Escola de Camins
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports
UPC BARCELONATECH

TRABAJO FINAL DE GRADO

Diseño de canales en condiciones de flujo espacialmente variado

Trabajo realizado por:
Jesús Daniel Mondragón Asprilla

Dirigido por:
Manuel Gómez Valentín

Grado en:
Ingeniería de obras públicas

Barcelona, 23/09/2016

Departamento de Ingeniería Hidráulica, Marítima y Ambiental.

Índice

Índice de ilustraciones 4

Índice de tablas. 6

Abstract 8

Resum 9

Resumen 10

I. Introducción 11

II. Objetivos 13

III. Metodología del trabajo. 15

IV. Aplicaciones 18

Aliviaderos laterales de las presas. 18

Canales de drenaje de calles y carreteras. 19

Canaletas de tejados. 21

V. Principios básicos 23

Velocidad media. 24

Coeficiente de distribución de velocidades. 24

Coeficiente de Coriolis 24

Coeficiente de Boussinesq. 25

Ecuación de la continuidad. 26

Ecuación de la energía o ecuación de Bernoulli. 27

Ecuación de la cantidad de movimiento o momentum. 28

VI. Explicación teórica del régimen espacialmente variado. 30

Determinación de la sección de control. 34

Métodos de resolución de la ecuación de flujo espacialmente variado..... 40

Método modificado de Hinds. 40

Método de Euler modificado o de Heun..... 42

Método de Runge-Kutta de cuarto orden..... 44

Método de Kutta-Merson. 45

Convergencia de los métodos 46

VII. Validación de los resultados del código numérico. 49

Validación de resultados nº1..... 50

Validación de resultados 1.A. 50

Validación de los resultados 1.B..... 52

Validación de resultados nº2..... 54

Validación de los resultados 2.A..... 54

Validación de los resultados 2.B..... 56

Validación de resultados nº3..... 58

Validación de resultados nº4..... 61

Validación de resultados nº5..... 64

Sección del canal forma de “U”..... 66

VIII. Conclusión..... 69

Bibliografía 71

Apéndice A. Propiedades geométricas de las secciones. 72

Sección Transversal Rectangular 73

Sección Transversal Triangular 74

Sección Transversal Trapezoidal..... 75

Sección Transversal Circular 76

Sección Transversal en U. 80

Apéndice B. Método de optimización utilizado en MATLAB..... 84

Apéndice C. Guía de cómo utilizar el programa. 85

Ventana de introducción de los datos previos del problema. 85

Ventana de cálculo y representación gráfica de los resultados. 87

Ventana de visualización de los resultados obtenidos. 88

Índice de ilustraciones

Ilustración 1 Presa Hoover, entre Arizona y Nevada, EE. UU. 18

Ilustración 2 Presa Hoover, entre Arizona y Nevada, EE. UU. 18

Ilustración 3 Embalse de la Fuensanta, Albacete, España 19

Ilustración 4 Esquema aliviadero lateral 19

Ilustración 5 Canales de drenaje de calles 20

Ilustración 6 Esquema canal de drenaje de calles 20

Ilustración 7 Canal de drenaje de carreteras 21

Ilustración 8 Esquema canal de drenaje de carreteras 21

Ilustración 9 Canaleta de recogida de aguas pluviales de tejados. 22

Ilustración 10 Esquema canaleta de recogida de aguas pluviales de tejados.. 22

Ilustración 11 Distribución de velocidades en distintas secciones de canales . 23

Ilustración 12 Energía total en una sección de un canal 27

Ilustración 13 Componentes de la energía por unidad de peso 27

Ilustración 14 Volumen de control para definir la Ec. Cantidad de movimiento 29

Ilustración 15 Volumen de control para definir la Ec. FEV 31

Ilustración 16 Sección de control situada aguas abajo del canal 35

Ilustración 17 Sección de control localizada en el canal 35

Ilustración 18 Sección de control situada aguas arriba del canal 36

Ilustración 19 Estimación de la pendiente (Chapra & Canale, 2007) 43

Ilustración 20 Pendiente estimadas RK4 (Chapra & Canale, 2007) 44

Ilustración 21 Resultados gráficos 1.A: Froude y Perfil de lámina de agua..... 51

Ilustración 22 Resultados gráficos 1.B: Froude y Perfil de lámina de agua..... 53

Ilustración 23 Resultados gráficos 2.A: Froude y Perfil de lámina de agua..... 55

Ilustración 24 Resultados gráficos 2.B: Froude y Perfil de lámina de agua..... 57

Ilustración 25 Resultados gráficos nº3: Froude y Perfil de lámina de agua..... 59

Ilustración 26 Resultados gráficos nº4: Froude y Perfil de lámina de agua..... 62

Ilustración 27 Resultados gráficos nº5: Froude y Perfil de lámina de agua..... 65

Ilustración 28 Sección transversal real de los canales de drenaje 66

Ilustración 29 Sección transversal simplificada de los canales de drenaje 67

Ilustración 30 Resultados gráficos: Froude y Perfil de lámina de agua 68

Ilustración 31 Sección Rectangular 73

Ilustración 32 Sección Triangular 74

Ilustración 33 Sección Trapezoidal..... 75

Ilustración 34 Sección circular: y<Bo/2..... 76

Ilustración 35 Sección Circular: y>Bo/2 78

Ilustración 36 Sección en "U": y<Bo/3 80

Ilustración 37 Sección en “U”: y=Bo/3 82

Ilustración 38 Sección en "U": y>Bo/3 83

Ilustración 39 Ventana de Introducción de datos..... 85

Ilustración 40 Ventana de resultados de la sección de control..... 87

Ilustración 41 Ventana de resultados gráficos..... 87

Ilustración 42 Tabla de resultados: M. Hinds..... 88

Ilustración 43 Tabla de resultados: M. Numéricos..... 89

Índice de tablas.

Tabla 1 Leyenda de los resultados gráficos: Número de Froude 49

Tabla 2 Leyenda de los resultados gráficos: Perfil de la lámina de agua..... 49

Tabla 3 Datos del canal: Validación de los resultados 1.A. 50

Tabla 4 Resultados de la sección control 1.A (Subramanya, 1982) 50

Tabla 5 Sección de control 1.A obtenida por el código numérico..... 50

Tabla 6 Datos del canal: Validación de los resultados 1.B. 52

Tabla 7 Resultados de la sección control 1.B (Subramanya, 1982). 52

Tabla 8 Sección de control 1.B obtenida por el código numérico..... 52

Tabla 9 Datos del canal: Validación de los resultados 2.A. 54

Tabla 10 Resultados de la sección control 2.A. (Srivastava, 2008)..... 54

Tabla 11 Sección de control 2.A obtenida por el código numérico..... 54

Tabla 12 Datos del canal: Validación de los resultados 2.B. 56

Tabla 13 Resultados de la sección control 2.B. (Srivastava, 2008)..... 56

Tabla 14 Sección de control 2.B obtenida por el código numérico..... 56

Tabla 15 Datos del canal: Validación de los resultados nº3. 58

Tabla 16 Resultados de la sección control nº3 (Jain, 2001)..... 58

Tabla 17 Sección de control V.R. nº3 obtenida por el código numérico..... 58

Tabla 18 Comparación de los resultados aguas arriba del canal 3.1 60

Tabla 19 Comparación de los resultados aguas arriba del canal 3.2 60

Tabla 20 Comparación de los resultados aguas abajo del canal 3.1 60

Tabla 21 Comparación de los resultados aguas abajo del canal 3.2 60

Tabla 22 Datos del canal: Validación de los resultados nº4 61

Tabla 23 Resultados de la sección control nº4 (Chow, 1994) 61

Tabla 24 Sección de control V.R. nº4 obtenida por el código numérico..... 61

Tabla 25 Comparación de los resultados aguas arriba del canal 4.1 63

Tabla 26 Comparación de los resultados aguas arriba del canal 4.2 63

Tabla 27 Comparación de los resultados aguas abajo del canal 4.1 63

Tabla 28 Comparación de los resultados aguas abajo del canal 4.2 63

Tabla 29 Datos del canal: Validación de los resultados nº5. 64

Tabla 30 Resultados de la sección control nº5 (Srivastava, 2008)..... 64

Tabla 31 Sección de control V.R. nº5 obtenida por el código numérico 64

Tabla 32 Comparación de los resultados aguas arriba del canal 5.1 66

Tabla 33 Comparación de los resultados aguas arriba del canal 5.2 66

Tabla 34 Datos del canal: Sección en "U". 67

Tabla 35 Sección de control obtenida por el código numérico 68

Abstract

In the calculation of natural channels or artificial canals in steady flow, the discharge is the same throughout the conduit. However, in case the discharge changes along the length of the conduit resulting from the addition of a constant discharge per unit length, such flows are called increasing spatially varied flow. This happens in road and street drainage channels below the transverse inlet grates, in urban area, which collect runoff from the street, or some designs of dam spillways, where there is a side channel which collects the excess flow (e.g.: Hoover Dam). The objective of this project is to develop a computational code for solving the differential equation of the increasing spatially varied flow for various geometries as triangular, trapezoidal sections, etc, or gutters that collect the street runoff, and making possible with the use of this tool the design of new canals in these conditions.

Resum

En el càlcul de canals o lleres naturals en règim permanent, el cabal és el mateix al llarg de tot el canal. No obstant això, en cas d'entrades de cabals repartides al llarg del canal, el cabal varia segons una pauta coneguda de manera que augmenta en direcció del flux. Això succeeix en canals de recollida sota les reixes transversals al carrer o àrees per als vianants, en zona urbana, que capten l’escorrentia del carrer, o en alguns dissenys de sobreeixidors de preses, on hi ha un canal que recull el cabal d'abocament (ex. Presa Hoover). L'objectiu del treball és desenvolupar un codi de càlcul que resolgui l'equació del règim espacialment variat amb cabal creixent per a geometries variades com les de secció triangular, trapezial, etc, o les canaletes de recollida d'aigües pluvials i que permeti el disseny de canals en aquestes condicions.

Resumen

En el cálculo de canales o cauces naturales en régimen permanente, el caudal es el mismo a lo largo de todo el canal. Sin embargo, en caso de entradas de caudal repartidas a lo largo del canal, el caudal varía según una pauta conocida de manera que aumenta en la dirección del flujo. Esto sucede en canales de recogida bajo las rejas transversales en la calle o áreas peatonales, en zona urbana, que captan la escorrentía de la calle, o en algunos diseños de aliviaderos de presas, donde hay un canal que recoge el caudal de vertido (ej. Presa Hoover). El objetivo del trabajo es desarrollar un código de cálculo que resuelva la ecuación del régimen espacialmente variado con caudal creciente para geometrías variadas como las de sección triangular, trapecial, etc, o las canaletas de recogida de aguas pluviales y que permita el diseño de canales en estas condiciones.

I. Introducción

El agua es un elemento esencial para la vida; Sin el agua, la vida tal y como la conocemos sería imposible. Los ingenieros civiles son los encargados de planificar, proyectar y construir las obras hidráulicas con el objetivo hacer un uso responsable de este recurso de la manera más sostenible posible, entendiendo la sostenibilidad como el equilibrio entre la demanda de la sociedad de este recurso y la explotación de las fuentes de estos recursos naturales por debajo del límite de renovación del mismo. Para el aprovechamiento de este recurso desde hace mucho tiempo el ser humano ha construido obras para transportar el agua de un lugar a otro y almacenarla para tenerla disponible en cualquier momento, ya que el agua no está distribuida de forma uniforme en el espacio ni el tiempo, sino que hay épocas del año en que estos recursos escasean y también hay zonas donde este recurso no está disponible de manera suficiente.

Para transportar el agua de un lugar a otro existen los canales, que es un cauce natural o artificial que sirve para conducir el agua hacia un lugar deseado, por ejemplo para emplearse para el consumo humano, en riego, en la generación de energía eléctrica, etc.

Los canales artificiales son construidos o desarrollados por los humanos: Canales de navegación, canales de centrales hidroeléctricas, canales de riego, cunetas de drenaje, cunetas a lo largo de las carreteras, etc. Las propiedades hidráulicas de estos canales pueden ser controladas hasta un nivel deseado o diseñadas para cumplir unos requisitos determinados. El diseño de un canal consiste básicamente en darle un tamaño tal que le permita llevar una cantidad de agua definida. Estas dimensiones dependerán básicamente del caudal a

transportar, de la pendiente que se le puede dar al canal y las características físicas del canal.

Este documento se basa básicamente en el estudio del régimen espacialmente variado con caudal creciente que se caracteriza en la adición de agua a lo largo del canal, tal y como sucede en las cunetas de calles y carreteras y los aliviaderos laterales de las presas; Además cabe decir que en este caso el flujo es permanente pero no uniforme ni gradualmente variado. En este tipo de flujo una parte importante de la pérdida de energía se debe a la mezcla turbulenta del agua agregada con la que circula a través del canal produciendo fuertes corrientes transversales, un mezclado turbulento y un flujo de forma espiral. Estos efectos inducen una pérdida de energía mayor que la de fricción, conocida como pérdida por impacto, que sólo se puede cuantificar por medio del principio del momentum, por lo que la ecuación de impulso y cantidad de movimiento es la que se emplea para su análisis.

II. Objetivos

En este documento se hace una descripción del flujo espacialmente variado creciente, donde se explica los principios básicos y las suposiciones que hacen para la determinación de la ecuación que gobierna este tipo de flujo.

El objetivo de este trabajo es proponer un código numérico para resolución de la ecuación general que gobierna el flujo espacialmente variado creciente en Matlab, integrando en él diferentes secciones transversales típicas de las canaletas de recogida presentes debajo de las rejas transversales que captan la escorrentía en las carreteras y calles.

En la elaboración de este código numérico se han tenido en cuenta diferentes formas de localizar la sección de control dándole un enfoque diferente a la literatura técnica, que obtienen la localización de la sección de control con la intercesión de dos perfiles de flujo; En cambio en este trabajo se ha planteado una función objetivo, que obtiene la localización de la sección de control iterando sobre los valores del calado con el objetivo de minimizar el valor de la función objetivo haciendo que se cumplan las condiciones que debe cumplir la sección de control.

En el código numérico se han programado cuatro métodos numéricos de resolución, los cuales fueron extraídos de la literatura de la hidráulica de canales. Estos métodos de resolución han permitido obtener finalmente un perfil de la superficie de la lámina de agua y el calado en cada sección longitudinal.

Para contrastar los resultados obtenidos en estos códigos numéricos se utilizan ejemplos de ejercicios extraídos de referencias técnicas de la hidráulica de canales. La solución obtenida por el código numérico se compara con las

soluciones propuestas en los diferentes libros técnicos, lo cual nos ha permitido comprobar que el código numérico está correctamente desarrollado.

En el programa se ha introducido una sección transversal particular que pretende simular la sección de canaletas de drenaje de las calles y carreteras, con el objetivo de poder utilizar este programa precisamente para el diseño de los canales de drenaje de calles, carreteras y de las canaletas de los tejados de los edificios. Se incluyen además otras geometrías más habituales, como la rectangular, trapecial, etc.

El objetivo principal del trabajo es buscar las posibles aplicaciones del código numérico programado para el diseño de canales en régimen espacialmente variado con caudal creciente.

III. Metodología del trabajo.

Para la elaboración de este documento he utilizado información muy variada; para el método numérico de cálculo en el lenguaje de programación de Matlab he consultado distintas fuentes variadas entre sí, en cambio en el documento formal las fuentes de información utilizadas han sido técnicas.

La elaboración del código numérico de cálculo me ha resultado complicada ya que los conocimientos previos que tenía sobre programación eran muy básicos debido a que tan sólo había tratado este tema dos años atrás en segundo de carrera en la asignatura de métodos numéricos; Además cabe decir que el lenguaje de programación que se me había enseñado en esta asignatura era el Visual Basic aplicado a Excel.

Debido a que los conocimientos básicos que tenía sobre programación se habían diluido con el tiempo al iniciar este trabajo tenía nociones muy básicas sobre este tema, por tanto, tuve que empezar de cero y aprender los principios básicos de la programación de distintos manuales que encontré en la red para adentrarme más adelante en el lenguaje de programación en Matlab, campo totalmente desconocido para mí.

Al principio tuve dificultades para asimilar este lenguaje de programación, así que me dediqué a visualizar video-tutoriales y a buscar a través de la red distintos documentos guía sobre cómo programar en este lenguaje. La dificultad añadida en este paso fue discretizar toda la abundante información disponible en la red y seleccionar la de mayor relevancia, finalmente pude asimilar toda la documentación disponible y logré aprender dicho lenguaje.

Una vez aprendida la estructura de programación en Matlab, procedí a adentrarme en lo que era realmente importante en el trabajo: el régimen espacialmente variado con caudal creciente. Encontrar información sobre este régimen no fue tarea fácil, ya que es un régimen que la mayoría de libros de la hidráulica de canales obvian debido a su dificultad; Además cabe añadir que en la red hay poca información al respecto.

A pesar de ello, el profesor Manuel Gómez Valentín me facilitó cuatro libros de hidráulica en canales abiertos donde pude encontrar capítulos en cada uno de ellos donde se hablaba de este régimen. Estos libros han sido la principal fuente de información de mi trabajo.

Fue así como pude entender el funcionamiento básico de este régimen, en un principio desconocido para mí; con mis conocimientos previos de hidráulica de canales que utilicé como base, las explicaciones del tutor y los libros citados anteriormente.

Después de distintos ensayos a prueba y error con varios ejemplos de la literatura técnica proporcionada por el tutor, la cual me sirvió para contrastar los resultados obtenidos mediante el código numérico, conseguí elaborar dicho código en Matlab, a pesar de que me costó mucho tiempo y además fue complicado.

Una vez obtenido el código numérico de cálculo y con la intención de proporcionar un entorno visual sencillo, integré el código numérico de cálculo a una interfaz gráfica con el objetivo de que cualquier tipo de usuario, independientemente de sus conocimientos previos del lenguaje de programación de Matlab, pudiera hacer uso de dicho código. Esta elaboración no fue tarea fácil

ya que no tenía conocimientos previos sobre la creación de interfaces gráficas, pero gracias a la información obtenida en la red pude finalmente desarrollarla.

IV. Aplicaciones

El flujo espacialmente variado sucede cuando se produce una entrada repartida de caudal a lo largo de un canal y entonces el caudal va variando espacialmente de manera que aumenta en dirección del flujo.

Aliviaderos laterales de las presas.

Los aliviaderos laterales de las presas tienen la función de derivar y de transportar los excesos de agua en crecidas.

Ilustración 1 Presa Hoover, entre Arizona y Nevada, EE. UU.

Ilustración 2 Presa Hoover, entre Arizona y Nevada, EE. UU.

Ilustración 3 Embalse de la Fuensanta, Albacete, España

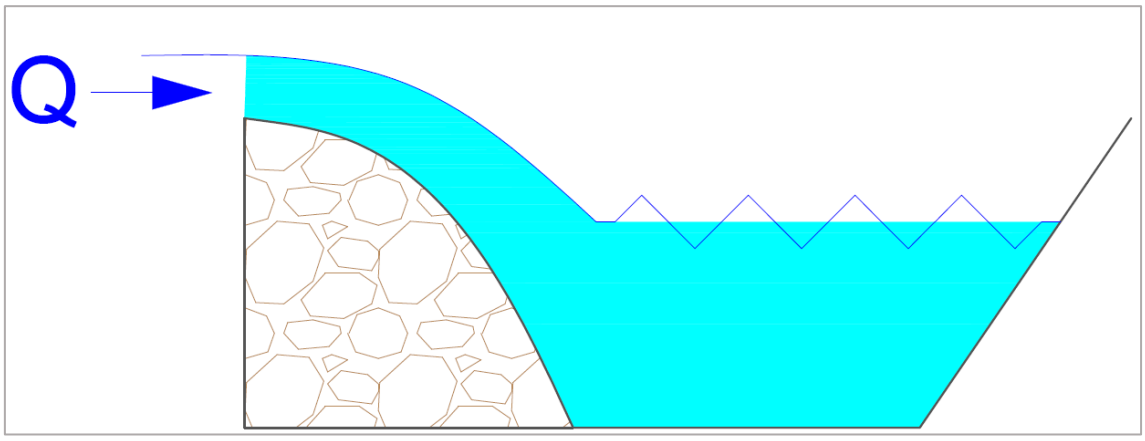


Ilustración 4 Esquema aliviadero lateral

Canales de drenaje de calles y carreteras.

