

# Design of a Cogeneration Installation using a Stirling Engine

E. Gutiérrez, B. Marín.

**Abstract-** *This paper present the design of a cogeneration plant with a Stirling engine, generating electricity using the residual energy as heat of the hot gases from a domestic or industrial furnace outlet.*

*First, the ideal method for calculating the energy needs of hot water of an industrial establishment, taking into account the domestic hot water used in the different devices of the building and the hot water used for heating.*

*Second describes the furnace, to determine the residual heat that will use the Stirling engine to run.*

*In third place is calculated the Stirling engine in accordance with the settings selected and the elements that compose it. Once known operation, the engine is analyzed kinetically and thermodynamically to make their modeling.*

*Finally, technology is analyzed to transform the mechanical energy from Stirling engine into energy that can be used in the building where the installation is implemented.*

*Once created whole process, the calculation of the installation for practical application in a real industrial local becomes, showing the magnitude of the energy obtained and the dimensions of the installation.*

**Keywords—** *energy cogeneration, Stirling engine, sustainable illumination*

## I. INTRODUCCION

La propuesta del desarrollo de este proyecto tiene su origen en el hecho de que cuando se utiliza un calentador doméstico o industrial de gas parte del calor generado se pierde a través de los gases de escape. En este proyecto se utilizará esa energía residual de los gases calientes para generar electricidad mediante de un motor Stirling de tipo Beta con mecanismo rómbico. Para ello se calculan y se dimensionan las necesidades energéticas (apartado III A), el calentador (apartado III C) y el motor Stirling (apartado III D).

Para calcular la cantidad de energía residual que puede aprovecharse en el motor se determina la energía disponible (residual) después de satisfacer las necesidades de agua caliente para los diversos usos que se le puede dar: sanitario y calefacción. *La aportación principal de este proyecto es mostrar la metodología de cálculo completa de un motor Stirling Beta (apartado III D), pudiéndose implementar esta metodología en aplicaciones similares para generar electricidad o para obtener trabajo mecánico.*

### Abreviaturas

ACS: Agua caliente sanitaria

CTE: Código Técnico de Edificación  
Kp: Coeficiente de simultaneidad  
F: Factor corrector de la radiación  
PCI: Poder calorífico inferior  
 $\eta_{cal}$ : Rendimiento del calentador  
 $\tau$ : Relación de temperaturas  
k: Relación de compresión  
X: Relación entre el volumen muerto del motor y el volumen de la zona caliente  
Lc: Longitud de carrera  
z: Relación entre la longitud de la biela y la longitud del radio de la manivela  
i: Ángulo de giro (del radio) de la manivela del motor.  
 $\rho$ : Parámetro del mecanismo rómbico  
 $\alpha_i$ : Ángulos de posiciones extremas del pistón  
 $\beta_i$ : Ángulos de posiciones extremas del desplazador  
Lp: Longitud del pistón  
Ld: Longitud del desplazador  
Lvp: Longitud del vástago del pistón  
Lvd: Longitud del vástago del desplazador  
XP1: Posición del pistón  
XP2: Posición del desplazador  
XPD: Diferencia de posición del pistón y el desplazador  
Ve: Volumen de la zona caliente motor Stirling  
Vc: Volumen de la zona fría motor Stirling  
VelP: Velocidad del pistón motor Stirling  
VelD: Velocidad del desplazador motor Stirling  
M: masa total de gas en el interior motor Stirling  
P: Presión en el interior motor Stirling  
Ws: Trabajo en el eje motor Stirling  
Li: Potencia indicada motor Stirling  
Lis: Potencia en el eje motor Stirling

## II. MOTOR STIRLING

El motor Stirling fue patentado por Robert Stirling en el año 1816 [1], éste era un motor de aire caliente que simplificaba las máquinas de vapor ya que era un motor que no necesitaba caldera. A pesar de las ventajas que tenía el motor Stirling frente a las máquinas de vapor, nunca llegaron a ser muy utilizados en aquellos años debido principalmente a su baja potencia específica.

En el ámbito de este proyecto el motor Stirling es el elemento principal, ya que permite la conversión de la energía térmica en energía mecánica. Se ha elegido el motor Stirling por su alto rendimiento y por ser un motor de combustión externa, por lo que no es necesario hacer ninguna modificación importante al calentador para poder obtener el calor residual de él.

---

E. Gutiérrez, Universidad Politécnica de Catalunya, Laboratorio de Motores Térmicos, España. eegutierrez@mmt.upc.edu

B. Marín, Universidad Politécnica de Catalunya, Laboratorio de Motores Térmicos, España, bea.marin.tapia@gmail.com

## A. Descripción del motor

### 1) Funcionamiento

El motor Stirling funciona aprovechando los cambios volumétricos del fluido de trabajo que son consecuencia de los cambios de temperatura. Este motor consta de dos zonas ampliamente diferenciadas: la zona caliente y la zona fría, y tiene dos componentes básicos: el pistón y el desplazador. Lo que distingue las diferentes configuraciones es la situación de las dos zonas y del pistón y el desplazador, en caso de que tenga ambos componentes.

### 2) Configuración

La configuración elegida es del tipo Beta, que a diferencia de la configuración Alfa, tiene un solo cilindro en el que se encuentran el pistón y el desplazador. El movimiento del aire de la zona caliente a la zona fría, y al revés, es posible gracias a la holgura que existe entre el desplazador y el cilindro. Al encontrarse ambos en el mismo cilindro dejan un espacio muerto muy reducido y en consecuencia la potencia específica de esta configuración es más elevada que la de las otras, no obstante, la fabricación de este tipo de configuración es complicada y requiere un alto nivel de precisión [2], [3].

A menudo la configuración Beta utiliza un mecanismo rómbico para la transformación del movimiento lineal en circular. Este mecanismo es muy eficiente porque su configuración anula las fuerzas de empuje lateral que pueden sufrir el pistón y el desplazador, asegurando así menos pérdidas por fricción y mayor vida útil. En la Fig. 1 puede verse esquemáticamente este mecanismo [4].

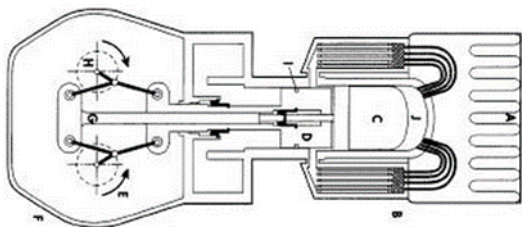


Figura 1. Motor Stirling configuración beta y mecanismo rómbico.

Como consecuencia de sus ventajas y del hecho de que su vida útil puede alargarse más que la de otras configuraciones, en este proyecto se ha utilizado este tipo de configuración.

## III. CASO ESTUDIO

Para la implementación de este proyecto se ha elegido un local situado en Balaguer, una localidad de la provincia de Lérida, España. Es un local industrial situado en una zona aislada, por lo que todas sus paredes están expuestas al exterior, tiene dos plantas y una dimensión de 204 m<sup>2</sup>.

