i obtenim:

$$\gamma(K_m) = \frac{(m-3) \cdot (m-4)}{12} = \frac{(1 + \sqrt{1 + 48k}) \cdot (\sqrt{1 + 48k} - 1)}{48} = \frac{1 + 48k - 1}{48} = k$$

El gènere de  $K_m$  és  $k$ , i per tant el graf complet de  $m$  vèrtexs és immernible a una superfície de gènere  $k$ . En definitiva doncs hem trobat un graf immernible a  $S_k$  que requereix  $m$  colors per a ser acolorit o el que és el mateix

$$m = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2} \right\rfloor \leq \chi(S_k)$$

□

## 6.2 Superfícies no orientables

La prova en aquest cas serà molt semblant al cas de les superfícies orientables. Veiem primer el lema que relaciona un graf complet amb el seu gènere en superfícies no orientables.

**Lema 6.8** El gènere (no orientable) de  $K_n$  és

$$\bar{\gamma}(K_n) = \frac{(n-3) \cdot (n-4)}{6} \quad n \neq 7, n \geq 3$$

La prova novament es pot trobar en el llibre de Ringel [13]. Es prova fàcilment a partir d'aquest lema la segona desigualtat i per tant el resultat que buscàvem.

**Prova del Teorema 6.6 per a superfícies no orientables**

Novament el nostre objectiu és veure que el graf complet de  $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\mathcal{E}(M)}}{2} \right\rfloor$  vèrtexs és immergible a  $N_q$ .

Definim  $m = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\mathcal{E}(M)}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+24q}}{2} \right\rfloor$  i per tant si  $m \neq 7$

$$\bar{\gamma}(K_m) = \frac{(m-3) \cdot (m-4)}{6} = \frac{(1 + \sqrt{1+24q}) \cdot (\sqrt{1+24q} - 1)}{24} = \frac{1 + 24q - 1}{24} = q$$

El gènere de  $K_m$ , per a  $m \neq 7$  és  $q$ , i per tant el graf complet de  $m$  vèrtexs és immergible a una superfície no orientable de gènere  $q$ . El nombre cromàtic de  $N_q$  ha de ser doncs inferior a  $m$ :

$$m = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{E}(M)}}{2} \right\rfloor \leq \chi(N_q)$$

Només ens falta veure què succeix en el cas  $m = 7$ . El lema anterior és vàlid per a qualsevol valor de  $m$  diferent a 7, i el cas  $m = 7$  correspon per la fórmula a la superfície de gènere 2. Per tant, cal estudiar el nombre cromàtic d'aquesta superfície, que correspon a l'ampolla de Klein, per separat. Afortunadament es coneix el nombre cromàtic exacte de l'ampolla de Klein, es tracta de 6. Es pot trobar la demostració d'aquest fet al llibre de Ringel [13].

□

**6.3 Conclusió**

En aquest apartat hem provat un resultat vàlid per a conèixer el nombre cromàtic de qualsevol superfície exceptuant l'esfera (o de forma equivalent el nombre cromàtic del pla). El resultat, que s'anomena Teorema de Ringel-Youngs, dóna una expressió tancada, el nombre de Heawood, pel nombre cromàtic de totes les superfícies exceptuant el pla i l'ampolla de Klein i en aquest últim cas el seu nombre és conegut i és 6.

A causa de la rellevància del Teorema de Ringel-Youngs finalitzem el capítol recuperant-lo i enunciant-lo de nou:

**Teorema de Ringel-Youngs**

El nombre cromàtic d'una superfície  $M$  diferent de l'esfera és

$$\chi(M) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\mathcal{E}}}{2} \right\rfloor & \text{si } M \neq N_2 \\ 6 & \text{si } M = N_2 \end{cases}$$

Grafs no planars, com es veu modificat el teorema?

---

## Capítol 7

# Algorismes de coloració

Determinar el nombre cromàtic d'un graf és en general un problema NP-complet. Tot i això hi ha algorismes polinomials per acolorir grafs planars. Un teorema de Grötzsch estableix que un graf pla sense triangles té nombre cromàtic 3, i hi ha un algorisme polinomial per a obtenir la corresponent 3-coloració. La prova de Robertson, Sanders, Seymour i Thomas proporciona un algorisme en temps quadràtic per a acolorir un graf planar amb 4 colors, però l'algorisme està formulat en el context de la teoria de menors i no hi ha una implementació pràctica que es pugui descriure fàcilment.

Nosaltres en aquest capítol ens centrarem en algorismes de 5-coloració. Concretament veurem un algorisme d'ordre  $O(n^2)$  i un d'ordre  $O(n)$  en temps. La seva implementació en *C++* es poden trobar en un apèndix del treball, amb els noms *5CT\_quadratic* i *5CT\_linear* respectivament.

El fet d'estudiar algorismes de 5-coloració no és casual: la primera motivació és la prova del Teorema dels 5 colors de Heawood. Es tracta d'una demostració constructiva que explica els passos per a definir la 5-coloració del graf. Així, vaig decidir fer-ne la implementació.

