Geometria de superfícies.
Una aproximació a la figura de Gauss[1]

Pere Pascual i Gainza

Portrait of Gauss by S. Bendixen (1828)

Facultat de Matemàtiques i Estadística, UPC

14 de setembre de 2005

[1] Aquest escrit correspon a la Lliçó Inaugural del curs 2005/06 de la Facultat de Matemàtiques i Esatdística de la UPC, curs dedicat a Gauss, i serà publicat a la seva pàgina web, www- fme.upc.edu.

Geometria de superfícies.
Una aproximació a la figura de Gauss

Pere Pascual i Gainza

RESUM

Gauss va publicar l'any 1827 *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, obra que ha resultat fonamental en el desenvolupament de la geometria diferencial a partir del segle *XIX*. La documentació de la qual es disposa sobre la gènesi i el desenvolupament de les idees d'aquesta obra, ens permet, a més de presentar els principals resultats que hi apareixen, fer una aproximació a la figura de Gauss, al seu *estil* matemàtic.

INTRODUCCIÓ

Enguany commemorem el 150è aniversari de la mort de Gauss, l'anomenat *Príncep de les matemàtiques*. L'obra de Gauss és immensa i variada, com ho certifiquen els dotze volums que la recullen publicats entre el 1863 i el 1929. Abasta des de la matemàtica pura a la matemàtica aplicada o a la física, i impregna totes les matemàtiques del segle *XIX*. La qualitat del seu treball i l'interès dels problemes que va tractar fan que els seus resultats i les seves idees resultin essencials, encara avui, per a diverses parts de les matemàtiques.

Amb motiu d'aquesta efemèride, la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC ha decidit dedicar el curs 2005/06 a Gauss, cosa que ens dóna una molt bona oportunitat d'apropar-nos a la figura i a l'obra d'aquest insigne científic.

Seria temerari tractar de resumir en uns quants minuts l'obra de Gauss i fer justícia de la varietat i profunditat dels seus resultats. De ben segur que al llarg del curs hi haurà ocasió de conèixer un o altre aspecte del seu treball. En aquesta conferència em centraré en una de les seves publicacions més importants, tant pel que fa als resultats que conté com per la seva influència en el desenvolupament posterior de les idees fonamentals de la geometria diferencial: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Abans, però, em sembla convenient fer una breu semblança biogràfica de Gauss que ens permetrà emmarcar les *Disquisitiones generales* en la perspectiva global del seu treball.

APUNTS BIOGRÀFICS

Algunes dades personals. Carl Friederich Gauss va néixer el 30 d'abril de 1777 a Brunswick, Alemanya. A primer cop d'ull podríem dir que la seva vida va ser molt simple. Nascut en el sí d'una família molt modesta, la seva precocitat acadèmica extraordinària va comportar que el Duc de Brunswick li assegurés una assignació amb tant sols 14 anys d'edat, de la qual va gaudir fins als 30 anys, cosa que li va permetre dedicar-se completament i exclusivament a la recerca durant aquest temps. L'any 1807 va assumir la direcció de l'observatori de Göttingen, on va treballar fins al seu decés l'any 1855, poc abans de complir els 78 anys.

Malgrat aquesta visió simplista, l'època en la qual va viure va ser políticament moguda, sorgida de la Revolució Francesa i del domini napoleònic de la regió i culturalment sacsejada pel moviment *Sturm und Drang*. La seva vida personal ve marcada per la mort de la seva primera dona Johanna i la llarga malaltia i mort de la segona, Minna, així com les difícils relacions mantingudes amb alguns dels seus fills, que van suposar que emigressin als EEUU. Sembla, però, que els diferents fets històrics que van succeir al llarg de la seva vida no el van distreure gaire de la seva principal ocupació; la dedicació a la ciència i a les matemàtiques.

Els primers anys. Hi ha moltes anècdotes referents a la precocitat matemàtica del jove Gauss, encara que els biògrafs assenyalen que bona part d'aquestes anècdotes es basen en els relats que feia el propi Gauss en els seus darrers anys de vida, cosa que dificulta la seva comprovació. Una de les més conegudes i contrastades és la del «descobriment» de la suma d'una progressió aritmètica: als nou anys Gauss va assistir a la seva primera classe d'aritmètica, on el professor Büttner va proposar als estudiants que calculessin la suma dels cent primers números. Gauss de seguida, va lliurar la seva pissarra al professor amb el resultat correcte, 5050, dient en el seu dialecte local, *Ligget se!*, és a dir, «aquí està». El jove Gauss havia advertit que la suma del primer i del darrer número donava el mateix resultat que la suma del segon i del penúltim, etc, és a dir,

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \cdots = 101,$$

i com que hi ha 50 parells, el resultat se segueix multiplicant: $101 \times 50 = 5050$.

Büttner va saber veure la capacitat de Gauss i el va posar a estudiar amb el seu ajudant Martin Bartels, de 17 anys, amb el qual Gauss va poder familiaritzar-se amb el binomi de Newton per a exponents no enters, amb les sèries infinites i, va fer els primers passos en l'anàlisi matemàtica.

Als 11 anys, Gauss va ingressar al Gymnasium Catherineum, on va estudiar llatí i grec i, on la seva fama va depassar els cercles purament acadèmics fins arribar a oïdes del duc Karl Wilheim Ferdinand, que el va rebre en audiència a l'edat de 14 anys. El duc va ordenar una assignació econòmica per al jove geni, cosa que li permetria ampliar i prosseguir els seus estudis al Collegium Carolinorum, on va trobar una àmplia i extensa biblioteca que contenia els títols matemàtics més importants del moment. A més, a partir d'aquell moment va sorgir una amistat sincera entre el duc i l'estudiant, mantinguda fins al traspàs del duc l'any 1806. L'agraïment de Gauss es farà palès més endavant, en el prefaci de les *Disquisitiones arithmeticae*.

L'any 1795 Gauss es traslladà a la Universitat Georgia Augusta de Göttingen, sense haver definit encara la seva vocació entre filologia clàssica o matemàtiques. Dels amics de la universitat, destaca Wolfgang Bolyai, dos anys més gran, amb qui va compartir els anys formatius. Després del retorn de Bolyai a la seva Transilvània natal l'any 1799, els dos amics van mantenir una profusa correspondència al llarg de tota la seva vida. Aquestes cartes han permès completar el coneixement de la personalitat de Gauss i, des d'un punt de vista matemàtic, els orígens de la geometria no-euclidiana, que independentment desenvoluparien Jànos Bolyai i Nikolai I. Lovachevski.