La función de estos canales es drenar los excesos de la lluvia sobre las aceras, viales, plazas y espacios abiertos en superficie, dotándoles de una inclinación para que el agua circule y vaya a parar a las rejillas de captación, también denominadas sumideros o imbornales, que tienen la función de recoger el caudal, debido al proceso de transformación lluvia en escorrentía, que circula por la calle y aceras, e introducirlo en la red de drenaje. En el proceso de diseño de una red de drenaje, se hace siempre la hipótesis implícita de que la lluvia caída

que se transforma en escorrentía superficial, entra en la red de drenaje en la misma zona en que cae.

La precipitación se acumula en superficie debido a que la mayoría de ciudades actualmente están urbanizadas, suceso que ha provocado la modificación de la respuesta hidrológica de las cuencas. La urbanización ha producido una alteración de las redes de drenaje natural (construcción de colectores y encauzamientos que aumentan la velocidad del agua hacia aguas abajo de la cuenca) y un incremento de las zonas impermeables en superficie, con el objetivo de evitar inundaciones y posibles daños asociados a estas. Se diseñan los canales de drenaje con el criterio de drenar lo más eficiente y rápido posible el área urbanizada, por tanto, los caudales de escorrentía deben introducirse en la red de drenaje y en los puntos previstos para que el agua no circule de forma descontrolada por la superficie de la ciudad.

Ilustración 5 Canales de drenaje de calles

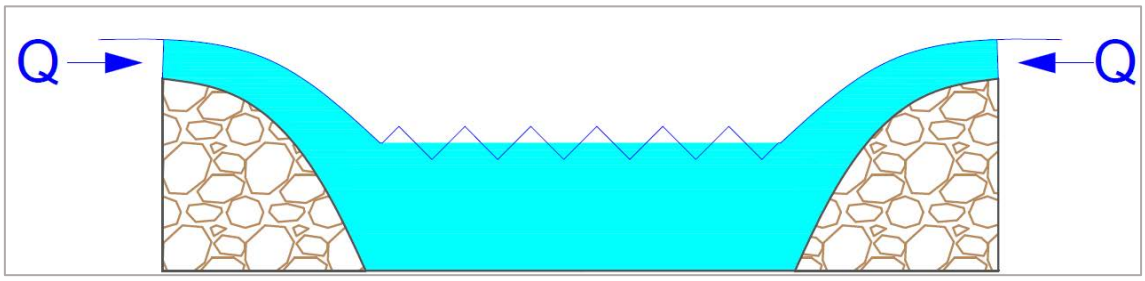


Ilustración 6 Esquema canal de drenaje de calles

Ilustración 7 Canal de drenaje de carreteras

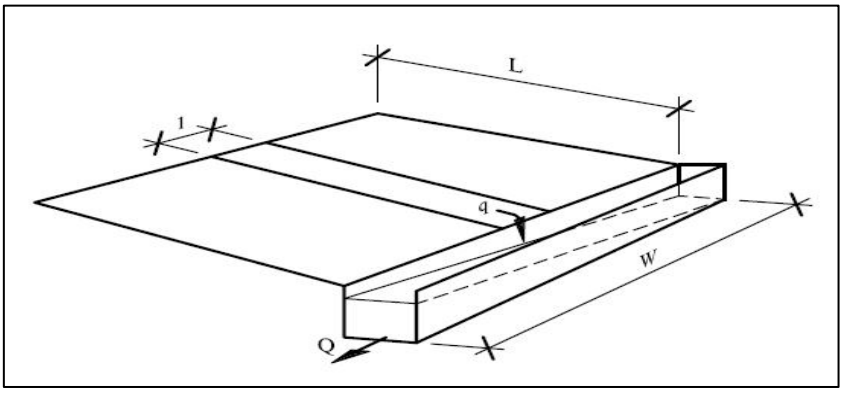


Ilustración 8 Esquema canal de drenaje de carreteras

Canaletas de tejados.

Las canaletas sirven para desalojar el agua procedente de la precipitación que cae en la superficie de tejado, al cual se le da una inclinación para que el agua vaya directamente a las canaletas sin que se acumule en él y pueda provocar un colapso del mismo. Estas canaletas en numerosas ciudades suelen estar directamente conectadas a la red de drenaje, asegurando así la captación de la escorrentía.

Ilustración 9 Canaleta de recogida de aguas pluviales de tejados.

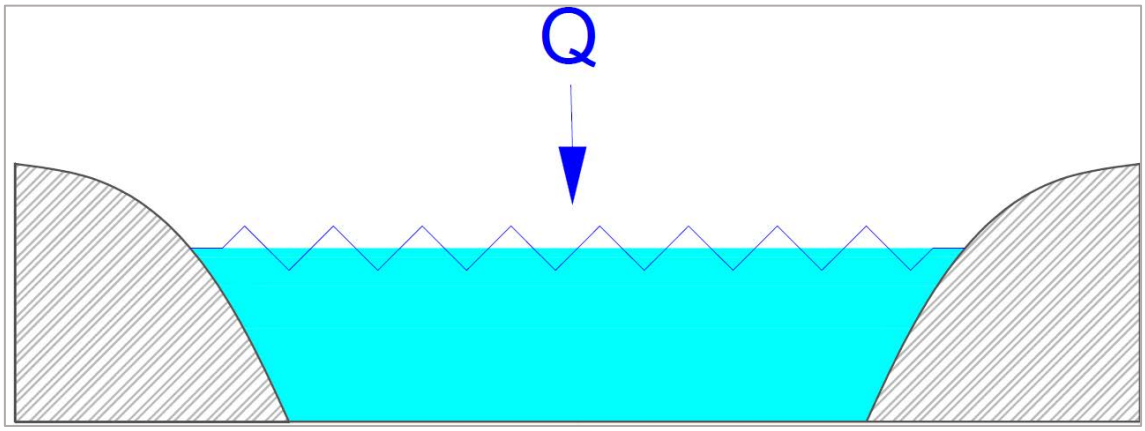


Ilustración 10 Esquema canaleta de recogida de aguas pluviales de tejados

V. Principios básicos

Debido a la presencia de la superficie libre y a la fricción a lo largo de las paredes del canal, las velocidades no están uniformemente distribuidas en su sección.

La resistencia ofrecida por las paredes y por el fondo del canal, reduce la velocidad. En la superficie libre la resistencia ofrecida por la atmósfera y por el viento también influye sobre la velocidad. Esto provoca una distribución del perfil de velocidades no uniforme en las tres direcciones.

Los modelos generales para la distribución de velocidades en diferentes secciones de canal se muestran en la siguiente figura:

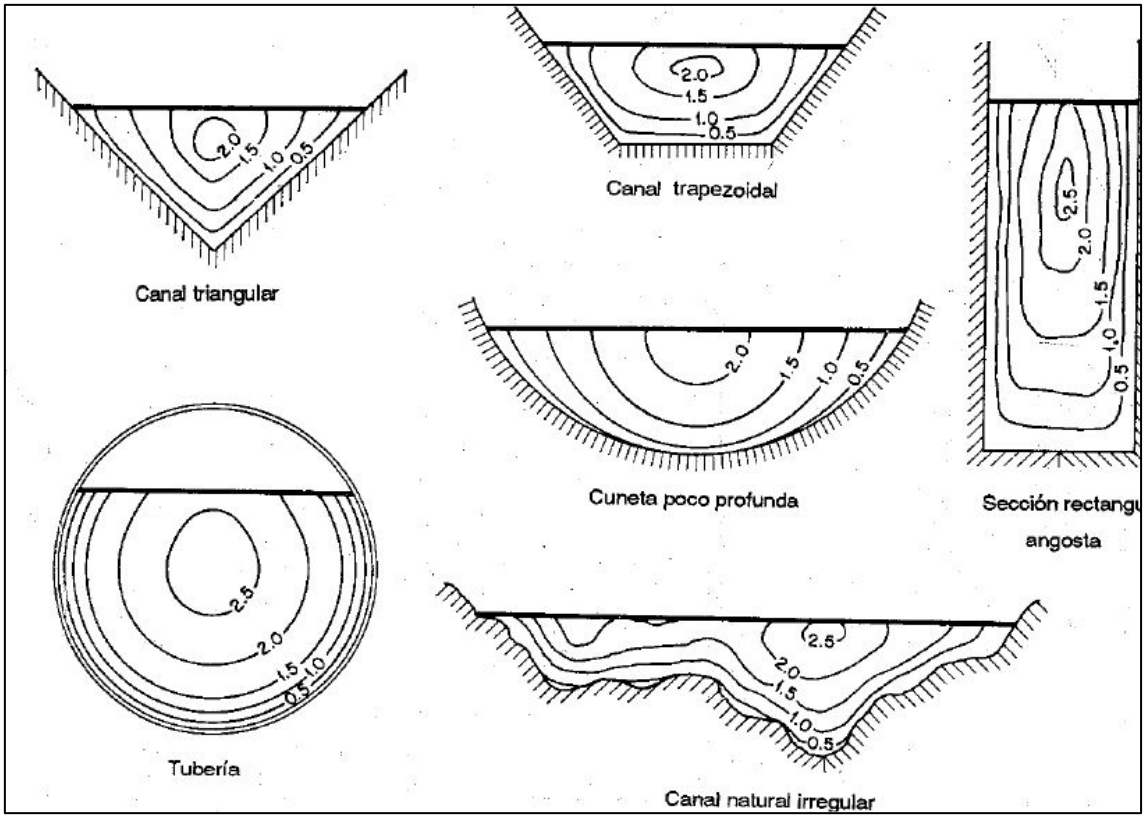


Ilustración 11 Distribución de velocidades en distintas secciones de canales

Velocidad media

La velocidad media v en dirección longitudinal se puede definir de la siguiente forma:

$$v = \frac{1}{A} * \int_A v * dA$$

Considerando el caudal como Q=v*A.

$$Q = \int_A v * dA$$

Coeficiente de distribución de velocidades.

Coeficiente de Coriolis

Como resultado de la distribución no uniforme de velocidades en una sección de canal, la altura de velocidad de un flujo en canales abiertos es por lo general mayor que el valor calculado por la expresión $v^2/2g$, en la cual v representa la velocidad media. Cuando se utiliza el principio de energía, la altura de la velocidad real puede expresarse como $\alpha * \frac{v^2}{2g}$.

El coeficiente de Coriolis α que aparece en la expresión de la energía cinética, representa la relación entre la energía real y la que se obtendría considerando una distribución uniforme de velocidades y se calcula de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{\int vh^3 dA}{v^3 * A}$$

- vh=Componente vertical de la velocidad a una profundidad h.
- dA=Diferencial de área correspondiente a la velocidad vh.
- V=Velocidad media.
- A=Área total.

El uso del coeficiente de Coriolis depende de la exactitud con que se estén haciendo los cálculos, ya que los resultados obtenidos considerando la distribución de velocidad uniforme, son correctos en caso de que se quiera saber el orden de magnitud de los resultados.

Los ensayos experimentales muestran que α varía entre 1.03-1.36 en canales prismáticos (canales con sección transversal y pendiente de fondo constante).

Coeficiente de Boussinesq.

La distribución no uniforme de velocidades también afecta en el cálculo de la cantidad de movimiento en flujo de canales abiertos. A partir de la segunda ley de Newton, se puede expresar el momentum de un fluido como β*ρ*Q*v, donde β es conocido como el coeficiente de Boussinesq, que para canales prismáticos varía entre 1.01-1.12.

El coeficiente de Boussinesq se calcula de la siguiente forma:

$$\beta = \frac{\int vh^2 dA}{v^2 * A}$$

- vh=Componente vertical de la velocidad a una profundidad h.
- dA=Diferencial de área correspondiente a la velocidad vh.
- V=Velocidad media.
- A=Área total.

El uso del coeficiente de Boussinesq depende de la exactitud con que se estén haciendo los cálculos, ya que los resultados obtenidos considerando la distribución de velocidad uniforme, son correctos en caso de que se quiera saber el orden de magnitud de los resultados.

Para canales de sección transversal regular y alineamiento más o menos recto, el efecto de la distribución no uniforme de velocidades en el cálculo de la altura de velocidad y la cantidad de movimiento es pequeño en comparación con otras incertidumbres involucradas en el cálculo. Por esta razón a menudo los coeficientes se suponen igual a la unidad, considerando distribución uniforme de velocidades.

Ecuación de la continuidad.

La ecuación de continuidad es una consecuencia del principio de la conservación de la masa.

$$Q = A * v$$

- A=Área transversal.
- v= Velocidad media.

Esta es la ecuación de la continuidad para un flujo continuo permanente. Sin embargo, no es válida cuando el caudal de un flujo permanente no es uniforme a lo largo del canal, es decir, cuando se añade un caudal lateral.

Considerando un flujo espacialmente variado con un caudal no constante a lo largo del canal donde hay una adición lateral, la ecuación de la continuidad se puede expresar de la siguiente forma:

$$Q(x) = Qo + \int_0^x q\, dx$$

- Qo=Caudal inicial.
- q=Caudal lateral que se añade a lo largo del canal.

Ecuación de la energía o ecuación de Bernoulli.

La ecuación de Bernoulli se utiliza para representar la ecuación de la energía en el análisis unidimensional para estudiar el flujo en canales abiertos. Esta ecuación representa la energía total como la suma de las energías de posición, más de la presión y más la velocidad.

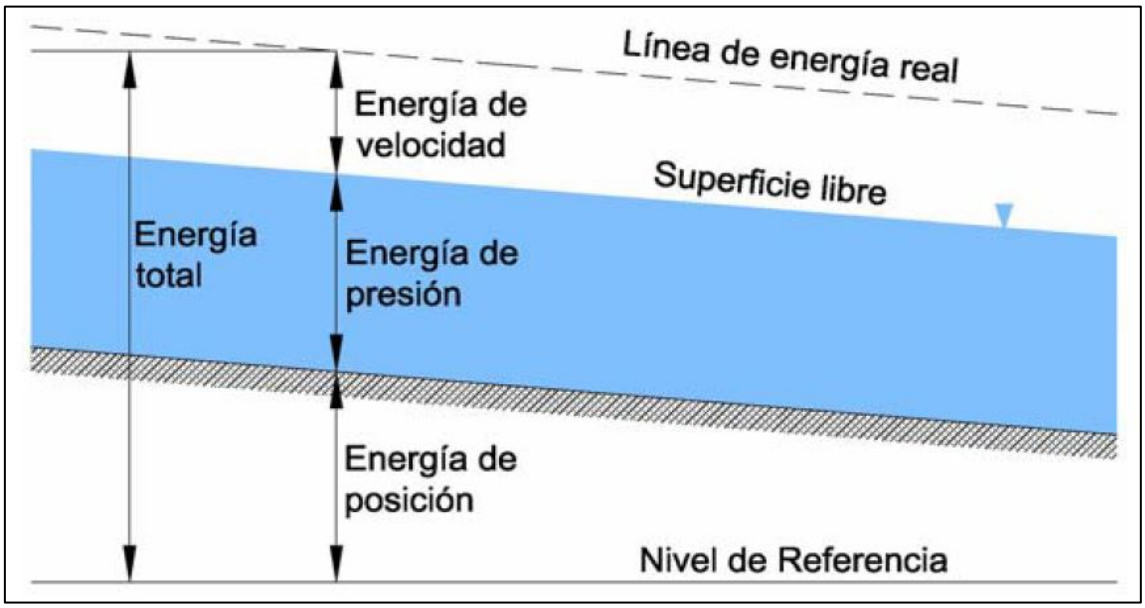


Ilustración 12 Energía total en una sección de un canal

$$Energia\ total = E.Posición + E.Presión + E.Velocidad$$

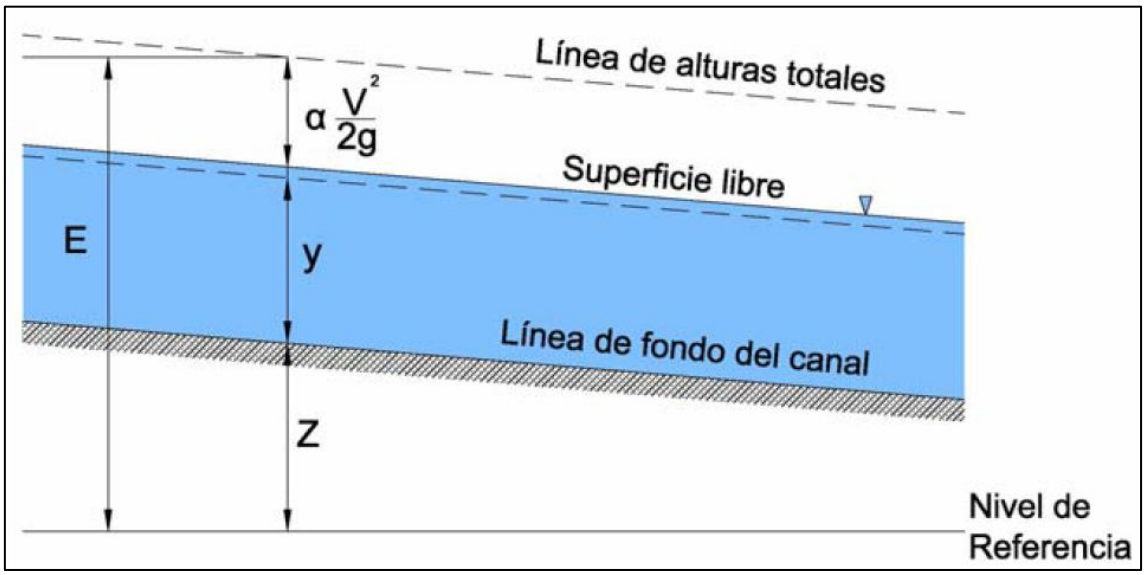


Ilustración 13 Componentes de la energía por unidad de peso

$$E = Z + y + \alpha * \frac{v^2}{2g}$$

- E= Energía total.
- Z= Energía de posición o elevación.
- y= Calado en la sección.
- v= Velocidad media.
- α= Coeficiente de Coriolis.

Ecuación de la cantidad de movimiento o momentum.

El principio de la cantidad de movimiento en un fluido está basado en la segunda ley de Newton, donde se impone que las fuerzas externas aplicadas en un volumen de control sean igual al cambio de la cantidad de movimiento.

En una sección de un canal, en la cual pasa un caudal Q con una velocidad V, la cantidad de movimiento en la unidad de tiempo se expresa como:

$$Cantidad\ de\ movimiento = \beta * \rho * Q * v$$

- β= Coeficiente de Bussinesq.
- v= Velocidad media.
- A= Área transversal.
- ρ= Densidad del fluido.
- Q= Caudal

Considerando un volumen de control de un canal aplicando el principio de la cantidad de movimiento entre dos secciones se obtiene la siguiente expresión:

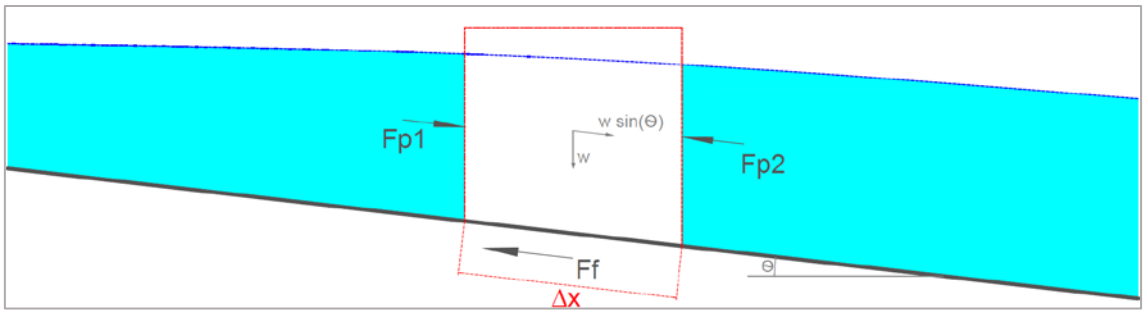


Ilustración 14 Volumen de control para definir la Ec. Cantidad de movimiento

$$Variación\ de\ la\ cantidad\ de\ movimiento = \rho * Q(ß2 * v2 - ß1 * v1)$$

$$\rho * Q(ß2 * v2 - ß1 * v1) = Fp1 - Fp2 + W * sin(\alpha) - Ff$$

- Fp1, Fp2= Fuerza de presión actuando en las dos secciones.
- W sin (α)=Peso del fluido en el sentido al movimiento.
- Ff= Fuerza de fricción.