Per altra banda, la base dels 2 codis és la mateixa: donat un conjunt de configuracions no evitables i reductibles, es busca una d'aquestes configuracions al graf i a continuació el graf és modificat de manera que el nombre de vèrtexs disminueix. Concretament la modificació es fa de manera que si s'obté una coloració del nou graf, aquesta es pugui estendre al graf anterior (això ho podem fer perquè precisament tenim una configuració reductible). Així, es repeteixen aquests passos repetidament fins a obtenir un graf acolorible de forma trivial (un graf amb menys de 5 vèrtexs). Aleshores, el següent pas és desfer les modificacions que ha patit el graf a la vegada que es va estenent la coloració fins a obtenir una coloració de tot el graf. En definitiva, cal l'ús de conjunts no evitables de configuracions reductibles en aquests algorismes. Mentre que en el cas de la 5-coloració aquests conjunts són bastant simples, en el de la 4-coloració aquests conjunts tenen molts elements. Presentem ara els dos algorismes:

### 7.1 Algorisme 1: Prova de Heawood (codi *5CT\_quadratic*)

Aquest primer algorisme empra el conjunt de configuracions reductibles que presenta la prova del Teorema dels 5 colors de Heawood.

Com vem veure a l'apartat 4.2 el conjunt de configuracions no evitable que s'empra és el conjunt de vèrtexs de grau menor o igual a 5. Així, l'objectiu serà buscar un vèrtex  $v$  de



grau menor a 5, ja que partint d'una coloració del graf  $G \setminus v$  podrem estendre-la a la de  $G$ . Veiem ara un esquema de la funció *main*, que té com a input la matriu d'adjacència d'un graf  $G$  i retorna una coloració pròpia amb 5 colors d'aquest graf. Per a algunes tasques hem indicat en blau la funció del codi que la realitza:

---

**Algorithm 1:** Heawood: Main

---

```

Function Main()
  Entrada de la matriu d'adjacències del graf  $G$ ;
  while  $V(G) > 5$  do
    Trobem vèrtex  $v$  de grau menor o igual a 5 (configuració del conjunt no
    evitable);  $\rightarrow$  busca_vèrtex
    Apilem vèrtex  $v$ ;
    Modifiquem  $G$ : eliminem vèrtex  $v$  i les seves adjacències;
     $\rightarrow$  modifica_matriu
  Pinta vèrtexs de  $G$  amb colors diferents (com a màxim 5 ja que ara  $V(G) \leq 5$ );
  while  $G$  planar i pila no buida do
    | Pinta el graf;  $\rightarrow$  pinta
  if planar then
    | Escriu coloració;  $\rightarrow$  escriu_vector
    | Comprova que la coloració és pròpia;  $\rightarrow$  colors_correcte

```

---

La majoria de les funcions que crida el *main* designades en cursiva i blau són funcions tècniques que no mostrarem aquí (al codi *5CT\_quadratic* apareixen totes aquestes funcions i una breu descripció d'elles). Tot i així, si que estudiarem les funcions que apareixen subratllades per la seva importància en el procediment. Veiem concretament què fa la funció *pinta*:

---

**Algorithm 2:** Heawood: Pinta

---

```

Function Pinta()
  Prenem primer vèrtex  $v$  de la pila;
  Calculem nombre de colors ( $n\_colors$ ) que usen els veïns de  $v$ ;
   $\rightarrow$  nombre_colors_veïns
  if  $n\_colors < 5$  then
    | Acolorim  $v$  amb el primer color no usat pels veïns;
  else
    | Modifiquem cadenes de Kempe;  $\rightarrow$  Kempe
    | Assignem a  $v$  el color que ens deixa lliure la modificació de les cadenes i que
    | retorna la funció Kempe;

```

---

La funció *pinta* pren un vèrtex de la pila. Si el seu grau al graf és menor a 4, la coloració es pot estendre de forma trivial. Però si el grau és 5 cal modificar cadenes de Kempe, i el programa executable ens ho indicarà amb el missatge: "Cal modificar cadenes de Kempe". Així, el programa entra a la funció *Kempe*, que no només ens modifica la coloració per tal

de deixar un color lliure disponible per a  $v$  sinó que també ens indica quin és aquest color. Veiem finalment la última funció que volem remarcar d'aquest codi que és la funció *Kempe*:

---

**Algorithm 3:** Heawood: Kempe

---

**Function** *Kempe*(*vèrtex*  $v$ )  
 Per a cada veí de  $v$ , comprova si pertany a la cadena de Kempe dels altres veïns;  
     → *comprova\_cadenes*  
**if** *No existeix cap parella de vèrtexs disjunts per les seves cadenes de Kempe* **then**  
     | El graf no és planar;  
**else**  
     | Siguin  $u, w$  els veïns que no pertanyen a una mateixa cadena de Kempe i A,B  
     | els seus colors (és a dir la cadena A–B que conté el vèrtex  $u$  no conté el  
     | vèrtex  $w$ )  $\implies$  Intercanviem els colors a la cadena A–B que conté  $w$ , deixant  
     | lliure el color B;   → *recoloració(visita\_cc)*

---

Així, aquesta última funció troba la parella de veïns no encadenats per una mateixa cadena de Kempe i intercanvia els colors d'una de les dues cadenes. La funció que realitza aquest intercanvi, la funció *recoloració*, a la vegada crida a la funció *visita\_cc* que permet trobar les components connexes formades pels vèrtexs de dos colors donats i que per tant mostra quins vèrtexs cal recolorir.

És remarcable la raó per la qual la no existència de vèrtexs disjunts per les seves cadenes de Kempe implica que el graf no és planar. En particular si no existeix tal parella  $G \preceq TK_5$  i pel Teorema de Wagner (Teorema 1.3) el graf  $G$  no és planar.

Aquesta funció finalitza l'explicació del primer algorisme; procediment definit per Heawood a la prova del Teorema dels 5 colors. Passem ara a veure un segon algorisme, l'autor del qual és Greg N. Frederickson [10].

