

ANEJO A

CÁLCULO PLÁSTICO DE LOSAS

A.1 ANÁLISIS PLÁSTICO

En este apartado se utilizará el análisis plástico para hallar la carga última o de rotura de diferentes losas de forjado. La elección de las condiciones de las losas calculadas, se ha hecho de manera que juntando los distintos tipos calculados, pudiéramos configurar una gran mayoría de forjados de edificios soportados con pilares.

A.1.1 Placas de planta rectangular con 4 lados empotrados

Esta configuración de forjado, es una de las más habituales, representa una placa de centro de forjado, por lo tanto siempre que existan más de 3 hileras de pilares en cada dirección:

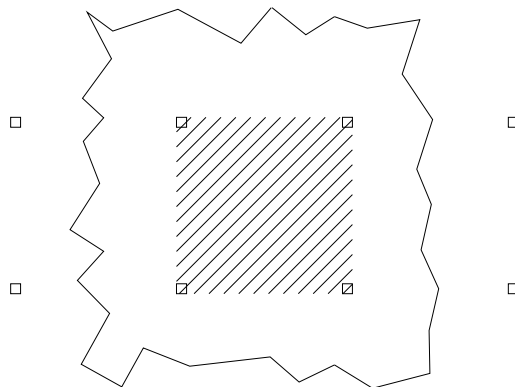


Figura A- 1 Placa de centro de forjado

En este caso y de forma conceptual, se entiende que es una placa empotrada por sus cuatro lados, estos funcionarían como apoyos lineales de la placa, por lo tanto y según lo comentado en el capítulo 3, los ejes de giro de los trozos de placa rota, pasarán justamente por estos “apoyos lineales”.

El mecanismo más común en este tipo de placa es el expuesto en la figura A-2, además en este caso viene abalado por la experiencia.

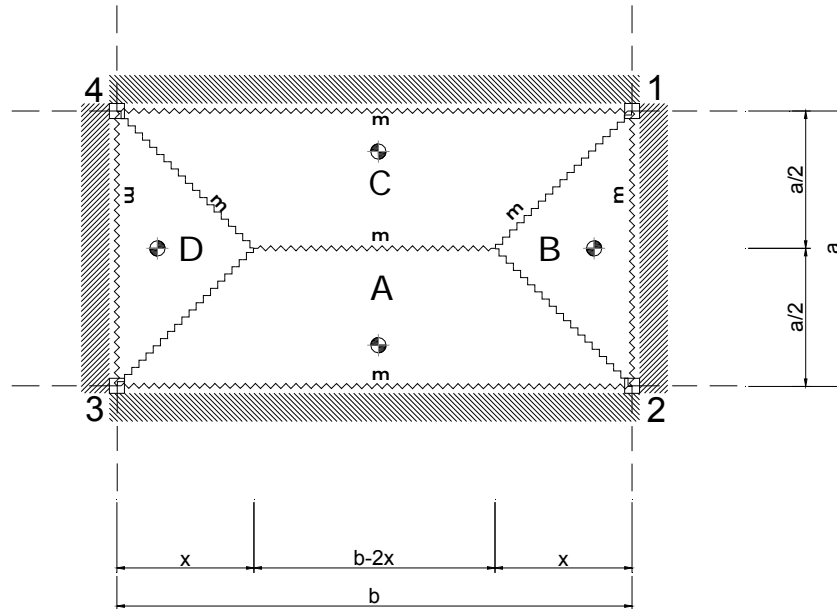


Figura A- 2 Mecanismo placa rectangular con 4 lados empotrados.

Este caso concreto, es el que se ha resuelto en el capítulo 3, mediante el método de los trabajos virtuales. En este caso se va a resolver mediante el método del equilibrio:

Planteando equilibrio del trozo A (ecuación (A.1)):

$$2mb = q \left[2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{3} + (b - 2x) \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} \right] \quad (A.1)$$

Despejando el momento (ecuación (A.2)):

$$m = q \frac{a^2}{48b} (3b - 4x) \quad (A.2)$$

Planteando equilibrio del trozo B (ecuación (A.3)):

$$2ma = q \cdot a \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \quad (A.3)$$