VI. Explicación teórica del régimen espacialmente variado.

En este apartado se definirá el flujo espacialmente variado creciente como resultado de la adicción de caudal uniforme de agua a lo largo del curso, que provoca que el caudal varíe en dirección del flujo.

En este tipo de flujo una parte importante de la pérdida de energía es causada por la mezcla turbulenta del agua agregada con el agua que fluye a través del canal produciendo fuertes corrientes transversales, un mezclado turbulento y un flujo de forma espiral. En la mayoría de los casos estas pérdidas de energías son de una magnitud e incertidumbre bastante elevada. Estos efectos inducen una pérdida de energía mayor que la de fricción, conocida como pérdida por impacto, que sólo se puede cuantificar por medio del principio del momentum, por tanto, la ecuación de impulso y cantidad de movimiento es la que se emplea para su análisis.

Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento se hacen las siguientes suposiciones:

- La distribución de presión es hidrostática, es decir, el flujo es paralelo.
- El análisis se realizará en 1D, es decir, se considera un flujo unidireccional.
- La distribución de velocidades a través del canal es constante y uniforme, se utilizara un factor de corrección β para representar el efecto de la no uniformidad de la distribución de velocidades.
- Las pérdidas por fricción se representarán mediante la fórmula de Manning.
- El fluido es incompresible.

- El canal es prismático y su pendiente es relativamente pequeña.
- El efecto del atrapamiento del aire es insignificante.

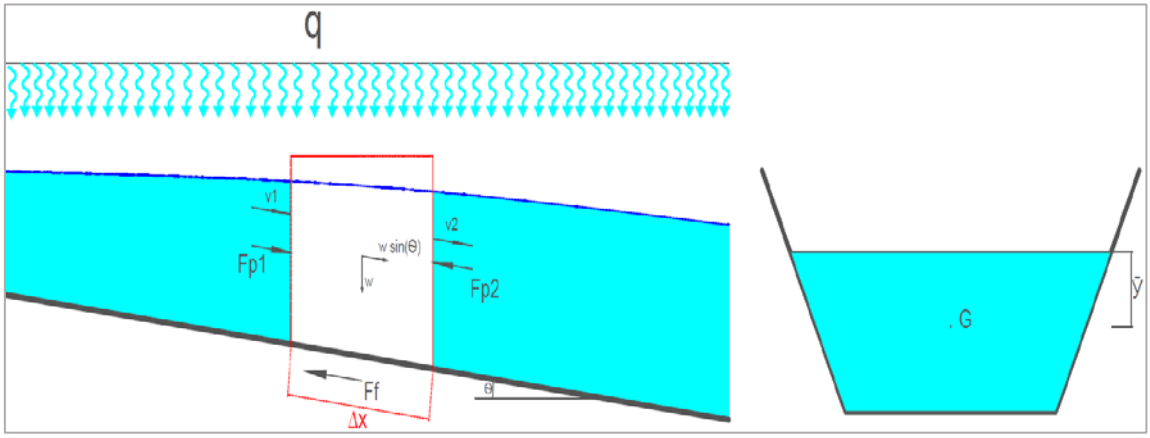


Ilustración 15 Volumen de control para definir la Ec. FEV

Considerando un volumen de control de pendiente longitudinal *So*, en el que entra un caudal por unidad de longitud *q*, formado por dos secciones 1 y 2, distanciadas δx, en las que ingresa un caudal *δQ*; aplicamos la ecuación de la continuidad y obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta(v * A)}{\delta x} = v * \frac{\delta A}{\delta x} + A * \frac{\delta v}{\delta x} = q$$

- Q = Caudal en el canal.
- q = Caudal lateral por unidad de longitud.
- A= Área de la sección transversal.
- v= Velocidad media del flujo en dirección longitudinal.

Para este mismo volumen de control si se aplica la ecuación de la conservación de la cantidad movimiento en dirección longitudinal es:

$$M2 - M1 = P1 - P2 + W * \sin\Theta - Ff$$

$$\Delta M = -\Delta P + W * sin\Theta - Ff$$

- M1, M2= Momento del flujo en cada sección= β*ρ*Q^2/A.
- P1, P2= Presión del flujo en cada sección= Y*A*ȳ.
- W*sin (Θ)= Peso del flujo contenido en el volumen de control en dirección del flujo.
- Ff= Fuerza de fricción= Y*A*Sf*Δx.

- Donde ȳ es la profundidad del centro de gravedad de la sección transversal hasta la superficie de agua.
- Debido a que se supone que la pendiente del canal es pequeña sin Θ=So

$$W * sin\Theta = \Upsilon * So * A * \Delta x$$

- Dividimos la ecuación por Δx y hacemos límites hasta que Δx →0.

$$\frac{\delta M}{\delta x} = -\frac{\delta P}{\delta x} + \Upsilon * A * So - \Upsilon * A * Sf$$

- El cambio de la cantidad de movimiento será igual:

$$M1 = \rho * \beta * \frac{Q^2}{A};\ M2 = \rho * \beta * \frac{Q^2}{A} + \rho * \beta * \frac{\delta\left(\frac{Q^2}{A}\right)}{\delta x} * \Delta x$$

$$Donde\ \rho * \beta * \frac{\delta\left(\frac{Q^2}{A}\right)}{\delta x} * \Delta x\ es\ el\ momento\ del\ caudal\ unitario\ q\ que\ entra\ en\ el\ \Delta x.$$

$$\Delta M = \rho * \beta * \left(\frac{Q^2}{A} + \frac{\delta\left(\frac{Q^2}{A}\right)}{\delta x} * \Delta x - \frac{Q^2}{A}\right) = \rho * \beta * \Delta x\left(\frac{\delta\left(\frac{Q^2}{A}\right)}{\delta x}\right)$$

$$\delta\left(\frac{Q^2}{A}\right) = \frac{\delta Q^2}{A} + Q^2 * \delta\frac{1}{A}\ ; \qquad \frac{\delta M}{\delta x} = \rho * \beta\left(Q^2 * \frac{\delta\left(\frac{1}{A}\right)}{\delta x} + \frac{1}{A} * \frac{\delta Q^2}{\delta x}\right)$$

$$\delta\left(\frac{1}{A}\right) = -\frac{\delta A}{A^2};\quad \delta(Q^2) = 2Q * \delta Q; \qquad \frac{dM}{dx} = \rho * \beta * \left(-\frac{Q^2}{A^2} * \frac{\delta A}{\delta x} + \frac{2Q}{A} * \frac{\delta Q}{\delta x}\right)$$

- Debido a que se supone que el canal es prismático *δA=T*δy*

$$q = \frac{Q}{\delta x};\ \frac{\delta M}{\delta x} = \rho * \beta * \left(\frac{2Q}{A} * q - \frac{Q^2}{A^2} * \frac{T * \delta y}{\delta x}\right)$$

- La presión total de la sección 1 y 2 correspondiente a la dirección del flujo es igual a la presión hidrostática unitaria en el centroide del área mojada multiplicada por el área.

$$P1 = \Upsilon * \bar{y} * A;\ P2 = \Upsilon * (\bar{y} + \delta y) * A\ ;\ \ \Delta P = P2 - P1 = \Upsilon * \delta y * A;$$

$$\frac{\delta P}{\delta x} = \rho * g * \frac{\delta y}{\delta x}$$

- Al igualar el cambio de la cantidad movimiento del cuerpo con todas las fuerzas externas que actúan sobre él, obtenemos finalmente la ecuación dinámica para el flujo espacialmente variado con caudal creciente.

$$-\frac{\delta P}{\delta x} + \rho * g * A * So - \rho * g * A * Sf = \rho * \beta * \left(\frac{2Q}{A} * q - \frac{Q^2}{A^2} * \frac{T * \delta y}{\delta x}\right)$$

$$\rho * A\left(-\frac{\delta y}{\delta x} * g + g * So - g * Sf\right) = \rho * A * \left(\frac{2 * \beta * Q}{A^2} * q - \frac{\beta * Q^2 * T}{A^3} * \frac{\delta y}{\delta x}\right)$$

$$g * (-\frac{\delta y}{\delta x} + So - Sf) = \frac{2 * \beta * Q}{A^2} * q - \frac{\beta * Q^2 * T}{A^3} * \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} * \left(1 - \frac{\beta * Q^2 * T}{A^3 * g}\right) = So - Sf - \frac{2 * \beta * Q}{A^2 * g} * q$$

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{So - Sf - \frac{2 * \beta * Q}{A^2 * g} * q}{1 - \frac{\beta * Q^2 * T}{A^3 * g}}}$$

Esta ecuación se puede resolver con varias técnicas, pero el procedimiento de solución debe empezar en una sección de control, que representaría la condición

de contorno del procedimiento de cálculo. Por tanto, para un canal dado, con un caudal lateral de entrada específico, se debe comprobar si existe una sección en la que se produce un cambio de régimen subcrítico (R. Lento) a régimen supercrítico, es decir, se tiene que comprobar si existe una sección de flujo crítico, en la que $\delta y/\delta x=0$, cuando el número de Froude $Fr=1$ o cuando el numerador de la ecuación es cero.

Determinación de la sección de control.

Las ecuaciones diferenciales de primer orden necesitan una condición en el contorno para su solución. La determinación de la sección de control es el primer paso para poder resolver de forma adecuada la ecuación del régimen espacialmente variado, ya que es la condición de contorno del método de resolución, por tanto, su correcta determinación es vital para encontrar la solución más óptima de nuestro problema, debido a que partir de este valor se obtienen los siguientes resultados, que determinarán el perfil final de la lámina de agua que se quiere obtener como solución.

A la hora de determinar la sección de control se pueden dar tres posibles situaciones:

1) **La sección de control está situada aguas abajo del canal.**

   En este caso la sección de control está situada a una distancia mayor que la longitud del canal, es decir $Xc>L$, entonces en el canal no se produce una sección de flujo crítico. En esta situación para poder encontrar una solución del perfil se sitúa el punto de control en el extremo aguas abajo del canal, por tanto $Xc=L$ con el calado Yc asociado a la sección de control. Finalmente la sección de control resultante *es* $Xc=L$ y Yc, y se

obtiene el perfil integrando hacia aguas arriba con todo el canal en régimen subcrítico.

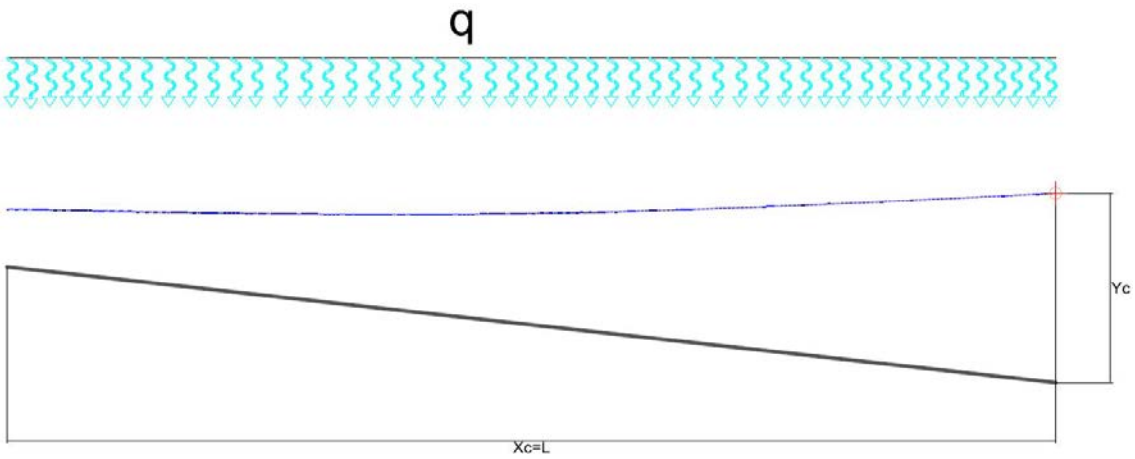


Ilustración 16 Sección de control situada aguas abajo del canal

2) La sección de control está situada en el canal.

En este caso la sección de control está situada dentro de la longitud del canal, es decir *Xc<L* y *Xc>0*, en el canal se da una sección de flujo critico en la que el flujo pasa de régimen subcrítico a régimen supercrítico. Por tanto la sección de control será *Xc* y *Yc*, y se obtiene el perfil integrando desde la sección de control hacía aguas arriba con este tramo del canal en régimen subcrítico, y desde la sección de control hacía aguas abajo con este tramo del canal en régimen supercrítico.

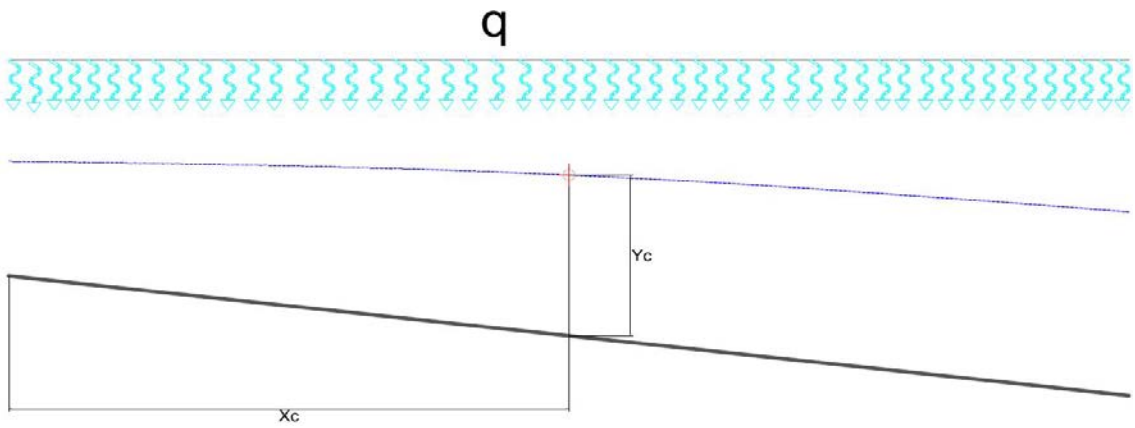


Ilustración 17 Sección de control localizada en el canal

3) **La sección de control está situada aguas arriba del canal.**

En este caso la sección de control está situada antes del tramo en el que el canal está en régimen espacialmente variado, solo sucede si el *Qo* > 0 m^3/s. El punto de control está situado aguas arriba del canal, es decir *Xc* < 0, entonces en el canal no se produce una sección de flujo crítico. En esta situación para poder encontrar una solución del perfil se sitúa el punto de control en el extremo aguas arriba del canal, con *Xc*=0 y *Yc* asociado a la sección de control. Por tanto la sección de control resultante es *Xc*=0 y *Yc*, y se obtiene el perfil integrando hacía aguas abajo con todo el canal en régimen supercrítico.

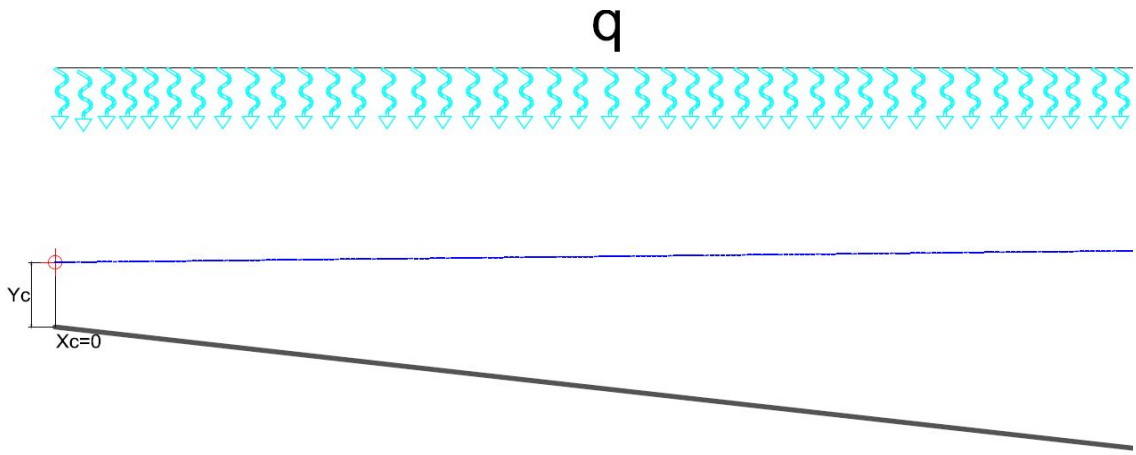


Ilustración 18 Sección de control situada aguas arriba del canal

Para determinar la ubicación de la sección de control se debe comprobar si existe una sección en la que se produce un cambio de régimen subcrítico (R. Lento) a régimen supercrítico (R. Rápido), es decir, se ha de comprobar si existe una sección de flujo crítico, en la que δy/δx=0, que se produce cuando el número de Froude *Fr=1* o cuando el numerador de la ecuación es cero.

$$So - Sf - \frac{2 * \beta * Q}{A^2 * g} * q = 0 \; ; \; 1 - \frac{\beta * Q^2 * T}{A^3 * g} = 0 \rightarrow 1 - Fr^2 = 0 \rightarrow Fr = 1$$

- So=Pendiente longitudinal del fondo del canal -δz/δx.
- Sf= Pendiente de la línea d energía -δH/δx.

- Suponiendo que el caudal lateral es constante *Q=q*x*, obtendremos la ubicación de la sección de control, considerando que el numerador de la ecuación del régimen espacialmente variado es cero.

$$Sf = \frac{n^2 * Q^2}{A^2 * Rh^{\frac{4}{3}}};\ \ Q = q * x;\ \ So = \frac{n^2 * q^2 * x^2}{A^2 * Rh^{\frac{4}{3}}} + \frac{2 * B * q^2 * x}{A^2 * g}$$

$$\frac{So}{q^2} = \frac{n^2 * x^2}{A^2 * Rh^{\frac{4}{3}}} + \frac{2 * B * x}{A^2 * g}$$

$$Fr^2 = 1 = \frac{B * Q^2 * T}{g * A^3} = \frac{B * q^2 * x^2 * T}{g * A^3};\ \ q^2 = \frac{g * A^3}{B * x^2 * T};$$

$$\frac{B * x^2 * T * So}{g * A^3} - \frac{n^2 * x^2}{A^2 * Rh^{\frac{4}{3}}} - \frac{2 * B * x}{A^2 * g} = 0$$

$$x\left(\frac{B * x * T * So}{g * A^3} - \frac{n^2 * x}{A^2 * Rh^{\frac{4}{3}}} - \frac{2 * B}{A^2 * g}\right) = 0$$

$$x = 0;\ \ x * \left(\frac{B * T * So}{g * A^3} - \frac{n^2}{A^2 * Rh^{\frac{4}{3}}}\right) = \frac{2 * B}{A^2 * g};\ \ x = \frac{\frac{2 * B}{A^2 * g}}{\frac{B * T * So}{g * A^3} - \frac{n^2}{A^2 * Rh^{\frac{4}{3}}}}$$

$$Xt = \frac{2 * B}{\frac{B * T * So}{A} - \frac{n^2 * g}{Rh^{\frac{4}{3}}}} = \boxed{\frac{2}{\frac{T * So}{A} - \frac{n^2 * g}{B * Rh^{\frac{4}{3}}}}}$$

- Ahora obtendremos la ubicación de la sección de control, considerando que Fr=1 para que produzca una sección critica.

$$Fr^2 = 1 = \frac{\beta * Q^2 * T}{g * A^3} = \frac{\beta * q^2 * x^2 * T}{g * A^3}$$

$$\boxed{Xc = \sqrt[2]{\frac{g * A^3}{\beta * q^2 * T}}}$$

- Una vez obtenemos las dos ecuaciones para determinar la ubicación de la sección de control, tenemos que imponer que *Xt*=*Xc*. Por tanto, podemos obtener una función objetivo, que depende solo del calado y, que mediante un método de optimización de Matlab para minimizar podemos obtener el calado de la sección de control.

$$\boxed{Fobj(y) = \left(\frac{2}{\frac{T(y) * So}{A(y)} - \frac{n^2 * g}{\beta * Rh(y)^{\frac{4}{3}}}} - \sqrt[2]{\frac{g * A(y)^3}{\beta * q^2 * T(y)}} \right)^2}$$

  En resumen, obtenemos el calado de la sección crítica cambiando los valores del calado con el objetivo del que el valor de la función objetivo sea mínimo, es decir, que la diferencia de ubicación sea mínima *Xt*-*Xc*=0.