## 7.2 Algorisme 2: Frederickson (codi *5CT\_lineal*)

El següent algorisme es diferencia del primer en el conjunt de configuracions no reductibles que considera i per tant també en les modificacions que realitza al graf per tal de després poder estendre la coloració del graf modificat a una del graf original. En aquest cas el conjunt de configuracions no evitables i reductibles que es pren són els vèrtexs de grau menor o igual a 4 i els vèrtexs de grau 5 amb dos veïns no adjacents de grau menor o igual a 7. Les primeres configuracions, els vèrtexs de grau menor o igual a 4, ja les prenem a l'anterior algorisme i tornarem a eliminar aquests vèrtexs del graf per a després assignar-los el color que no hagin utilitzat els seus veïns. Però ara, considerem a més una configuració nova, un vèrtex de grau 5, que anomenem  $x$ , amb dos veïns no adjacents  $u, w$  de grau menor o igual a 7. La seva reductibilitat es basa en la identificació dels dos vèrtexs i es prova de la següent manera: Eliminem el vèrtex  $x$  de grau 5 i identifiquem els dos vèrtexs  $u$  i  $w$  formant un nou vèrtex  $v$  de manera que el graf resultant té dos vèrtex menys. Donada una coloració del nou graf, per estendre-la al graf original només cal acolorir els vèrtexs  $u$  i  $w$  del color que se li havia assignat al vèrtex  $v$  i a  $x$  assignar-li el color que no usin els seus veïns (n'hi haurà un lliure perquè s'assigna a  $u$  i  $w$  el mateix color i  $x$  té grau 5). Aquesta coloració serà pròpia perquè els vèrtexs  $u$  i  $w$  no són adjacents i per tant els hi podem assignar el mateix

color. A més, com eliminem el vèrtex  $x$  la identificació de  $u$  i  $w$  no afecta a la planaritat del graf.

Cal remarcar que aquest conjunt de configuracions no només és reducible, com s'acaba de mostrar, sinó que a més, configura un conjunt no evitable. El teorema que ho prova és el següent:

**Teorema 7.1** Sigui  $G$  un graf planar de grau mínim 5. Aleshores existeix un vèrtex de grau 5 amb dos veïns no adjacents entre si de grau menor o igual a 7.

La prova es pot trobar al llibre de Frederickson [10].

Així doncs, ja hem vist quin és el conjunt no evitable de configuracions reducibles que s'emprarà. Passem a veure l'algorisme. Comencem amb la funció principal:

---

**Algorithm 4:** Frederickson: Main

---

**Function** Main()

```

Entrada de la matriu d'adjacències del graf  $G$ ;
Definim una pila de parelles d'enters inicialment buida;
Definim 2 vectors R1, R2. Guardem a R1 els vèrtexs de grau menor a 5 i a R2 els
vèrtexs de grau 5;
while  $R1$  no buit o  $R2$  no buit do
  if  $R1$  no buit then
    Prenem  $v$  de R1 i el borrem de R1;
    Apilem parella  $(v,-1)$  a a la pila;
    Eliminem  $v$  del graf;  $\rightarrow$  Delete
  if  $R2$  no buit then
    Prenem  $v$  de R2 i el borrem de R2 ;
    if  $v$  té 2 veïns  $x, y$  tal que  $d(x) \leq 7, d(y) \leq 7, x \neq y$  then
      Identifiquem  $x$  i  $y$ ;  $\rightarrow$  Identify
      Apilem parella  $(x, y)$  a la pila;
      Eliminem  $v$  del graf;  $\rightarrow$  Delete
if no tots els vèrtexs han estat apilats then
  | El graf no és planar;
else
  while la pila no és buida do
    Treiem parella  $(P1,P2)$  de la pila;
    if  $P2=-1$  then
      Busca color  $C$  no usat en els veïns de P1;
      Assigna color  $c$  a P1;
    else
      Assigna a P1 el color ja assignat a P2;
  Escriu coloració;
  Comprova coloració és pròpia;  $\rightarrow$  colors_correcte

```

---

Bàsicament aquest codi defineix dos conjunts R1 i R2, on R1 són els vèrtexs de grau menor o igual a 4 i R2 els de grau igual a 5. R1 per tant està format per configuracions

reductibles i si tenim algun vèrtex a R1, la reducció del graf és simple, l'eliminació del vèrtex. Guardem el vèrtex en una pila, i el guardem juntament amb un indicador -1, per a notar que aquest vèrtex és del primer tipus. Per altra banda els vèrtexs de R2 són candidats a ser configuracions reductibles però cal veure si tenen dos veïns de grau menor a 7 no adjacents. Si és així, identifiquem aquests dos veïns, els col·loquem a la pila, i eliminem el vèrtex de R2 del graf. En ambdós casos, R1 o R2, eliminem el vèrtex de R1 o de R2 quan es visita.

Al finalitzar aquesta etapa, tots els vèrtexs han d'haver estat visitats. Si no és així, el conjunt de configuracions no apareixia en alguna etapa del procediment, i això contradiu el fet de que  $G$  sigui planar (ja que el conjunt de configuracions era no evitable per a grafs planars). En aquest cas, el codi escriu el següent missatge: "El graf no és planar".

Per altra banda, si s'han visitat tots els vèrtexs, toca començar la coloració. Per a fer-ho es van treient parelles de la pila successivament. El segon element de la parella (P2) ens indica si el vèrtex tenia grau menor a 5 o si els dos vèrtexs de la parella han estat identificats. En el primer cas, si  $P2 = -1$ , es pinta P1 amb un color que no usin els veïns. I en el segon, P1 es pinta del mateix color que P2, ja que P2 ha estat acolorit prèviament com veurem a la funció *Identify*.