Aislando “m” (ecuación (A.4)):

$$m = q \frac{x^2}{12} \quad (A.4)$$

Se Igualan momentos (ecuación (A.5)):

$$\frac{x^2}{12} = \frac{a^2}{48b}(3b - 4x) \tag{A.5}$$

Se llega a la solución de x (ecuación (A.6)):

$$x = \frac{-4a^2 \pm \sqrt{16a^4 + 48b^2a^2}}{8b} \tag{A.6}$$

La solución aparentemente es distinta a la hallada anteriormente por el método de los trabajos virtuales, pero probando con algunos valores obtenemos el mismo resultado:

a (m)	b (m)	Método del equilibrio		Método de los trabajos virtuales	
		x (m)	q _u (kN/m ²)	x	q _u (kN/m ²)
6	6	3,00	51,32	3,00	51,32
6	10	3,70	33,76	3,70	33,76
6	14	4,07	27,92	4,07	27,92
10	10	5,00	18,48	5,00	18,48
10	14	5,80	13,75	5,80	13,75
10	18	6,32	11,58	6,32	11,58
14	14	7,00	9,43	7,00	9,43
14	18	7,85	7,50	7,85	7,50
14	22	8,46	6,45	8,46	6,45

Tabla A-1 Resultados método equilibrio-trabajos virtuales (Placa 4 lados empotrados).

Como se puede observar los resultados por ambos métodos son exactamente los mismos, aunque con el método de equilibrio resultan bastante más sencillos.

Por otro lado en placas cuadradas, la x es siempre la mitad de los lados con lo cual las líneas de rotura coinciden con la diagonales del cuadrado.

Para este caso en concreto, se puede utilizar otro mecanismo de rotura, el de tipo ventilador (con líneas de rotura radiales al centro de la placa), aunque este tipo de mecanismo es más común utilizar-lo en casos con una carga puntual actuando al centro del vano.

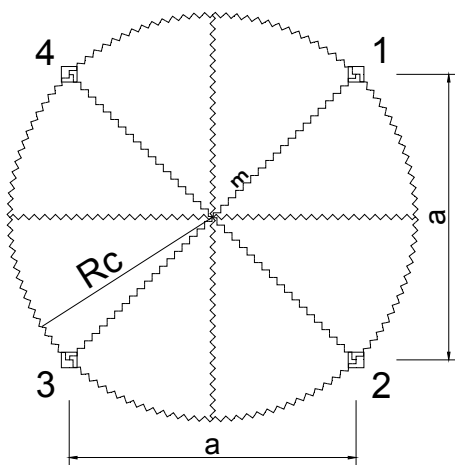


Figura A-3 Mecanismo circular.

Resolviendo el mecanismo por el método de equilibrio:

Se supone que la placa queda dividida en “n” trozos y se aplica equilibrio en un trozo cualquiera (ecuación (A.7)).

$$2m \frac{2\pi R}{n} = q \frac{\pi R^2}{n} \cdot \frac{R}{3} \tag{A.7}$$

Simplificando y aislando q (ecuación (A.8)):

$$q = m \frac{12}{R^2} \tag{A.8}$$

Teniendo en cuenta que al ser una circunferencia circunscrita dentro de la losa, la relación entre el radio y la luz del vano será: $R = a/(2 \cos(45))$, y sustituyendo (ecuación (A.9)):

$$q = m \frac{24}{a^2} \tag{A.9}$$

Según la experiencia este mecanismo se aproxima más a la configuración real de rotura. También como se puede comprobar, para los casos de placa cuadrada (a = b), los resultados del parámetro “x”, era igual a la mitad del lado (a/2) con lo cual el valor de la carga de rotura en el caso del mecanismo circular es la mitad que en el de diagonales.

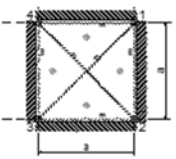
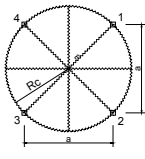
Mecanismo de rotura		
		
a (m)	q _u (kN/m ²)	q _u (kN/m ²)
4	115,48	57,74
6	51,32	25,66
8	28,87	14,44
10	18,48	9,24
12	12,83	6,42
14	9,43	4,71

Tabla A- 2 Resultados placa cuadrada con 4 lados empotrados y carga repartida

Según revelaron ensayos a escala real realizados Bissen (2004, Gossila, Pepin and Espion) y Tallin (2007, Mandl), que se realizaron en una placa de HRFA, soportada por una cuadrícula de 4 hileras de pilares en cada dirección, el mecanismo de rotura circular se puede utilizar para plaques de borde y de canto aplicando un coeficiente de minoración “r”:

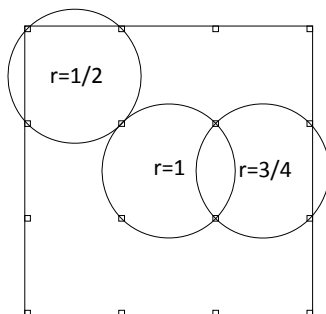


Figura A- 4 Coeficientes para mecanismo circular

Con lo que la carga de rotura para cada placa acabaría quedando:

