



$$\alpha' = \alpha + 2A \left( \alpha + \frac{\beta^2}{1-\delta} \right) \quad (3)$$

$$\beta' = A \left( 1 + \frac{\gamma}{1-\delta} \right) \quad (4)$$

$$\delta' = \frac{\beta(EH + G) + \gamma(GB + H)}{1 - EB} + \delta \quad (5)$$

$$\gamma' = \frac{\beta(EC + F) + \gamma(BF + C)}{1 - BE} \quad (6)$$

donde

$$A = \frac{\beta^2}{1 - (\delta + \gamma) \left( \alpha + \frac{\beta^2}{1-\delta} \right)} \quad (7)$$

$$B = \left( \frac{\gamma\alpha + \delta\beta^2}{1 - \alpha\delta} + \delta \right) \frac{\beta}{1 - \frac{\beta^2}{1 - \alpha\delta} (\gamma + \delta^2) - \delta^2} \quad (8)$$

$$C = \left( \frac{\delta\beta^2}{1 - \alpha\delta} + \gamma \right) \frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{1 - \alpha\delta} (\gamma + \delta^2) - \delta^2} \quad (9)$$

$$H = \left( \frac{\beta^2(\delta + 1)}{1 - \alpha\delta} + \delta \right) \frac{\gamma}{1 - \delta^2 - \frac{\beta^2(\gamma + \delta^2)}{1 - \alpha\delta}} \quad (10)$$

$$F = \frac{\gamma}{1 - \alpha\delta} \frac{\beta}{1 - \alpha\delta - \frac{\gamma(\gamma\alpha^2 + \beta^2)}{1 - \alpha\delta}} \quad (11)$$

$$G = \left( \frac{\gamma^2(\alpha + 1)}{1 - \alpha\delta} + \delta \right) \frac{\beta}{1 - \alpha\delta - \frac{\gamma(\gamma\alpha^2 + \beta^2)}{1 - \alpha\delta}} \quad (12)$$

$$E = \left( \delta + \frac{\gamma(\gamma\alpha + \delta)}{1 - \alpha\delta} \right) \frac{\beta}{1 - \alpha\delta - \frac{\gamma(\gamma\alpha^2 + \beta^2)}{1 - \alpha\delta}} \quad (13)$$

La estructura final se obtiene a partir de  $t$  iteraciones. Para obtener su matriz de scattering, se lleva a cabo el siguiente proceso:

**Etapas 1:** Se parte de la matriz de scattering  $[S_0]$  de la estructura inicial, y se aplican las ecuaciones (3)-(13), obteniéndose la matriz de scattering  $[S_1]=[S']$ .

**Etapas 2:** Se aplican otra vez las ecuaciones a la matriz resultante de la primera iteración, obteniéndose la matriz de scattering  $[S_2]$ .

**Etapas  $t$ :** Se repite el mismo procedimiento a  $[S_{t-1}]$  obteniéndose  $[S_t]$ , donde esta matriz de scattering corresponde a la de la estructura total.

Los parámetros de entrada de la red de Sierpinski resultante se calculan a partir de la matriz de scattering  $[S_t]$ , que es de la misma forma que (1) pero definida por los parámetros  $\alpha_t$ ,  $\beta_t$ ,  $\delta_t$  y  $\gamma_t$ . El coeficiente de reflexión a la entrada está dado por:

$$\rho_{in} = \alpha_t + \frac{\beta_t^2}{D_1} \rho_2 \left( 1 + \frac{\gamma_t \rho_3}{1 - \delta_t \rho_3} \right) + \frac{\beta_t^2}{D_2} \rho_3 \left( 1 + \frac{\gamma_t \rho_2}{1 - \delta_t \rho_2} \right) \quad (14)$$

donde

$$D_1 = 1 - \delta_t \rho_2 - \frac{\gamma_t^2 \rho_2 \rho_3}{1 - \delta_t \rho_3} \quad (15)$$

$$D_2 = 1 - \delta_t \rho_3 - \frac{\gamma_t^2 \rho_2 \rho_3}{1 - \delta_t \rho_2} \quad (16)$$

$$\rho_2 = \frac{Z_{02} - Z_0}{Z_{02} + Z_0} \quad (17) \quad \rho_3 = \frac{Z_{03} - Z_0}{Z_{03} + Z_0} \quad (18)$$

$Z_0$  es la impedancia de referencia,  $Z_{02}$  es la impedancia que se conecta en el puerto 2 de la estructura total y  $Z_{03}$  la conectada en el puerto 3.