Veiem ara les dues funcions centrals en l'algorisme; *Delete* i *Identify*:

---

**Algorithm 5:** Frederickson: Delete

---

```

Function Delete(vèrtex  $v$ )
  for cada veí  $w$  de  $v$  do
    Borrem  $v$  de la llista d'adjacències de  $w$ ;
    Reduïm en 1 el grau de  $w$ ,  $d(w)$ ;
    if  $d(w) = 5$  then
      Inserir  $w$  a R2;
    if  $d(w) = 4$  then
      Eliminem  $w$  de R2;
      Inserir  $w$  a R1;
    if  $d(w) = 7$  then
      for cada veí  $x$  de  $w$  do
        if  $d(x) = 5$  and  $x$  no pertany a R2 then
          Inserir  $x$  a R2;

```

---

L'algorisme *Delete* bàsicament elimina un vèrtex  $v$  de les llistes d'adjacències de cada veí  $w$  i modifica el grau de  $w$  i els conjunts R1 i R2 convenientment.

Finalment, ens queda veure la funció *Identify*, que identifica dos vèrtexs no adjacents  $u$  i  $v$ :

**Algorithm 6:** Frederickson: Identify**Function** *Identify* (*vèrtex*  $u$ , *vèrtex*  $v$ )

Crea vector marcat inicialitzat a 0 de tamany el nombre total de vèrtexs;

**for** *cada veí*  $w$  *de*  $v$  **do**┌ Canviem el valor de  $\text{marcat}(w)$  a 1;**for** *cada veí*  $w'$  *de*  $u$  **do**┌ Borrem  $w'$  de la llista d'adjacències de  $u$ ;**if**  $\text{marcat}(w') = \text{fals}$  **then**┌ Afegim  $w'$  i  $v$  a la llista d'adjacències de  $v$  i  $w'$  respectivament;┌ Augmentem en 1 el grau de  $v$ ,  $d(v)$ ;┌ Inserim o eliminem  $v$  de R2 o R1 en funció de  $d(v)$ ;**else**┌ Restem 1 al grau de  $w$ ,  $d(w)$ ;┌ Inserim o eliminem  $w$  de R2 o R1 en funció de  $d(w)$ ;┌ Borrem  $u$  de R1 o de R2 si hi estava present;┌ Posem  $(u, v)$  a la pila;

Aquesta funció, *Identify*, realitza la identificació de dos vèrtexs  $u$  i  $v$ . Concretament afegeix adjacències al vèrtex  $v$  que es pren com a vèrtex resultant de la identificació. Per a fer-ho, primer marca tots els veïns de  $v$  gràcies al vector marcat i després pren de forma successiva els veïns de  $u$ . Si el veí ja està "marcat", eliminem l'adjacència ja que el vèrtex ja és adjacent a  $v$ . Només cal fer disminuir el grau d'aquest veí en una unitat (era adjacent a  $u$  i  $v$  però ara només ho és al vèrtex resultant de la identificació). Per contra, si el veí no està marcat, afegim l'adjacència entre  $v$  i el veí i augmentem en una unitat el grau del vèrtex resultant que com ja hem dit considerem  $v$ . Com havíem fet a la funció *Delete*, pel fet de modificar els graus dels vèrtexs cal també modificar els conjunts R1 i R2. L'últim pas és borrar  $u$  dels conjunts R1 o R2 i posar la parella identificada  $(u, v)$  a la pila. Notem que el vèrtex  $v$  continua sent present al graf  $G$  i per tant serà acolorit o identificat de nou. Tant en un cas com en l'altre s'acolorirà abans d'extreure la parella  $(u, v)$  de la pila i per tant assignar a  $u$  el color assignat a  $v$  com es fa a la funció *main* està ben definit.

### 7.3 Comparació i conclusions

Hem testejat els dos codis amb diverses entrades, i hem usat la funció *time* del terminal per a calcular el temps d'execució. En particular a l'apèndix hem afegit algunes d'aquestes entrades. En entrades de mida petita els temps d'execució no mostraven un patró de canvis significatius entre l'algorisme quadràtic i el lineal i en tots els casos estaven per sota dels 0.04 segons.

Provem ara amb grafs de mides més grans. Per a crear aquests grafs recorrem a la funció *delaunayTriangulation* de Matlab. Aquesta funció, donat un conjunt de vèrtexs  $V$ , genera una triangulació amb aquests vèrtexs. És a dir, genera un graf maximal planar amb aquest conjunt  $V$ . Així, hem generat un script a Matlab que donat  $n$ , el nombre de vèrtexs, genera  $n$  punts aleatoris i després hi aplica la funció *delaunayTriangulation*. Aquest codi també el podeu trobar a l'annex amb el nom de *random\_graph.m*. Hem provat grafs de

mida  $n = 100, 1000, 2000, 3000, 5000$  i  $10000$  i els temps d'execució en aquests casos si que mostren un patró diferent en el cas dels dos algorismes. Mostrem en una taula els temps reals d'execució per als grafs generats d'aquestes mides:

n: mida del graf	Temps 5CT_quadràtic	Temps 5CT_lineal
100	0.067 s	0.052 s
1000	2.308 s	0.507 s
2000	12.135 s	2.538 s
3000	28.57 s	4.253 s
5000	2m 32.171 s	10.219 s
10.000	19m 4.654 s	34.948 s

Figura 7.1: Temps real d'execució pels dos algorismes per a 6 grafs

Es pot apreciar a la taula que el temps d'execució en l'algorisme quadràtic és major i s'accentúa aquesta diferència si augmenta el nombre de vèrtexs.