- Placa de centro (ecuación (A.9)):

$$q = m \frac{24}{a^2} \tag{A.9}$$

- Placa de borde (ecuación (A.10)):

$$q = m \frac{18}{a^2} \tag{A.10}$$

- Placa de *esquina* (ecuación (A.11)):

$$q = m \frac{12}{a^2} \tag{A.11}$$

A.1.2 Placa de planta rectangular con 3 bordes empotrados

En este caso, se centra la atención a las placas de lateral de forjados:

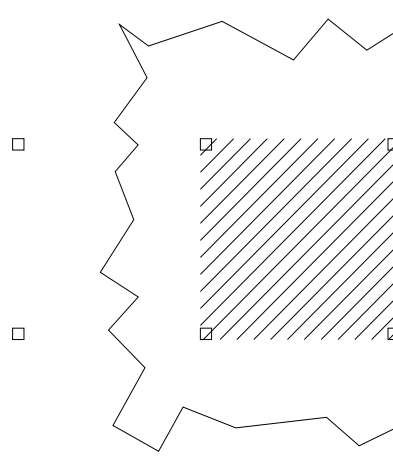


Figura A- 5 Placa de lateral de forjado

El mecanismo más probable se mostró ya en el capítulo 3, es el de la figura siguiente:

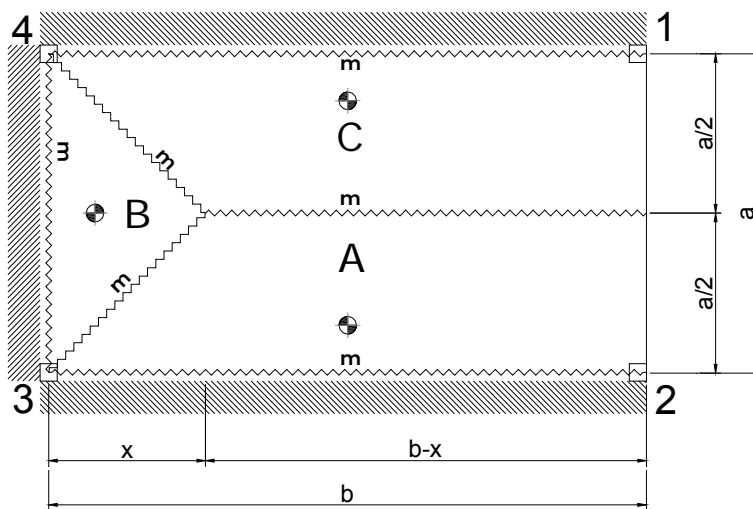


Figura A- 6 Placa de borde de forjado con tres lados empotrados y carga repartida

Este caso en concreto se ha resuelto por el método del equilibrio en el capítulo 3, a continuación se prosigue resolviendo mediante el método de trabajos virtuales.

Para hacer el cálculo es necesario suponer los giros y desplazamientos virtuales de los trozos de losa:

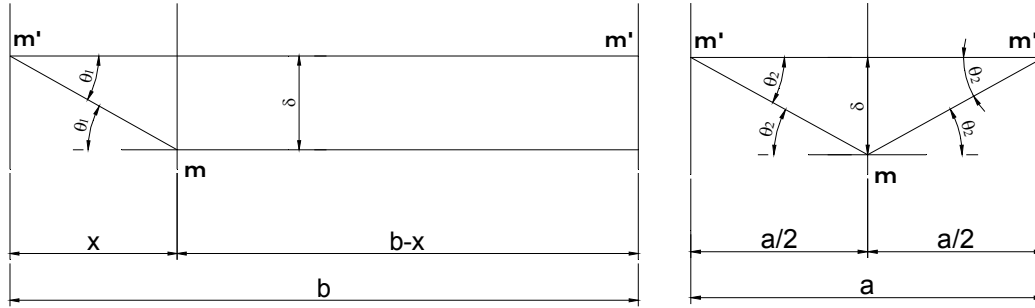


Figura A- 7 Sección longitudinal y transversal del mecanismo de rotura (Placa 3 lados empotrados)

Cálculo de los trabajos realizados por las fuerzas externas (carga repartida “q”) (ecuación (A.12)):

$$\sum q \cdot s_i \cdot \delta_i = q \cdot s_A \cdot \delta \frac{y_{cdgA}}{a/2} + q \cdot s_B \cdot \delta \frac{y_{cdgB}}{x} + q \cdot s_C \cdot \delta \frac{x_{cdgC}}{a/2} \quad (A.12)$$

Se substituyen los valores reales según la geometría (ecuación (A.13)),

$$q * \left[2 \left(x \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{3} + (b-x) \frac{a}{2} \cdot \frac{\delta}{2} \right) + \left(a \cdot x \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{3} \right) \right] \quad (A.13)$$