### A. Cálculo de las necesidades energéticas

#### 1) Cálculo de las necesidades de agua caliente sanitaria

Los datos necesarios para este cálculo son el caudal instantáneo de ACS para cada tipo de aparato y el número de aparatos de cada tipo. El volumen obtenido aplicando el coeficiente de simultaneidad  $K_p=0,21$  es de 1,21.

Una vez conocido el caudal de ACS necesario para el dimensionado deberán calcularse las necesidades energéticas, para ello hay que tener en cuenta las propiedades del agua y la temperatura de la red de distribución de agua. Utilizando todos los datos disponibles se obtienen los resultados siguientes (TABLA I):

TABLA I. NECESIDADES ENERGÉTICAS PARA ACS (KW)

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
4,74	4,65	4,48	4,31	4,22	4,14
Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
4,05	4,14	4,22	4,31	4,48	4,74

La variación en la energía necesaria se debe a las diferencias en la temperatura de la red de distribución de agua a lo largo del año, entre 5°C y 13°C.

#### 2) Cálculo de las necesidades de calefacción

Las cargas térmicas sensibles de un edificio está compuesta por varios factores y todos ellos aparecen en la ecuación (1) a continuación.

$$Q_s = (Q_{sv} + Q_{stc} + Q_{si}) \cdot (1 + I) \quad (1)$$

Los términos corresponden a:

- $Q_{sv}$ , carga debida a la transmisión y radiación a través de los cristales
- $Q_{stc}$ , carga debida a la transmisión y radiación a través de paredes y cubiertas exteriores
- $Q_{si}$ , carga debida a las infiltraciones de aire
- $I$ , factor de intermitencia

#### 3) Cálculo de la carga térmica a través de los cristales

Conociendo el área total de los cristales del local, los coeficientes de transmisión del marco y los cristales y añadiendo el coeficiente corrector se obtienen los datos siguientes (TABLA II):

TABLA II. CARGA TÉRMICA QVT SALIENTE A TRAVÉS DE LAS VENTANAS (KW)

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
2,41	2,46	2,17	1,63	1,40	0,86
Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
0,23	0,42	0,87	1,52	2,23	2,61

#### 4) Carga térmica a través de las paredes y cubiertas exteriores

La carga térmica a través de las paredes y cubiertas exteriores se calcula conociendo los coeficientes de transmisión y la superficie de cada uno de los elementos a estudiar [5]. Los resultados se muestran en la TABLA III.

TABLA III. CARGA TÉRMICA A TRAVÉS DE LAS PAREDES Y CUBIERTAS EXTERIORES QSTR (KW)

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
7,1	7,3	6,4	4,8	4,1	2,5
Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
0,7	1,2	2,6	4,5	6,6	7,7

5) *Cálculo de la carga debida a las infiltraciones de aire*

El cálculo de la carga térmica causada por las infiltraciones de aire exterior se basa en el tipo de habitaciones, sus ocupantes, sus metros cuadrados, y las propiedades del aire [5]. Los datos obtenidos son los siguientes (TABLA IV):

TABLA IV. CARGA DEBIDA A LAS INFILTRACIONES DE AIRE QSI (KW)

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
9,98	10,19	8,99	6,74	5,80	3,55
Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
0,94	1,72	3,61	6,32	9,25	10,82

6) *Cálculo del factor de intermitencia*

El factor de intermitencia (I) se ha calculado suponiendo que para los meses de más frío sólo se apaga la calefacción durante las horas centrales del día, siendo I=0,13 durante estos meses.

B. *Cálculo total*

Calculados todos los términos correspondientes al ACS y a la calefacción se suman para obtener la demanda total de energía.

Considerando todos los factores calculados anteriormente se puede determinar el total de energía calorífica necesaria para dar servicio de ACS y para contrarrestar las cargas térmicas. La energía total necesaria es la siguiente (TABLA V):

Conociendo estos datos se determina la potencia mínima que deberá suministrar la caldera. La potencia necesaria del calentador corresponderá a la demanda de energía calorífica mensual más alta a lo largo del año, ésta se da en el mes de diciembre por lo que deberá utilizarse una caldera que pueda dar servicio como mínimo a 28,52 kW.

TABLA V. ENERGÍA CALORÍFICA NECESARIA QCALDERA (KW)

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
26,68	27,05	24,24	17,48	15,56	11,08
Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
5,89	7,51	11,27	18,21	24,81	28,52

C. *Cálculo del calentador*

El calentador de gas obtiene la energía de la combustión de un gas. Los gases utilizados pueden ser muy variados, como

gas natural, propano, butano, etc. En zonas urbanas el uso del gas natural como combustible es el más extendido; en cambio en zonas rurales es más común encontrar calentadores de propano o butano, entre otros.

El calentador elegido es un calentador de flujo del fabricante Junkers con una potencia nominal máxima de 30,5 kW [6]. Este calentador tiene una eficiencia energética de entre el 78 y el 88 %, en función del uso que se le dé respecto a la carga nominal. Las características del calentador se muestran en la TABLA VI a continuación.

TABLA VI. CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS CALENTADOR MODELO WTD 18 KG DE JUNKERS

Modelo	WTD 18Kg
Capacidad en litros	18
Potencia (kW)	7,9-30,5
Caudal (l/min)	2,5-18
Eficiencia al 100% de la carga nominal	88,4
Eficiencia al 30% de la carga nominal	78
Dimensiones (Alto x Ancho x Largo), (mm)	655 x 425 x 220
Ø evacuación de gases (mm)	130

Conocidos la eficiencia y el funcionamiento del calentador, se calcula la temperatura de los gases. El cálculo se hace a través de las ecuaciones (2), (3), (4) y (5).

Se calcula la temperatura de los gases residuales para un uso al 30 % y al 100 % de la carga nominal. Conociendo la composición del combustible, la composición de los gases a la salida del calentador y las masas molares se obtiene el caudal másico de los componentes que existen como productos de la combustión.

Para un funcionamiento al 30% de capacidad:

$$Q_{HUMOS} = P \cdot (1 - Eficiencia) \quad (2)$$

$$Q_{HUMOS} = 1.55kW$$

$$T_{gases} = \frac{Q_{humos}}{m_{gases} \times C_p \text{ gases}} + T_{ambiente} \quad (3)$$

$$T_{gases} = 370K$$

Para un funcionamiento al 100% de capacidad:

$$Q_{HUMOS} = P \cdot (1 - Eficiencia) \quad (4)$$

$$Q_{HUMOS} = 3.66kW$$

$$T_{gases} = \frac{Q_{humos}}{m_{gases} \times C_p \text{ gases}} + T_{ambiente} \quad (5)$$

$$T_{gases} = 422K$$

D. *Cálculo del motor Stirling*

El cálculo del motor Stirling Beta de mecanismo rómbico debe hacerse desde dos perspectivas: el mecanismo y la termodinámica. En el estudio del mecanismo se establecen las dimensiones de los diferentes elementos que componen el mecanismo y en el estudio termodinámico se calcula la potencia que puede obtenerse del motor conociendo las temperaturas a las que funciona y los parámetros

dimensionales de éste [7], [8]. La metodología expuesta a continuación, incluidas todas las ecuaciones, se ha implementado en **MATLAB R2013b**®, haciendo posible la recursividad del cálculo y por tanto su optimización. No obstante, entendemos que la exposición de este algoritmo sobrepasa los límites de extensión de este artículo.