Gauss va prosseguir les seves investigacions aritmètiques i l'any 1796, amb 19 anys, va fer un descobriment que va ser clau per a la seva inclinació vers les matemàtiques en detriment dels estudis filològics: la possibilitat de construir amb regle i compàs l'heptadecàgon, el polígon regular de 17 costats. Ell mateix fa referència a aquest moment en una carta a Gerling de l'any 1819:

> *Va ser el 29 de març de 1796, en unes vacances a Brunswick, sense la més mínima participació de la casualitat, ja que va ser fruit d'esforçades meditacions; el matí d'aquell dia, abans d'aixecar-me, vaig tenir la sort de veure amb gran claredat tota aquesta correlació, de manera que allà mateix i immediatament vaig aplicar a l'heptadecàgon la corresponent confirmació numèrica.*

A partir d'aquest fet Gauss es decanta definitivament cap a les matemàtiques i just d'endemà, el 30 de març de 1796, inicia les primeres anotacions al seu diari. L'anàlisi d'aquest diari matemàtic ha permès conèixer més completament la seva obra i la seva evolució en els temps.

A la universitat Gauss va estudiar segons les seves preferències, sense seguir un pla acadèmic establert a priori per la institució; un benefici de la «llibertat acadèmica» de les universitats germàniques en les quals no era obligatori assistir a cursos específics ni tenir assignat un tutor. Ni tant sols hi havia controls curriculars ni exàmens.

L'any 1798, després d'haver-hi passat 3 anys, Gauss va abandonar la Universitat de Göttingen sense l'obtenció d'un diploma que certifiqués l'èxit dels seus estudis. Tanmateix, ja aleshores havia desenvolupat gran part de les idees més importants que publicaria en diversos articles al llarg dels propers vint-i-cinc anys. Per requeriment del Duc, com assenyala en una carta a Bolyai, Gauss va sotmetre la seva dissertació doctoral a la Universitat de Helmstedt el 1799, grau que li va ser concedit *in absentia*, eximint-lo de la presentació oral corresponent.

El títol de la tesi és *Demonstratio nova theoremattis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus pose*. En aquest treball Gauss dóna la primera demostració reconeguda com a tal del teorema fonamental de l'àlgebra, teorema que va captivar-lo de manera especial, com ho demostra que en donés fins a tres demostracions més, la darrera el 1849 amb motiu del 50è aniversari de la seva tesi.

El període triomfal. Els vint primers anys del segle *XIX* emmarquen una època de gran rellevància en les investigacions de Gauss i en el seu reconeixement social. La creativitat dels anys previs va desembocar l'any 1801 amb dues fites extraordinàries, la publicació de les *Disquisitiones arithmeticae* i el càlcul de l'òrbita del recentment descobert planeta Ceres.

Gauss havia lliurat el manuscrit de les *Disquisitiones arithmeticae* a l'editor l'any 1798, però les dificultats econòmiques del projecte van endarrerir la seva publicació fins al 1801. *Disquisitiones arithmeticae* és una obra monumental en la qual Gauss dóna una nova orientació a la Teoria de Nombres. Aquesta obra, de la qual disposem d'una magnífica versió en català gràcies a la Dra. Griselda Pascual, mereix una atenció especial, cosa que de ben segur es produirà al llarg d'aquest «Curs Gauss» de la FME.

Hi ha, però, una anècdota al voltant d'aquesta obra que recrea situacions que es donen encara ara, inherents a com utilitzem la llengua els matemàtics. El llatí de les *Disquisitiones arithmeticae* va ser acuradament revisat per J. Meyerhoff, un reconegut expert en llengües antigues. A banda de corregir el llatí extremadament clàssic o acadèmic de Gauss, Meyerhoff va voler corregir expressions que Gauss, tot i reconèixer que eren dubtosament correctes, utilitzava expressament. La frase següent, extreta d'una llarga reflexió realitzada per Gauss sobre aquest tema, ens servirà d'exemple:

> *Sé sobradament que* si *amb el subjuntiu no és correcte en llatí, però els matemàtics actuals semblen haver assumit el subjuntiu en hipòtesis i definicions;* [...] *Huyghens, que segons la meva opinió escriu el llatí més elegant,* [en fa aquest ús]*, i jo l'he imitat.*

FIGURA 1. Gauss l'any 1803.

El planeta Ceres marca l'altre gran esdeveniment en els afers del jove científic. L'any 1801, l'astrònom italià G. Piazzi va descobrir el planeta Ceres, de l'òrbita del qual només va poder observar 9 graus abans de la seva desaparició darrera del sol. Al llarg d'aquell any F. von Zach, astrònom conegut de Gauss, va publicar diverses prediccions de la posició en la qual apareixeria de nou aquest planeta. Els càlculs, que havien estat efectuats per diversos astrònoms reconeguts, van aparèixer a la *Monatliche Correspondenze*. En el número de setembre va aparèixer una predicció realitzada per Gauss que diferia de manera substancial de les altres. Primerament Zach i, uns dies després, W. Olbers, van localitzar Ceres en posicions molt properes a les previstes per Gauss, cosa que va fer de Gauss una celebritat europea. La capacitat i l'habilitat de càlcul de Gauss, combinats amb una aplicació acurada del mètode de mínims quadrats van ser factors essencials en els seus èxits com a astrònom. L'any següent, Olbers descubreix el planeta Pallas i Gauss fixa també la seva òrbita.

En aquests anys prepara la que resultarà l'obra més important de l'astronomia teòrica durant més de 50 anys, la *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis ambientium*, que es publicarà l'any 1809 en dos volums. En el primer s'estudien les equacions diferencials, les seccions còniques i les òrbites el·líptiques, mentre que en el segon s'analitza com estimar i refinar l'estimació de les òrbites de planetes.

Des del 1810 fins el 1830 Gauss s'ocupa de les tasques de director de l'Observatori Astronòmic de Göttingen, que s'inaugura el 1816. Gauss dedica la major part del seu temps a l'observatori, fins i tot supervisant personalment la compra del material científic, però troba temps per aprofundir en temes més teòrics de les matemàtiques. Per exemple, fruit d'aquestes meditacions publica *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, que és un tractament rigorós de les sèries i la seva convergència, i en el qual introdueix i estudia la funció hipergeomètrica, parcialment investigada per L. Euler.

Com a mostra de la varietat d'interessos de Gauss i de la seva creativitat i capacitat de treball citaré tres treballs més apareguts abans del 1820:

- *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogene-orum methodus nova tractata*, 1813. Obra inspirada per problemes geodèsics i essencialment dedicada a la teoria del potencial.
- *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, 1814. Assaig de caire pràctic sobre integració aproximada.
- *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen*, 1816. Obra en la qual presenta una discussió d'estimadors estadístics.

FIGURA 2. L'heliotropi.