- Una vez obtenido el calado de la sección de control, ya podemos calcular la ubicación de la sección de control.

$$\boxed{X = \frac{\frac{2}{\frac{T(y) * So}{A(y)} - \frac{n^2 * g}{\beta * Rh(y)^{\frac{4}{3}}}} + \sqrt[2]{\frac{g * A(y)^3}{\beta * q^2 * T(y)}}}{2}}$$

Debido a que tal y como se ha comentado anteriormente la determinación del punto de control es vital para la correcta determinación del perfil de agua, nos tenemos que asegurar que el valor del calado dado por la optimización es el correcto mediante otras comprobaciones.

- Tenemos que comprobar que el valor *Fr*=1, es decir, construimos una función objetivo, que únicamente depende del calado, y que a través de un método de optimización de Matlab nos permita encontrar el calado de la sección de control, con el valor de la ubicación de la sección de control anterior.

$$Fr^2 = \frac{\beta * Q^2 * T}{g * A^3};\ Fobj(y) = \left(1 - \sqrt{\frac{\beta * Q^2 * T(y)}{g * A(y)^3}}\right)^2$$

- Con el calado obtenido en el apartado anterior calculamos la posición de la sección de control.

$$X = \frac{\dfrac{2}{\dfrac{T(y) * So}{A(y)} - \dfrac{n^2 * g}{\beta * Rh(y)^{\frac{4}{3}}}} + \sqrt[2]{\dfrac{g * A(y)^3}{\beta * q^2 * T(y)}}}{2}$$

- Hacemos finalmente la última comprobación, que consiste en obtener un valor de un calado, tal que se cumpla que *Fr*=1. Esto lo realizaremos con un método de optimización de Matlab minimizando la función objetivo con el valor de la ubicación de la sección de control anterior.

$$Fr = \frac{v}{c}; Fr = 1 \rightarrow v = c;\ Fobj(y) = \left(\frac{Q}{A(y)} - \sqrt{\frac{g * A(y)}{\beta * T(y)}}\right)^2$$

- Con el calado obtenido en el apartado anterior calculamos la posición de la sección de control.

$$X = \frac{\dfrac{2}{\dfrac{T(y) * So}{A(y)} - \dfrac{n^2 * g}{\beta * Rh(y)^{\frac{4}{3}}}} + \sqrt[2]{\dfrac{g * A(y)^3}{\beta * q^2 * T(y)}}}{2}$$

Una vez hemos determinado el punto de control, se procede a determinar el perfil de la lámina de agua generado por la adicción de un caudal lateral.

Métodos de resolución de la ecuación de flujo espacialmente variado.

La ecuación diferencial básica del flujo espacialmente variado no es lineal y no existe una solución analítica general, ya que la solución general implica encontrar una ecuación que represente todas las soluciones posibles de la ecuación. En nuestro caso particular no es posible debido a que la no linealidad de la ecuación diferencial impide la integración analítica de la solución, por tanto, para poder determinar el perfil de flujo se utilizan métodos numéricos, que permiten "aproximar" de forma eficiente la solución. Se han utilizado diferentes métodos numéricos para la resolución de la ecuación, ya que debido a la no linealidad del problema en algunas situaciones resulta complicado que el método numérico converja a la solución, por tanto, para tener distintas alternativas si sucede, se han implementado cuatro métodos de resolución.

Método modificado de Hinds.

Aplicamos la segunda ley de movimiento de Newton, y consideramos los diferenciales como diferencias finitas.

$$M2 - M1 = P1 - P2 + W * Sin(\Theta) - Ff$$

$$M2 - M1 = \beta * \rho * \left(\frac{(Q + \Delta Q)^2}{A} - \frac{Q^2}{A}\right)$$

- Siendo $\bar{A}=\bar{Q}/\bar{v}$.

$$M2 - M1 = \beta * \rho * \left(\frac{(Q + \Delta Q)^2}{\frac{Q + \Delta Q}{v + \Delta v}} - \frac{Q^2}{\frac{Q}{v}}\right) = \beta * \rho * \left((Q + \Delta Q) * (v + \Delta v) - Q * v\right)$$

$$P1 - P2 + W * Sin(\Theta) - Ff = -\Upsilon * \bar{A} * \Delta y + \Upsilon * \bar{A} * So * \Delta x - \Upsilon * \bar{A} * Sf * \Delta x$$

$$\beta * \frac{\Upsilon}{g}\big((Q + \Delta Q) * (v + \Delta v) - Q * v\big) = -\Upsilon * \bar{A} * \Delta y + \Upsilon * \bar{A} * So * \Delta x - \Upsilon * \bar{A} * Sf * \Delta x$$

$$\Delta y = (So - Sf) * \Delta x - \frac{\beta * Q}{g * \bar{A}} * \left(\Delta v + \Delta Q * \frac{(\Delta v + v)}{Q}\right)$$

$$\Delta y = (So - Sf) * \Delta x - \frac{\beta * Q}{g} * \frac{\bar{v}}{\bar{Q}}\left(\Delta v + \Delta Q * \frac{(\Delta v + v)}{Q}\right)$$

- La caída total en la elevación de la superficie de agua entre las secciones 1 y 2 se puede expresar como:

$$\Delta y' = -\Delta y + So * \Delta x$$

$$\Delta y' = \frac{\beta * Q}{g} * \frac{\bar{v}}{\bar{Q}}\left(\Delta v + \Delta Q * \frac{(\Delta v + v)}{Q}\right) - So * \Delta x + Sf * \Delta x + So * \Delta x$$

$$\boxed{\Delta y' = \frac{\beta * Q1}{g} * \frac{(v1 + v2)}{(Q1 + Q2)}\left((v2 - v1) + (Q2 - Q1) * \frac{(v2)}{v1}\right) + \frac{Sf1 + Sf2}{2} * \Delta x}$$

- $\frac{\beta * Q1}{g} * \frac{(v1+v2)}{(Q1+Q2)}\left((v2 - v1) + (Q2 - Q1) * \frac{(v2)}{v1}\right)$ Es la caída de la superficie de agua debido a las pérdidas por impacto.
- $Sf * \Delta x$ Es la pérdida de carga producida por la fricción.

$$\Delta y'1 = -\Delta y + So * \Delta x$$

$$\Delta y'2 = \frac{\beta * Q1}{g} * \frac{(v1 + v2)}{(Q1 + Q2)}\left((v2 - v1) + (Q2 - Q1) * \frac{(v2)}{v1}\right) + \frac{Sf1 + Sf2}{2} * \Delta x$$

Para la resolución mediante este método se emplea un procedimiento de tanteos en cada sección longitudinal, cambiando los valores del calado y utilizando una

función de optimización de Matlab que permita minimizar una función objetivo, para que la caída total en elevación de la superficie entre dos secciones coincidan, es decir, Δy'1=Δy'2.

$$Fobj = (\Delta y'1 - \Delta y'2)^2$$

Método de Euler modificado o de Heun.

Este método se emplea para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)\ en\ el\ caso\ de\ estudio\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{So - Sf - \frac{2 * \beta * Q}{A^2 * g} * q}{1 - \frac{\beta * Q^2 * T}{A^3 * g}}$$

Consiste en un *nuevo valor=valor anterior + pendiente * Tamaño del paso*, es decir, *yi+1=yi+Φ*h*.

La pendiente estimada Φ se usa para extrapolar desde un valor anterior *yi* a un nuevo valor *yi*+1 en una distancia *h*. Esta fórmula se aplica paso a paso para calcular un valor posterior *y* que permite trazar la trayectoria de la solución.

Este método para mejorar la estimación de la pendiente emplea la determinación de dos derivadas en el intervalo (una en el punto inicial y otra en el final). Las dos derivadas se promedian después con la finalidad de obtener una mejor estimación de la pendiente en todo el intervalo.

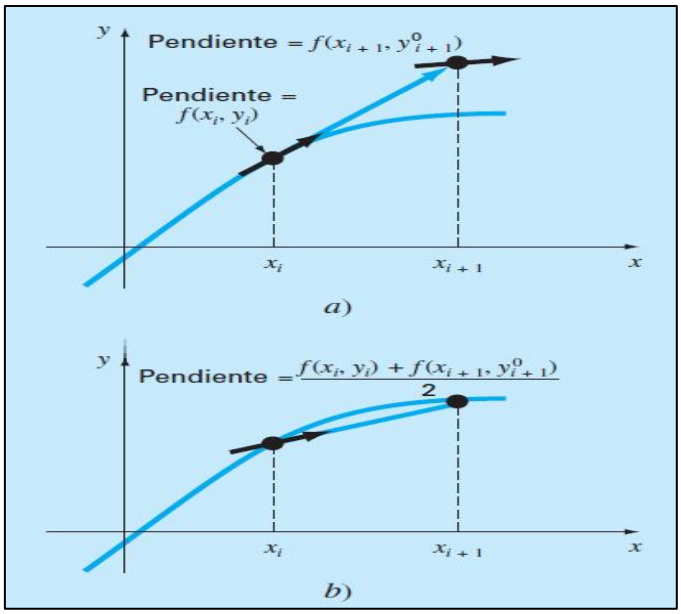


Ilustración 19 Estimación de la pendiente (Chapra & Canale, 2007)

El perfil de la lámina de agua hacia aguas abajo del canal partiendo de la sección de control, por tanto, en régimen supercrítico, se determina de la siguiente forma:

$$y^o_{i+1} = yi + \Delta x * f(xi, yi)$$

$$y_{i+1} = yi + \Delta x * \frac{f(xi, yi) + f(x_{i+1}, y^o_{i+1})}{2}$$

El perfil de la lámina de agua hacia aguas arriba del canal partiendo de la sección de control, por tanto, en régimen subcrítico, se determina de la siguiente forma:

$$y^o_{i-1} = yi - \Delta x * f(xi, yi)$$

$$y_{i-1} = yi - \Delta x * \frac{f(xi, yi) + f(x_{i+1}, y^o_{i-1})}{2}$$

Método de Runge-Kutta de cuarto orden.

La forma generalizada de la ecuación de este método tiene la siguiente forma:

$$y_{i+1} = yi + f(xi, yi, h) * h$$

Donde *f* (*xi, yi, h*) se conoce como función incremento, la cual puede interpretarse como una pendiente representativa en el intervalo.

$$K1 = \Delta x * f(xi, yi)$$

$$K2 = \Delta x * f(xi + \frac{\Delta x}{2}, yi + \frac{K1}{2})$$

$$K3 = \Delta x * f(xi + \frac{\Delta x}{2}, yi + \frac{K2}{2})$$

$$K4 = \Delta x * f(xi + \Delta x, yi + K3)$$

$$Km = \frac{1}{6} * (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4)$$

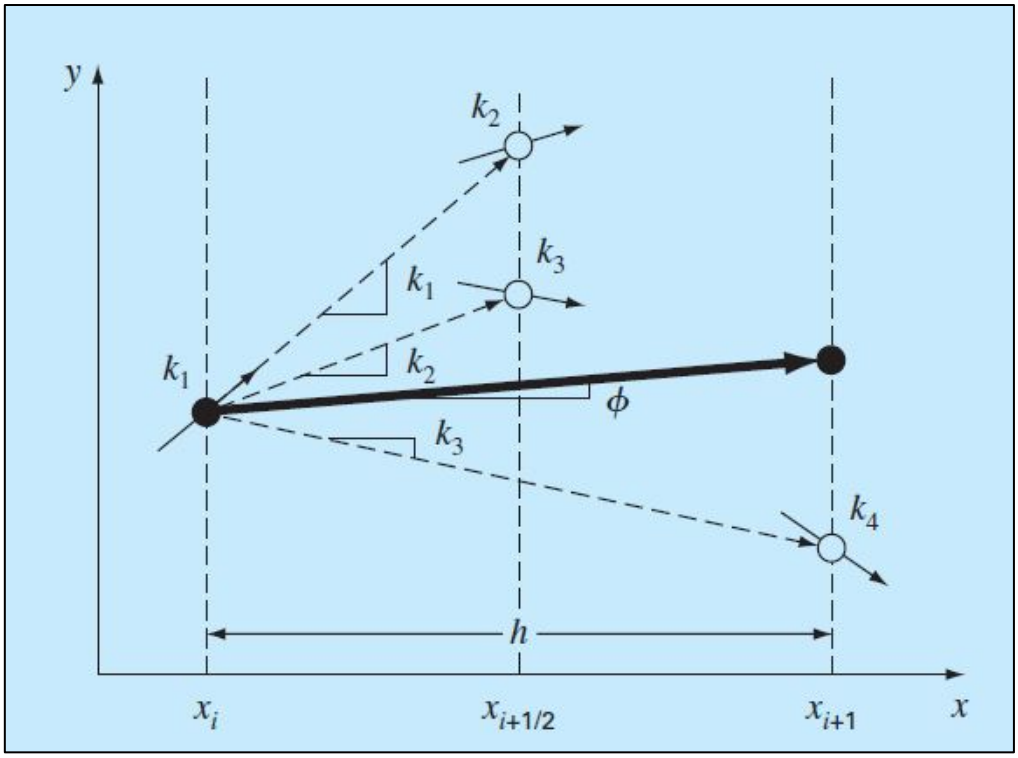


Ilustración 20 Pendiente estimadas RK4 (Chapra & Canale, 2007)

El perfil de la lámina de agua hacia aguas abajo del canal partiendo de la sección de control, por tanto, en régimen supercrítico, se determina de la siguiente forma:

$$y_{i+1} = yi + Km$$

El perfil de la lámina de agua hacia aguas arriba del canal partiendo de la sección de control, por tanto, en régimen subcrítico, se determina de la siguiente forma:

$$y_{i-1} = yi - Km$$

Donde cada una de las *K* representa una pendiente. El Km representa un promedio ponderado de éstas para establecer la mejor pendiente.

Método de Kutta-Merson.

Este método de resolución es parecido a Runge-Kutta, ya que la forma de la ecuación generalizada es igual, pero varía en cómo se determina la función incremento f (xi, yi, h).

$$K1 = \frac{\Delta x}{3} * f(xi, yi)$$

$$K2 = \frac{\Delta x}{3} * f(xi + \frac{\Delta x}{3}, yi + K1)$$

$$K3 = \frac{\Delta x}{3} * f(xi + \frac{\Delta x}{3}, yi + \frac{K1}{2} + \frac{K2}{2})$$

$$K4 = \frac{\Delta x}{3} * f\left(xi + \frac{\Delta x}{2}, yi + \frac{3 * K1}{8} + \frac{9 * K3}{8}\right)$$

$$K5 = \frac{\Delta x}{3} * f\left(xi + \Delta x, yi + \frac{3 * K1}{2} - \frac{9 * K3}{2} + 6 * K4\right)$$

$$Km = \frac{K1 + 4 * K4 + K5}{2}$$

El perfil de la lámina de agua hacia aguas abajo del canal partiendo de la sección de control, por tanto, en régimen supercrítico, se determina de la siguiente forma:

$$y_{i+1} = yi + Km$$

El perfil de la lámina de agua hacia aguas arriba del canal partiendo de la sección de control, por tanto, en régimen subcrítico, se determina de la siguiente forma:

$$y_{i-1} = yi - Km$$

Donde cada una de las *K* representa una pendiente. El Km representa un promedio ponderado de éstas para establecer la mejor pendiente.

Convergencia de los métodos

Se debe entender que la resolución mediante los métodos numéricos utilizados no necesariamente convergerá a la solución correcta, sino que lo hará con un error de truncamiento finito.

A través de las comprobaciones del código se han comprobado las siguientes particularidades de cada uno de los métodos.

- Método modificado de Hinds: Por las comprobaciones que se han llevado acabo, se puede afirmar que al método le es difícil converger a la solución correcta, si se considera que la distribución de velocidades no es uniforme, es decir, si consideramos el factor de corrección $\beta \neq 1$. Para poder solucionar este problema de convergencia tenemos que disminuir el intervalo de cálculo δx.
- Método de Euler modificado o Heun, Runge-Kutta de cuarto orden y de Kutta-Merson: Para que el método numérico de resolución pueda converger a la solución correcta se tiene que alejar la sección de control

de la situación de flujo crítico, debido a que para encontrar la sección de control imponemos que tanto el numerador como el denominador de la ecuación diferencial tengan un valor de cero, es decir, imponemos que la sección sea crítica $Fr^2=1$. La sección crítica es una sección en la cual se produce un cambio de curvatura, punto de inflexión, y da como resultado una pendiente perpendicular, es decir, una pendiente con valor infinito; y como estos métodos numéricos de resolución se basan en cálculo de la pendiente, no logran converger a la solución correcta. En este caso *δy/δx* tiende a infinito y por tanto cualquier valor incrementado de *y* será extremadamente grande para cualquier valor de *δx* por pequeño que sea.

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{So - Sf - \frac{2 * \beta * Q}{A^2 * g} * q}{1 - \frac{\beta * Q^2 * T}{A^3 * g}}$$

- En la sección de control se impone lo siguiente:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 0\ ;\ \ So - Sf - \frac{2 * \beta * Q}{A^2 * g} * q = 0$$

$$1 - \frac{\beta * Q^2 * T}{A^3 * g} = 0 \rightarrow 1 - Fr^2 = 0 \rightarrow Fr = 1$$

Por tanto, lo que se debe hacer es aumentar el calado cuando el régimen es subcrítico con el objetivo de disminuir el número de Froude, con valores de Fr≈1, es decir, empezar con una sección próxima a la crítica en la que el régimen es subcrítico Fr<1, y cuando el régimen es supercrítico debemos disminuir el calado con el objetivo de aumentar el número de Froude, con valores de Fr≈1, es decir, empezar con una sección próxima a la crítica en la que el régimen es supercrítico Fr>1. La magnitud

necesaria que se debe alejar la sección de control para que el método converja depende de las características del problema de estudio, del método numérico de resolución y del incremento dx entre cada sección.

VII. Validación de los resultados del código numérico.

En esta sección se realizará una comprobación de que los resultados obtenidos mediante los métodos numéricos programados en Matlab son correctos. Para comprobarlos se verificaran los resultados con datos obtenidos de libros técnicos de hidráulica de canales.

Los resultados obtenidos mediante los métodos numéricos son gráficos para poder observar de forma más visual la forma del perfil de lámina de agua generado por la adición lateral de un caudal unitario y poder localizar los posibles fallos de convergencia de forma más directa, y numéricos para poder obtener los resultados del calado en cada sección longitudinal del canal.

La leyenda de los gráficos es la siguiente:

- Gráfico de Longitud-Numero de Froude

	Régimen Subcrítico.
	Régimen Supercrítico.
+	Punto de control.

Tabla 1 Leyenda de los resultados gráficos: Número de Froude

- Gráfico de Longitud-Elevación de la superficie de agua.

	Régimen Subcrítico.
	Régimen Supercrítico.
+	Punto de control.
	Fondo del canal.

Tabla 2 Leyenda de los resultados gráficos: Perfil de la lámina de agua

La sección transversal del canal utilizado en todos los casos de comprobación es Trapecial, ya que los libros técnicos que se utilizan para contrastar resultados hacen servir esta sección tipo en cada uno de sus problemas. Para todos los problemas se considerará un valor de dx=0.1 m.

Validación de resultados nº1.

En este caso se contrastará los resultados con el ejemplo 8.1 extraído de (Subramanya, 1982), por tanto, se comprobará si la ubicación de la sección de control del ejemplo coincide con la sección de control calculada.

Validación de resultados 1.A.

Datos del Canal	
Geometría	Trapezoidal
Longitud (L)	100 m
Caudal inicial (Qo)	0 m^3/s
Caudal unitario (q)	2 m^2/s
Ancho (Bo)	5 m
Talud (m)	1
C. Inicial (Zo)	0 m
Pendiente longitudinal (So)	0.1
Coef. Manning (n)	0.015
Coef. Boussinesq (ϐ)	1.25

Tabla 3 Datos del canal: Validación de los resultados 1.A.