### 1) Parámetros de diseño

Para el motor Stirling beta rómbico hay varios parámetros de diseño que afectan a la potencia indicada. Se resumen a continuación.

- Relación de temperaturas,  $\tau$ , definido en la ecuación:

$$\tau = \frac{T_c}{T_h} \quad (6)$$

- Relación de compresión,  $k$ , que corresponde a la relación de volúmenes entre las dos zonas:

$$k = \frac{V_c}{V_E} \quad (7)$$

- Angulo de desfase entre el pistón y el desplazador,  $\alpha$ .
- Relación entre el volumen muerto y el de la zona caliente  $X$ :

$$X = \frac{V_M}{V_E} \quad (8)$$

Para estos cuatro parámetros no existe una relación de valores óptima, pero independientemente cada uno de ellos tiene un rango óptimo. Para  $\tau$  y para  $X$ , cuanto menor sea su valor mayor será la potencia indicada; en cambio para la relación de compresión su valor óptimo se encuentra entre 1,5 y 2,5, ya que en el caso de darse valores demasiado altos mayor sería la potencia indicada, pero como inconveniente se incrementan las pérdidas mecánicas; por último para el ángulo de desfase en este tipo de motor el rango de valores óptimo se encuentra entre  $90^\circ$  y  $115^\circ$ .

Para el desplazador se dimensiona la longitud y la holgura entre éste y el cilindro. La longitud del desplazador se recomienda que sea de 1 a 3 veces el diámetro del cilindro; y que la holgura esté entre el 1 y el 2 % del diámetro del cilindro.

El pistón debe tener una holgura con respecto al cilindro menor que la del desplazador, ya que el juego entre el pistón y el cilindro implica pérdida de fluido de trabajo. Es por eso que la recomendación con respecto a este juego es de 0,03 mm. En cambio para su longitud es recomendable que sea de la mitad a las tres cuartas partes del diámetro del cilindro. También es necesario considerar si el motor trabaja con el fluido motor a presión ambiente o si está presurizado, ya que en el segundo caso hay que añadir segmentos que eviten la pérdida de fluido en el interior del motor [8].

### 2) Proceso para el cálculo del mecanismo

El objetivo de este cálculo es determinar los volúmenes de la zona caliente, fría y el total; así como las posiciones del pistón y el desplazador para todas las posibles posiciones (Fig. 2).

Para el cálculo del mecanismo se utilizará un sistema de ecuaciones para el que sólo definiendo la longitud de la carrera,  $L_c$ , y dos parámetros de definición del mecanismo,  $z$  y  $\rho$  se obtendrán todos los valores [8].

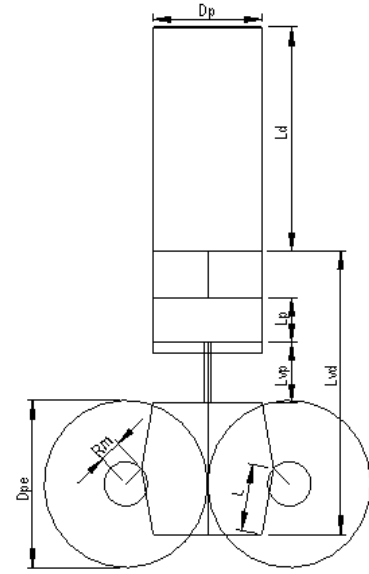


Figura 2. Esquema de un motor Stirling beta de mecanismo rómbico

El parámetro  $z$  se calcula a través de la ecuación siguiente:

$$z = \frac{L}{R_m} \quad (9)$$

En la ecuación anterior  $L$  corresponde a la longitud de la biela del pistón y  $R_m$  corresponde al radio de la manivela. El parámetro  $\rho$  se calcula con la ecuación siguiente:

$$\rho = \frac{\frac{D_p - E_r}{2}}{R_m} \quad (10)$$

En esta ecuación  $D_p$  corresponde al diámetro del pistón y  $E_r$  a la longitud entre el vástago del pistón y el extremo central de la biela.

El siguiente parámetro a calcular es el radio de la manivela, éste depende de la longitud de la carrera y los dos parámetros calculados,  $z$  y  $\rho$ . Los dos ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  corresponden a las posiciones máxima y mínima del pistón.

$$R_m = \frac{L_c}{\sqrt{z^2 - (\rho - \sin(\alpha_2))^2 + \cos(\alpha_2)} - \sqrt{z^2 - (\rho - \sin(\alpha_1))^2 - \cos(\alpha_1)}} \quad (11)$$

Una vez conocido el radio de la manivela ( $R_m$ ), la longitud del espacio muerto en la zona fría ( $e_{\min}$ ), y las longitudes del vástago del pistón ( $L_{vp}$ ), y del pistón en sí ( $L_p$ ), puede calcularse la longitud del vástago del desplazador ( $L_{vd}$ ).

$$L_{vd} = e_{\min} + L_{vp} + L_p + 2 \cdot R_m \cdot \sqrt{z^2 - (\rho - \sin(\beta_2))^2} \quad (12)$$

Antes de poder calcular las posiciones del desplazador y el pistón hay que calcular el parámetro  $a$ , donde  $D_{pe}$  es el diámetro primitivo de los engranajes.

$$a = \frac{D_{pe}}{2} - E \quad (13)$$

A continuación las ecuaciones que corresponden al cálculo de las posiciones del pistón y el desplazador en función del

ángulo del radio de la manivela  $i$ ,  $XP1$  corresponde al pistón y  $XP2$  al desplazador; y la ecuación que establece la distancia entre ellas,  $XPD$ .

$$XP1 = \sqrt{L^2 - (a - Rm \cdot \sin(i))^2} + Rm \cdot \cos(i) + Lvp \quad (14)$$

$$XP2 = \sqrt{L^2 - (a - Rm \cdot \sin(i))^2} + Rm \cdot \cos(i) + Lvd \quad (15)$$

$$XPD = XP2 - XP1 - Lp \quad (16)$$

Al tener los datos de las posiciones ya es posible calcular los volúmenes correspondientes a cada zona: caliente y fría y el volumen total. En las ecuaciones siguientes  $Ve$  corresponde al volumen de la zona caliente,  $Vc$  al volumen de la zona fría y  $Vr$  al volumen muerto del regenerador.