Simplificando teniendo en cuenta $\delta = 1$ (ecuación (A.14))

$$\sum Q_i \cdot \delta_i = q \cdot a \cdot \frac{3b-x}{6} \quad (A.14)$$

Ecuación [1]

Cálculo del trabajo realizado por las fuerzas internas (ecuación (A.15)):

$$\sum m_i \cdot a_i \cdot \theta_i = 2(m' \cdot b \cdot \theta_2 + m \cdot b \cdot \theta_2) + m' \cdot a \cdot \theta_1 + m \cdot a \cdot \theta_1 \quad (A.15)$$

Teniendo en cuenta $m' = m, \theta_1 \cong \frac{\delta}{x}, \theta_2 \cong \frac{\delta}{a/2}$ y $\delta = 1$ entonces se llega a (ecuación (A.16)):

$$\sum m_i \cdot a_i \cdot \theta_i = m \left(2 \frac{a}{x} + 8 \frac{b}{a} \right) \quad (A.16)$$

Ecuación [2]

Iguando las ecuaciones [1] y [2] (ecuación (A.17)):

$$q \cdot a \cdot \frac{3b-x}{6} = m \left(2 \frac{a}{x} + 8 \frac{b}{a} \right) \quad (A.17)$$

Aislado “q” (ecuación (A.18)):

$$q = \frac{12ma^2 + 48mbx}{3ba^2x - a^2x^2} \quad (A.18)$$

Para minimizar q función de x (ecuación (A.19)):

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{48mb(3ba^2x - a^2x^2) - (12ma^2 + 48mbx)(3ba^2 - 2a^2x)}{(3ba^2x - a^2x^2)^2} = 0 \quad (A.19)$$

Operando se llega a (ecuación (A.20)):

$$48mba^2x^2 + 24ma^4x - 36mba^4 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{a^4 + 12b^2a^2} - a^2}{4b} \quad (A.20)$$

Como se observa, la solución analítica a la que se llega para el valor de x es la misma exactamente que con el método del equilibrio.

A continuación se expone una serie de evaluaciones numéricas comparado el resultado de la carga repartida última con ambos métodos:

a (m)	b (m)	Método del equilibrio		Método de los trabajos virtuales	
		x (m)	q _u (kN/m ²)	x	q _u (kN/m ²)
6	6	3,91	30,24	3,91	30,24
6	10	4,37	24,15	4,37	24,15
6	14	4,59	21,90	4,59	21,90
10	10	6,51	10,89	6,51	10,89
10	14	7,06	9,28	7,06	9,28
10	18	7,38	8,48	7,38	8,48
14	14	9,12	5,55	9,12	5,55
14	18	9,70	4,91	9,70	4,91
14	22	10,10	4,53	10,10	4,53

Tabla A- 3 Resultados para losa con tres lados empotrados

A.1.3 Placas de planta rectangular con 2 bordes empotrados (placa de esquina)

Este caso es el típico de una placa de esquina.

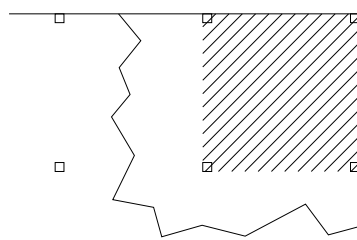


Figura A- 8 Placa de esquina de forjado

Una de las posibles soluciones es la que se ha dado en el apartado A.1.1 con un mecanismo circular y aplicando un coeficiente de minoración a la mitad de su valor, pero sólo sirve para una placa cuadrada.

En este caso se va a resolver para una placa rectangular y con métodos mixtos debido al incremento de incógnitas que supone su resolución, que se traduce en una notable complicación para hallar una solución analítica.

Uno de los mecanismos de rotura compatibles y que resulta avalado por la experiencia, es el siguiente:

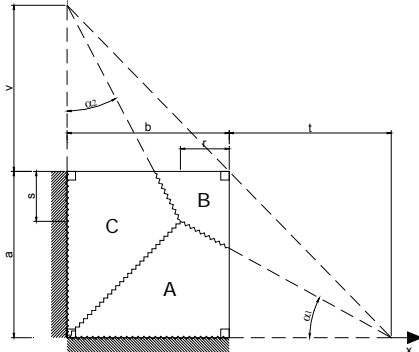


Figura - 9 Mecanismo de rotura placa de canto de forjado con carga uniformemente repartida

En este caso se obtienen 4 incógnitas (parámetros r , s y t y la carga de rotura q), se plantea el equilibrio de momentos en cada trozo de placa y en el caso del trozo B, respecto 2 ejes diferentes x e y para obtener la 4 ecuaciones que hacen falta.