Aquest fet no és sorprenent perquè la cota asimptòtica superior del primer és  $O(n^2)$  i la del segon és  $O(n)$ .

En definitiva hem programat dos codis que, donat un graf planar, retornen una 5-coloració pròpia del graf i, en cas que el graf no sigui planar, fan aparèixer per pantalla un missatge indicant: "El graf no és planar". El primer codi, donat a la prova del Teorema dels 5 colors de Heawood té ordre  $O(n^2)$  mentre que el segon de Frederickson té ordre  $O(n)$ .

En referència a la 4-coloració, existeixen algorismes d'ordre  $O(n^2)$ . Un exemple és el donat per Robertson, Seymour, Sanders i Thomas [15].



# Apèndix: Codis dels algorismes de 5-coloració

## Codi 5CT\_quadratic

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <stack>
#include <queue>
using namespace std;

typedef vector<int> VE;
typedef vector<char> VC;
typedef vector<VC> VCC;
typedef vector<bool> VB;

VE coloracio; VE colors_veins; VE veins;
VCC map; VCC petit; VCC mapa_de_colors;
VB vertexts_apilats; VB vertexts_encuats; VB vertexts_encuats_2;
bool primer_cas, proper, path, planar;
int n;
stack<int> pila;
queue<int> cua; queue<int> cc;

//Funcions techniques

void escriu_vector(VE B) {
    cout << endl;
    int m= B.size();
    for (int i=0; i<m; ++i) {
        cout << B[i];
    }
    cout << endl;
}

bool colors_correcte() {
    for (int i=0; i<n; ++i) {
        for (int j=i+1; j<n; ++j) {
            if (map[i][j]=='1' and coloracio[i]==coloracio[j])
                {
                    return false;
                }
        }
    }
    return true;
}
}
```



```

void modifica_matriu(int i) { //un cop afegit un vertex a la pila, el
    vertex s'elimina del graf petit
    for (int j=0; j<n; ++j) {
        petit[i][j]=petit[j][i]='0';
    }
}

void modifica_matriu_2(int i) { //reafehim un vertex al graf petit
    for (int j=0; j<n; ++j) {
        if (not vertexs_apilats[j]) petit[i][j]=petit[j][i]=map[i]
            [j];
    }
}

int calcula_grau(int p) {
    int suma =0;
    for (int i=0; i<n; ++i) {
        if (int (petit[i][p])==49) ++suma;
    }
    return suma;
}

void escriu_pila() {
    while (not pila.empty()) {
        int p= pila.top();
        cout << p+2 << " grau ";
        vertexs_apilats[p] = false;
        modifica_matriu_2(p);
        cout << calcula_grau(p) << endl;
        pila.pop();
    }
    cout << endl;
}

void busca_vertex() { //busca un vertex no
    apilat de grau menor o igual a 5
    bool trobat = false;
    int i=0;
    while (vertexs_apilats[i]) ++i;
    while (not trobat and i<n) {
        int sum = 0;
        int j=0;
        while (sum < 6 and j<n) {
            if (int (petit[i][j])==49) ++sum;
            ++j;
        }
        if (sum > 5) {
            ++i;
            while (i<n and vertexs_apilats[i]) ++i;
        }
        else trobat = true;
    }
    if (not trobat) cout << "EL GRAF NO ES PLANAR" << endl;

    else {
        pila.push(i);
        vertexs_apilats[i] = true;
        modifica_matriu(i);
    }
}

```

```

    }
    return;
}

int nombre_colors_veins(int p) { //calcula nombre de colors usats en els
    veins d'un vertex i modifica el vector veins per a indicar quins
    colors usen els veins
    colors_veins = VE(5,0);
    int suma_veins;
    suma_veins =0;
    for (int i=0; i<n; ++i) {
        if(petit[i][p] == '1' and colors_veins[coloracio[i]]==0) {
            //la segona condicio implica que el color coloracio[i]
            no ha estat utilitzat
            ++suma_veins;
            colors_veins[coloracio[i]]=1;
        }
    }
    return suma_veins;
}

//Modifica cadenes de Kempe

//1) Busca veins

int busca_vei(int vertex, int j) {
    while (petit[vertex][j]!='0') ++j;
    return j;
}

//2) Busca amb qui no pertany a la mateixa cadena que v_1

void modifica_matriu_amb_colors (int color_1,int color_2) {
    mapa_de_colors = VCC(n,VC(n,'0'));
    for (int i=0; i<n; ++i) {
        for(int j=0; j<n; ++j) {
            if (petit[i][j]=='1') {
                if (coloracio[i]==color_1 or coloracio[i]
                    ]==color_2) {
                    if (coloracio[j]==color_1 or
                        coloracio[j]==color_2)
                        mapa_de_colors[i][j]='1';
                }
            }
        }
    }
}

void adjacencies(int p) {
    for (int j=0;j<n; ++j) {
        if (mapa_de_colors[j][p]=='1' and not vertexs_encuats[j])
            {
                cua.push(j);
            }
    }
}

```