$$Ve = (XP2max - XP2 + e) \cdot \frac{\pi \cdot B^2}{4} \quad (17)$$

$$Vc = (XP2 - XP1 - Lp) \cdot \frac{\pi \cdot B^2}{4} \quad (18)$$

$$V_{Total\ instantaneo} = Ve + Vc + Vr \quad (19)$$

Una vez calculado el volumen, puede determinarse el ángulo en el cuál éste toma sus valores máximo y mínimo, y con estos valores se calcula la relación de compresión ( $k$ ).

$$k = \frac{V_{Total\ Inst\ max}}{V_{Total\ Inst\ min}} \quad (20)$$

Además de los parámetros de posición también es interesante conocer los parámetros de velocidad de ambas partes.

$$VelP = \frac{w \cdot (a - Rm \cdot \sin(i)) \cdot Rm \cdot \cos(i)}{\sqrt{L^2 - (a - Rm \cdot \sin(i))^2} - w \cdot Rm \cdot \sin(i)} \quad (21)$$

$$VelD = \frac{-w \cdot (a - Rm \cdot \sin(i)) \cdot Rm \cdot \cos(i)}{\sqrt{L^2 - (a - Rm \cdot \sin(i))^2} - w \cdot Rm \cdot \sin(i)} \quad (22)$$

### 3) Cálculo del mecanismo

Para el cálculo del mecanismo se han tomado como datos algunas medidas, entre ellas las dimensiones del pistón y el desplazador ( $Lp$ ) y ( $Ld$ ) respectivamente; y la longitud de carrera ( $Lc$ ). Con ellas se ha calculado cuáles serán las posiciones del pistón y el desplazador en función del ángulo de giro ( $i$ ) y las dimensiones de la zona caliente y la zona fría, también en función del ángulo de giro ( $i$ ).

En la Fig.3 se muestra la evolución de la posición del pistón ( $XP1$ ), y desplazador ( $XP2$ ), y la evolución de la distancia entre ambos ( $XPD$ ), en función del ángulo de la manivela ( $i$ ).

Como puede verse en la gráfica las posiciones del pistón y el desplazador oscilan de forma sinusoidal, con un cierto desfase entre ellas. La posición del desplazador ( $XP2$ ), oscila entre 31,3 cm y 61,3 cm y la posición del pistón ( $XP1$ ), oscila entre 19,6 cm y 49,6 cm. Esta oscilación corresponde a la carrera del motor. La referencia tomada para el cálculo de estas variables corresponde a la posición de los centros de los engranajes del mecanismo rómbico.

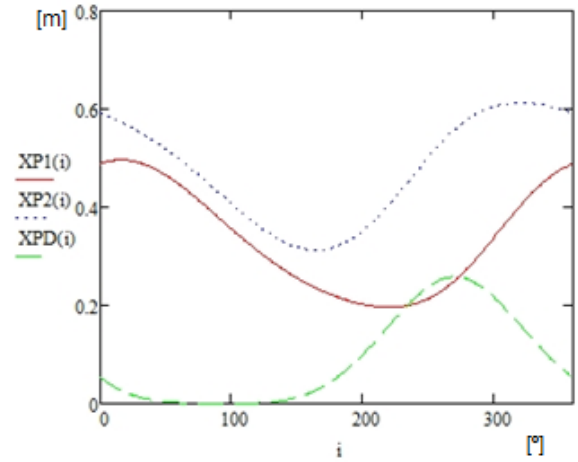


Figura 3. Evolución de las posiciones del pistón y desplazador y de la distancia entre ellos

En la Fig.4 se observa la evolución de los volúmenes de la zona caliente ( $Ve$ ) y fría ( $Vc$ ); y el volumen total ( $Vinst$ ) del mecanismo en función del ángulo de la manivela ( $i$ ).

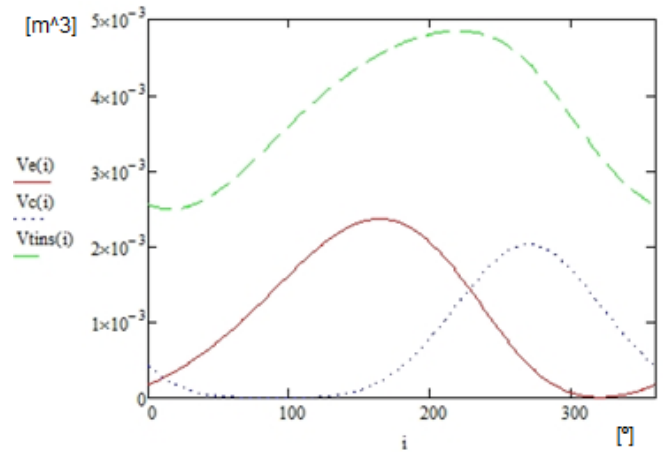


Figura 4. Evolución de los volúmenes de la zona caliente y fría y del volumen total del motor

Igual que las posiciones del pistón y el desplazador los volúmenes de la zona caliente ( $Ve$ ), y la zona fría ( $Vc$ ), varían de forma sinusoidal. El volumen máximo del motor es cercano a los 5 dm<sup>3</sup>.

La Fig.5 muestra el diseño del motor Stirling con las dimensiones obtenidas en el cálculo del mecanismo. Como puede verse el diámetro de los engranajes es considerablemente grande, esto es debido a la longitud de la carrera. El punto en el centro del engranaje izquierdo corresponde a la conexión del engranaje al eje del generador.

### 4) Proceso para el cálculo termodinámico

#### a) Cálculo del foco caliente

En el caso del foco caliente hay que calcular dos calores distintos, el calor que entra a través de la tapa y el calor que entra a través de las paredes. En cada uno de los casos hay que tener en cuenta dos componentes: la convección.

$$Q_e = Q_{tapa} + Q_{pared} \quad (23)$$

Para la tapa  $R_{cond}$  corresponde a la resistencia por conducción y  $R_{conv}$  corresponde a la resistencia por convección. El procedimiento para obtener el calor es el siguiente:

$$Q_{tapa} = \frac{T_{ext.tapa} - T_{int.tapa}}{R_{cond}} = \frac{T_{int.tapa} - T_{zona caliente}}{R_{convint}} \quad (24)$$

$$Q_{tapa} = A_{int.tapa} \cdot h_{zona caliente} \cdot (T_{int.tapa} - T_{zona caliente}) \quad (25)$$

Para la pared los cálculos son los siguientes:

$$Q_{pared} = \frac{T_{ext.pared} - T_{int.pared}}{R_{cond}} = \frac{T_{int.pared} - T_{zona caliente}}{R_{conv}} \quad (26)$$

$$Q_{pared} = A_{pared} \cdot h_{zona caliente} \cdot (T_{int.pared} - T_{zona caliente}) \quad (27)$$

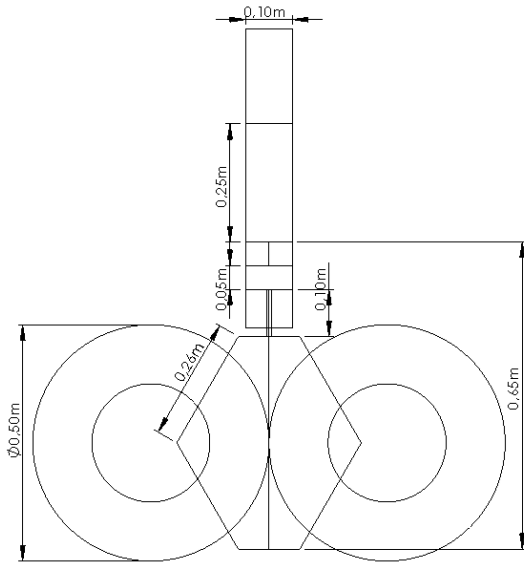


Figura 5. Dimensionado del Motor Stirling

### b) Cálculo del foco frío

El foco frío puede tener varias configuraciones en función del método de refrigeración que se elija, una configuración con o sin aletas.