La impedancia de entrada se calcula empleando (19)

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \rho_{in}}{1 - \rho_{in}} \quad (19)$$

### 3. Influencia del número de iteraciones

De cara al diseño de antenas fractales es interesante poder ver como afecta a los parámetros de entrada el aumento del número de iteraciones, dado que en la práctica resulta complicado implementar antenas con un número elevado de iteraciones.

En la Fig. 3 se muestra la evolución del coeficiente de reflexión para las seis primeras etapas del modelo de red iterativo. Se toma como generador un circuito constituido por tres líneas de transmisión formando una estructura simétrica en Y. En la Fig. 3 aparecen siete gráficas; la primera corresponde al coeficiente de reflexión de la estructura inicial,  $\rho_0$ , y las seis restantes a los coeficientes de reflexión de las seis primeras etapas del modelo red iterativo,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ ,  $\rho_4$ ,  $\rho_5$  y  $\rho_6$ . Se comprueba que el hecho de realizar una iteración más en el modelo de red

iterativo se traduce en la aparición de una nueva banda, que modifica ligeramente la forma de las dos bandas anteriores, manteniendo las demás esencialmente sin modificar. El espaciado entre bandas es logoperiódico, con un factor de espaciado aproximadamente igual a 2.

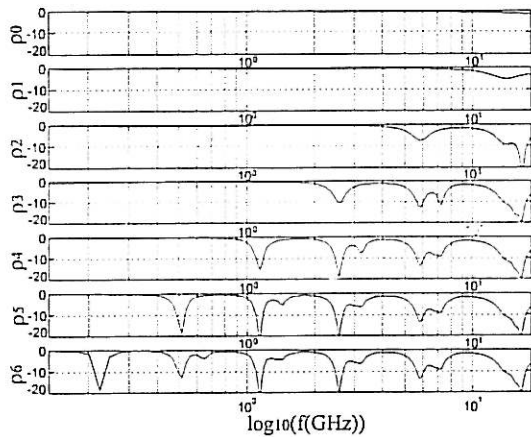


Fig. 3. Coeficiente de reflexión (dB) para las seis primeras etapas del modelo de red iterativo.

Como el modelo de red iterativo crece hacia afuera, es decir, la estructura se hace mayor a medida que se aumenta el número de iteraciones, la banda que se añade al aplicar una nueva iteración, se añade a una frecuencia que es inferior a la de las bandas existentes.

#### 4. Estudio del parche Spk90

Se aplica el modelo de red iterativo para el cálculo del coeficiente de reflexión de la antena fractal de Sierpinski microstrip Spk90, (Fig. 4). Los resultados obtenidos se comparan con los que se obtienen de la medida del coeficiente de reflexión del parche.

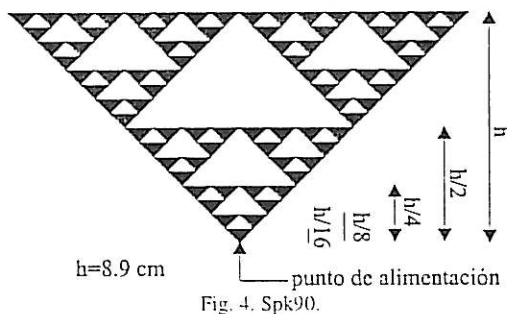


Fig. 4. Spk90.

Para este parche, se considera que la estructura básica está formada por tres líneas de transmisión en forma de Y como muestra la Fig. 5. A partir de la matriz de scattering  $[S_0]$  de esta estructura y aplicando el modelo de red iterativo para  $t=4$ , se obtiene la matriz de scattering del parche Spk90.

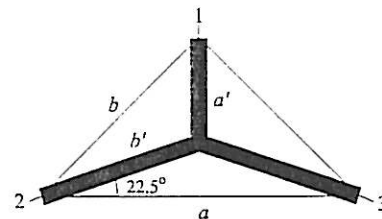


Fig. 5. Modelo en Y de las líneas de transmisión que componen la estructura básica.

Se calcula el coeficiente de reflexión del parche Spk90 cuando las tres líneas de transmisión que forman la estructura básica poseen un factor de calidad que en un primer caso vale 100 y en el otro 10.

El parche se imprime sobre un sustrato dieléctrico (Cuclad 250) (ver dimensiones en la Fig. 4). El coeficiente de reflexión se mide para dos separaciones ( $h$ ), entre el plano de masa y la superficie metálica del parche ( $h=1.588$  mm y  $h=1.44$  cm), empleándose alimentación coaxial.