Los resultados obtenidos en (Subramanya, 1982) de la sección de control son los siguientes:

Sección de control	
Xc (m)	40 m
Yc (m)	2.65 m
Froude	1.004

Tabla 4 Resultados de la sección control 1.A (Subramanya, 1982)

Los resultados obtenidos mediante el código numérico son los siguientes:

Sección de control	
Xc (m)	40.32 m
Yc (m)	2.67 m
Froude	1

Tabla 5 Sección de control 1.A obtenida por el código numérico

La diferencia entre el resultado obtenido en (Subramanya, 1982) y el calculado es el siguiente:

$$ErXc = \frac{|40 - 40.32|}{40} * 100 = 0.8\% \; ; \; ErYc = \frac{|2.65 - 2.67|}{2.65} * 100 = 0.75\%$$

Podemos ver que la diferencia entre los resultados obtenidos y los de contraste es muy baja, < 1%, por tanto podemos afirmar que los resultados obtenidos mediante método numérico son correctos.

El grafico del perfil de la lámina de agua y del número de Froude obtenido en este problema es el siguiente:

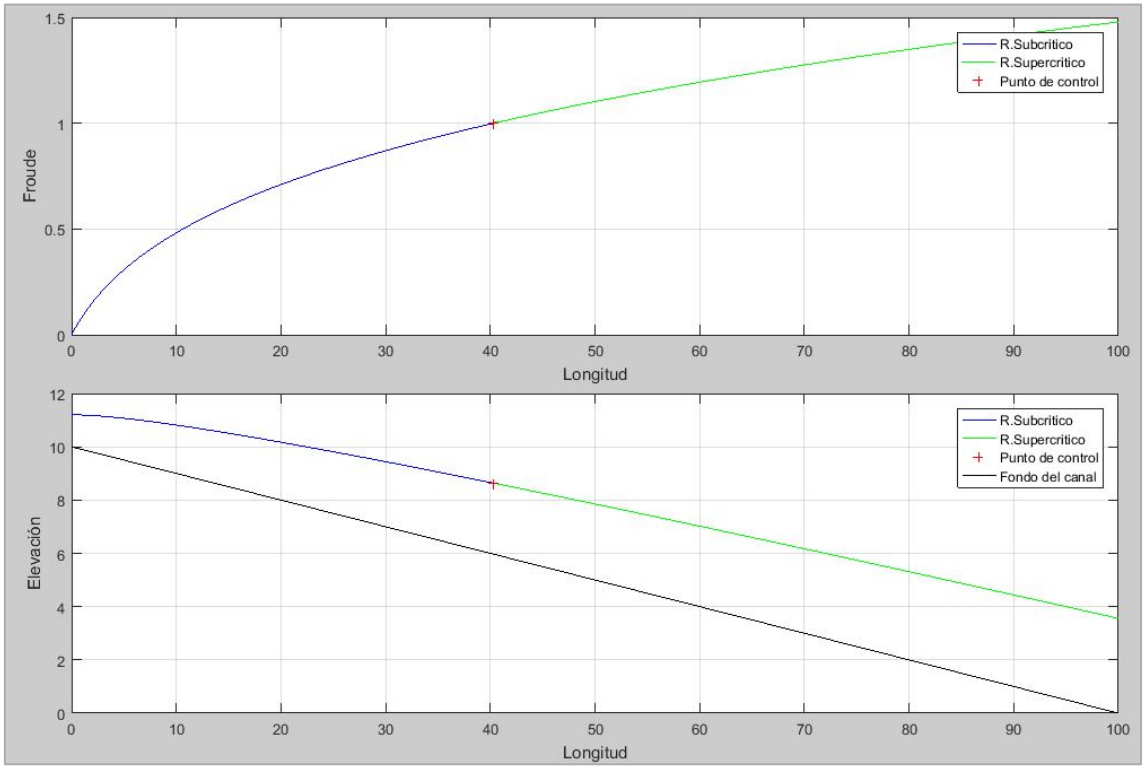


Ilustración 21 Resultados gráficos 1.A: Froude y Perfil de lámina de agua

Validación de los resultados 1.B.

Datos del Canal	
Geometría	Trapezoidal
Longitud (L)	100 m
Caudal inicial (Qo)	0 m^3/s
Caudal unitario (q)	3 m^2/s
Ancho (Bo)	5 m
Talud (m)	1
C. Inicial (Zo)	0 m
Pendiente longitudinal (So)	0.1
Coef. Manning (n)	0.015
Coef. Boussinesq (ϕ)	1.25

Tabla 6 Datos del canal: Validación de los resultados 1.B.

Los resultados obtenidos en (Subramanya, 1982) de la sección de control son los siguientes:

Sección de control	
Xc (m)	56 m
Yc (m)	4 m
Froude	1.001

Tabla 7 Resultados de la sección control 1.B (Subramanya, 1982).

Los resultados obtenidos mediante el código numérico son los siguientes:

Sección de control	
Xc (m)	56.67 m
Yc (m)	4.03 m
Froude	1

Tabla 8 Sección de control 1.B obtenida por el código numérico

La diferencia entre el resultado obtenido en (Subramanya, 1982) y el calculado es el siguiente:

$$ErXc = \frac{|56 - 56.67|}{56} * 100 = 1.2\% \; ; \; ErYc = \frac{|4 - 4.03|}{4} * 100 = 0.75\%$$

Podemos ver que la diferencia entre los resultados calculados y los de contraste es muy baja, alrededor del 1%, por tanto podemos afirmar que los resultados obtenidos mediante método numérico son correctos.

El grafico del perfil de la lámina de agua y del número de Froude obtenido en este problema es el siguiente:

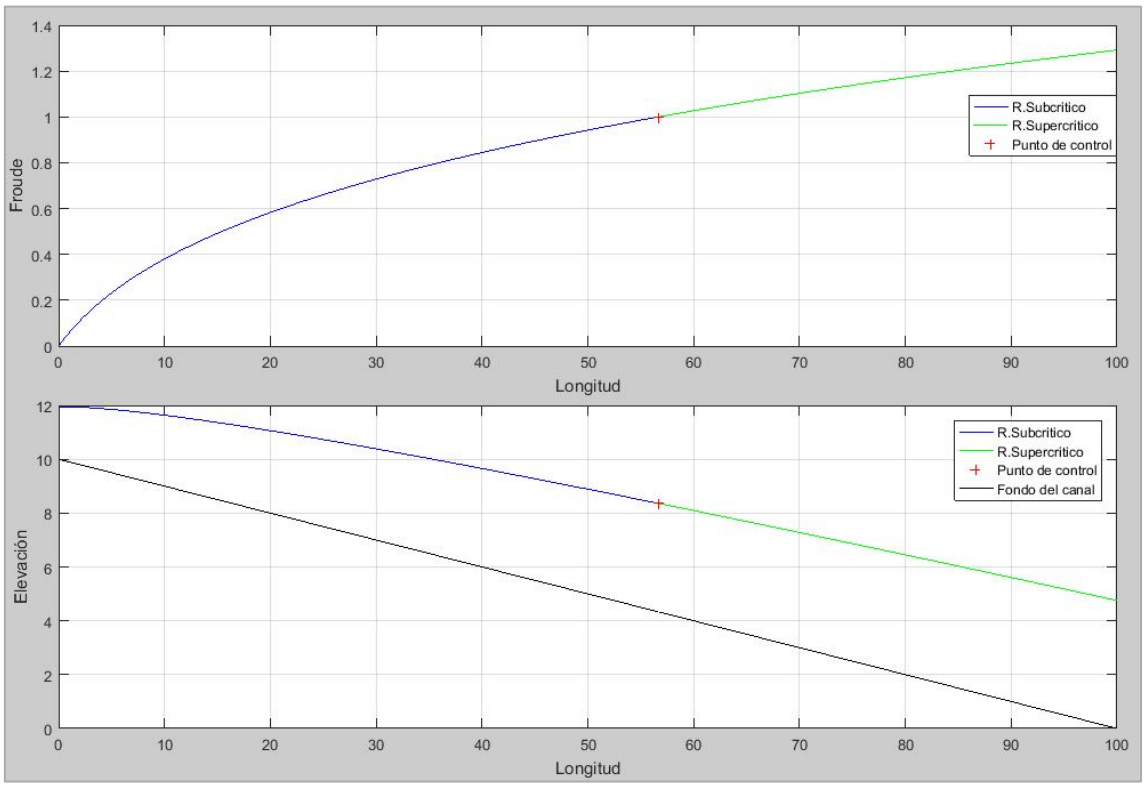


Ilustración 22 Resultados gráficos 1.B: Froude y Perfil de lámina de agua

Validación de resultados nº2.

En este caso se contrastarán los resultados del código de cálculo con el ejemplo 6.1 extraído de (Srivastava, 2008); Se comprobará si la localización de la sección de control calculada en el ejemplo coincide con la sección de control dada por el código numérico de cálculo.

Validación de los resultados 2.A

Datos del Canal	
Geometría	Trapezoidal
Longitud (L)	80 m
Caudal inicial (Qo)	0 m^3/s
Caudal unitario (q)	2 m^2/s
Ancho (Bo)	5 m
Talud (m)	1
C. Inicial (Zo)	0 m
Pendiente longitudinal (So)	0.1
Coef. Manning (n)	0.01
Coef. Boussinesq (ϭ)	1.2

Tabla 9 Datos del canal: Validación de los resultados 2.A.

Los resultados obtenidos en (Srivastava, 2008) de la sección de control son los siguientes:

Sección de control	
Xc (m)	40 m
Yc (m)	2.7 m
Froude	0.95

Tabla 10 Resultados de la sección control 2.A. (Srivastava, 2008)

Los resultados obtenidos mediante el código numérico son los siguientes:

Sección de control	
Xc (m)	38.86 m
Yc (m)	2.58 m
Froude	1

Tabla 11 Sección de control 2.A obtenida por el código numérico

La diferencia entre el resultado obtenido en (Srivastava, 2008) y el calculado es el siguiente:

$$ErXc = \frac{|40 - 38.86|}{40} * 100 = 2.85\% \; ; \; ErYc = \frac{|2.7 - 2.58|}{2.7} * 100 = 4.44\%$$

Se puede observar que hay una ligera diferencia entre los resultados, prácticamente de un 4.5%, y es probable que sea debido a que el número de Froude obtenido en el libro es de 0.95 cuando debería estar más próximo a 1.

El grafico del perfil de la lámina de agua y del número de Froude obtenido en este problema es el siguiente:

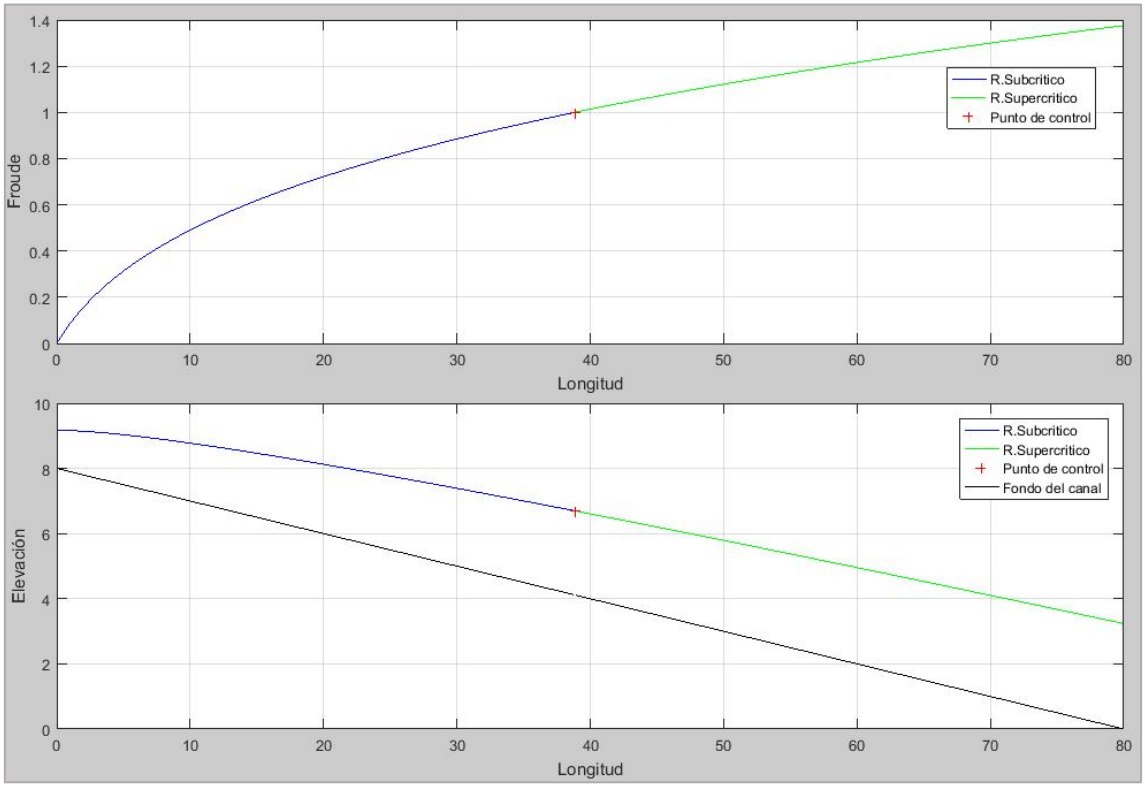


Ilustración 23 Resultados gráficos 2.A: Froude y Perfil de lámina de agua

Validación de los resultados 2.B.

Datos del Canal	
Geometría	Trapezoidal
Longitud (L)	80 m
Caudal inicial (Qo)	0 m^3/s
Caudal unitario (q)	3 m^2/s
Ancho (Bo)	5 m
Talud (m)	1
C. Inicial (Zo)	0 m
Pendiente longitudinal (So)	0.1
Coef. Manning (n)	0.01
Coef. Boussinesq (ϵ)	1.2

Tabla 12 Datos del canal: Validación de los resultados 2.B.

Los resultados obtenidos en (Srivastava, 2008) de la sección de control son los siguientes:

Sección de control	
Xc (m)	56 m
Yc (m)	4 m
Froude	0.98

Tabla 13 Resultados de la sección control 2.B. (Srivastava, 2008)

Los resultados obtenidos mediante el código numérico son los siguientes:

Sección de control	
Xc (m)	54.82 m
Yc (m)	3.91 m
Froude	1

Tabla 14 Sección de control 2.B obtenida por el código numérico

La diferencia entre el resultado obtenido en (Srivastava, 2008) y el calculado es el siguiente:

$$ErXc = \frac{|56 - 54.82|}{56} * 100 = 2.1\% \; ; \; ErYc = \frac{|4 - 3.91|}{4} * 100 = 2.25\%$$

Se puede observar que la diferencia entre los resultados es baja, prácticamente de un 2.25%, diferencia aún más baja que la anterior, debido a que el número de

Froude de la sección de control obtenido por el libro es más próxima a 1 que la anterior.

El grafico del perfil de la lámina de agua y del número de Froude obtenido en este problema es el siguiente:

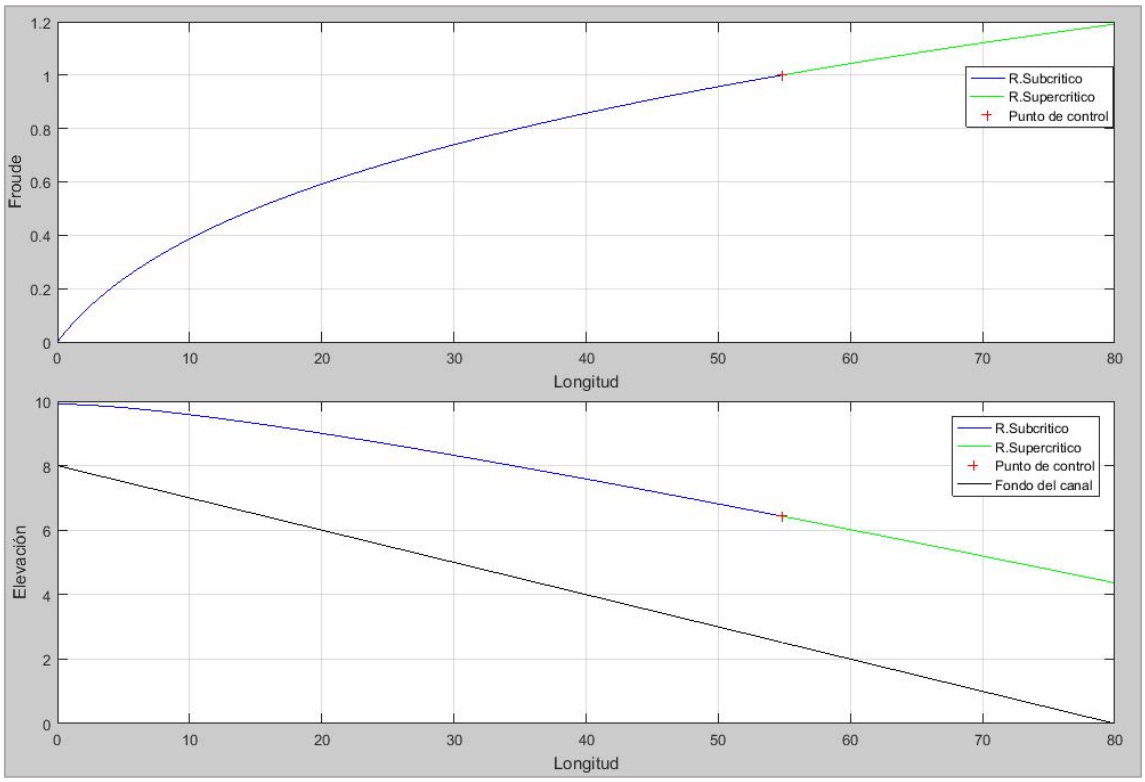


Ilustración 24 Resultados gráficos 2.B: Froude y Perfil de lámina de agua

Validación de resultados nº3.

En este caso se contrastarán los resultados con el ejemplo 6.1 extraído de (Jain, 2001), y se comprobará si coincide la localización de la sección de control calculada en el ejemplo con la sección de control obtenida por el código numérico de cálculo, y si los valores de los calados obtenidos también coinciden.

Datos del Canal	
Geometría	Trapezoidal
Longitud (L)	122 m
Caudal inicial (Qo)	0 m^3/s
Caudal unitario (q)	4 m^2/s
Ancho (Bo)	3 m
Talud (m)	0.5
C. Inicial (Zo)	0 m
Pendiente longitudinal (So)	0.15
Coef. Manning (n)	0.015
Coef. Boussinesq (ϵ)	1

Tabla 15 Datos del canal: Validación de los resultados nº3.

Los resultados obtenidos por (Jain, 2001) de la sección de control son los siguientes:

Sección de control	
Xc (m)	55 m
Yc (m)	5.88 m
Froude	1.01

Tabla 16 Resultados de la sección control nº3 (Jain, 2001)

Los resultados obtenidos mediante el código numérico son los siguientes:

Sección de control	
Xc (m)	53.03 m
Yc (m)	5.81 m
Froude	1

Tabla 17 Sección de control V.R. nº3 obtenida por el código numérico

La diferencia entre el resultado obtenido por (Jain, 2001) y el calculado es el siguiente:

$$ErXc = \frac{|55 - 53.03|}{55} * 100 = 3.58\% \; ; \; ErYc = \frac{|5.88 - 5.81|}{5.88} * 100 = 1.2\%$$

Se puede observar que la diferencia entre los resultados es baja, prácticamente de un 3.6%, por tanto se puede afirmar que los resultados obtenidos mediante el código numérico son correctos en la localización de la sección de control.