Se empieza con el cálculo de parámetros geométricos del mecanismo (ecuaciones (A.21), (A.22) y (A.23)):

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{a-s}{t+r} \right) \quad (A.21) \quad \alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{b-r}{v+s} \right); \quad (A.22)$$

$$v = \frac{(b+t)a}{t} - a \quad (A.23)$$

Cálculo de las áreas de cada trozo (ecuaciones (A.24), (A.25) y (A.26)):

$$S_A = \frac{(b+t)(a-s)}{2} - t^2 \tan \alpha_1 \frac{1}{2} \quad (A.24)$$

$$S_B = rs + \frac{r(a-s-t \tan \alpha_1)}{2} + \frac{s(b-r-v \tan \alpha_2)}{2} \quad (A.25)$$

$$S_C = \frac{(a+v)(b-r)}{2} - v^2 \tan \alpha_2 \frac{1}{2} \quad (A.26)$$

Cálculo de los centros de gravedad (ecuaciones (A.27), (A.28), (A.29) y (A.30)):

$$CdgA_x = \frac{(a-s)^2(b+t) - t^3(\tan \alpha_1)^2}{6S_A} \quad (A.27)$$

$$CdgB_x = \frac{rs^2 + r(a-s-t \tan \alpha_1) \left(\frac{a-s-t \tan \alpha_1}{3} + s \right) + \frac{s^2}{3} (b-r-v \tan \alpha_2)}{2S_B} \quad (A.28)$$

$$CdgB_y = \frac{sr^2 + s(b-r-v \tan \alpha_2) \left(\frac{b-r-v \tan \alpha_2}{3} + r \right) + \frac{r^2}{3} (a-s-t \tan \alpha_1)}{2S_B} \quad (A.29)$$

$$CdGC_y = \frac{(b-r)^2(v+a) - v^3(\tan \alpha_2)^2}{6S_C} \quad (A.30)$$

Planteamiento del equilibrio en cada trozo:

- Trozo A respecto el eje x (ecuación (A.31)):

$$q_{Ax} = \frac{2mb}{S_A \cdot CdGA_x} \quad (A.31)$$

- Trozo B respecto el eje x (ecuación (A.32)):

$$q_{Bx} = \frac{m(r+s \cdot \tan \alpha_2)}{S_B \cdot CdGB_x} \quad (A.32)$$

- Trozo B respecto el eje y (ecuación (A.33)):

$$q_{By} = \frac{m(s+r \cdot \tan \alpha_1)}{S_B \cdot CdGB_y} \quad (A.33)$$

- Trozo C respecto el eje y (ecuación (A.34)):

$$q_{Cy} = \frac{2ma}{S_C \cdot CdGC_y} \quad (A.34)$$

Resolviendo estas ecuaciones se puede obtener los valores de r , s , t , v y q .

Dada la dificultad para resolver analíticamente las ecuaciones anteriores, se ha optado por aplicar un método numérico para hallar una solución aproximada. En la tabla A-4 se muestran algunos resultados encontrados con un método iterativo y para el caso concreto de $a=b$, el proceso ha sido iterar con los parámetros hasta llegar a valores de carga coincidentes en cada una de las ecuaciones (para trozo A, B, y C):

Si se comparan estos resultados con los que se obtendrían con el mecanismo circular del apartado 5.2.1 se puede observar que con el mecanismo circular la carga de rotura es aproximadamente un 32% menor que con este sistema, por lo tanto es preferible usar el mecanismo circular a este, para placas con $a=b$.

a	b	qA	qBx	qBy	qC	r	s	t
6	6	18,9940	18,9877	18,9877	18,9940	1,857	1,857	6
8	8	10,6811	10,6887	10,6887	10,6811	2,475	2,475	8
10	10	6,8379	6,8356	6,8356	6,8379	3,095	3,095	10
12	12	4,7485	4,7469	4,7469	4,7485	3,714	3,714	12
14	14	3,4887	3,4875	3,4875	3,4887	4,333	4,333	14
16	16	2,6710	2,6701	2,6701	2,6710	4,952	4,952	16
18	18	2,1104	2,1097	2,1097	2,1104	5,571	5,571	18

Tabla A- 4 Resultados con proceso iterativo. Placa de esquina con carga uniformemente repartida.

Si se comparan estos resultados con los que se obtendrían con el mecanismo circular del apartado 5.2.1 se puede observar que con el mecanismo circular la carga de rotura es aproximadamente un 32% menor que con este sistema, por lo tanto es preferible usar el mecanismo circular a este, para placas con $a=b$.