Geodèsia i geometria. L'any 1818, el ministre Arnswaldt demana a Gauss que realitzi una triangulació i mesura geodèsica de l'estat de Hanover, amb l'objectiu d'enllaçar-lo amb els estudis topogràfics que es realitzen a Dinamarca. Gauss dedicarà vuit anys a aquesta tasca, feixuga i en bona mesura rutinària, efectuant mesuraments al llarg del dia i realitzant els càlculs per la nit. En aquest context, Gauss inventa l'heliotropi, un aparell que reflecteix els raigs solars mitjançant un sistema de miralls i un petit telescopi, que li va permetre fer mesures molt acurades; una mostra més de la genial versatilitat del personatge que ens ocupa.

La dificultat de fer cartes planes de l'el·lipsoide terrestre va conduir Gauss a formular, l'any 1816, el problema d'aplicar una superfície sobre una altra de manera que siguin *«iguals en les seves parts més petites»*. Gauss va proposar aquest problema el 1816, però no va tenir ressò fins que, a instàncies de Schumacher, va ser proposat per l'Acadèmia Danesa l'any 1821. Davant la manca de solucions, Gauss va presentar la seva pròpia solució l'any següent, i la va publicar el 1825 sota el títol *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abegbildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*,[2] al qual va afegir, en llatí, la frase *Ab his via sternitur ad maiora*, que podríem traduir en la forma «Camí preparat per a coses més grans», amb la qual cosa anuncia el desenvolupament de la teoria de superfícies.

Sens dubte la contribució més important d'aquell període, i potser una de les seves darreres aportacions en una direcció completament nova de les matemàtiques, va ser la publicació de les *Disquisitiones generales circa superficies curvas* l'any 1827. Les *Disquisitiones generales* van sorgir, com analitzarem més endavant, de les meditacions geodèsiques de les darreres tres dècades i van ésser la llavor de molts anys de recerca en Geometria Diferencial.

FIGURA 3. Gauss segons una litografia de Bendixen, 1828.

Etapa de maduresa: física i altres preocupacions. Amb l'arribada l'any 1831 de Wilhelm Weber a Göttingen com a professor de física, s'obre una època de fructífera col·laboració entre Gauss i el jove físic que durarà sis anys, fins que Weber, juntament amb altres sis professors (entre els quals hi havia l'orientalista Ewald, gendre de Gauss), signants d'un manifest en contra de la derogació de la constitució per part del rei de

[2] Una solució general del problema d'aplicar les parts d'una superfície donada en una altra superfície de forma que la imatge i la part aplicada són similars en les seves parts més petites.

Hanover, són expulsats de la universitat. Gauss, malgrat la seva posició i prestigi, no va intercedir en favor dels set signants.

FIGURA 4. Gauss i Weber.

Gauss ja havia mostrat anteriorment interès per la física, especialment en l'ús de la teoria del potencial com a base d'alguns problemes de la mecànica i de la teoria de l'electricitat. Amb Weber van iniciar l'estudi del magnetisme terrestre, van publicar el primer atlas geomagnètic de la Terra, van descobrir les lleis de Kirchhoff, i van construir un telègraf primitiu que podia enviar missatges a 500 peus de distància, la que hi havia entre l'observatori astronòmic i la Facultat de Física.

L'any 1931 Schäfer assenyalava que, de la física, allò que atreia Gauss era el component matemàtic subjacent. En les seves paraules,

> *No era propiament un físic en el sentit de la recerca de nous fenòmens, sinó sempre un matemàtic que provava de formular en termes matemàticament exactes els resultats experimentals obtinguts per altres.*

Una de les darreres activitats academicocientífiques de Gauss va ser l'anàlisi de les pensions de les vídues dels professors de la universitat de Göttingen, treball que va iniciar per encàrrec de la pròpia universitat, temorosa de no poder cobrir les creixents despeses que aquets fons suposaven. Després d'una anàlisi minuciosa que li va ocupar sis anys, amb llargs i tediosos càlculs, l'any 1851 Gauss va concloure, per a sorpresa de tothom, que el sistema de pensions era solvent i que de fet es podien augmentar les pensions.

FIGURA 5. Paper moneda alemany amb la imatge de Gauss.

Per cloure aquesta secció recordarem les paraules que Sartorius von Walterhausen, geòleg i amic personal de Gauss, va dir en l'obituari de l'admirat company:

> *Gauss va ser un home senzill i sense afectació des de la seva joventut fins a la seva mort. Un petit estudi, una taula de treball amb uns estalvis verds, un pupitre pintat de blanc, un estret sofà, i, després de complir els 70 anys, una butaca, una làmpada amb pantalla, una cambra fresca, aliments senzills, una bata i una gorra de vellut eren totes les seves necessitats.*


Ritmüller's portrait of Gauss on the terrace of the observatory

FIGURA 6. Gauss a la terrassa del nou observatori de Göttingen.

ESTRUCTURA DE LES *DISQUISITIONES GENERALES CIRCA SUPERFICIES CURVAS*

La publicació de les *Disquisitiones generales circa superficies curvas* es considera l'inici de la Geometria Diferencial Intrínseca. Tot i que la seva lectura no és senzilla des dels estàndards de presentació dels textos de matemàtiques actuals, l'esforç es veu recompensat per l'elegància i concisió de les idees desenvolupades i el plaer de llegir un clàssic. L'obra original va ser escrita en llatí, llengua franca de la ciència del moment, però es disposa de diverses traduccions a l'alemany, a l'anglès o al francès, que ens permeten aproximar-nos-hi més fàcilment.

Segons el propi Gauss, les dues fonts principals d'inspiració per a la seva anàlisi de les superfícies van ser les consideracions astronòmiques, incloent-hi la trigonometria esfèrica, i la geodèsia teòrica. Aquests eren els temes que havien ocupat la major part del seu temps en els anys immediatament anteriors a l'aparició de les *Disquisitiones generales*.

A causa dels seus treballs topogràfics, es va interessar per l'estudi de les geodèsiques dels el·lipsoides de revolució i per la determinació de cartes conformes (és a dir, que conservin els angles) per a superfícies generals, problema que va resoldre en el seu assaig per a l'Acadèmia Danesa abans comentat.