Una vez obtenida la sección de control, se procede a determinar el perfil de la lámina de agua por los diferentes métodos numéricos de cálculo y se obtiene el grafico del perfil de la lámina de agua y del número de Froude:

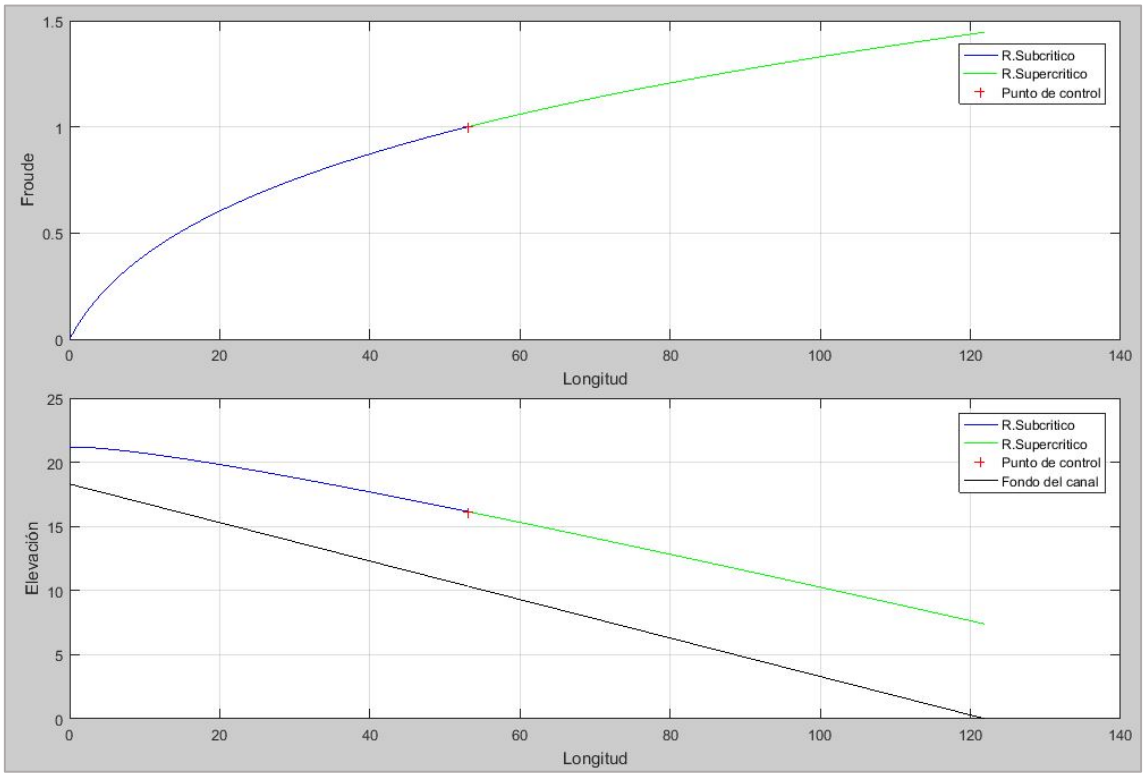


Ilustración 25 Resultados gráficos nº3: Froude y Perfil de lámina de agua

Una vez obtenido el perfil se procede a comparar los resultados de cada sección longitudinal obtenidos por el método numérico de cálculo y los obtenidos por (Jain, 2001)).

Valores de control aguas arriba de la sección de control:

X (m)	y(m)	y (m) M.Hinds	Er M.Hinds	y (m) Euler M.	Er Euler M.
0	2.6	2.89	11.2%	2.89	11.2%
25	4.7	4.72	0.42%	4.77	1.5%

Tabla 18 Comparación de los resultados aguas arriba del canal 3.1

X (m)	y(m)	y (m) SRK4	Er SRK4	y (m) KM	Er KM
0	2.6	2.88	10.76%	2.88	10.76%
25	4.7	4.77	1.5%	4.77	1.5%

Tabla 19 Comparación de los resultados aguas arriba del canal 3.2

Valores de control aguas abajo de la sección de control:

X (m)	y(m)	y (m) M.Hinds	Er M.Hinds	y (m) Euler M.	Er Euler M.
90	6.74	6.75	0.15%	6.75	0.15%
122	7.38	7.38	0%	7.38	0%

Tabla 20 Comparación de los resultados aguas abajo del canal 3.1

X (m)	y(m)	y (m) SRK4	Er SRK4	y (m) KM	Er KM
90	6.74	6.75	0.15%	6.75	0.15%
122	7.38	7.38	0%	7.38	0%

Tabla 21 Comparación de los resultados aguas abajo del canal 3.2

Validación de resultados nº4.

En este caso se contrastarán los resultados con el ejemplo 6.1 extraído de (H.French, 1988) y del ejemplo 12.1 extraído de (Chow, 1994).Se comprobará si coincide la localización de la sección de control calculada en el ejemplo con la sección de control obtenida por el código numérico de cálculo, y si los valores de los calados obtenidos también coinciden.

Datos del Canal	
Geometría	Trapezoidal
Longitud (L)	400 ft
Caudal inicial (Qo)	0 ft^3/s
Caudal unitario (q)	40 ft^2/s
Ancho (Bo)	10 ft
Talud (m)	0.5
C. Inicial (Zo)	0 ft
Pendiente longitudinal (So)	0.1505
Coef. Manning (n)	0.015
Coef. Boussinesq (ϭ)	1

Tabla 22 Datos del canal: Validación de los resultados nº4

Los resultados obtenidos por (Chow, 1994) de la sección de control son los siguientes:

Sección de control	
Xc (ft)	164 ft
Yc (ft)	17.7 ft
Froude	1

Tabla 23 Resultados de la sección control nº4 (Chow, 1994)

Los resultados obtenidos mediante el código numérico son los siguientes:

Sección de control	
Xc (ft)	162.82 ft
Yc (ft)	17.62 ft
Froude	1

Tabla 24 Sección de control V.R. nº4 obtenida por el código numérico

La diferencia entre el resultado obtenido por (Chow, 1994) y el calculado es el siguiente:

$$ErXc = \frac{|164 - 162.82|}{164} * 100 = 0.72\% \; ; \; ErYc = \frac{|17.7 - 17.62|}{17.7} * 100 = 0.45\%$$

Se puede observar que la diferencia entre los resultados es baja, prácticamente de un 0.7%, por tanto se puede afirmar que los resultados obtenidos mediante el código numérico son correctos respecto a la localización de la sección de control.

Una vez obtenida la sección de control, se procede a determinar el perfil de la lámina de agua por los diferentes métodos numéricos de cálculo y se obtiene el grafico del perfil de la lámina de agua y del número de Froude:

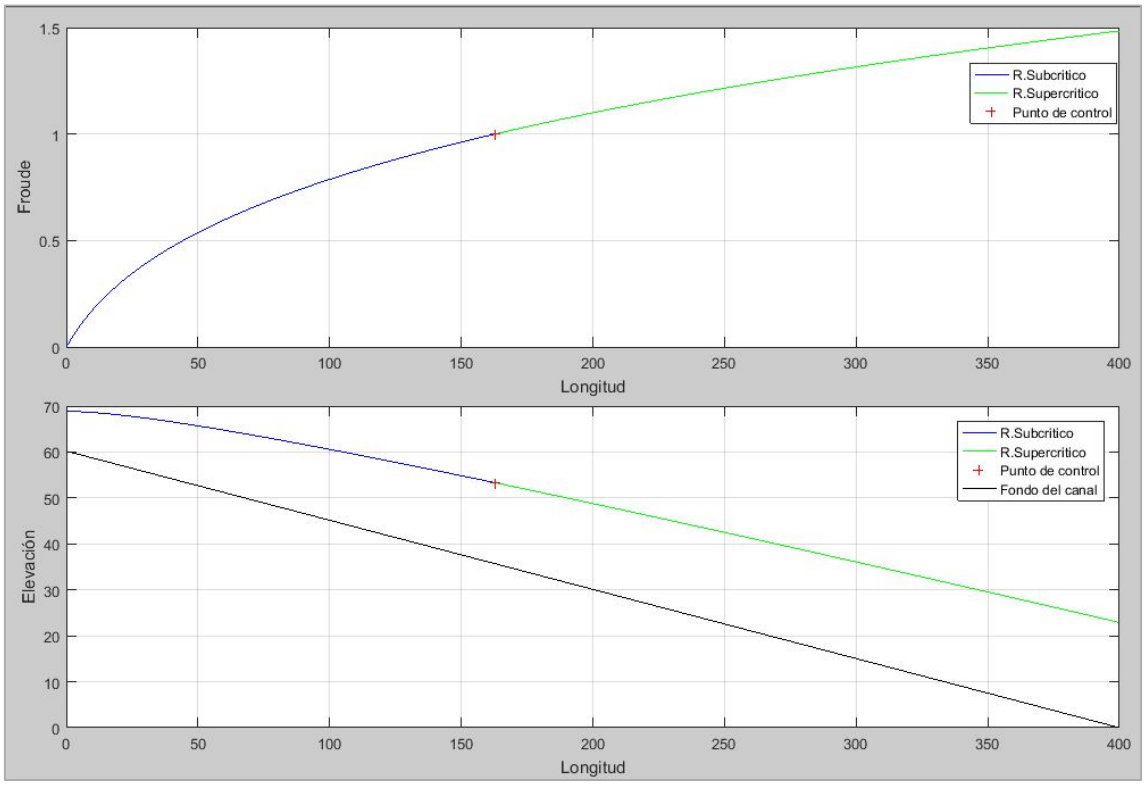


Ilustración 26 Resultados gráficos nº4: Froude y Perfil de lámina de agua

Una vez obtenido el perfil se procede a comparar los resultados de cada sección longitudinal obtenidos por el método numérico de cálculo y los obtenidos por (Chow, 1994).

Valores de control aguas arriba de la sección de control:

X (ft)	Y (ft)	y (ft) M.Hinds	Er M.Hinds	y (ft) Euler M.	Er Euler M.
0	8.61	8.65	0.46%	8.65	0.46%
10	9.8	9.9	1%	9.92	1.2%
25	11.2	11.31	0.9%	11.31	0.9%
50	12.9	13.01	0.85%	13.01	0.85%
100	15	15.43	2.9%	15.43	2.9%

Tabla 25 Comparación de los resultados aguas arriba del canal 4.1

X (ft)	Y (ft)	y (ft) SRK4	Er SRK4	y (ft) KM	Er KM
0	8.61	8.66	0.6%	8.65	0.46%
10	9.8	9.92	1.2%	9.92	1.2%
25	11.2	11.31	0.9%	11.31	0.9%
50	12.9	13.01	0.85%	13.01	0.85%
100	15	15.43	2.9%	15.43	2.9%

Tabla 26 Comparación de los resultados aguas arriba del canal 4.2

Valores de control aguas abajo de la sección de control:

X (ft)	Y (ft)	y (ft) M.Hinds	Er M.Hinds	y (ft) Euler M.	Er Euler M.
200	18.4	18.68	1.52%	18.68	1.52%
250	19.9	19.92	0.1%	19.93	0.15%
300	21	21.03	0.14%	21.03	0.14%
350	22	22.01	22	22.01	0.05%
400	22.9	22.91	0.04%	22.91	0.04%

Tabla 27 Comparación de los resultados aguas abajo del canal 4.1

X (ft)	Y (ft)	y (ft) SRK4	Er SRK4	y (ft) KM	Er KM
200	18.4	18.68	1.52%	18.68	1.52%
250	19.9	19.93	0.15%	19.93	0.15%
300	21	21.03	0.14%	21.03	0.14%
350	22	22.01	22	22.01	0.05%
400	22.9	22.91	0.04%	22.91	0.04%

Tabla 28 Comparación de los resultados aguas abajo del canal 4.2

Tal y como podemos ver los 4 métodos de resolución dan valores de calado que se adaptan muy bien a los resultados de comparación.

Validación de resultados nº5.

En este caso se contrastarán los resultados con el ejemplo 6.3 extraído de (Srivastava, 2008), y se comprobará si coincide la localización de la sección de control calculada en el ejemplo con la sección de control obtenida por el código numérico de cálculo, y si los valores de los calados obtenidos también coinciden.

Datos del Canal	
Geometría	Rectangular
Longitud (L)	50 m
Caudal inicial (Qo)	0 m^3/s
Caudal unitario (q)	1 m^2/s
Ancho (Bo)	10 m
C. Inicial (Zo)	0 m
Pendiente longitudinal (So)	0.05
Coef. Manning (n)	0.01
Coef. Boussinesq (β)	1.2

Tabla 29 Datos del canal: Validación de los resultados nº5.

Los resultados obtenidos por (Srivastava, 2008) de la sección de control son los siguientes:

Sección de control	
Xc (m)	50 m
Yc (m)	2 m
Froude	0.62

Tabla 30 Resultados de la sección control nº5 (Srivastava, 2008)

Los resultados obtenidos mediante el código numérico son los siguientes:

Sección de control	
Xc (m)	83.27 m
Yc (m)	2.04 m
Froude	1

Tabla 31 Sección de control V.R. nº5 obtenida por el código numérico

El resultado de Froude de 0.62 obtenido (Srivastava, 2008) es debido a que como la sección de control está situada fuera de longitud del canal, considera

que *Xc=L*, y no indica resultado real de la localización de la sección de control *Xc,* pero sí indica el valor del calado de la sección de control.

La diferencia entre el resultado obtenido (Srivastava, 2008) y el calculado es el siguiente:

$$ErYc = \frac{|2 - 2.04|}{2} * 100 = 2\%$$

Se puede observar que la diferencia entre los resultados es baja, prácticamente de un 2%, por tanto se puede afirmar que los resultados obtenidos mediante el código numérico son correctos respecto a la localización de la sección de control.

Una vez obtenida la sección de control, se procede a determinar el perfil de la lámina de agua por los diferentes métodos numéricos de cálculo y se obtiene el grafico del perfil de la lámina de agua y del número de Froude:

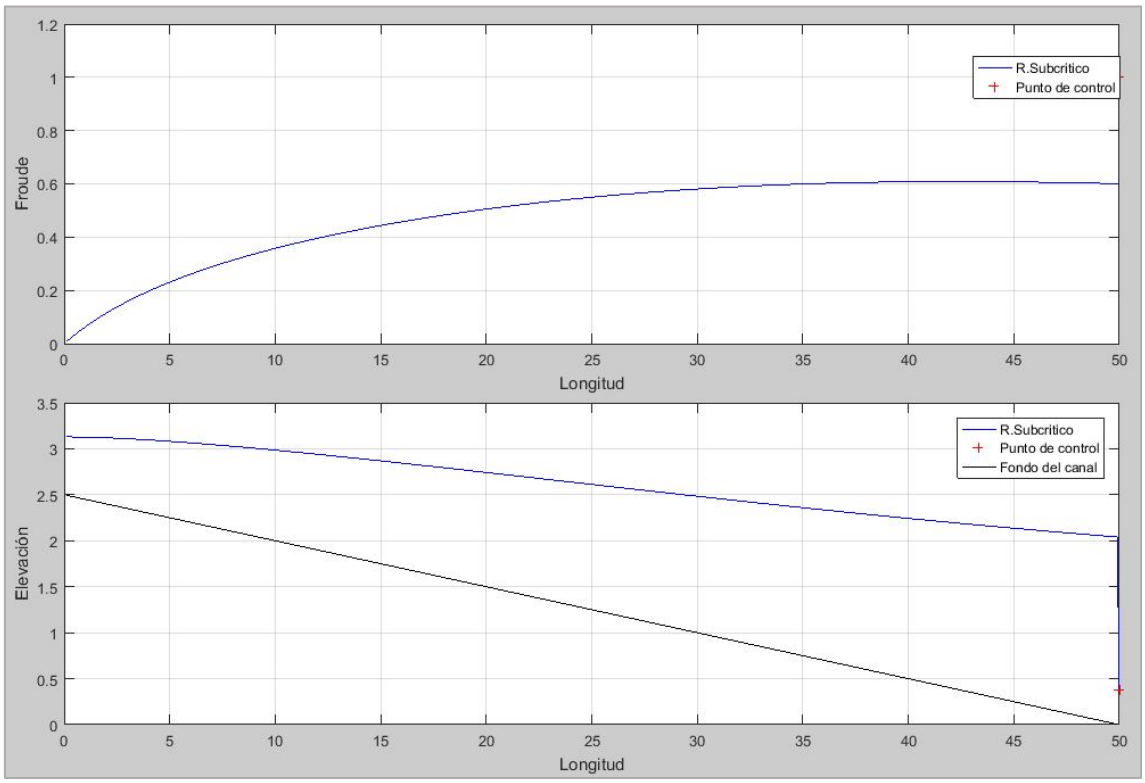


Ilustración 27 Resultados gráficos nº5: Froude y Perfil de lámina de agua

Una vez obtenido el perfil se procede a comparar los resultados de cada sección longitudinal obtenidos por el método numérico de cálculo y los obtenidos por (Srivastava, 2008).

Valores de control aguas arriba de la sección de control:

X (m)	Y (m)	y (m) M.Hinds	Er M.Hinds	y (m) Euler M.	Er Euler M.
0	0.63	0.63	0%	0.63	0%
10	0.98	0.985	0.51%	0.985	0.51%
20	1.23	1.24	0.81%	1.24	0.81%
30	1.46	1.48	1.34%	1.48	1.34%
40	1.71	1.74	1.75%	1.74	1.75%

Tabla 32 Comparación de los resultados aguas arriba del canal 5.1

X (m)	Y (m)	y (m) SRK4	Er SRK4	y (m) KM	Er KM
0	0.63	0.63	0%	0.63	0%
10	0.98	0.985	0.51%	0.985	0.51%
20	1.23	1.24	0.81%	1.24	0.81%
30	1.46	1.48	1.34%	1.48	1.34%
40	1.71	1.74	1.75%	1.74	1.75%

Tabla 33 Comparación de los resultados aguas arriba del canal 5.2

Tal y como podemos ver los 4 métodos de resolución dan valores de calado que se adaptan muy bien a los resultados de comparación.

Sección del canal forma de “U”.

En esta apartado se estudiará una sección transversal típica que se utiliza usualmente en los sistemas de drenaje de las ciudades y carreteras.

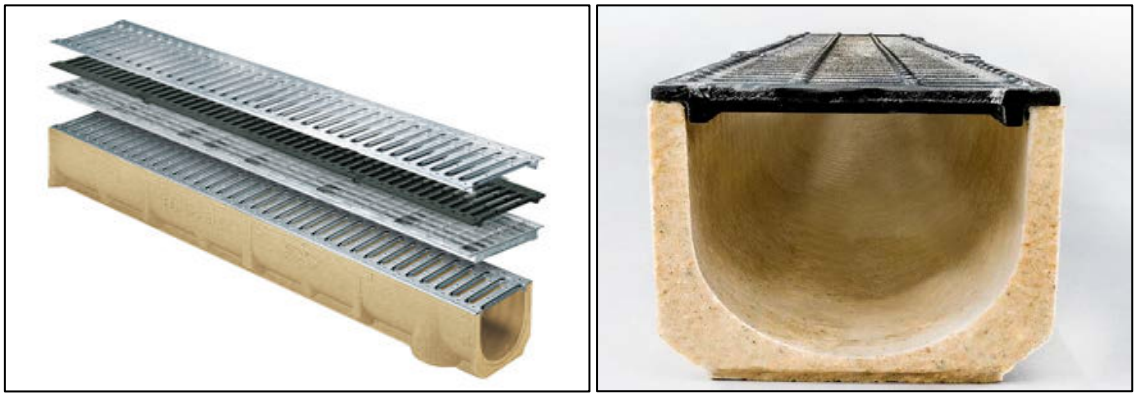


Ilustración 28 Sección transversal real de los canales de drenaje

Para el estudio se ha simplificado la sección real a la sección que se puede ver a continuación:

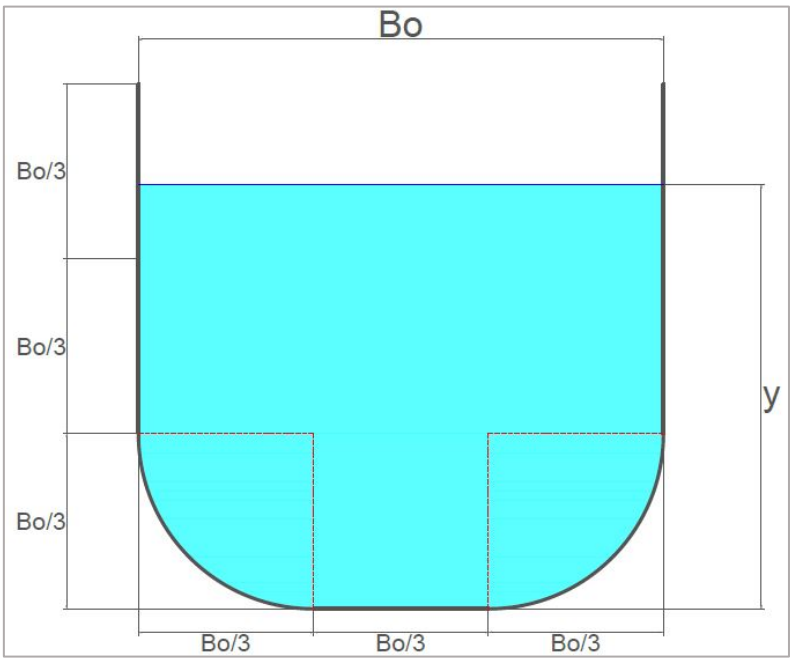


Ilustración 29 Sección transversal simplificada de los canales de drenaje

Para comprobar que los resultados que da el programa son correctos para esta sección tipo de los canales de drenaje, se han introducido al programa una geometría típica de este tipo de canaletas de drenaje con un caudal unitario que simule lo que normalmente son capaces de transportar este tipo de canaletas.