```
        vertexs_encuats[j] = true;
    }
}

void visita(int p, int j){
    if (p >= n or p<0) return;
    if (p == j) path = true;
    adjacencies(p);
}

bool bfs (int i, int j) {
    cua.push(i);
    path = false;
    vertexs_encuats = VB(n,false);
    vertexs_encuats[i] = true;
    while (not cua.empty() and not path) {
        int p = cua.front();
        visita(p, j);
    }
    cua.pop();
    return path;
}

int comprova_cadenes(int j) { //comprova cadenes veins[j]
    int color_1 = coloracio[veins[j]];
    bool cami = true;
    int i = j+1;
    while (cami and i<5) {
        int color_2 = coloracio[veins[i]];
        modifica_matriu_amb_colors(color_1,color_2);
        cami = bfs(veins[j], veins[i]);
        ++i;
    }
    if (not cami) return i-1;
    else return -1;
}

void adjacencies_2(int p) {
    for (int j=0;j<n; ++j) {
        if (mapa_de_colors[j][p]=='1' and not vertexs_encuats_2[j]) {
            cc.push(j);
            vertexs_encuats_2[j] = true;
        }
    }
}

void visita_cc(int color_1, int color_2, int p){
    if (p >= n or p<0) return;
    if (coloracio[p]==color_1) coloracio[p]=color_2;
    else coloracio[p]=color_1;
    adjacencies_2(p);
}
```

```

void recoloracio(int color_1, int color_2, int vertex) {
    cc.push(vertex);
    vertexs_encuats_2 = VB(n,false);
    vertexs_encuats_2[vertex] = true;
    while (not cc.empty()) {
        int p = cc.front();
        visita_cc(color_1, color_2, p);
    }
    cc.pop();
}

}
//-----

int Kempe(int vertex) {
    veins = VE(5,-1);
    veins[0] = busca_vei(vertex,0);
    for (int i=1; i<5; ++i) {
        veins[i] = busca_vei(vertex, veins[i-1]+1);
    }

    //Pertanyen a la mateixa cadena de Kempe?
    int j=0;
    int no_encadenat = -1; //aqui guardare el vertex al que no pertany
        la mateixa cadena de Kempe;
    while(no_encadenat == -1 and planar) { //AQUI PODEM DETACTAR SI EL
        GRAF NO ES PLANAR
        no_encadenat = comprova_cadenes(j);
        if (no_encadenat == -1) ++j;
        if (j==5) {
            cout << "EL GRAF NO ES PLANAR" << endl;
            planar = false;
        }
    }
    if (planar) {
        //Ja tinc la parella {j, no_encadenat} de vertexs que no
        pertanyen a la mateixa cadena de Kempe.
        //Ara em cal veure quins colors tenen associats i
        intercanviar la c.c. de j amb aquest colors.

        int color_1 = coloracio[veins[j]];
        int color_2 = coloracio[veins[no_encadenat]];
        recoloracio(color_1,color_2, veins[j]);
        return color_1;
    }
    else return -9;
}

}
//-----

void pinta() { //pren un vertex de la pila i li assigna un color
    int p = pila.top(); pila.pop(); vertexs_apilats[p]=false;
    modifica_matriu_2(p);
}

```

```

    int n_colors_veins = nombre_colors_veins(p);
    if (n_colors_veins < 5) {
        int i=0;
        while (colors_veins[i]==1) {
            ++i;
        }
        coloracio[p]=i; //acolorim p amb el primer color no usat
                        pels veins
    }
    else {
        cout << endl << "necessitem modificar cadenes de Kempe del
            vertex " << p << endl;
        int color_no_usat = Kempe(p);
        if (not planar) return;
        coloracio[p]=color_no_usat;
    }
}

int main() {
    planar = true;
    cin >> n;
    map = VCC(n,VC(n));
    coloracio = VE(n,-1);
    vertexs_apilats = VB(n, false);
    char c;
    for(int i = 0; i < n; ++i){
        for(int j = 0; j < n; ++j) {
            cin >> c;
            map[i][j] = c;
        }
    }
    petit = map;
    for (int j=0; j<n-5; ++j) busca_vertex();
    int j=0;
    for (int i=0; i<n; ++i) {
        if (not vertexs_apilats[i]) {
            coloracio[i]=j;
            ++j;
        }
    }
    while (not pila.empty() and planar) pinta();
    if (planar) {
        escriu_vector(coloracio);
        if(colors_correcte()) cout << "He trobat coloracio propia"
            << endl;
    }
}

```

## Codi 5CT\_lineal

```

#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <vector>
#include <list>
#include <utility>

```

```

#include <queue>
#include <stack>

using namespace std;
typedef vector <int> VE;
typedef vector< VE > VL;

int vertices;
VL adjacencyList, copia;
VE DEG, marcat;
VE colors_usats, coloracio;
VE R1, R2;
VE vertexs_borrats;
stack< pair<int,int> > vertexs_apilats;

//Funcions techniques

void escriu_pila() {
    while (not vertexs_apilats.empty()) {
        pair<int,int> p= vertexs_apilats.top();
        cout << p.first << ' ' << p.second<< endl;
        vertexs_apilats.pop();
    }
    cout << endl;
}

void escriu_vector(VE R) {
    int m = R.size();
    for (int i = 0; i < m; ++i) cout << R[i];
    cout << endl;
}

int troba_posicio(VE R, int w) {           //retorna -1 si no es troba
    bool trobat = false;
    int it=0;
    int q=R.size();
    while (not trobat and it!= q) {
        if (R[it] == w) trobat=true;
        ++it;
    }
    --it;
    if (trobat) return it;
    else return -1;
}

bool coloracio_correcte() {
    for (int i=0; i<vertices; ++i) {
        for (int j=0; j<int(copia[i].size()); ++j) {
            int v=copia[i][j];
            if (coloracio[v] == coloracio[i]) return false;
        }
    }
    return true;
}