Entre els anys 1821 i 1825 Gauss va esmerçar gran part del seu temps en el treball de camp i de mesura geodèsica derivat de l'encàrrec rebut. En completar gran part d'aquesta tasca, Gauss va disposar del temps necessari per a dedicar-se a la geometria de superfícies, com comenta a Schumacher en una carta de novembre de 1825:

> *Recentment he reprès part de les meves investigacions sobre superfícies curvilínies, que hauran de formar la base del meu projectat assaig en geodèsia avançada. És un tema que és tan ric com difícil, i requereix una dedicació completa. Em trobo que he de recular en la meva exposició ja que el que és conegut s'ha de desenvolupar d'una manera diferent segons les noves investigacions.*

Entre els manuscrits de Gauss s'ha trobat el primer esborrany de l'assaig esmentat, que es titula *Noves disquisicions generals sobre superfícies curvilínies*, elaborat el mateix any 1825. Tanmateix, la presentació final dels seus resultats en les *Disquisitiones generales* serà totalment diferent, com comentarem més endavant quan presentem el contingut de l'obra publicada.

Les *Disquisitiones generales* és una obra curta i sintètica, desenvolupada en tant sols 40 pàgines organitzades al voltant de 29 articles. A efectes de l'exposició, dividiré l'obra en tres parts, de desigual extensió:

(1) **Curvatura de Gauss**: Articles 1-13, en els quals Gauss introdueix alguns dels conceptes fonamentals i prova el celebrat *theorema egregium*.
(2) **Geodèsiques**: Articles 14-20, en els quals s'estudien diverses propietats de les corbes de longitud mínima sobre una superfície i, en particular, contenen la gènesi del conegut com a teorema de Gauss-Bonnet.
(3) **Aplicacions**: Articles 21-29, en els quals es comparen angles i àrees de triangles geodèsics amb triangles plans amb costats de la mateixa longitud.

Les dues primeres parts són les més importants i conegudes, ja que són les que més han influït en el desenvolupament posterior de la Geometria Diferencial, mentre que la tercera, d'aplicació i més directament inspirada pels treballs geodèsics que estava desenvolupant, va quedar en segon terme i ha donat lloc a diverses especulacions sobre l'hipotètica intencionalitat de Gauss en usar els càlculs que hi efectua per confirmar que l’espai és euclidià. A continuació analitzem separadament les tres seccions en que hem dividit les *Disquisitiones generales*.

CURVATURA DE GAUSS

En els primers articles, Gauss introdueix alguns dels conceptes centrals i essencialment nous de la memòria.

(1) *L’aplicació de Gauss*: per a una superfície S de l’espai $\mathbb{R}^3$ amb camp unitari normal N, es defineix l’aplicació de S sobre l’esfera unitat, $\mathbb{S}^2$,

$$z : S \to \mathbb{S}^2$$

assignant a cada punt p de S l’extrem del vector unitari normal corresponent, és a dir, $z(p) = N(p)$.

La idea d’introduir aquesta aplicació l’explica el propi Gauss en un paràgraf de l’Abstract de les *Disquisitiones generales* presentat a la Reial Societat de Göttingen:

> *Aquest procediment és bàsicament el mateix que s’utilitza sovint en astronomia, en el qual les direccions de l’espai es consideren punts d’una esfera imaginària de diàmetre infinit.*

(2) *Mensuram curvaturae*: Basant-se també en consideracions astronòmiques, defineix la curvatura $K(p)$ en un punt p de la superfície S (o més precisament, el seu valor absolut) segons

$$|K(p)| = \lim_{D \to 0} \frac{\text{àrea}(z(D))}{\text{àrea}(D)},$$

on D és un entorn finit de p i $z(D)$ és la part corresponent de l’esfera. Gauss determina el signe de $K(p)$ segons que la diferencial de l’aplicació z conservi o no l’orientació.

Un parell d’exemples elementals ens ajudaran a comprendre la definició d’aquesta curvatura: si S és una superfície plana, el camp normal N és constant (vegeu la figura 7),

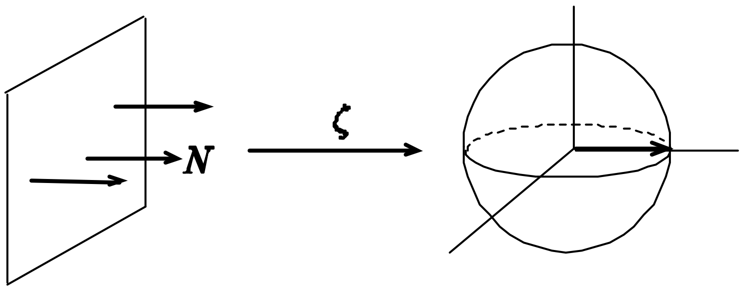

FIGURA 7. Aplicació de Gauss per un pla.

i, per tant, trobem

$$K(p) = \lim_{D\to 0} \frac{\text{àrea}(z\ (D))}{\text{àrea}(D)} = \lim_{D\to 0} \frac{0}{\text{àrea}(D)} = 0,$$

és a dir, una superfície plana té curvatura zero en tots els seus punts. Si ara S és una esfera de radi R (figura 8),

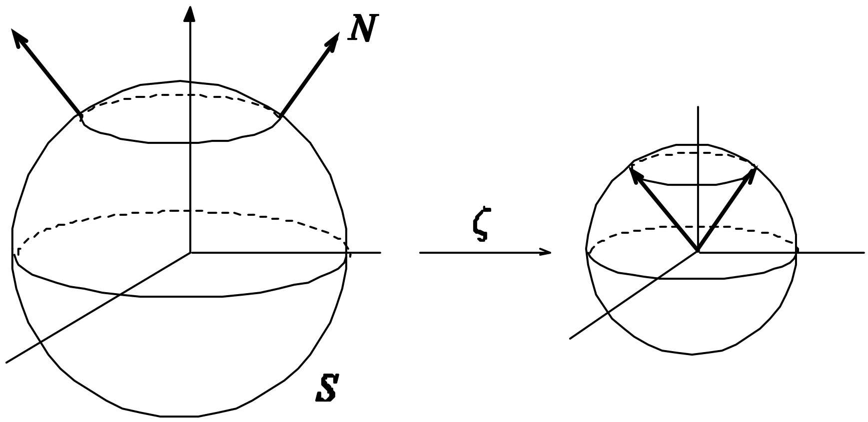

FIGURA 8. Aplicació z per una esfera.

un càlcul senzill permet provar que

$$K(p) = \lim_{D\to 0} \frac{\text{àrea}(z\ (D))}{\text{àrea}(D)} = \lim_{D\to 0} \frac{\frac{1}{R^2}\,\text{àrea}(D)}{\text{àrea}(D)} = \frac{1}{R^2},$$

cosa que es correspon amb la intuïció: tots els punts de l'esfera estan «igualment corbats» i la curvatura de l'esfera decreix quadràticament amb el radi. D'altra banda, el signe de la curvatura determinat per Gauss fa que en un punt de sella la curvatura sigui negativa. La figura 9 dóna idea de com podem analitzar el signe de la curvatura en un punt p resseguint el vector normal al llarg d'una corba tancada que envolta p.