Datos del Canal	
Geometría	Sección en U
Longitud (L)	5 m
Caudal inicial (Qo)	0 m^3/s
Caudal unitario (q)	0.004 $m^3/s/m$
Ancho (Bo)	0.2 m
C. Inicial (Zo)	0 m
Pendiente longitudinal (So)	0.1
Coef. Manning (n)	0.015
Coef. Boussinesq (6)	1

Tabla 34 Datos del canal: Sección en "U".

En este caso se ha utilizado un dx=0.001 m.

La sección de control está localizada dentro de la longitud de la canaleta.

Sección de control	
Xc (m)	0.54 m
Yc (m)	0.03 m
Froude	1

Tabla 35 Sección de control obtenida por el código numérico

Una vez obtenida la sección de control, se procede a determinar el perfil de la lámina de agua por los diferentes métodos numéricos de cálculo y se obtiene el grafico del perfil de la lámina de agua y la evolución del número de Froude a lo largo del canal correspondiente a un caudal de entrada longitudinal de 4 l/s/m:

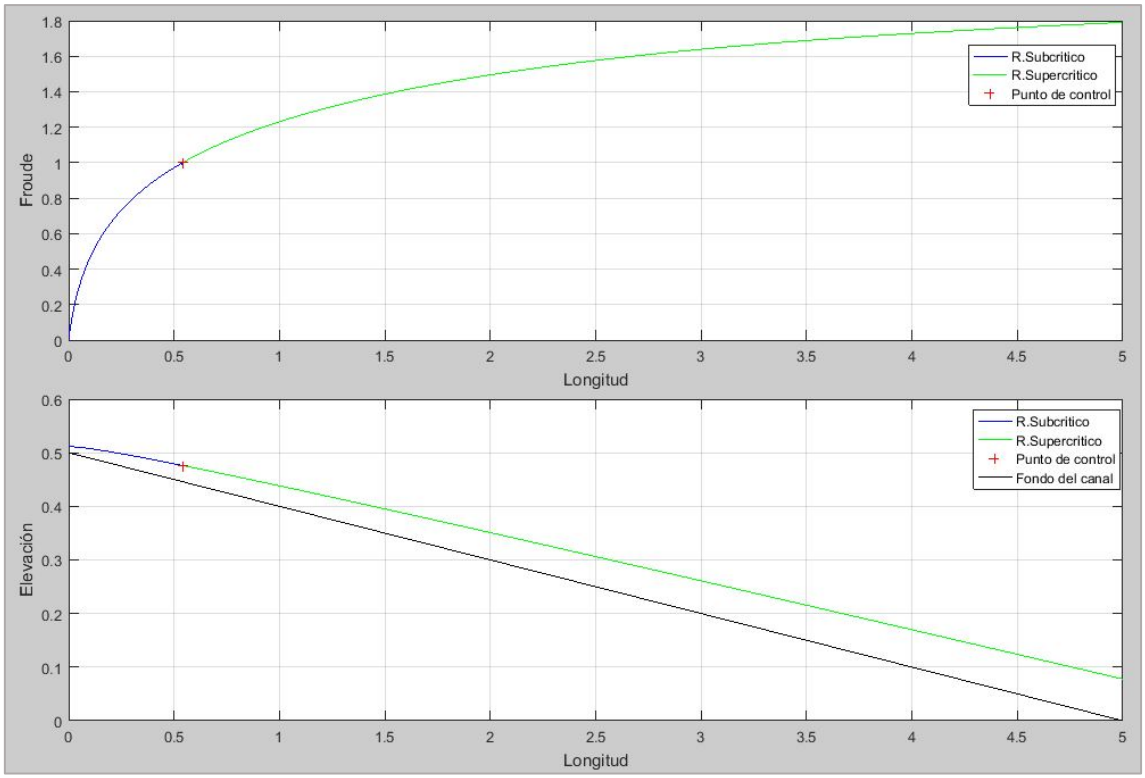


Ilustración 30 Resultados gráficos: Froude y Perfil de lámina de agua

Podemos ver que los resultados obtenidos siguen la tendencia esperada tanto en la evolución del número de Froude como en el perfil de la superficie de agua.

VIII. Conclusión

Este documento se centra en el desarrollo de un código numérico de cálculo capaz de resolver las ecuaciones del régimen espacialmente variado con caudal creciente, que puede ser usado para el diseño de canales en esas condiciones de flujo. En paralelo se desarrolla un estudio en el cual se explican las bases teóricas del régimen espacialmente variado y en determinar las aplicaciones futuras del código numérico desarrollado.

En el código numérico de cálculo se han implementado diferentes geometrías habituales en canales considerando flujo en lámina libre y se ha introducido además una sección transversal particular que pretende simular la sección de canaletas de drenaje de las calles y carreteras. También permite la implementación de nuevas secciones transversales, donde, para su introducción, primero se deben plantear las diferentes propiedades geométricas de la sección que se quiere añadir en función del calado de agua, y después se debe introducir cada propiedad geométrica en la función que le corresponda en el código numérico: área, perímetro mojado y ancho superficial.

Se puede afirmar que el código numérico desarrollado para resolver la ecuación diferencial ordinaria del flujo espacialmente variado con caudal creciente funciona correctamente, ya que los resultados obtenidos por el código numérico han sido contrastados con éxito con los diferentes casos extraídos de la literatura técnica.

Este código numérico puede utilizarse para el diseño de canales de drenaje de calles y carreteras y el de las canaletas de los forjados, ya que una vez hecho el análisis hidrológico que determine el caudal unitario que se añadirá al canal y

determinada la geometría de la sección transversal que se quiere utilizar para el diseño, el código numérico de cálculo permitirá obtener el perfil de la lámina de agua y el calado en cada sección longitudinal. Estos resultados permitirán comprobar si las dimensiones de la sección definida es capaz de llevar la cantidad de agua que debe circular por el canal.

También nos permite diseñar los canales de recogida de los aliviaderos laterales de las presas, donde para ello previamente se debe determinar mediante un estudio hidrológico e hidráulico cuál es la cantidad de agua que se deriva al canal, es decir, el caudal por unidad de longitud que entra al canal, y seguir el proceso descrito anteriormente.

La posibilidad de poder añadir en el futuro al código numérico distintas secciones transversales lo hace atractivo, ya que estas son muy variadas y de distintas formas en los canales de drenaje. Este código numérico permite obtener directamente el perfil de la lámina de agua y determinar si la sección transversal añadida es adecuada para transportar la cantidad de agua definida o si es necesario redefinir sus dimensiones. Además, las distintas casas de fabricación de canales de drenaje pueden añadir a su catálogo la cantidad de agua que puede transportar cada sección en función únicamente de la pendiente longitudinal del canal, haciendo más sencilla la elección de la sección transversal más adecuada para el diseño.

Bibliografía

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros.* México: McGraw-Hill.

Chow, V. T. (1994). *Hidráulica de canales abiertos.* Bogotá: McGraw-Hill.

Gonzáles Fariñas, J. E. (Marzo de 2002). Dimensionamiento hidráulico de aliviaderos laterales o trinchera. *Ingeniería del agua*, pp. 25-36.

H.French, R. (1988). *Hidráulica de canales abiertos.* México: McGraw-Hill.

Jain, S. C. (2001). *Open-Channel Flow.* United States of America : John Wiley & Sons, Inc.

Milán Paz, J. (Julio de 2000). Flujo espacialemente variado:Método iterativo de cálculo. *Ciencia e Ingeniería neogranadina*, pp. 37-43.

Pérez López, C. (2002). *MATLAB y sus aplicaciones en las ciencias y la ingeniería.* Madrid: PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Srivastava, R. (2008). *Flow Through Open Channels .* Oxford University Press.

Subramanya, K. (1982). *Flow in Open Channels.* New Delhi: Tata McGraw-Hill.

Apéndice A. Propiedades geométricas de las secciones.

Los canales artificiales normalmente se diseñan con formas geométricas regulares y se construyen con una sección transversal invariable y una pendiente de fondo constante, es decir, son canales prismáticos.

En esta sesión se mostrará cómo se realiza el cálculo de las propiedades geométricas e hidráulicas de la secciones tipos consideradas para el canal de estudio.

- **Talud "m":** Es la relación entre la proyección horizontal a la vertical de la pared lateral, es decir, m es el valor de la proyección horizontal cuando la vertical es 1.

$$m = \cot(\Theta)$$

- **Calado "y":** Es la distancia vertical desde el punto más bajo de una sección del canal hasta la superficie libre, es decir, la profundidad máxima del agua en el canal.
- **Ancho superficial "T":** Es el ancho de la superficie libre del agua.
- **Área hidráulica o área mojada "A":** Es la superficie ocupada por el líquido en una sección transversal normal.
- **Perímetro mojado "Wp":** Es la parte del contorno del conducto que está en contacto con el líquido.
- **Radio hidráulico "Rh":** Es la relación del área mojada con respecto a su perímetro mojado. El radio hidráulico es la dimensión característica de la sección transversal.

$$Rh = \frac{A}{Wp}$$

Sección Transversal Rectangular

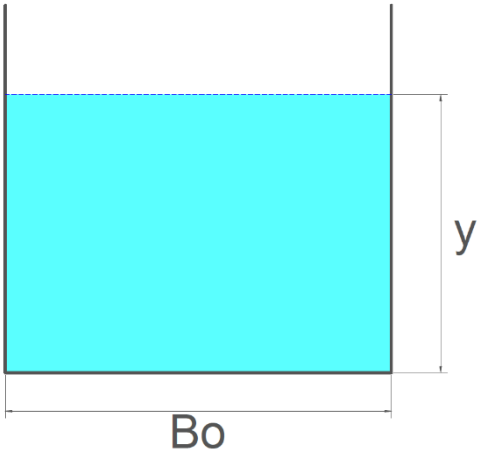


Ilustración 31 Sección Rectangular

Determinación del área:

$$\boxed{A = y * Bo}$$

Perímetro mojado:

$$\boxed{Wp = 2 * y + Bo}$$

Ancho superficial:

$$\boxed{T = Bo}$$

Sección Transversal Triangular

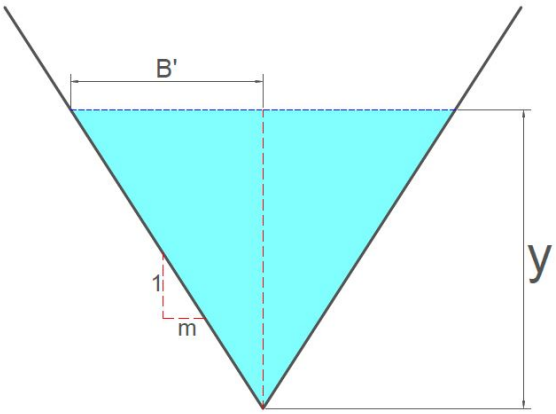


Ilustración 32 Sección Triangular

Determinación del Área:

$$m = \frac{B'}{y};\ A = 2 * \frac{y * y * m}{2} = \boxed{y^2 * m}$$

Perímetro Mojado:

$$(ym)^2 + y^2 = L^2$$

$$L = \sqrt{y^2 + (y * m)^2} = y * \sqrt{1 + m^2}$$

$$\boxed{Wp = 2 * y * \sqrt{1 + m^2}}$$

Ancho superficial:

$$\boxed{T = 2 * y * m}$$

Sección Transversal Trapezoidal

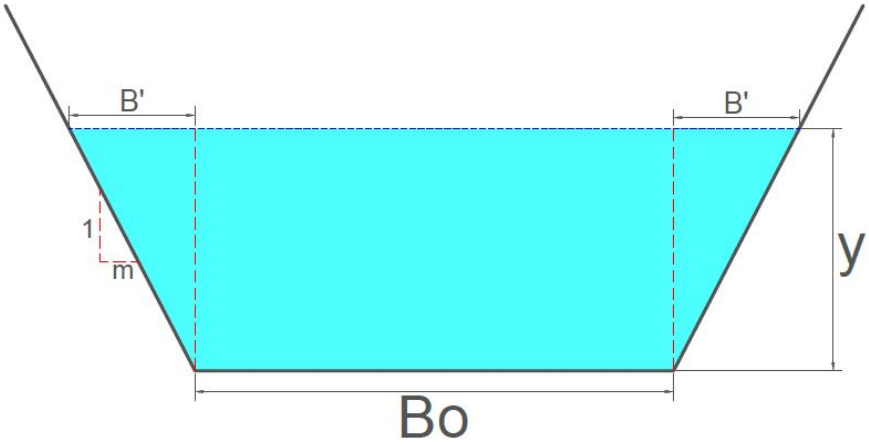


Ilustración 33 Sección Trapezoidal

Determinación del Área:

$$A = 2 * \frac{ym * y}{2} + Bo * y = \boxed{(Bo + y * m) * y}$$

Perímetro mojado:

$$\boxed{Wp = Bo + 2 * y * \sqrt{1 + m^2}}$$

Ancho Superficial:

$$\boxed{T = Bo + 2 * y * m}$$

Sección Transversal Circular

- ***Si y<Bo/2.***

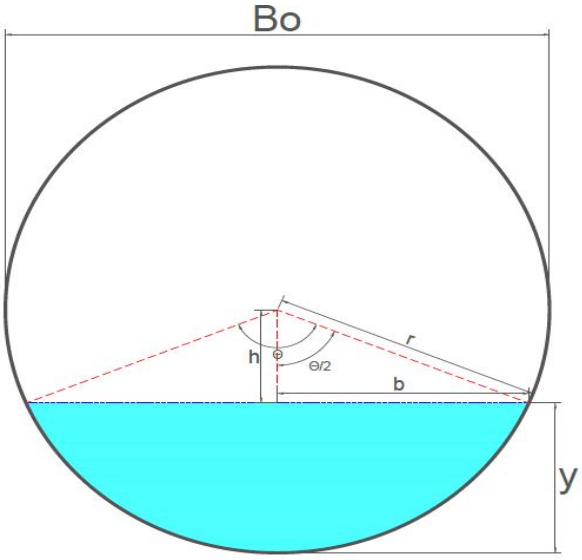


Ilustración 34 Sección circular: y<Bo/2

Cálculo del ángulo Θ:

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{r-y}{r};\ \ r = \frac{Bo}{2};\ \frac{Bo}{2} * \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{Bo}{2} - y$$

$$\boxed{\Theta = 2 * \cos^{-1}\left(1 - \frac{2y}{BO}\right)}$$

Cálculo del Área:

$$h = r * \cos\frac{\Theta}{2};\ b = r * sin\frac{\Theta}{2}$$

$$Area\ sector = \frac{\Theta * r^2}{2}$$

$$Area\ segmento = \frac{\Theta * r^2}{2} - r^2 * sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) * \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\Theta * r^2}{2} - r^2 * sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

$$Area\ segmento = \frac{r^2}{2}(\Theta - sin\Theta)$$

$$A = \frac{r^2}{2} * (\Theta - \sin\Theta) = \frac{\frac{Bo^2}{4}}{2} * (\Theta - sin\Theta)$$

$$\boxed{A = \frac{Bo^2}{8} * \left(2 * \cos^{-1}\left(1 - \frac{2y}{Bo}\right) - \sin\left(2 * \cos^{-1}\left(1 - \frac{2y}{Bo}\right)\right)\right)}$$

Perímetro mojado:

$$L = \Theta * r$$

$$Wp = \frac{Bo}{2} * 2 * \cos^{-1}\left(1 - \frac{2y}{Bo}\right) = \boxed{Bo * \cos^{-1}\left(1 - \frac{2y}{Bo}\right)}$$

Ancho Superficial:

$$Sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\frac{Bs}{2}}{\frac{D}{2}} \quad Bs = D * sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

$$\boxed{T = Bo * \sin\left(\cos^{-1}\left(1 - \frac{2y}{Bo}\right)\right)}$$

- ***Si y=Bo/2.***

Cálculo del Área:

$$A = \frac{\pi}{2} * \frac{Bo^2}{4} = \boxed{\frac{\pi * Bo^2}{8}}$$

Perímetro mojado:

$$Wp = \frac{\pi}{2} * \frac{Bo}{2} = \boxed{\frac{\pi * Bo}{4}}$$

Ancho Superficial:

$$\boxed{T = Bo}$$

- ***Si y>B/2.***

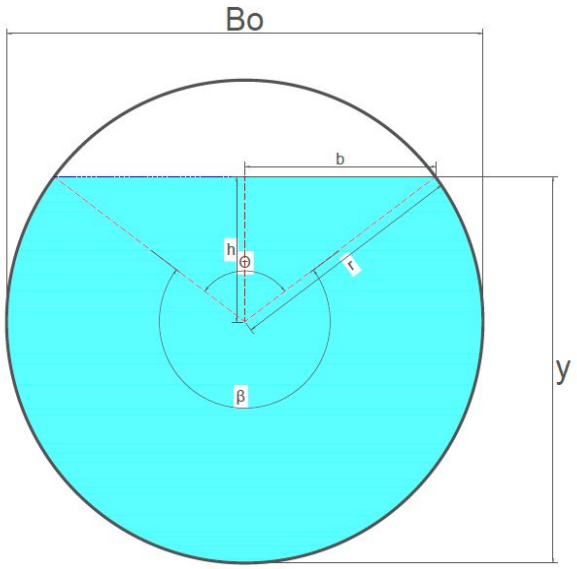


Ilustración 35 Sección Circular: y>Bo/2

Cálculo del ángulo Θ y ϐ:

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{y-r}{r};\ \ r = \frac{Bo}{2};\ \beta = 2\pi - \Theta$$

$$\frac{Bo}{2} * \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = y - \frac{Bo}{2}$$

$$\boxed{\Theta = 2 * \cos^{-1}\left(\frac{2y}{Bo} - 1\right)}$$

$$\boxed{\beta = 2 * \left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2y}{Bo} - 1\right)\right)}$$

Cálculo del Área:

$$h = r * \cos\frac{\Theta}{2}\ \ b = r * sin\frac{\Theta}{2}$$

$$Area\ sector = \frac{\Theta * r^2}{2}$$

$$Area\ segmento = \frac{\beta * r^2}{2} + r^2 * sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) * \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\beta * r^2}{2} + \frac{r^2}{2} * sin(\Theta)$$

$$A = \frac{\beta * r^2}{2} + \frac{r^2}{2} * sin(2\pi - \beta)$$

$$sin(2\pi - \beta) = sin(2\pi) * \cos(\beta) - \cos(2\pi) * sin(\beta) = -sin(\beta)$$

$$A = \frac{r^2}{2} * (\beta - \sin\beta) = \frac{\frac{Bo^2}{4}}{2} * (\beta - sin\beta)$$

$$\boxed{A = \frac{Bo^2}{8} * \left(2 * \left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2y}{Bo} - 1\right)\right) - \sin\left(2 * \left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2y}{Bo} - 1\right)\right)\right)\right)}$$

Perímetro mojado:

$$L = \beta * r = \frac{Bo}{2} * 2 * \left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2y}{Bo} - 1\right)\right)$$

$$\boxed{Wp = Bo * \left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2y}{Bo} - 1\right)\right)}$$

Ancho Superficial:

$$sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{T}{D}$$

$$\boxed{T = Bo * \sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{2y}{Bo} - 1\right)\right)}$$

Sección Transversal en U.