La Fig. 6 muestra el coeficiente de reflexión calculado con el modelo de red iterativo y el obtenido experimentalmente.

Se observa que cuando el factor de calidad de las líneas de transmisión es 10 el carácter logoperiódico se manifiesta claramente, mientras que para el factor de calidad de 100 resulta complicado poder apreciarlo. Este fenómeno está también presente en los resultados experimentales, de manera que cuanto mayor es el valor de la separación  $h$  el carácter logoperiódico es más evidente.

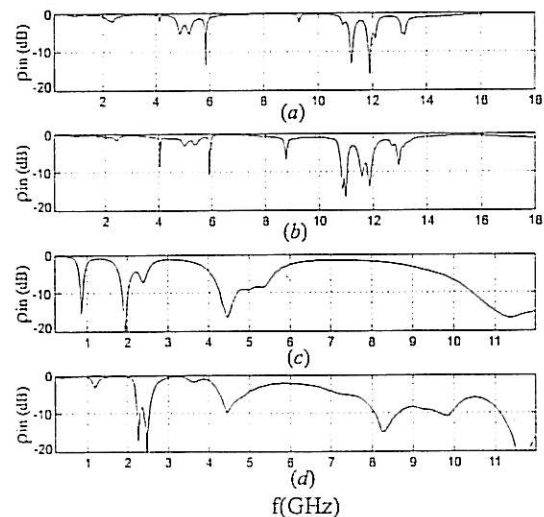


Fig. 6. Coeficiente de reflexión del parche spk90 (a) según el modelo de red iterativo para líneas de transmisión con  $Q=100$ , (b) medido para  $h=1.58$  mm, (c) según el modelo de red iterativo para  $Q=10$  y (d) medido para  $h=1.44$  cm.

De acuerdo con los resultados de la Fig. 6, el modelo de red iterativo predice con más exactitud el coeficiente de reflexión correspondiente a la separación  $h$  de 1.588 mm que el de 1.44 cm. Esta

característica es consecuencia de la alimentación coaxial empleada, pues se sabe que para valores de  $h$  pequeños la influencia que tiene es despreciable. Sin embargo, cuando  $h$  es elevada en términos de la longitud de onda, la radiación ocasionada por este tipo de alimentación es considerable con lo que el coeficiente de reflexión medido es diferente del que idealmente se obtendría en otro caso.

Es interesante destacar que la disminución del factor de calidad de las líneas de transmisión en el modelo de red iterativo produce un efecto equivalente a separar el parche del plano de masa, debido principalmente al incremento de las pérdidas por radiación del sistema resonante.

## 5. Conclusiones

El modelo de red iterativo permite tener una idea bastante aproximada de los parámetros de entrada de una antena ó circuito cuya topología es la del fractal de Sierpinski, esto puede resultar muy útil cuando el número de iteraciones de la estructura fractal es elevado puesto que ello complica enormemente su análisis numérico incrementando desmesuradamente el tiempo de cálculo.

Además el modelo presentado permite obtener conclusiones de cara al diseño de antenas fractales microstrip. Se ha observado que a medida que la antena se separa del plano de masa el carácter logoperiódico se manifiesta más claramente, en el modelo de red iterativo se puede observar lo mismo al reducir el factor de calidad de los elementos reactivos de la estructura inicial.

## Agradecimientos

Este proyecto ha sido financiado parcialmente por el proyecto TIC-96-0724-C06-04 de la CICYT.

## Referencias

- [1] Puente, C., Romeu, J., Bartolomé, y R., Pous, R. "Perturbation of the Sierpinski antenna to allocate operating bands". *Electronics Letters*, 32, 24, 2186-2188 (1996).
- [2] Puente, C., Romeu, J., Pous, R., Garcia, X., y Benítez, F. "Fractal multiband antenna based on the Sierpinski gasket". *Electronics Letters*, 32, 1, 1-2 (1996).
- [3] Cohen, N., and Hohfeld, R.G. "Fractal loops and the small loop approximation". *Commun. Quaterly*, 77-81, (1996).
- [4] Puente, C., Claret, J., Sagués, F., Romeu, J., López Salvans, M. Q. Y Pous, R. "Multiband properties of fractal tree antenna generated by electrochemical deposition". *Electronics Letters*, 32, 25, 2298-2299 (1996).

[5] Peitgen, H. O., Jürgens, H., and Saupe, D. *Chaos and fractals, new frontiers of science*. New York : Springer Verlag (1992).