//-----

```

```

pair<int,int> candidat(int v) {
    //retorna parella de vertexs de grau menor a 7 no adjacents

    VE possibles(0);          //guardo veïns de v de graus <= 7
    for (int i=0; i<int(adjacencyList[v].size()); ++i) {
        int w = adjacencyList[v][i];
        if (DEG[w]<=7) possibles.push_back(w);
    }
    int i=0;
    pair <int,int> vertexs;
    bool trobat = false;
    int v1 = -1;
    int v2 = -1;
    while (not trobat and i<int(possibles.size())) {
        int j=i+1;
        while (j < int(possibles.size())) {
            v1 = possibles[i];
            v2 = possibles[j];
            int posicio = troba_posicio (adjacencyList[v1],v2);
            if (posicio == -1) trobat = true;
            else ++j;
        }
        ++i;
    }
    vertexs.first = v1;
    vertexs.second = v2;
    if (trobat) return vertexs;

    vertexs.first = -1;
    vertexs.second = -1;
    return vertexs;
}

int pinta (int v) {          //troba color lliure per a v
    colors_usats = VE(5,0);
    for (int i=0; i<int(adjacencyList[v].size());++i) {
        int vei = adjacencyList[v][i];
        int color = coloracio[vei];
        colors_usats[color] = 1;
    }
    int j=0;
    bool trobat =false;
    while (j<5 and not trobat) {
        if (colors_usats[j]==0) trobat=true;
        else ++j;
    }
    return j;
}

void Delete(int v) {
    vertexs_borrats[v]=1;
    int q = adjacencyList[v].size();
    for (int i = 0; i!=q; ++i) {
        int w = adjacencyList[v][i];
        int it_2 = troba_posicio(adjacencyList[w],v);
        adjacencyList[w].erase(adjacencyList[w].begin()+it_2);
        DEG[w]--;
        if (DEG[w]==5) R2.push_back(w);
    }
}

```

```

else if (DEG[w]==4) {
    R1.push_back(w);
    it_2=troba_posicio(R2,w);
    R2.erase(R2.begin() + it_2);
}
else if (DEG[w]==7) { //per cada vei x de w si d(x)=5 i no
    estava a R2 l'afegim a R2
        for (int it=0; it != (int)adjacencyList[w].size();
            ++it) {
            int vei = adjacencyList[w][it];
            if (DEG[vei]==5) {
                int posicio = troba_posicio(R2,vei);
                if (posicio!=-1) R2.push_back(vei);
            }
        }
    }
}

}

}

void Identify(int u, int v) {
    marcat = VE(vertices,0);
    for (int i = 0; i != int(adjacencyList[v].size()); ++i) {
        int vei = adjacencyList[v][i];
        marcat[vei] = 1;
    }
    for (int i = 0; i != int(adjacencyList[u].size()); ++i) {
        int vei_2 = adjacencyList[u][i];
        adjacencyList[u].erase(adjacencyList[u].begin()+i);
        if (marcat[vei_2]==0) {
            adjacencyList[v].push_back(vei_2);
            adjacencyList[vei_2].push_back(v);
            ++DEG[v];
            if (DEG[v]==6) {
                int posicio= troba_posicio(R2, v);
                R2.erase(R2.begin() + posicio);
            }
            if (DEG[v]==5) R2.push_back(v);
        }
        else {
            --DEG[vei_2];
            if(DEG[vei_2]== 4) {
                int posicio= troba_posicio(R2, vei_2);
                R2.erase(R2.begin() + posicio);
                R1.push_back(vei_2);
            }
            else if(DEG[vei_2]== 5) R2.push_back(vei_2);
        }
    }
}

int posicio = troba_posicio(R2, u);
if (posicio != -1) R2.erase(R2.begin() + posicio);
posicio = troba_posicio(R1, u);
if (posicio != -1) R1.erase(R1.begin() + posicio);

vertexs_apilats.push(make_pair(u,v));

}

```



```
int main() {
    // 1- Entrada matriu, guardem graf en forma de llista d'
    //    adjacencies
    cin >> vertices;
    DEG = VE(vertices,0);

    adjacencyList= VL(vertices,VE(0));
    copia = VL(vertices,VE(0));

    char c;
    for (int i=0; i<vertices; ++i) {
        for (int j=i+1; j<vertices; ++j) {
            cin >> c;
            if (c=='1') {
                adjacencyList[i].push_back(j);
                adjacencyList[j].push_back(i);
                DEG[i]++;
                DEG[j]++;
            }
        }
    }

    copia = adjacencyList;

    R1 = VE(0);
    R2 = VE(0);
    for (int i=0; i<vertices; ++i) {
        if(DEG[i]<5) R1.push_back(i);
        else if (DEG[i]==5) R2.push_back(i);
    }

    vertexs_borrats = VE(vertices, 0);

    //2- Modificacions successives del graf G
    while (R1.size() !=0 or R2.size() !=0) {
        while (R1.size() !=0) {
            int v = R1[0];
            vertexs_apilats.push(make_pair(v,-1));
            R1.erase(R1.begin());
            Delete(v);
        }
        while (R2.size() !=0) {
            int v = R2[0];
            R2.erase(R2.begin());
            pair <int,int> vertexs = candidat(v);
            cout << "la parella es " << vertexs.first << ' ' <<
                << vertexs.second << endl;
            if (vertexs.first != -1) {
                int x = vertexs.first;
                int y = vertexs.second;
                Identify (x,y);
                vertexs_apilats.push(make_pair(x,y));
                Delete(v);
            }
        }
    }
}
```