- ***Si y< Bo/3.***

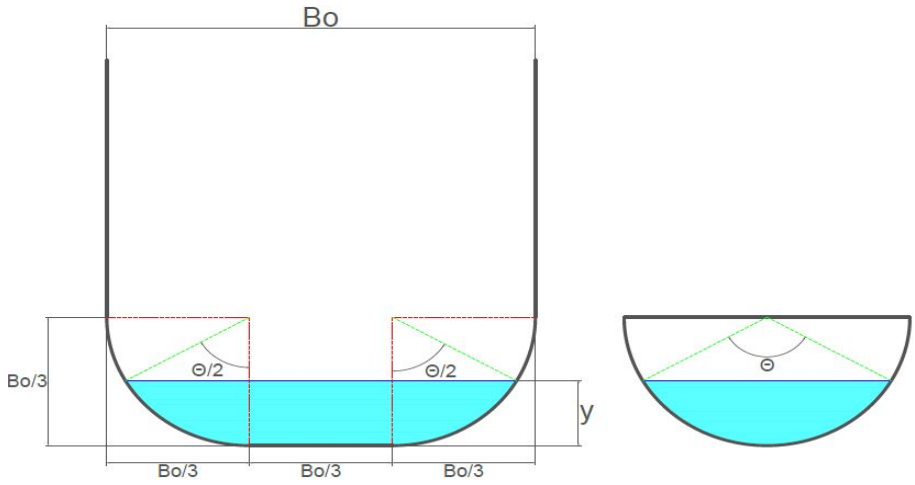


Ilustración 36 Sección en "U": y<Bo/3

Cálculo del ángulo Θ:

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{r-y}{r};\ \ r = \frac{Bo}{3}$$

$$\frac{Bo}{3} * \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{Bo}{3} - y$$

$$\Theta = 2 * \cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{\frac{Bo}{3}}\right) = \boxed{2 * \cos^{-1}\left(1 - \frac{3y}{Bo}\right)}$$

Cálculo del Área:

$$h = r * \cos\frac{\Theta}{2};\ \ b = r * sin\frac{\Theta}{2};\ Area\ sector = \frac{\Theta * r^2}{2}$$

$$Area\ segmento = \frac{\Theta * r^2}{2} - r^2 * sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) * \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\Theta * r^2}{2} - r^2 * sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

$$Area\ segmento = \frac{r^2}{2}(\Theta - sin\Theta)$$

$$A = \frac{r^2}{2} * (\Theta - \sin\Theta) = \frac{\frac{Bo^2}{4}}{2} * (\Theta - sin\Theta)$$

$$\boxed{A = \frac{Bo}{3} * y + \frac{Bo^2}{18} * \left(2 * \cos^{-1}\left(1 - \frac{3y}{Bo}\right) - \sin\left(2 * \cos^{-1}\left(1 - \frac{3y}{Bo}\right)\right)\right)}$$

Perímetro mojado:

$$L = \Theta * r$$

$$Wp = \frac{Bo}{3} * 2 * \cos^{-1}\left(1 - \frac{3y}{Bo}\right) + \frac{Bo}{3} = \boxed{\frac{Bo}{3} * \left(2 * \cos^{-1}\left(1 - \frac{3y}{Bo}\right) + 1\right)}$$

Ancho Superficial:

$$Sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\frac{Bs}{2}}{\frac{D}{2}} \quad Bs = D * sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

$$\boxed{T = 2 * \frac{Bo}{3} * \sin\left(\cos^{-1}\left(1 - \frac{3y}{Bo}\right)\right) + \frac{Bo}{3}}$$

- ***Si y=Bo/3.***

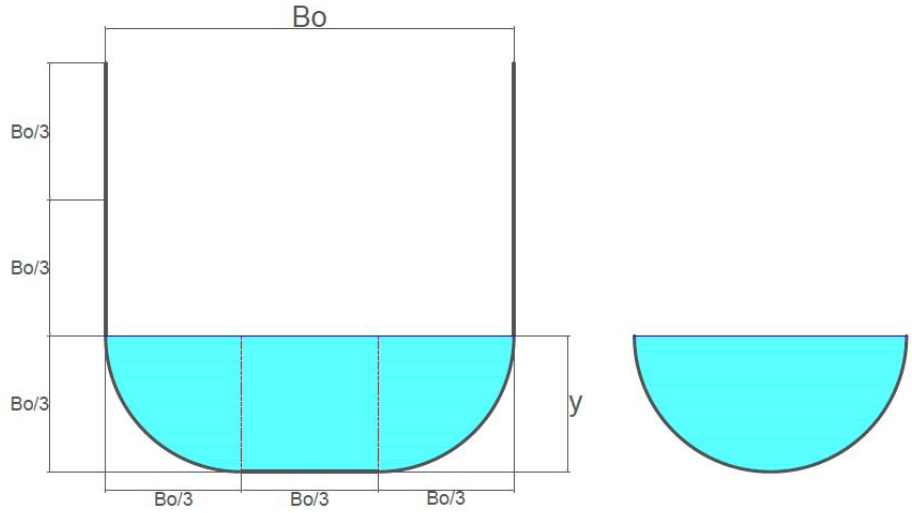


Ilustración 37 Sección en "U": y=Bo/3

Cálculo del Área:

$$A = \frac{\pi}{2} * \frac{Bo^2}{9} + \frac{Bo^2}{9} = \boxed{\frac{\pi * Bo^2}{18} + \frac{Bo^2}{9}}$$

Perímetro mojado:

$$Wp = \pi * \frac{Bo}{3} + \frac{Bo}{3} = \boxed{\frac{Bo}{3}(\pi + 1)}$$

Ancho superficial:

$$\boxed{T = Bo}$$

- ***Si y>Bo/3.***

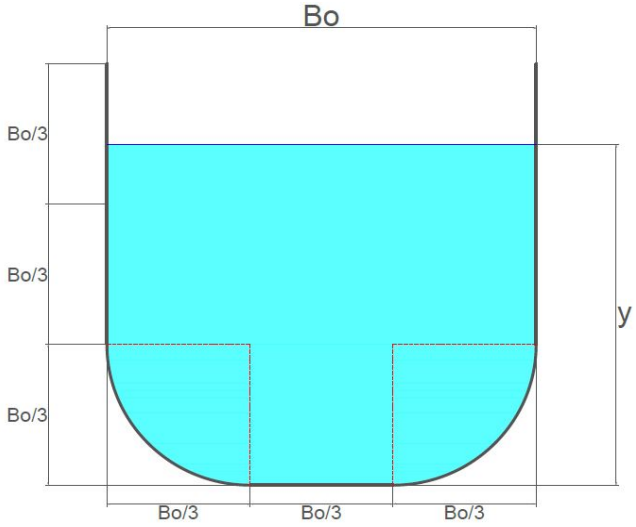


Ilustración 38 Sección en "U": y>Bo/3

Cálculo del Área:

$$A = \frac{\pi}{2} * \frac{Bo^2}{9} + \frac{Bo}{3} * \frac{Bo}{3} + Bo * \left(y - \frac{Bo}{3}\right) = \boxed{\frac{\pi * Bo^2}{18} + \frac{Bo^2}{9} + Bo * \left(y - \frac{Bo}{3}\right)}$$

Perímetro mojado:

$$\boxed{Wp = \pi * \frac{Bo}{3} + \frac{Bo}{3} + 2 * \left(y - \frac{Bo}{3}\right)}$$

Ancho Superficial:

$$\boxed{T = Bo}$$

Apéndice B. Método de optimización utilizado en MATLAB

Para la resolución del código se ha utilizado la herramienta Optimization Toolbox de Matlab que proporciona algoritmos para la resolución de problemas de optimización. Esta herramienta permite minimizar una función objetivo que determina la localización del punto de control, y para la optimización se utiliza un algoritmo de minimización no lineal sin restricciones denominado fminunc.

La función fminunc encuentra el mínimo de una función multivariante sin restricciones.

$$\min_{x} f(x)$$

Donde *x* es un vector y *f(x)* es una función que devuelve un escalar.

La sintaxis utilizada en el código de programación es la siguiente:

$$x = fminunc(@(var)fun, Xo)$$

Donde *"var"* es la variable que queremos ir cambiando para minimizar el problema planteado, *"fun"* es la función objetivo y *Xo* es el punto inicial de iteración.

La función fminunc encuentra el valor de la variable *var* que minimiza la función objetivo *fun*, comenzando la iteración por el valor inicial *Xo* utilizando el método de Newton.

Apéndice C. Guía de cómo utilizar el programa.

El código numérico escrito se integró en una interfaz gráfica con el objetivo de proporcionar un entorno visual sencillo para permitir su correcta utilización; Haciéndolo así más intuitivo para que pueda ser utilizado por cualquier tipo de usuario independientemente de los conocimientos previos que tenga de programación en el lenguaje de Matlab.

El programa está compuesto por tres ventanas las cuales se explicarán a continuación:

Ventana de introducción de los datos previos del problema.

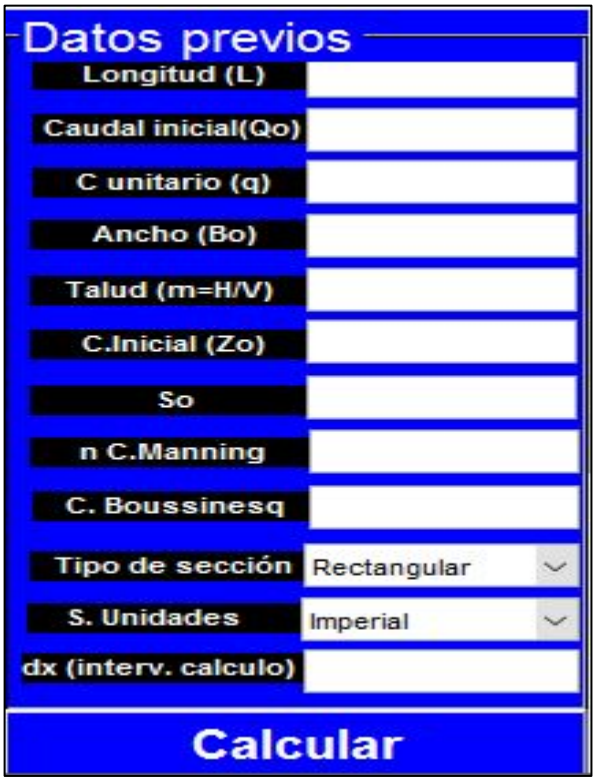


Ilustración 39 Ventana de Introducción de datos

En este apartado del programa se debe introducir los datos previos del problema y definir la sección transversal del canal.

Longitud: En este apartado se deberá introducir la longitud del canal en proyección horizontal.

Caudal inicial: En este apartado se deberá introducir el caudal inicial que circula por el canal.

Caudal unitario: En este apartado se deberá introducir el caudal por unidad de longitud que se añade al canal.

Ancho: En este apartado se deberá introducir el ancho o el diámetro (en el caso de una sección circular) de la sección transversal.

Talud: En este apartado se deberá introducir el talud de la sección transversal que sea necesario introducirlo, solo en el caso de sección triangular y sección trapecial, en los otros casos m=0.

Cota inicial del canal: En este apartado se deberá introducir la cota aguas abajo del canal.

So: En este apartado se deberá introducir la pendiente longitudinal del fondo del canal.

Coeficiente de Manning: En este apartado se deberá introducir el valor del coeficiente de rugosidad de Manning.

Coeficiente de Boussinesq: En este apartado se deberá introducir el valor del coeficiente de Boussinesq, si se considera que la distribución del perfil de velocidades es uniforme, entonces $\beta=1$, si se considera una distribución del perfil de velocidades no uniforme, entonces $\beta>1$.

Tipo de sección: En este apartado se deberá introducir la sección transversal de canal.

Sistema de unidades: En este apartado se deberá introducir el sistema de unidades en los que se introduce los datos.

δx intervalo de cálculo: En este apartado se deberá introducir cada cuanta distancia longitudinal queremos obtener los cálculos.

Una vez introducidos todos los datos en el programa se procede a dar “clic” al botón “calcular”, y nos permite calcular la localización de la sección de control en el sistema de unidades especificado.

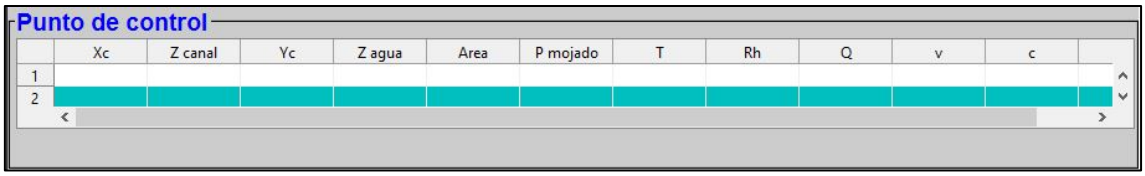


Ilustración 40 Ventana de resultados de la sección de control

Después de calcular la sección de control, en la ventana aparece en la parte inferior derecha un botón en el que pone “Gráfico”, le da damos “clic” y nos lleva a la siguiente ventana.

Ventana de cálculo y representación gráfica de los resultados.

En este apartado del programa se debe elegir el método de resolución que se quiere utilizar para el cálculo del problema planteado en el apartado anterior, y se grafican los resultados obtenidos en dos gráficos. En el primero se grafican los resultados del número de Froude en función de la longitud del canal y en el segundo se grafica el perfil de la lámina de agua en función de la longitud del canal.

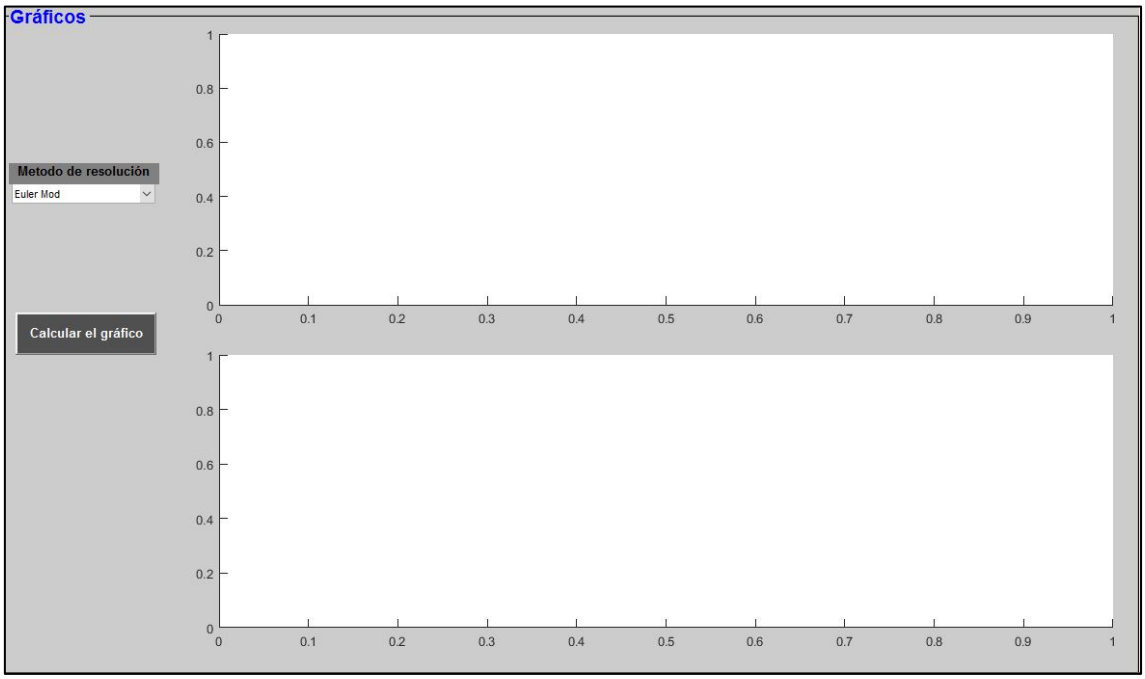
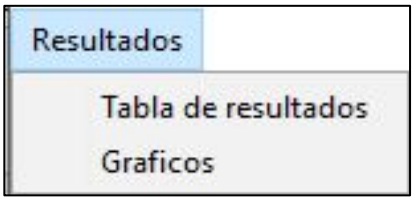


Ilustración 41 Ventana de resultados gráficos

Después de graficar los resultados en la ventana aparecerá en la parte inferior izquierda un botón en el que pondrá “tabla de resultados”, le da damos “clic” y nos trasladará a la siguiente ventana.

Ventana de visualización de los resultados obtenidos.

Esta ventana nos permite visualizar los resultados numéricos en dos tablas de resultados. Dándole “clic” al botón “mostrar tabla de resultados”, los resultados se mostrarán en una tabla u otra según el tipo de régimen del flujo.



Una vez mostrados los resultados numéricos en la tabla de resultados aparecerá en la parte inferior izquierda de la venta un botón en el que pondrá “pantalla inicial”, le da daremos “clic” y nos llevará a la ventana inicial, la cual nos permitirá introducir un nuevo problema de cálculo o visualizar los resultados numéricos y gráficos con los datos del problema anterior.

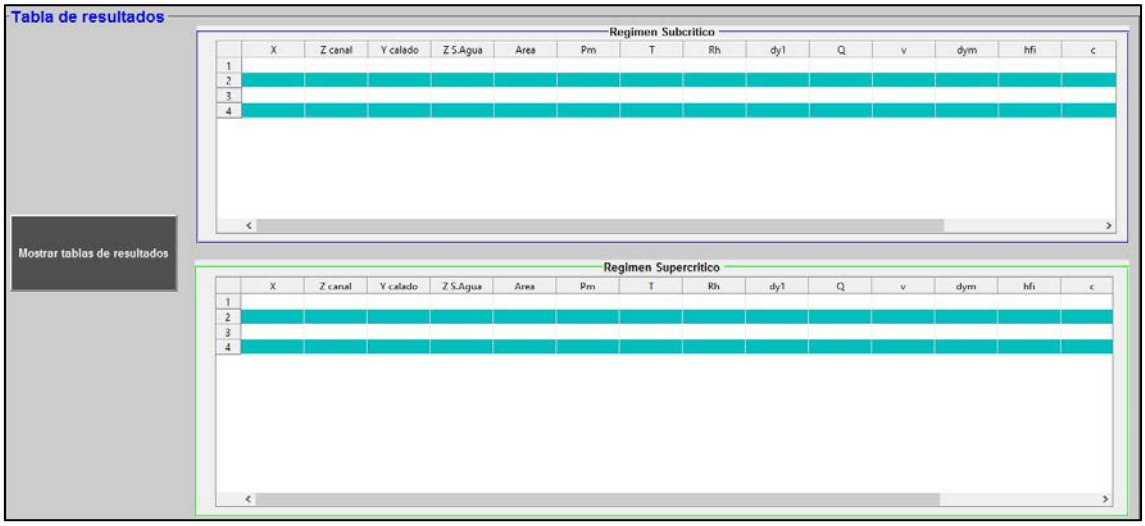


Ilustración 42 Tabla de resultados: M. Hinds

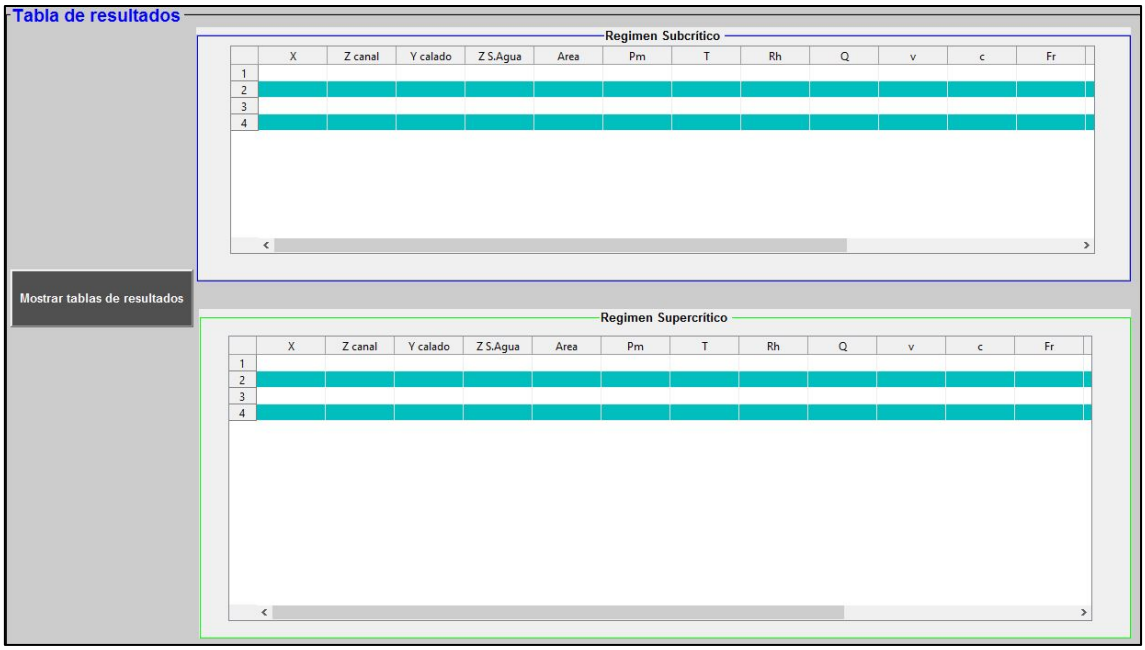


Ilustración 43 Tabla de resultados: M. Numéricos