Otra forma mucho más simplificada para calcular esta placa, es la propuesta en la norma ACI 544.6R-15, en este caso se trata del cálculo de un mecanismo global (que abarca más de un vano de la estructura):

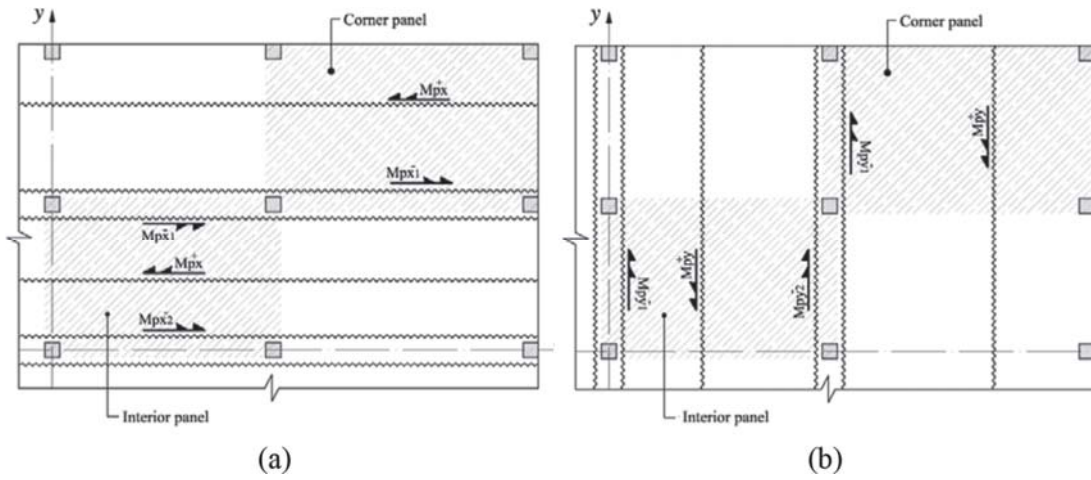


Figura A- 10 Mecanismos de rotura globales para placas soportadas en una retícula de pilares a) en dirección x b) en dirección y

El planteamiento se hace mediante el equilibrio de los trabajos virtuales:

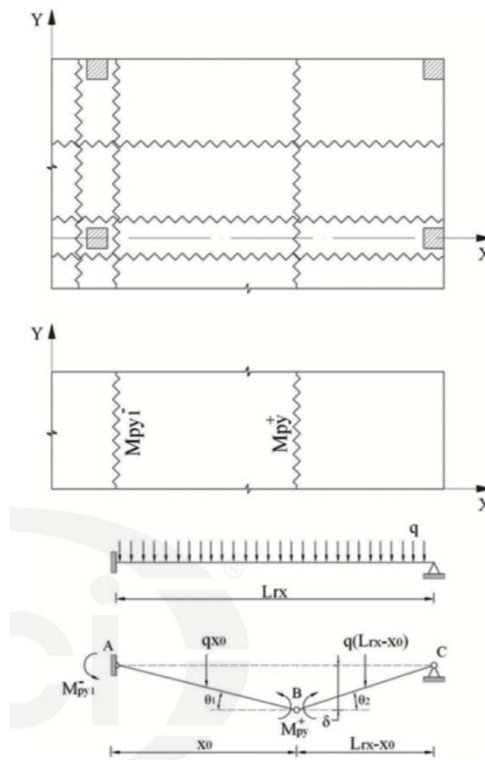


Figura A- 11 Mecanismo global para una placa de esquina de forjado.

Aplicando el principio de trabajos virtuales para el segmento A-B (ecuación (A.35)):

$$M_{py1}^-(\theta_1) + M_{py}^+(\theta_1) = q_u x_0 \frac{\delta}{2} = q_u x_0 \left(\frac{x_0 \theta_1}{2} \right) \zeta \tag{A.35}$$

$$M_{py1}^- + M_{py}^+ = \frac{q_u x_0^2}{2}$$

Aplicando el principio de trabajos virtuales para el segmento B-C(ecuación (A.36)):

$$M_{py}^+(\theta_2) = q_u(L_{rx} - x_0) \frac{\delta}{2} = q_u(L_{rx} - x_0) \left(\frac{(L_{rx} - x_0)\theta_2}{2} \right) \quad (A.36)$$

$$M_{py}^+ = \frac{q_u(L_{rx} - x_0)^2}{2}$$

Si se supone un coeficiente que relacione los momentos positivos y negativos como $\phi_{y1} = M_{py1}^- / M_{py}^+$ y se opera como en el caso mostrado en el capítulo 3, se llega a (ecuación (A.37)):

$$x_0 = L_{rx} \left(\frac{\sqrt{(1 + \phi_{y1})}}{\sqrt{(1 + \phi_{y1}) + 1}} \right) \quad (A.37)$$

Substituyendo x_0 en las expresiones anteriores, se puede hallar el valor de los momentos o de las cargas últimas (ecuación (A.38)).

