

Análisis de circuitos autónomos no lineales con parámetros distribuidos mediante técnicas temporales discretas

JORDI BONET I DALMAU, PERE PALÀ I SCHÖNWÄLDER I JOAN M. MIRÓ I SANS
 DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS
 UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
 bonet@tsc.upc.es

Abstract:

We present a new method for the steady state analysis of autonomous circuits with transmission lines and generic nonlinear elements. With the temporal discretization of the equations that describe the circuit, we obtain a nonlinear algebraic formulation where the unknowns to determine are the control variables of the nonlinear elements samples directly in the steady state, along with the oscillation period, the main unknown in autonomous circuits. An efficient scheme to build the jacobian matrix with exact partial derivatives with respect to the oscillation period and with respect to the samples of the unknowns is described. To illustrate the proposed technique, the time-delayed Chua's circuit is analyzed in its periodic zones.

1. Introducción

Para la determinación del régimen permanente de circuitos autónomos no lineales se han desarrollado distintas técnicas.

Los métodos de *shooting*, desarrollados en el dominio temporal, intentan determinar las condiciones iniciales del circuito que hacen cero el transitorio. En circuitos que incorporan retardo estas condiciones deben determinarse con una duración igual al retardo máximo del circuito. En el caso de circuitos autónomos, el desconocimiento *a priori* del periodo de oscilación añade dificultades adicionales.

La división del circuito en una parte lineal y otro no lineal es aprovechada por los métodos desarrollados en el dominio frecuencial para resolver la parte lineal eficazmente. Sin embargo, la parte no lineal se evalúa mejor en el dominio temporal, siendo necesarias sucesivas transformaciones entre los dos dominios.

En esta comunicación proponemos un nuevo método para obtener la respuesta en régimen permanente de circuitos autónomos no lineales con parámetros distribuidos, basado en la formulación de las ecuaciones que describen el circuito en el dominio temporal, sin requerir ninguna transformación adicional. Después de discretizar estas ecuaciones aproximando las derivadas y los retardos por una combinación lineal de las muestras de las variables discretizadas se llega a una formulación del problema en forma matricial, pudiendo usar técnicas de procesado en paralelo para su resolución. Las derivadas parciales de las ecuaciones resultantes respecto a las muestras de las variables a determinar y el periodo de oscilación, principal incógnita en circuitos autónomos, se obtienen de forma analítica exacta, permitiendo la implementación eficaz de técnicas de resolución globalmente convergentes basadas en modificaciones del método de Newton.

2. Formulación de las ecuaciones

Consideremos un circuito autónomo al que se le han extraído todas las fuentes de polarización, las líneas de transmisión y los elementos no lineales. Para conseguir una mayor fluidez en la formulación de las ecuaciones, se estudia el caso simplificado con una sola fuente de polarización, una sola línea de transmisión y un solo elemento no lineal representado en la Fig. 1. La generalización para un número arbitrario de dispositivos no presenta, conceptualmente, ninguna dificultad añadida.

Puesto que el multipuerto resultante de la extracción es lineal, aplicamos superposición en el dominio transformado, expresando la variable de control de la no linealidad $X(s)$ de la forma

$$X(s) = H_1(s) \cdot V_b(s) + H_2(s) \cdot F(X) \quad (1)$$

y la variable de salida deseada $Y(s)$ como

$$Y(s) = H_3(s) \cdot V_b(s) + H_4(s) \cdot F(X) \quad (2)$$

donde $H_k(s) = -N_k(s)/D(s)$ es un cociente de polinomios. Con esta notación reescribimos (1) como:

$$D(s) \cdot X(s) + N_1(s) \cdot V_b(s) + N_2(s) \cdot F(X) = 0 \quad (3)$$

Conviene remarcar que $N_k(s)$ y $D(s)$ son polinomios bivariados [1] del tipo

$$P(s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^2 p_{ij} \cdot s^i e^{-s \cdot j \cdot \tau} \quad (4)$$

siendo n el orden del multipuerto lineal y τ el retardo de la línea de transmisión.