Para una configuración sin aletas el calor disipado se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$Q_c = \frac{T_{ext.} - T_{zona fria}}{R_{conv.ext} + R_{cond} + R_{conv.int}} \quad (28)$$

En el caso que la zona fría esté refrigerada por aletas hay que añadir la resistencia de las aletas a la ecuación anterior.

$$Q_c = \frac{T_{ext.} - T_{zona fria}}{R_{conv.ext} + R_{cond} + \frac{1}{\frac{1}{R_{base}} + \frac{1}{R_{aletas}}}} \quad (29)$$

### c) Cálculo termodinámico del motor

Para el cálculo termodinámico del motor Stirling se utiliza la metodología de Schmidt [9].

Las partes del motor de izquierda a derecha (Fig. 6) son:

- Espacio de compresión  $C_s$
- Enfriador  $K_s$
- Regenerador  $R_s$
- Calentador  $H_s$
- Espacio de expansión  $E_s$

Las ecuaciones que modelizan este motor definen la presión, masa, volumen y temperatura de las cinco zonas comentadas anteriormente [10]. Todas las ecuaciones y valores del motor dependen del ángulo del radio de la manivela (i).

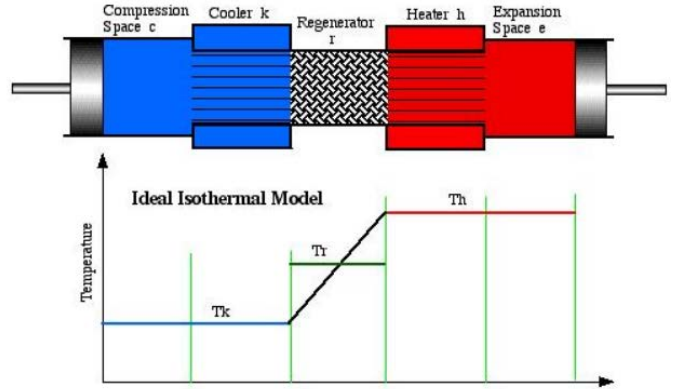


Figura 6. Análisis isotérmico del motor Stirling.

Considerado que la masa de gas dentro del motor será constante:

$$M = mc + mk + mr + mh + me \quad (30)$$

Aplicando la ecuación de estado de los gases ideales se puede obtener la presión total del mecanismo:

$$P = \frac{M \cdot R}{\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_e}{T_e}} \quad (31)$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T} \quad (32)$$

A partir de este punto el análisis termodinámico se hará independientemente para cada celda. Las celdas adiabáticas  $K_s$ ,  $R_s$  y  $H_s$  tendrán un volumen constante, por lo que:  $dV = 0$  y  $dW = 0$

La ecuación de conservación de la energía será:

$$cp \cdot (m_{entrante} - \dot{m}_{saliente}) \cdot T = cv \cdot d(m \cdot T) \quad (33)$$

Aplicando la ecuación de los gases ideales a la igualdad anterior se obtiene la ecuación siguiente, que se utilizará para obtener los diferenciales de masa de las celdas  $K_s$ ,  $R_s$  y  $H_s$ :

$$dm = \frac{m}{k} \cdot \frac{dP}{P} \quad (34)$$

Para las celdas correspondientes a la zona de expansión y la de compresión las ecuaciones de conservación de la energía y

de masa son las siguientes:

$$dQ + cp \cdot \dot{m}_i \cdot T_i = dW + cv \cdot d(m \cdot T) \quad (35)$$

$$m \cdot T = \frac{P \cdot V}{R} \quad (36)$$

La ecuación para calcular el diferencial de masa dependerá del signo del flujo de masa: si  $m_i > 0$   $mi=dm$ ; si no  $mi=-dm$

Resolviendo se tiene la ecuación siguiente:

$$dm = \frac{P \cdot dV + \frac{V \cdot dP}{k}}{R \cdot T_i} - \frac{dQ}{\omega \cdot cp \cdot T_i} \quad (37)$$

Aplicando la ecuación anterior (37), podemos obtener el diferencial de masa en las zonas de compresión y expansión. Donde  $T_{ck}$  corresponde a la temperatura del aire que va de la celda  $K_s$  a la  $C_s$ ;  $T_{he}$  a la temperatura del aire que va de la celda  $H_s$  a la  $E_s$ , y  $dQ_c$  y  $dQ_e$  corresponden a los diferenciales de calor de las celdas  $C_s$  y  $E_s$ .

$$dmc = \frac{P \cdot dV_c + \frac{V_c \cdot dP}{k}}{R \cdot T_{ck}} - \frac{dQ_c}{\omega \cdot cp \cdot T_{ck}} \quad (38)$$

$$dme = \frac{P \cdot dV_e + \frac{V_e \cdot dP}{k}}{R \cdot T_{he}} - \frac{dQ_e}{\omega \cdot cp \cdot T_{he}} \quad (39)$$

El volumen de las celdas  $C_s$  y  $E_s$  del motor corresponde a las mismas ecuaciones calculadas para el mecanismo anteriormente, es decir, las ecuaciones (17) y (18). Los volúmenes de las celdas,  $K_s$ ,  $R_s$  y  $H_s$  son constantes por lo que su diferencial es nulo; el diferencial de las celdas  $C_s$  y  $E_s$  corresponde a las siguientes ecuaciones.

$$dV_c(i) = \left[ \frac{(a - Rm \cdot \sin(i)) \cdot Rm \cdot \cos(i)}{\sqrt{L^2 - (a - Rm \cdot \sin(i))^2}} + Rm \cdot \sin(i) \right] \cdot \frac{\pi \cdot B^2}{4} \quad (40)$$

$$dV_e(i) = \left[ \frac{-2 \cdot (a - Rm \cdot \sin(i)) \cdot Rm \cdot \cos(i)}{\sqrt{L^2 - (a - Rm \cdot \sin(i))^2}} \right] \cdot \frac{\pi \cdot B^2}{4} \quad (41)$$