```

    }

    //3- Coloracio de G
    int sum=0;
    for (int i=0; i<vertices; ++i) {
        if (vertexs_borrats[i]==0) ++sum;
    }
    if (sum > 0) cout << "El graf no es planar" << endl;    //si
        existeix algun vertex no visitat
    else {
        coloracio = VE(vertices, -1);
        while (not vertexs_apilats.empty()) {
            pair <int,int> p = vertexs_apilats.top();
            if (p.second == -1) {    // Cas d(v)<5:
                busquem colors no usats veïns de p.first
                int v= p.first;
                int color = pinta(v);
                coloracio[v]=color;
            }
            else {    // Cas u i
                v identificats
                int u=p.first;
                int v=p.second;
                coloracio[u]=coloracio[v];
            }
            vertexs_apilats.pop();
        }
        escriu_vector(coloracio);
        if (coloracio_correcte()) cout << "He trobat coloracio
            propia" << endl;
    }
}

```

## Codi random\_graph.m

```

n=100;    % modificar valor de n, n=100,1000,2000,...
x=rand(1,n)';
y=rand(1,n)';

TR= delaunayTriangulation(x,y);
E = edges(TR);
A= zeros(n);
m= size(TR);
for i=1:m
    vertex_1=E(i,1);
    vertex_2=E(i,2);
    A(vertex_1,vertex_2)=1;
    A(vertex_2,vertex_1)=1;
end
fid = fopen('myfile.txt', 'wt');    % Guarda el graf a myfile.txt
fprintf(fid, '%d ', n);

```

```
fprintf(fid, '\n');  
for i=1:size(A,1)  
    fprintf(fid, '%d ', A(i,:));  
    fprintf(fid, '\n');  
end  
fclose(fid);
```

# Bibliografia

- [1] Appel K. and Haken W., The existence of unavoidable sets of geographically good configurations, *Illinois J. Math.* Volum 20, num. 2, 218-297, 1976
- [2] Appel K. and Haken W., Every planar map is four colourable. Part I: Discharging, *Illinois J. Math.* Volum 21, num. 3, 429-490, 1977
- [3] Appel K. and Haken W., Every planar map is four colourable, *Contemporary Mathematics*, American Mathematical Society, 98, 1989
- [4] Appel K., Haken W. and Koch, J., Every planar map is four colourable. Part II: Reducibility, *Illinois J. Math.*, Volum 21, num. 3, 491-567, 1977
- [5] Biggs, N. L., Lloyd, E.K., Wilson J., *Graph Theory : 1736-1936*, Oxford : Clarendon Press, 1976
- [6] Birkhoff, George D., The Reducibility of Maps, *American Journal of Mathematics* Vol. 35, num. 2, pp. 115-128, 1913
- [7] Bondy, A., Murty, U.S.R., *Graph Theory with applications*, *Springer-Verlag London*, 2008
- [8] Diestel, *Graph Theory*, Springer, cop. 2005
- [9] Gonthier, G., Formal Proof—The Four Color Theorem, *Notices of the American Mathematical Society*, Vol 55, num 11, 1382-1393, 2008
- [10] Frederickson, Greg N., On Linear-Time Algorithms for 5-Coloring Planar Graphs, *Computer Science Technical Reports*. Paper 347, 1982
- [11] Fritsch and Fritsch, *The Four-color theorem: history, topological foundations, and idea of proof*, Springer, 1998
- [12] Kempe, A.B., On the Geographical Problem of the Four Colours, *American Journal of Mathematics*, Vol. 2, num. 3, pp. 193-200, 1879
- [13] Ringel, G., *Map color theorem* Springer-Verlag, 1974
- [14] Robertson N., Sanders D.P, Seymour P., Thomas R., A new proof of the four-colour theorem, *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, Vol 2, 17-25, 1996
- [15] Robertson N., Sanders D.P, Seymour P., Thomas R., Efficiently four-colouring planar graphs, *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on theory of computing*, 571-575, 1996

- [16] Saaty, Thomas L. and Kainen, Paul C., *The four-color problem : assaults and conquest*, Dover Publications, 1986.
- [17] Soifer, Alexander, *The Mathematical coloring book : mathematics of coloring and the colorful life of its creators*, Springer, cop. 2009.
- [18] Tait, P.G., *Remarks on the colouring of maps*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 729, 1879-80
- [19] Thomas, R., Codis de la prova dels 4 colors, lloc web: [http :  
//people.math.gatech.edu/thomas/FC/ftpinfo.html](http://people.math.gatech.edu/thomas/FC/ftpinfo.html)
- [20] Tutte, W.T., *On Hamiltonian circuits*, J.London Math. Soc. Volum 21, 1946
- [21] West, Douglas B., *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 1996.
- [22] Wilson, Robert A., *Graphs, Colourings and the Four-colour Theorem*, Oxford University Press, 2002.
- [23] White, Arthur T., *Graphs, Groups and Surfaces*, North-Holland, 1984.
- [24] Thomas, R., An Update on the Four-Color Theorem, *Notices of the American Mathematical Society* Vol 45, num.7, 848-859, 1998
- [25] Zaslavsky, T., Imatge 4.8 d'un contraexemple de la conjectura de Tait extreta del lloc web: <http://people.math.binghamton.edu/zaslav/Oldcourses/381.S03/tutte-graph.gif>