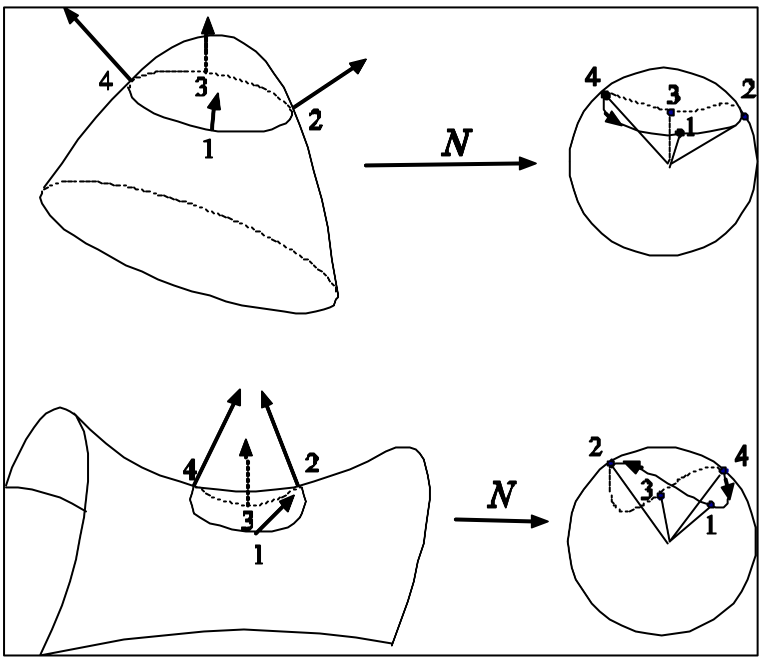

FIGURA 9. Determinació del signe de la curvatura.

(3) *Curvaturam totalem*: la curvatura total (o íntegra) d'una regió finita D d'una superfície S es defineix com l'àrea de la seva imatge esfèrica $z(D)$, que podem escriure com

$$K(D) = \int_D K\, ds \ ,$$

on ds és l'element d'àrea de la superfície orientada S.

De les definicions anteriors se segueix immediatament que

$$K(p) = \lim_{D \to p} \frac{K(D)}{\text{àrea}(D)},$$

cosa que ens serà d'utilitat més endavant.

Bona part d'aquesta primera secció està dedicada al càlcul efectiu de la curvatura d'una superfície, ja que la definició original no és gaire operativa. S'estableixen diverses fórmules adequades a les diferents maneres de presentar una superfície: com a gràfica d'una funció, en forma paramètrica o en forma implícita. Aquests càlculs li permeten derivar d'una manera senzilla els resultats d'Euler, cosa que emfasitza en una cita en la qual honora al seu predecessor. En aquest context, Gauss prova que *«la curvatura en un punt qualsevol p de la superfície S és el producte de les curvatures màxima i mínima de les corbes per p tallades ortogonalment a la superfície»*. Aquest resultat permet visualitzar fàcilment el signe negatiu de la curvatura d'un punt de sella.

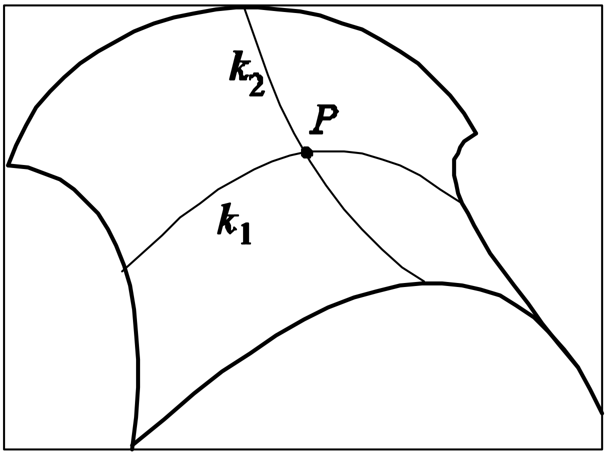

FIGURA 10. Les curvatures màxima i mínima d'un punt de sella tenen signes oposats.

Després d'un desenvolupament analític feixuc de més de cinc pàgines, l'article 11 conté la fórmula principal del treball, coneguda des d'aleshores com a *fórmula de Gauss*. Per escriure-la hem d'introduir, ni que sigui succintament, la primera forma fonamental d'una superfície.

Donada una superfície S de $\mathbb{R}^3$ en forma paramètrica, $j(u,v)$, es defineixen els coeficients de la primera forma fonamental per

$$E = \langle j_u, j_u \rangle, \ \ F = \langle j_u, j_v \rangle, \ \ E = \langle j_v, j_v \rangle$$

Els valors de E i de G estan relacionats amb la velocitat amb la qual es descriuen les corbes coordenades $v = \text{cnt}$ i $u = \text{cnt}$, mentre que F mesura l'angle que formen aquestes corbes. La primera forma fonamental (és a dir, els coeficients E, F, G) serveix per mesurar longituds de corbes arbitràries sobre S. L'exemple de la longitud i de la latitud de l'esfera ens ajudarà a interpretar el que s'amaga darrera d'aquests coeficients. En efecte, la longitud i la latitud de l'esfera (de radi 1) la descriuen paramètricament en la forma

$$\begin{aligned} x &= \cos u \, \cos v, \\ y &= \cos u \, \sin v, \\ z &= \sin u, \end{aligned}$$

de manera que les corbes $v = \text{cnt}$ corresponen als meridians de l'esfera i les corbes $u = \text{cnt}$ als seus paral·lels (figura 11).

Fent els càlculs indicats per la definició trobem que

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \cos^2 u \, .$$

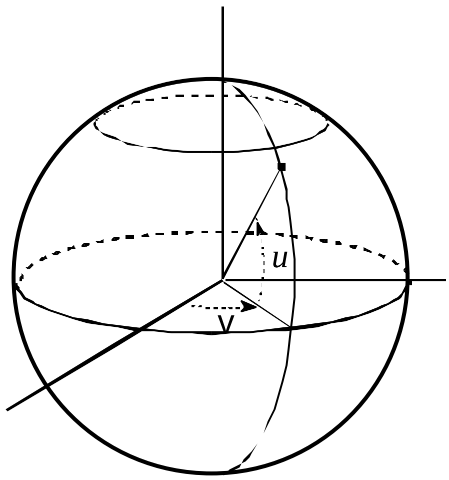

FIGURA 11. Coordenades esfèriques.

L'anul·lació d'F reflecteix que els meridians i els paral·lels es tallen ortogonalment. E és igual a 1 ja que quan recorrem un angle u sobre un meridià, la longitud de circumferència recorreguda és exactament igual a u, és a dir, descrivim els meridians amb velocitat 1. D'altra banda, els paral·lels $u = \text{cnt}$ es recorren amb velocitat $\cos u$, que és igual al seu radi.