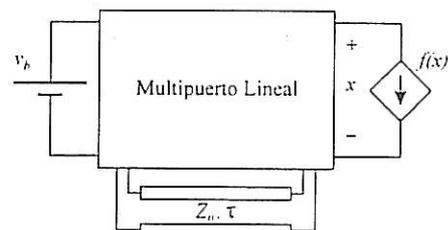


Figura 1

El polinomio $P(s)$ aplicado sobre la transformada de Laplace $U(s)$ de una variable $u(t)$ se puede expresar en el dominio temporal como

$$P(s) \cdot U(s) \xrightarrow{ILT} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^2 p_{ij} \frac{d^i(u(t-j \cdot \tau))}{dt^i} \quad (5)$$

La discretización de (5) aproximando la derivada y los retardos por una combinación lineal de muestras, y la imposición de una solución periódica de periodo T , nos permitirá expresar (3) en forma matricial y obtener así un sistema algebraico no lineal de N ecuaciones y $N+1$ incógnitas: el periodo T y las N muestras de la variable de control x espaciadas $\Delta=T/N$.

3. Discretización de las ecuaciones

Discretizaremos en primer lugar el operador definido por (5), y extenderemos el resultado a la discretización de (3), compuesta por productos formalmente iguales a (5).

En el método de Gear de orden g se aproxima la derivada en el instante $n \cdot \Delta$ interpolando $u(t)$ mediante un polinomio de orden g a partir de la muestra en ese instante y g muestras anteriores. Otras discretizaciones son posibles ([2], [3]).

Dado que la función retardada $j \cdot \tau$ en el instante $n \cdot \Delta$, $u(n \cdot \Delta - j \cdot \tau)$, no coincide en general con una de las muestras, se obtiene su valor interpolando $u(t)$ mediante un polinomio de orden g a partir de la muestra posterior al instante $n \cdot \Delta - j \cdot \tau$ y g muestras anteriores.

Así, definiendo el vector de muestras de $u(t)$

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T \text{ con } u_n = u(n \cdot \Delta)$$

podemos calcular el vector de muestras de $\frac{d(u(t))}{dt}$

$$\dot{\mathbf{u}} = [\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_N]^T \text{ a partir de}$$

$$\dot{u}_n = \left. \frac{d(u(t))}{dt} \right|_{t=n \cdot \Delta} = \sum_{i=0}^g c'_i u_{n-i} \quad (6)$$

y el vector de muestras de $u(t-j \cdot \tau)$

$$\mathbf{u}_j = [u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{jN}]^T \text{ a partir de}$$

$$u_{jn} = u(n \cdot \Delta - j \cdot \tau) = \sum_{i=0}^g d'_{ji} u_{n-k_j-i} \quad (7)$$

donde se define k_j en función de Δ y τ como

$$k_j \cdot \Delta \leq \tau < (k_j + 1) \cdot \Delta.$$

Para el posterior cálculo del jacobiano, será necesario explicitar la dependencia de los coeficientes c'_i y d'_{ji} con el periodo T . Ésta resulta ser

$$c'_i = \frac{1}{\Delta} \cdot c_i = \frac{N}{T} \cdot c_i \quad \text{y} \quad d'_{ji} = \sum_{k=0}^g d_{ik} \cdot e_j^k \quad \text{donde}$$

$e_j = \frac{\tau - k_j \cdot \Delta}{\Delta} = N \cdot \frac{\tau}{T} - k_j$, dependiendo c_i y d_{ik} sólo del orden g de la discretización de Gear usada.

Aplicando las discretizaciones (6) y (7), cada operación definida en (5) puede escribirse como el producto de una matriz $\mathbf{P}(T)$ por un vector \mathbf{u} . En efecto, el cálculo de la derivada de $u(t)$ ($i=1, j=0$) se puede realizar como

$$\frac{d(u(t))}{dt} \xrightarrow{g, N} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{P}_{10}(T) \cdot \mathbf{u}$$

donde se define

$$\mathbf{P}_{10}(T) = \text{circ}(c'_0, c'_1, \dots, c'_g, 0_{g+1}, \dots, 0_{N-1}) = \frac{\mathbf{C}}{\Delta} \quad (8)$$

y \mathbf{C} , independiente de T , viene dado por

$$\mathbf{C} = \text{circ}(c_0, c_1, \dots, c_g, 0_{g+1}, \dots, 0_{N-1}) \quad (9)$$

con la notación

$$\text{circ}(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{N-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & a_{N-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