$$M_{py}^+ = \frac{q_u L_{rx}^2}{2 \left(1 + \sqrt{(1 + \phi_{y1})} \right)^2} \quad (A.38)$$

Si se tiene en cuenta que se está utilizando el HRFA que supone homogeneidad e isotropía macroscópica, $\phi_{y1} = 1$, entonces se puede llegar a (ecuaciones (A.39), (A.40) y (A.41)):

$$M_{py}^+ = \frac{q_u L_{rx}^2}{6 + 4\sqrt{2}}, \quad \text{para la otra dirección,} \quad (A.39) \quad M_{px}^+ = \frac{q_u L_{ry}^2}{6 + 4\sqrt{2}} \quad (A.40)$$

$$x_0 = L_{rx} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \quad (A.41)$$

El lado mayor siempre será el que marcará la carga menor de colapso, por lo tanto la más probable.

A.1.4 Placas de planta rectangular con 2 bordes opuestos empotrados

Este caso es típico en forjados con sólo 2 hileras de pilares. El mecanismo de rotura más intuitivo y compatible con los requisitos del método es el siguiente:

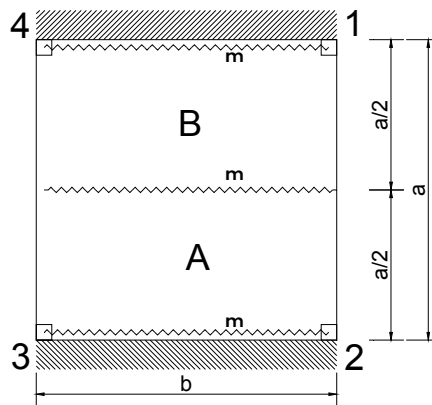


Figura A- 12 Mecanismo placa con dos lados opuestos empotrados y carga uniformemente repartida.

Este caso se resolverá por equilibrio de trabajos virtuales (ecuación (A.42)):

Trabajos fuerza externas = trabajo de las fuerza internas:

$$\sum q \cdot s_i \cdot \delta_i = q \left[2 \left(b \frac{a}{2} \cdot \frac{\delta}{2} \right) \right] = \sum m_i \cdot a_i \cdot \theta_i = 4mb\theta = 4mb \frac{\delta}{a/2} \quad (A.42)$$

Aislado q (ecuación (A.43)):

$$q = \frac{16m}{a^2} \quad (A.43)$$

Carga de rotura de la placa en función del momento de diseño.

A.1.5 Placas de planta rectangular con 1 borde empotrado

En este caso se tratará de resolver mediante dos mecanismos de rotura diferentes. En primer lugar con uno muy simple y básico, y en segundo lugar otro mecanismo más ajustado a la realidad pero algo más complicado de resolver.

Primer mecanismo:

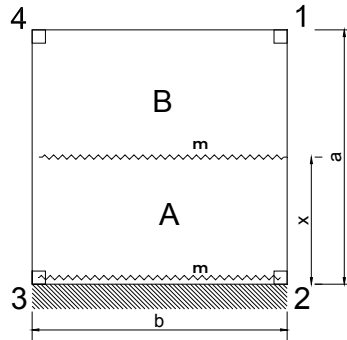


Figura A- 13 Mecanismo de placa rectangular con un lado empotrado y carga uniformemente repartida.

En este caso se resolverá directamente por el método del equilibrio (ecuación (A.44)):

$$2mb = q_A (bx) \frac{x}{2}; \quad mb = q_B b (a - x)^2 \frac{1}{2} \quad (A.44)$$

Se igualan cargas y se opera hasta llegar a (ecuación (A.45)):

$$x = a(2 - \sqrt{2}); \quad q = \frac{4m}{x^2} \quad (A.45)$$

Otro mecanismo de rotura posible, es el que se ha utilizado en el capítulo 3 y se ha resuelto mediante un método mixto, debido a su dificultad matemática, se ha combinado el método de los

trabajos virtuales con un proceso iterativo para hallar los valores de x e y que minimizan la carga última.

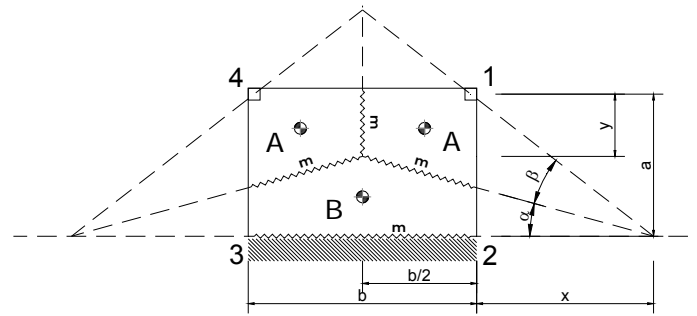


Figura A- 14 Mecanismo placa rectangular con un lado empotrado y carga uniformemente repartida.