Doncs bé, amb aquestes notacions, Gauss acaba l'article 11 amb la

Fórmula de Gauss:

$$\begin{aligned} 4(EG - F^2)\,K = {} & E(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2) + G(E_u G_u - 2E_u F_v + E_v^2) \\ & + F(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v + 4E_u F_v - 2F_u G_u) \\ & - 2(EG - F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}). \end{aligned}$$

Allò que és remarcable d'aquesta equació és que només hi intervenen K i els coeficients E, F, G de la primera forma fonamental i les seves derivades.

Gauss inicia l'article següent observant que per al càlcul de la curvatura d'una superfície *«no és necessari obtenir fórmules explícites que expressin les coordenades espacials x, y, z com a funcions de les indeterminades u,* v*; sinó que l'expressió general de la magnitud de l'element de línia és suficient».* Segueix immediatament la interpretació geomètrica de la invariància de la curvatura per isometries:

> *Formula itaque articuli precedentis sponte perducit ad egregium*
>
> *THEOREMA. Si supeficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

Resultat que actualment coneixem com a *Theorema Egregium* i que enunciem en la forma

Theorema egregium. *La curvatura de Gauss d'una superfície és invariant per isometries locals.*

D'aquí Gauss dedueix que *«qualsevol part finita d'una superfície curvilínia mantindrà la seva curvatura total després de desenvolupar-se sobre una altra superfície».*

Així mateix, dedueix que la curvatura d'una superfície desenvolupable sobre un pla és idènticament zero, cosa que tenint presents les fórmules per a la curvatura calculades en articles anteriors condueix, per a superfícies definides per una gràfica $z(x,y)$, a l'equació característica de les superfícies desenvolupables

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0,$$

de la qual Gauss comenta:

> *criteri que, encara que és conegut des de fa poc temps, no ha estat demostrat, segons el nostre coneixement, amb el rigor imprescindible.*

En el darrer article d'aquesta part, el 13, Gauss indica el seu famós programa per a la Geometria Intrínseca de Superfícies. Una redacció molt similar i més completa en cert sentit és la que llegim a l'*Abstract* presentat a la Reial Acadèmia:

> *Aquests teoremes menen a la consideració de la teoria de superfícies curvilínies des d'un punt de vista nou, on s'obre un ample i encara totalment inexplorat camp d'investigació. Si considerem superfícies no com a vores de cossos, sinó com a cossos en els quals hi ha una dimensió que s'anul·la, i alhora les imaginem com flexibles però no extensibles, veiem que hi ha dues relacions essencialment diferents que hem de distingir, concretament, d'una banda, aquestes que pressuposen una forma definida de la superfície a l'espai; de l'altra, aquestes que són independents de les diverses formes a l'espai que la superfície pot adquirir. Aquesta discussió concerneix la segona. D'acord amb el què s'ha dit, la mesura de la curvatura pertany a aquest cas. Però és senzill de veure que les consideracions de figures construïdes sobre la superfície, els seus angles, les seves àrees i les seves curvatures integrals, la unió de punts mitjançant corbes de longitud mínima, i qüestions similars, també pertanyen a aquest cas. Totes aquestes investigacions han de començar a partir d'aquí, de*

què la mateixa natura de la superfície curvilínia ve donada per l'expressió d'un element lineal qualsevol en la forma

$$\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\ .$$

Llegint les *Disquisitiones generales* és difícil d'imaginar com va arribar Gauss a la seva famosa fórmula, que és l'element central de tota l'obra. El tractament és purament analític, obtenint la *fórmula* després de diverses pàgines de càlculs i reduccions complexes. De fet, segons es desprèn de l'esborrany preliminar i de les notes i apunts personals de Gauss recollits per Stäckel, la gestació de les idees i resultats que hem comentat i, en general, de tota l'obra, va seguir un camí invers al que la presentació final pot suggerir.

En efecte, de les notes personals de Gauss es dedueix que la idea d'usar l'aplicació z en l'estudi de superfícies i el concepte de curvatura associat es pot situar entre els anys 1799 i 1813, període en el qual hauria demostrat que la curvatura és producte de les curvatures màxima i mínima de les seccions normals a la superfície. Segons aquests documents, cap a l'any 1816, Gauss descobreix la invariància de la curvatura per isometries locals. En les seves notes de l'època es llegeix

> ***Teorema meravellós.*** *Si una superfície curvilínia en la qual una figura està fixada pren formes diferents a* $\mathbb{R}^3$*, aleshores l'àrea de la superfície de la imatge esfèrica de la figura és sempre la mateixa, per a totes les possibles formes.*

Gauss no donava aleshores cap demostració d'aquest resultat. En l'esborrany de 1825, va indicar una demostració basada en l'excés angular en triangles geodèsics dibuixats sobre una superfície, tema que farà objecte de la segona part de les *Disquisitiones generales*.

És el 1825 quan Gauss descobreix la forma general de la *fórmula de Gauss* i decideix basar en aquesta fórmula tot el desenvolupament de la teoria de superfícies, cosa que completarà amb les *Disquisitiones generales*.

El programa albirat per Gauss rebrà un impuls importantíssim l'any 1854 mitjançant la memòria *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Gründe liegen* presentada per B. Riemann per obtenir l'habilitació com a professor de Göttingen. Un Gauss envellit, que morirà l'any següent, va ser capaç d'apreciar la importància del treball de Riemann, com ho mostra l'informe que, com a membre del tribunal que jutjava Riemann, va escriure:

> *La dissertació sotmesa pel Senyor Riemann ofereix evidències convincents de les completes i penetrants investigacions de l'autor en aquelles parts del tema tractades, de creativitat, d'una ment veritablement matemàtica, i d'una gloriosa i fèrtil originalitat.*

GEODÈSIQUES

La segona de les parts en què hem dividit les *Disquisitiones generales* conté l'estudi de les propietats bàsiques de les corbes geodèsiques, definides com a corbes de longitud mínima entre dos punts de la superfície, i l'estudi de l'existència de sistemes de coordenades locals «geodèsics», estudi que culmina amb l'anàlisi de l'excés angular en triangles geodèsics.

Gauss anuncia l'objectiu dels seus propers articles ja al final del 13, tot just esbossat el programa de Geometria Intrínseca que té en ment, dient

> *Abans de prosseguir aquest estudi* [segons el programa], *hem d'introduir els principis de la teoria de corbes de longitud mínima sobre una superfície donada.*

Després d'establir les equacions diferencials de les geodèsiques, Gauss troba el resultat següent, ja conegut d'Euler: *«una corba g (parametritzada per l'arc) és una geodèsica de la superfície S si, i només si, la seva acceleració g'' és sempre ortogonal a la superfície S»*. Aquest és, però, un resultat extrínsec, ja que l'acceleració fa referència a la posició de la corba a l'espai $\mathbb{R}^3$, més enllà de la superfície *S*.