El cálculo de $u(t)$ sin derivar ($i=0$) y retardada $j \cdot \tau$ se puede realizar como

$$u(t-j \cdot \tau) \xrightarrow{g, N} \mathbf{u}_j = \mathbf{P}_{0j}(T) \cdot \mathbf{u}$$

siendo

$$\mathbf{P}_{0j}(T) = \text{circ}(0_0, \dots, 0_{k_j}, d'_{j0}, \dots, d'_{jg}, 0_{k_j+g+2}, \dots, 0_{N-1}) \quad (10)$$

y donde los coeficientes d'_{ji} se pueden expresar como un polinomio de e_j

$$\begin{bmatrix} d'_{j0} \\ d'_{j1} \\ \vdots \\ d'_{jg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0g} \\ d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{g0} & d_{g1} & \dots & d_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_j^0 \\ e_j^1 \\ \vdots \\ e_j^g \end{bmatrix}$$

o en forma compacta

$$\mathbf{d}_j(T) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_j(T) \quad (11)$$

siendo la matriz \mathbf{D} independiente de T y de j .

Finalmente, la discretización de (5) resulta en el producto de matrices

$$\mathbf{P}(T) \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^2 p_{ij} \cdot \mathbf{P}_{ij}(T) \cdot \mathbf{u} \quad (12)$$

puediendo descomponer $\mathbf{P}_{ij}(T)$ en función de las matrices definidas en (8) y (10) de la forma

$$\mathbf{P}_{ij}(T) = \mathbf{P}_{i0}(T) \cdot \mathbf{P}_{0j}(T) = (\mathbf{P}_{10}(T))^i \cdot \mathbf{P}_{0j}(T) \quad (13)$$

Las matrices $P_{10}(T)$ y $P_{0j}(T)$ provienen de la discretización de la función derivada y de la función retardada $j\tau$ respectivamente. El producto de i matrices $P_{10}(T)$ y de $P_{0j}(T)$ proviene de la discretización de la función derivada i veces y retardada $j\tau$. Al tratarse de matrices circulantes, su producto es conmutativo y el resultado de este producto es otra matriz circulante. Estas propiedades son de interés para resolver el sistema de ecuaciones (12) con un coste computacional reducido.

4. El sistema de ecuaciones resultante

Aplicando esta idea a cada uno de los productos que aparecen en (3), obtenemos una formulación equivalente de la forma

$$D(T) \cdot x + N_1(T) \cdot v_b + N_2(T) \cdot f(x) = 0 \quad (14)$$

donde cada matriz, una vez elegido el tipo de discretización a usar, sólo depende de T . Las matrices $N_1(T)$, $N_2(T)$ y $D(T)$ son combinación lineal de $P_{ij}(T)$, de forma similar a $P(T)$ definida en (12) variando únicamente los coeficientes p_{ij} .

Dado que en circuitos autónomos el periodo T es desconocido, el sistema (14) presenta infinitas soluciones, que únicamente difieren en un retardo arbitrario. Para evitar este problema, se fija una de las muestras de la variable de control x a un valor que, *a priori*, podemos esperar tome la solución. Así, de ahora en adelante supondremos que la primera muestra de las variables que intervienen en el sistema de ecuaciones es conocida.

Para el caso de circuitos autónomos el vector v_b proviene de las fuentes de polarización y tiene todas las muestras de igual valor. De este modo, el operador derivada sobre v_b es cero y el operador retardo da un vector igual a sí mismo. Así, $N_1(T) \cdot v_b = b \cdot v_b$, donde $b = \text{constante}$.