Para poder evaluar las ecuaciones (38) y (39) hay que calcular también  $dQ_c$  y  $dQ_e$ . De la ecuación para los gases ideales (32), se pueden obtener los diferenciales de temperatura para las celdas  $C_s$  y  $E_s$ .

$$dT_c = T_c \cdot \left( \frac{dP}{P} + \frac{dV_c}{V_c} + \frac{dmc}{mc} \right) \quad (42)$$

$$dT_e = T_e \cdot \left( \frac{dP}{P} + \frac{dV_e}{V_e} + \frac{dme}{me} \right) \quad (43)$$

Los últimos datos a calcular son los trabajos en cada celda y el trabajo total.

$$dW_c = P \cdot dV_c \quad (44)$$

$$dW_e = P \cdot dV_e \quad (45)$$

$$dW = dW_c + dW_e \quad (46)$$

$$W = \frac{\int_0^{2\pi} W \cdot di}{i} \quad (47)$$

El trabajo en el eje se calcula mediante las ecuaciones siguientes.

$$W_- = \oint (P - P_0) \cdot dV \quad (48)$$

$$W_s = E \cdot W - \left( \frac{1}{E} - E \right) \cdot W_- \quad (49)$$

Por último se calculan las potencias indicada y del eje.

$$Li = W \cdot \frac{N}{60} \quad (50)$$

$$Ls = W_s \cdot \frac{N}{60} \quad (51)$$

#### d) Resolución de las ecuaciones diferenciales

Para resolver las ecuaciones diferenciales descritas anteriormente se ha utilizado el método de resolución de ecuaciones diferenciales de Runge-Kutta de cuarto orden [7], [14]. Éste método hace una evaluación de la función en varios puntos para de esta manera conocer la pendiente en los diferentes puntos para así obtener un valor con un menor error.

$$T_c = T_c + \frac{1}{6} h \cdot (k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14}) \quad (52)$$

$$T_e = T_e + \frac{1}{6} h \cdot (k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24}) \quad (53)$$

Las  $k$  de las ecuaciones anteriores corresponden a las pendientes en los puntos del intervalo, y se calculan como el producto de la pendiente de las funciones calculadas y el intervalo  $h$ .

$$k_{1i} = dT_c \cdot h \quad (54)$$

$$k_{2i} = dT_e \cdot h \quad (55)$$

Como se observa en las ecuaciones (52) y (53) la  $i$  toma cuatro valores, estos valores corresponden a las iteraciones de este método. En cada iteración se obtendrá un valor distinto de  $dT_c$  y  $dT_e$ , ya que para cada iteración los valores del ángulo,  $T_e$  y  $T_c$  se hacen variar en función del llamado intervalo del método ( $h$ ).

Para la primera iteración los valores son los originales; en el caso de la segunda y la tercera se utilizan las ecuaciones siguientes, en las que se obtiene valores en el punto medio del intervalo ( $h$ ):

$$T_c = T_c + \frac{k_{1i}}{2} \quad (56)$$

$$T_e = T_e + \frac{k_{2i}}{2} \quad (57)$$

$$\theta = \theta + \frac{h}{2} \quad (58)$$

Finalmente, para la cuarta iteración se obtienen los valores en el extremo del intervalo.

$$T_c = T_c + k_{13} \quad (59)$$

$$T_e = T_e + k_{23} \quad (60)$$

$$\theta = \theta + h \quad (61)$$

e) *Calentador funcionando 100% de la capacidad nominal*

Para hacer el cálculo termodinámico [15], [16], [17] se han tomado como datos los parámetros dimensionales calculados en el apartado III.D.3. Además de estos parámetros se han tomado como datos la temperatura ambiente, la temperatura de la zona caliente y la velocidad de giro del motor. La temperatura de la zona caliente corresponde a la temperatura de los gases que se ha calculado anteriormente en el apartado III.D.4.a.

En la Fig.7 puede verse la evolución de la presión del gas en el interior del mecanismo en función del ángulo de giro de la manivela [18], [19], [20]. Puede verse que la presión varía de forma sinusoidal. Los puntos en que la presión es máxima y mínima corresponden a  $16^\circ$  y  $220^\circ$  respectivamente, estos son los puntos en que el pistón se encuentra en la posición más lejana y más cercana al volante.

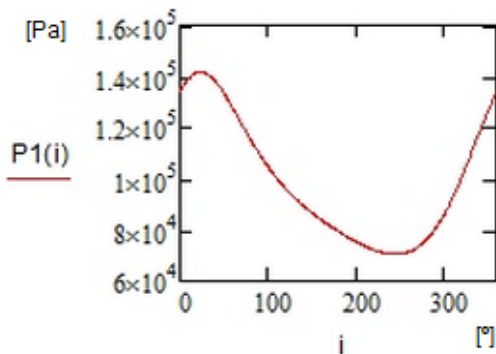


Figura 7. Evolución de la presión del gas en el motor Stirling.

En la Fig.8 se muestra el diagrama P-V del motor. El dato más importante obtenido del cálculo termodinámico es la potencia que se puede obtener del ciclo. Con los parámetros utilizados el ciclo generará una potencia útil de 416 W.

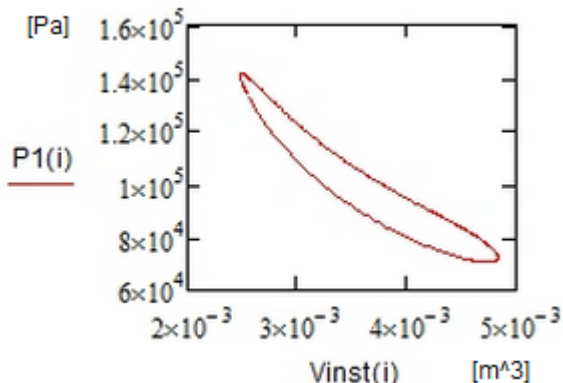


Figura 8. Diagrama P-V del motor con el calentador al 100 % de su capacidad

f) *Calentador funcionando al 30% de la capacidad nominal*

Para hacer este cálculo se sustituyen los valores de la temperatura del foco caliente y el parámetro  $\tau$ , que es la diferencia de temperaturas.

En este caso el diagrama P-V varía de forma significativa. Al disminuir la diferencia de temperaturas del ciclo el área del diagrama P-V disminuye significativamente, Fig.9.