A.1.6 Placas de planta rectangular con todos los bordes libres

En este caso se pretende calcular la carga última de rotura para un forjado rectangular apoyado sobre cuatro pilares y con todos sus lados libres (sin ninguna vinculación más que los apoyos).

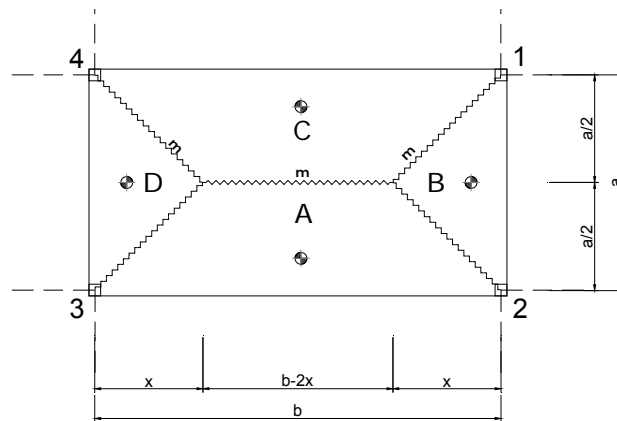


Figura A- 15 Mecanismo de rotura placa rectangular 4 bordes libres y carga uniformemente repartida.

Se resuelve mediante el método del equilibrio:

Equilibrio de momentos trozo A (ecuación (A.46)):

$$mb = q \left[2x \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{6} + (b - 2x) \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} \right]; \quad m = q \frac{a^2}{24b} (3b - 4x) \tag{A.46}$$

Equilibrio de momentos trozo B (ecuación (A.47)):

$$ma = qax \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3}; \quad m = q \frac{x^2}{6} \tag{A.47}$$

Igualando y resolviendo (ecuación (A.48)):

$$x = \frac{-a^2 + a\sqrt{a^2 + 3b^2}}{2b} \tag{A.48}$$

Otro posible mecanismo de rotura es el siguiente:

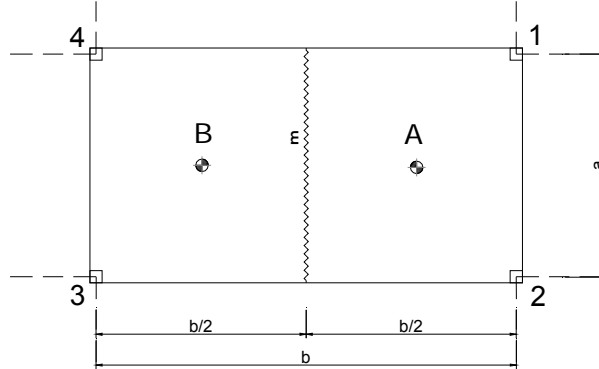


Figura A- 16 Mecanismo de rotura placa rectangular 4 bordes libres y carga uniformemente repartida.

Este mecanismo se aplica en una dirección, la de la luz entre pilares más importante que con una losa funcionando de forma isótropa es el lado más desfavorable.

Aplicando equilibrio (ecuación (A.49)):

$$ma = qa \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{4} \tag{A.49}$$

Simplificando (ecuación (A.50)):

$$m = q \frac{b^2}{8} \tag{A.50}$$

En el caso de $a=b$ se podría aplicar también el mecanismo circular (con n trozos):

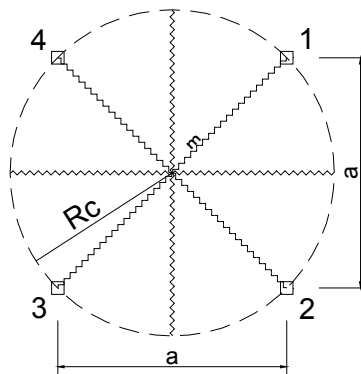


Figura A- 17 Mecanismo circular para placa con 4 bordes libres y carga uniformemente repartida.

Se puede resolver fácilmente aplicando el método del equilibrio, según sigue (ecuación (A.51)):

$$m \frac{2\pi R_c}{n} = q \frac{\pi R_c^2 R_c}{n \cdot 3} \quad (A.51)$$

Llegando a (ecuación (A.52)):

$$m = \frac{q R_c^2}{6} \quad (A.52)$$

Teniendo en cuenta que es una circunferencia circunscrita, $R_c = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\cos 45} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, si se substituye (ecuación (A.53)):

$$m = q \frac{a^2}{12} \quad (A.53)$$

Resultando finalmente que el primer mecanismo calculado en este apartado, es el que tiene como solución una carga de rotura menor y por lo tanto mayor probabilidad de producirse.