5. Cálculo del jacobiano

La resolución eficaz de (14) pasa por utilizar métodos globalmente convergentes basados en el método de Newton, por lo que es necesario conocer la dependencia de cada una de las N ecuaciones respecto a las N incógnitas del sistema (T, x_2, x_3, \dots, x_N). El cálculo de la columna i -ésima del jacobiano se obtiene derivando (14) respecto a la incógnita i -ésima. Para $i=1$, derivada respecto al periodo T , calcularemos previamente el jacobiano de (12). Así, y dado que las muestras de $u(t)$ no dependen del periodo T

$$\frac{d(P(T) \cdot u)}{dT} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^2 p_{ij} \cdot \frac{d(P_{ij}(T))}{dT} \cdot u. \quad (15)$$

Usando (13) y la regla de la cadena, expresamos

$$\frac{d(P_{ij}(T))}{dT} = \frac{d(P_{i0}(T))}{dT} \cdot P_{0j}(T) + P_{i0}(T) \cdot \frac{d(P_{0j}(T))}{dT}$$

o en forma compacta

$$\dot{P}_{ij}(T) = \dot{P}_{i0}(T) \cdot P_{0j}(T) + P_{i0}(T) \cdot \dot{P}_{0j}(T). \quad (16)$$

El cálculo de la derivada que aparece en el primer producto es inmediata puesto que

$$\dot{P}_{i0} = \frac{d\left(\frac{1}{\Delta^i} \cdot C^i\right)}{dT} = \frac{-i}{T} \cdot P_{i0}. \quad (17)$$

Para el cálculo de la derivada que aparece en el segundo producto, conviene recordar la dependencia de $P_{0j}(T)$ con $e_j(T)$ según (10) y (11). En primer lugar definimos

$$\dot{P}_{0j}(T) = \text{circ}(0_0, \dots, 0_{k_j}, \dot{d}'_{j0}, \dots, \dot{d}'_{jg}, 0_{k_j+g+2}, \dots, 0_{N-1}) \quad (18)$$

donde

$$\dot{d}'_j(T) = [\dot{d}'_{j0}, \dot{d}'_{j1}, \dots, \dot{d}'_{jg}] = \frac{d(d_j(T))}{dT}. \quad (19)$$

Ahora el problema se reduce a derivar (11).

Así,

$$\dot{d}'_j(T) = D \cdot \frac{d(e_j(T))}{dT} = \frac{-1}{T} D \cdot K_j \cdot e_j(T) \quad (20)$$

donde

$$K_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_j & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 \cdot k_j & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g \cdot k_j & g \end{bmatrix} \quad (21)$$

Una vez calculadas las matrices $\dot{P}_{ij}(T)$ el cálculo de $\dot{N}_1(T)$, $\dot{N}_2(T)$ y $\dot{D}(T)$ es inmediato dado que $N_1(T)$, $N_2(T)$ y $D(T)$ de (14) son combinación lineal de las matrices $P_{ij}(T)$. Así pues, la primera columna del jacobiano se expresa analíticamente

$$J(:, 1) = \dot{D}(T) \cdot x + \dot{N}_1(T) \cdot v_b + \dot{N}_2(T) \cdot f(x) \quad (22)$$

con $\dot{N}_1(T)$, $\dot{N}_2(T)$ y $\dot{D}(T)$ combinación lineal de las matrices $\dot{P}_{ij}(T)$ con igual peso que sus antecesoras $P_{ij}(T)$ en $N_1(T)$, $N_2(T)$ y $D(T)$.

El resto de las columnas del jacobiano se determinan fácilmente ya que sólo los vectores x y $f(x)$ dependen de las $N-1$ muestras desconocidas, y sus derivadas parciales son inmediatas (considerando $f(x)$ analítica). Así pues, las restantes columnas del jacobiano se expresan analíticamente

$$J(:, 2:N) = D(:, 2:N) + N_2(:, 2:N) \cdot F'(x) \quad (23)$$

con

$$F'(x) = \text{diag}(f'(x_2), \dots, f'(x_N)) \quad (24)$$

$$y f'(x_k) = \frac{d(f(x))}{dx} \Big|_{x=x_k}$$

La expresión (23) no difiere formalmente de la que se obtendría en el caso de analizar circuitos de parámetros concentrados [4].

6. Aplicación al circuito de Chua retardado

La técnica detallada se ha aplicado a la determinación del régimen permanente de la variable de control v de la no linealidad del circuito de Chua retardado de la Fig. 2. Los valores normalizados de los parámetros, con cuatro cifras significativas, que aparecen en el circuito son $Z_0=0.4243$, $\tau=4.423$, $R=1.4$ y $C=1$. La relación $i-v$ de la no linealidad correspondiente al diodo de Chua se representa en la Fig. 3 con $V_1=1$, $V_2=8$, $m_0=-0.7576$, $m_1=-0.4091$ y $m_2=4.546$.