En l'article 15, Gauss inicia l'estudi de sistemes de coordenades particulars. L'article inclou el resultat següent:

> *TEOREMA. Si en una superfície curvilínia tracem des d'un punt fix una infinitat de corbes de longitud mínima, les línies que uneixin les seves extremitats seran normals a cadascuna de les corbes.*

Aquest i els resultats que segueixen són els que corresponen, en les presentacions modernes, als resultats que es deriven de l'aplicació exponencial d'una superfície (vegeu la figura 12) i del lema de Gauss. L'aplicació exponencial permet «adaptar» a un entorn les coordenades polars del pla tangent a la superfície en un punt, de manera que els «radis» siguin arcs geodèsics. Així, el resultat anterior assegura que les imatges de les circumferències del pla tangent són corbes ortogonals als radis geodèsics dibuixats a la superfície.

En definitiva, Gauss demostra l'existència de cartes locals *«especialment adequades per a l'estudi de la trigonometria de petits triangles geodèsics»*. Demostra que en aquestes cartes se satisfan les igualtats

$$E = 1,\quad F = 0,\quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}\right)_{uu} \quad \text{i} \quad K ds = -\left(\sqrt{G}\right)_{uu}$$

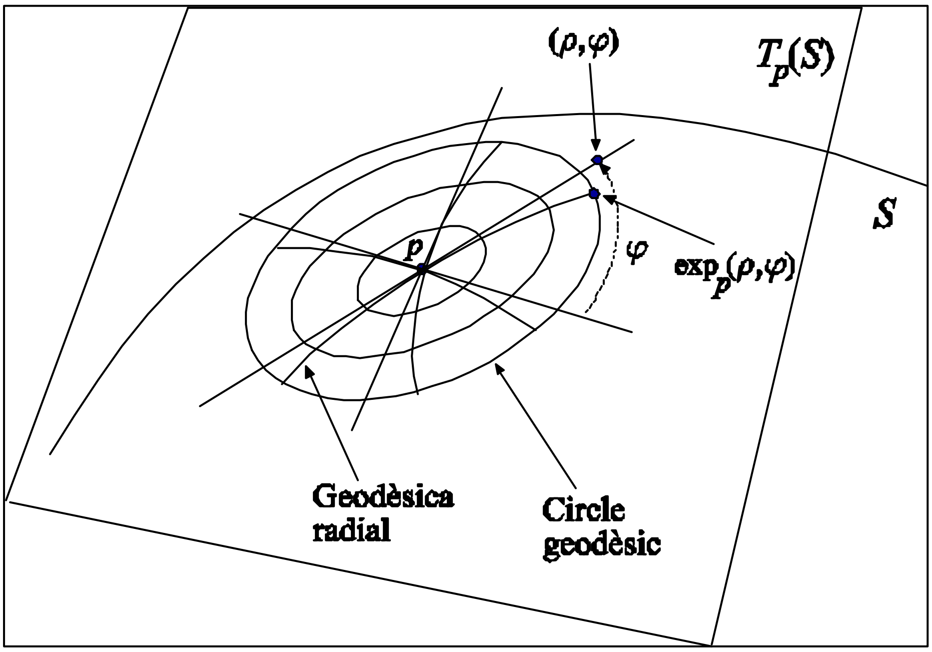

FIGURA 12. Aplicació exponencial i coordenades polars.

Més encara, Gauss prova que la variació angular d'una corba g respecte dels vectors tangents a les corbes coordenades $v = \text{cnt}$, està determinada per la forma diferencial

$$dq = -(\sqrt{G})_u\, dv\,.$$

Utilitzant aquests sistemes especials de coordenades, Gauss demostra la fórmula de l'excés de la suma dels angles d'un triangle geodèsic, cosa que el du a enunciar el *«teorema, que si no ens equivoquem, s'ha de comptar entre els més elegants de la teoria de superfícies curvilínies»:*

> *Excessus summae angularum trianguli a lineis brevissimis in supeficie curva concavo-concava formati ultra 180º, vel defectus summae angularum trian-guli a lineis brevissimis in supeficie curva concvo-convexa formati a 180º mesuratur per aream partis superficies shaerica, quae illi triangulo per directiones normalium repondet, si superficies integra 720 gradibus aequi-paratur.*

Aquest resultat, i més exactament la fórmula de l'excés, és el que avui en dia coneixem com a teorema de Gauss-Bonnet:

Teorema de Gauss-Bonnet. Si Δ és un (petit) triangle geodèsic sobre una superfície S de $\mathbb{R}^3$ amb angles a, b, g, aleshores

$$\int_\Delta K ds = (a + b + g) - p\,.$$

Gauss dedueix fàcilment el *teorema elegantíssim* per a un triangle geodèsic inclòs en un sistema de coordenades polars, en el qual se satisfan les igualtats comentades anteriorment, a partir del teorema fonamental del càlcul integral. En efecte, prèviament prova que en aquests sistemes se satisfà $(\sqrt{G})_u(0,j\ )=1$; així, usant les notacions de la figura 13, el resultat se segueix de les igualtats següents:

$$\begin{aligned}\int_\Delta K ds &= -\int_0^a \int_0^{r(j\,)} (\sqrt{G})_{rr}(r,j\ ) dr dj \\ &= -\int_0^a \Big((\sqrt{G})_r(r(j\ ),j\ ) - (\sqrt{G})_r(0,j\ ) \Big) dj \\ &= a - \int_0^a (\sqrt{G})_r(r(j\ ),j\ ) dj \\ &= a + \int_a dq = a + g - (p - b)\end{aligned}$$

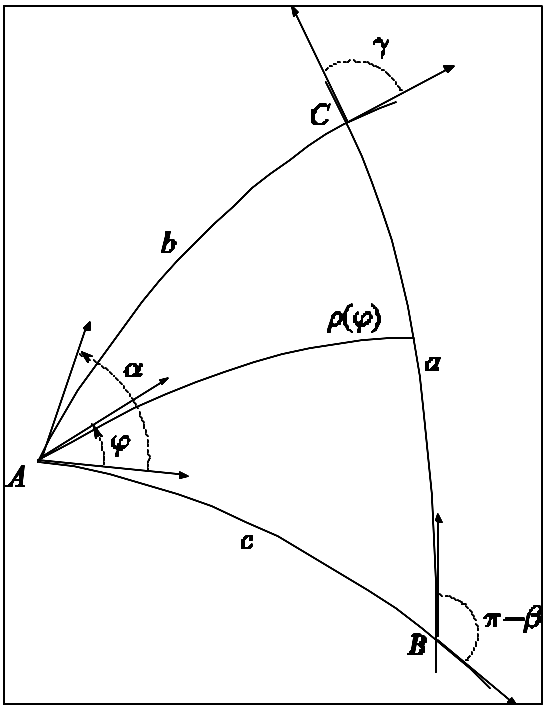

FIGURA 13. Triangle geodèsic.