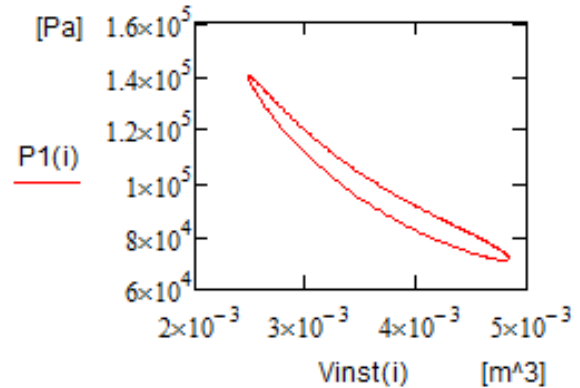


Figura 9. Diagrama P-V del motor con el calentador al 30 % de su capacidad

La potencia obtenida es considerablemente menor, esto es debido a la disminución de la relación de temperaturas. Con los parámetros utilizados el ciclo generará una potencia útil de 5 W. Debido a que el valor obtenido para estas condiciones es muy bajo, no se considerará este estado para la generación, ya que la energía eléctrica obtenida sería sólo 4,75W.

## E. Transformación de la energía mecánica en eléctrica

### 1) Generador

Para transformar la energía mecánica obtenida en el eje del motor Stirling en energía eléctrica es necesario un generador eléctrico y deberá dimensionarse para las condiciones que tengan unas solicitaciones más elevadas. Dado el rango de velocidades y potencias de este proyecto, sólo se consideran los generadores síncronos de imanes permanentes. Estos generadores tienen un bajo mantenimiento, bajo peso y a su vez un volumen reducido.

El generador elegido para acoplar al eje del motor es un M-20 [11], es un generador de imanes permanentes de neodimio de 390 W de potencia nominal y 488 W de potencia máxima.

Su velocidad de rotación óptima es de 420 rpm, muy similar a la que tendrá el motor Stirling que se va a utilizar, y puede alcanzar eficiencias superiores al 95 %. También es destacable su bajo peso, el poco ruido que genera y sus dimensiones.

Considerando unas condiciones de funcionamiento del calentador al 100 %, teniendo en cuenta la potencia obtenida del motor del apartado III.D.4.e) y el hecho de que al funcionar con una potencia inferior del generador se obtiene un rendimiento menor, cercano al 95 % se obtendrían 395 W de energía eléctrica.

### 2) Batería

La energía eléctrica generada no necesariamente se consume en el momento en que es generada, por lo que a la



salida del generador deberá acoplarse una batería. Para calcular la batería se consideran cuatro parámetros: el voltaje de salida, la energía que puede suministrar (que depende de su capacidad y voltaje), la capacidad (medida que relaciona la intensidad y el tiempo de la batería en carga y descarga) y la auto-descarga (porcentaje de la carga que se pierde), este porcentaje es muy dependiente de los materiales que formen la batería. Por ejemplo las baterías con Níquel tienen una auto-descarga de entre el 10 y el 30 %.

La batería a utilizar deberá elegirse conociendo la necesidad que se tendrá en términos de intensidad (I). Para determinarlo deberá calcularse en función de la Potencia (P).

$$I(A) = \frac{P(W)}{V(V)} \quad (62)$$

El generador tiene un voltaje de salida de 12 V de corriente alterna trifásica, y una potencia de salida de 395 W; por lo que la intensidad necesaria en la batería será de 23,7 A.

Las especificaciones técnicas de la batería que cumple con todos los requisitos comentados en el párrafo anterior, pueden verse en la TABLA VII a continuación [12]:

TABLA VII. ESPECIFICACIONES TÉCNICAS BATERÍA AGM 12V 24AH VISION

Voltaje	12 V
Amperios / Hora	Entre 0 Ah y 50 Ah
Capacidad media de la batería	24Ah
Medidas de la batería	Largo x Ancho x Alto (175x166x125) mm
Peso de la batería	8,6 Kg
Pérdidas de la batería	2% mensual

En la TABLA VII puede verse el porcentaje de auto-descarga, gracias al cual se podrá determinar la cantidad de la energía aportada a la batería que podrá ser utilizada finalmente. Haciendo el cálculo se obtiene que finalmente a la salida de la batería se obtendrá una potencia de 387 W.

### 3) Transformador

El voltaje de salida de la batería será 12 V, por lo que será necesario añadir un transformador entre la batería y los aparatos a los que se vaya a suministrar electricidad, para transformar el voltaje de 12 V a los 220 V de la red europea.

Además de los voltajes extremos, se considera la potencia máxima que se le va a exigir, que son los 387 W que se acumulan en la batería.

Los datos del transformador elegido [13] pueden verse en la TABLA VIII.

TABLA VIII. ESPECIFICACIONES TÉCNICAS TRANSFORMADOR WELLSEE 12 V-500 W

Voltaje de entrada	12V
Voltaje de salida	200V±10% AC
Frecuencia	50Hz
Eficiencia de carga óptima	>95%
Tamaño	Largo x ancho x alto (280x440x520) mm
Potencia máxima de salida	500W

Considerando que la eficiencia en la carga a la que va a ser utilizado estará alrededor del 95 %, la potencia que podrá obtenerse después del transformador será de 360 W.

### F. Cálculo final

Una vez conocida la potencia que podrá obtenerse de la batería, podrá conocerse cuantas bombillas podrán alimentarse con esa potencia. Para que la aplicación de esta instalación sea lo más útil posible se recomienda utilizar bombillas de bajo consumo, ya que en este caso con menos potencia podrán alimentarse más bombillas. Las bombillas de bajo consumo tienen una potencia nominal de entre 8 y 25 W, por lo que con la potencia nominal obtenida podrán alimentarse entre 14 y 45 bombillas.

El local utilizado como ejemplo tiene instaladas 40 bombillas, como puede verse en la Fig.10, por lo que si todas las bombillas del local tuvieran potencias cercanas a los 8 W habría épocas del año en las que podría abastecer la electricidad necesaria para el alumbrado sólo con el aprovechamiento del calor residual del calentador.

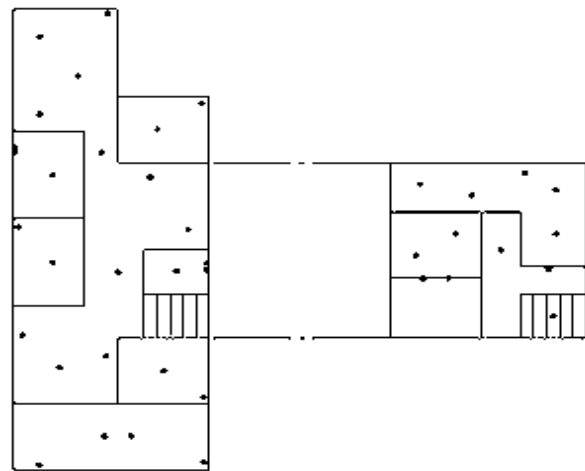


Figura 10. Distribución del alumbrado del local

### G. Montaje de la instalación

Una vez que se conocen las dimensiones de los distintos elementos que conforman la instalación puede hacerse una estimación de su ubicación en el montaje y finalmente determinar las dimensiones totales de la instalación.

La zona caliente del motor Stirling se instala en la parte superior del calentador, en el interior del conducto y en contacto directo con los gases calientes (Fig.11), y uno de los engranajes del mecanismo rómbico del motor Stirling está conectado al generador eléctrico.