Se ha usado la discretización de Gear de segundo orden ($g=2$). Para esta discretización los valores de los coeficientes c_i y d_{ik} son

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -2 \\ 0.5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La inicialización del proceso iterativo se ha realizado con $N=32$ muestras de una señal senoidal de periodo $T_i=16$ s y amplitud $A_i=12$ V, obteniéndose la forma de onda de la Fig. 4 de periodo $T=20.45$ s y amplitud máxima $A=8.567$ V que corresponde a un círculo límite en el plano de fase. Los resultados concuerdan totalmente con los obtenidos usando PSpice.

7. Conclusiones

Se ha presentado un nuevo método para la determinación del régimen permanente de circuitos autónomos no lineales con parámetros distribuidos. El método se basa en la discretización en el dominio temporal de las ecuaciones que describen el circuito, reduciendo el problema inicial, la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales con diferencias no lineales, a la resolución de un sistema de ecuaciones algebraico no lineal.

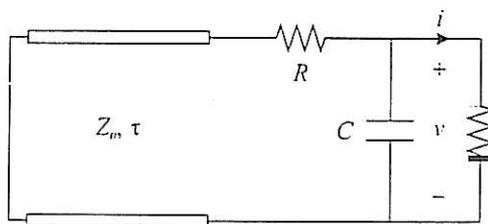


Figura 2

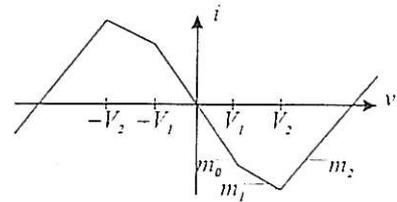


Figura 3

Para la resolución eficaz del sistema de ecuaciones obtenido, se han implementado algoritmos globalmente convergentes, basados en modificaciones del método de Newton. Para ello se requiere el conocimiento del jacobiano [5]. Por esta razón, se ha descrito con detalle el cálculo analítico exacto de las derivadas parciales que lo componen para discretizaciones de Gear.

Para la validación del método, éste se ha aplicado a la determinación del régimen permanente del circuito de Chua retardado en una de sus ventanas periódicas, un ejemplo paradigmático del tipo de circuitos a los que hace referencia esta comunicación. Los resultados concuerdan plenamente con los obtenidos usando técnicas de integración, sin necesidad de calcular todo el transitorio.

Referencias

- [1] Hosny, E.A. and Sobhy, M.I., "Analysis of Chaotic Behavior in Lumped-Distributed Circuits Applied to the Time-Delayed Chua's Circuit", *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 41, 12, 915-918 (1994).
- [2] Schneider, A.M., Kaneshige, J.T. and Groutage, F. D., "Higher Order s -to- z Mapping Functions and Their Application in Digitizing Continuous-Time Filters", *Proceedings of the IEEE*, 79, 11, 1661-1674 (1991).
- [3] Kowalczyk, Z., "Discrete Approximation of Continuous-Time Systems: A Survey", *IEE Proceedings-G*, 140, 4, 264-278 (1993).
- [4] Palà, P. and Miró, J.M., "A Discrete-Time Approach to the Steady-State Analysis and Optimization of Non-Linear Autonomous Circuits", *International Journal on Circuit Theory and Applications, Special Issue on Analog Tools for Circuit Design*, 23, 297-310 (1995).
- [5] Dennis, J.E., and Schnabel, R.B., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall (1983).

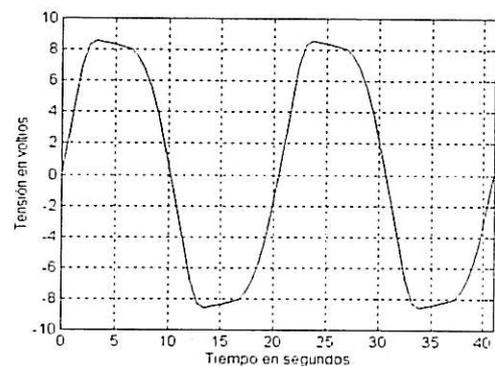


Figura 4