El generador está conectado a la batería que almacenará la energía, y ésta a su vez está conectada al transformador que modificará el voltaje de salida de la batería para igualarlo al de la red eléctrica.

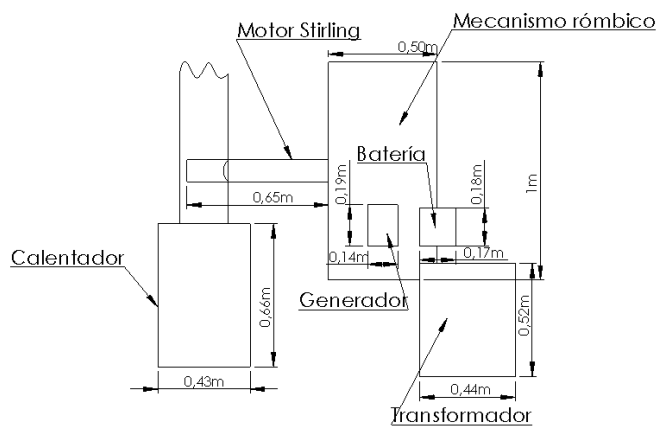


Figura 11. Esquema del montaje de la instalación

#### IV. CONCLUSIONES

El presente artículo expone una metodología para diseñar una instalación de cogeneración mediante un motor Stirling y aplicarlo a un local industrial, generando electricidad utilizando calor residual de otro proceso.

Se ha dividido la presentación en tres fases: las necesidades energéticas del local, el calor residual del calentador y la potencia eléctrica que puede obtenerse del motor Stirling.

Se ha llevado a cabo el cálculo de la instalación en un local industrial en el que ha podido obtenerse suficiente energía eléctrica para abastecer su alumbrado aprovechando la energía residual de un calentador, demostrando la viabilidad de la aplicación de esta metodología a otros sectores.

Para proyectos futuros relacionados con este tema podría plantearse la construcción y la puesta en marcha de la instalación en zonas geográficas con limitado o nulo acceso a la red eléctrica. Esto permitiría que el calor residual generado por instalaciones que utilizan combustibles fósiles pudiera ser aprovechado para la generación de energía eléctrica.

Finalmente, tal y como se expone en [21], este tipo de instalaciones son rentables desde el punto de vista económico, considerando las tarifas eléctricas actuales de €/Kw.h, bonificaciones por no emisión de CO<sub>2</sub>, etc. En cualquier caso, su instalación no supone pérdidas económicas o un riesgo de inversión excesivo.

#### V. AGRADECIMIENTOS

Nuestro agradecimiento al Laboratorio de Máquinas Térmicas de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona por los recursos y medios puestos a nuestra disposición para la ejecución de este proyecto.

#### REFERENCIAS

- [1] Alvarez Florez, Jesús Andrés; Callejon Agramunt, Ismael; "Máquinas térmicas motoras volumen 2". Ediciones UPC 2002
- [2] Aksoy, Faith; Cinar Can. "Thermodynamic analysis of a beta-type Stirling engine with rhombic drive mechanism". Energy Conversion and Management n°75, 2013.
- [3] Cheng, Chin-Hsiang; Yang, Hang-Suin. "Optimization of rhombic drive mechanism used in beta-type Stirling engine based on dimensionless analysis". Energy n°64, 2014.
- [4] Shendage, D.J.; Kedare, S.B.; Bapat, S.L. "An analysis of beta type Stirling engine with rhombic drive mechanism".

- [5] Renewable Energy n°36, 2011.
- [6] Ministerio de Fomento Gobierno de España. "CTE Documento Básico HE Ahorro de Energía" <http://www.codigotecnico.org>
- [7] Calentador Junkers [http://www.junkers.es/usuario\\_final/productos/catalogo\\_usuario/producto\\_3136](http://www.junkers.es/usuario_final/productos/catalogo_usuario/producto_3136)
- [8] Cinar, Car; Yucesu, Sedar; Topgul, Tolga; Okur, Melih. "Beta-type Stirling engine operating at atmospheric pressure". Ankara 2004.
- [9] Scollo, Leonardo; Valdez, Pablo; Baron, Jorge. "Design and construction of a Stirling engine prototype". Energy Conversion and Management n°33, 2006.
- [10] Hirata, Koichi, Schmidt "Theory for Stirling engines", 2004
- [11] Dyson, Rodger W.; Wilson, Scott D.; Tew, Roy C. "Review of Computational Stirling Analysis Methods", 2004
- [12] Generador Junker <http://www.lmagency.biz/contents/es/p29.html>
- [13] Batería AGM <https://autosolar.es/pdf/VISION-BATTERY-24AH.pdf>
- [14] Inversor Wellsee <http://www.solostocks.com/venta-productos/fuentes-alimentacion/inversores-convertidores-electricos/inversor-12v-500w-onda-senoidal-pura-6316383>
- [15] Ricardo, Henry. "Ecuaciones diferenciales: Una introducción moderna", 2006
- [16] Moran, Michael J. "Fundamentos de la termodinámica técnica", Barcelona 2004
- [17] Agüero, Víctor Raúl. "Diseño y construcción de un motor Stirling para la generación de energía eléctrica". Lima 2006
- [18] Formosa F; Despesse G. "Analytical model for Stirling cycle machine design". Energy Conversion and Management n°51, 2010.
- [19] Cheng, Chin-Hsiang; Yang, Hang-Suin; Keong, Lam. "Theoretical and experimental study of a 300W beta-type Stirling engine". Energy n°59, 2013.
- [20] Cheng, Chin-Hsiang; Yu, Ying-Ju. "Numerical model for predicting thermodynamic cycle and thermal efficiency of a beta-type Stirling engine with rhombic-drive mechanism". Renewable Energy n°35, 2010.
- [21] Cheng, Chin-Hsiang; Yu, Ying-Ju. "Combining dynamic and thermodynamic models for dynamic simulation of a beta-type Stirling engine with rhombic-drive mechanism". Renewable Energy n°37, 2012.
- [22] Ferreira, Ana Cristina, Luís B Martins, Manuel L Nunes, and Senhorinha F Teixeira. 2014. "Cost-Benefit Model Applied to the Optimization of Thermal Systems Based on a Stirling Engine." In *Proceedings of ICOPEV '2014- 2nd International Conference on Project Economic Evaluation*, (-):175–82.



**Ernesto Gutiérrez González.** PhD in Industrial Engineering from the Polytechnic University of Catalonia, Spain. Research Professor at the Laboratory of Thermal Engines in the Superior Technical School of Industrial Engineering of Barcelona. His main area of research is the electronic management of internal combustion engines and renewable energies, of which he is the author of several scientific papers and publications.



**Beatriz Marín Tapia.** Industrial Engineer from the Polytechnic University of Catalonia, Spain. Her main area of interest is thermal machines and the renewables energies.