A més, Gauss assenyala que, per un procés de triangulació de la superfície, del resultat anterior se'n deriva l'excés angular per a polígons geodèsics d'*n* costats. Així, en l'*Abstract* llegim

> *En general, l'excés sobre* $(n-2)p$ *dels angles d'un polígon d'n costats, si aquests són corbes de longitud mínima, serà igual a la curvatura íntegra del polígon.*

El *teorema elegantíssim* permet recuperar la primera demostració, més geomètrica, del *theorema egregium* segons les indicacions de Gauss en l'esborrany de les *Disquisitiones generales* de 1825. Aquesta demostració és, a grans trets, la següent: si $f : S \to S'$ és una isometria local, f conserva les longituds de les corbes i, per tant, aplica geodèsiques de S en geodèsiques de S'. Per la mateixa raó, f conserva angles entre corbes i àrees de petites figures dibuixades sobre S. Així, si Δ és un triangle al voltant d'un punt p de S, d'angles a, b, g, i $\Delta' = f(\Delta)$ és la seva imatge a S', amb els corresponents angles a', b', g', es té

$$\text{àrea}(\Delta) = \text{àrea}(\Delta'), \text{ i } \ a = a', \ b = b', \ g = g'.$$

Ara, el *theorema egregium* resulta directament de la fórmula de l'excés

$$K(p) = \lim_{\Delta\to p} \frac{K(\Delta)}{\text{àrea}(\Delta)} = \lim_{\Delta\to p} \frac{a + b + g - p}{\text{àrea}(\Delta)} = \lim_{\Delta'\to p'} \frac{a' + b' + g' - p}{\text{àrea}(\Delta')} = K(p')$$

Lògicament, aquest raonament comporta l'establiment previ de la fórmula de l'excés. Aquesta fórmula era àmpliament coneguda pels geòmetres de l'època per a superfícies desenvolupables i per a l'esfera i, segons consta en les seves notes personals, era coneguda de Gauss per a la geometria hiperbòlica des del 1794. En l'esborrany de 1825 Gauss esbossa una prova del resultat general, però la demostració que presenta no l'acaba de convèncer ja que comenta que *«aquesta prova necessita una explicació, alguns canvis en la seva forma»*. Aquesta podria ser la raó que mai publiqués aquest argument.

El *teorema elegantíssim* suposa que sobre una superfície de curvatura constant $K > 0$ la suma dels angles d'un triangle és superior a p, mentre que si $K < 0$, aleshores és menor que p.

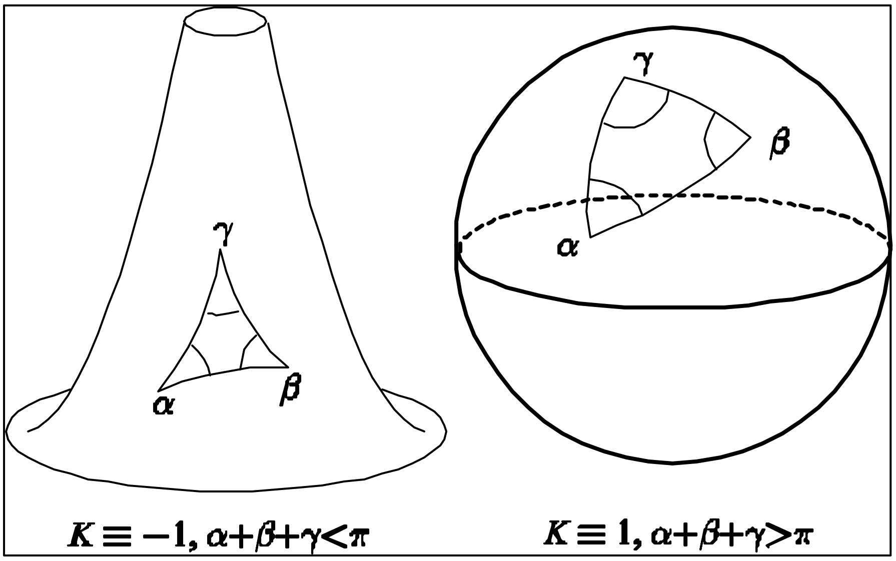

FIGURA 14. Excés-defecte de la suma dels angles d'un triangle.

És temptador pensar que Gauss va connectar el *teorema elegantíssim* amb l'estudi de les geometries no euclidianes. Hem de tenir present, però, que no disposava d'una superfície de curvatura negativa constant, cosa que resulta natural, a posteriori, pel teorema de Hilbert segons el qual no es pot submergir mètricament una superfície completa de curvatura negativa constant a l'espai ordinari $\mathbb{R}^3$.

El *teorema elegantíssim* va ser generalitzat per O. Bonnet per a triangles no necessàriament geodèsics l'any 1848. D'altra banda, per un procés de triangulació i compensació de les sumes d'angles, se segueix el següent resultat global:

Teorema de Gauss-Bonnet. *Sigui S una superfície orientable i compacta de* $\mathbb{R}^3$, *de gènere g. Aleshores,*

$$\int_S K ds = 2p \cdot (2 - 2g) = 2pc(S).$$

En aquest enunciat, $c(S) = 2 - 2g$ és la característica d'Euler de la superfície: si enrajolem *S* amb triangles dibuixats en la seva superfície, $c(S)$ és el resultat de comptar adequadament el nombre de vèrtexs, arestes i cares de la triangulació:

$$c(S) = \#\text{vèrtexs} - \#\text{arestes} + \#\text{triangles}.$$

La característica $c(S)$ és un invariant topològic de *S*, amb la qual cosa la curvatura *total* de *S* no només és un invariant per isometries locals, com havia demostrat Gauss, sinó que és també un invariant topològic.

Aquest resultat relaciona la geometria de la superfície *S*, la seva curvatura, i la topologia de *S*, la seva característica. Així, per exemple, a la vista del teorema de classificació de les superfícies compactes (que no estava a l'abast de Gauss, ja que es provaria més tard) si *S* és una superfície orientable i compacta amb curvatura positiva en tots els punts, *S* és homeomorfa a una esfera, ja que aquesta és l'única superfície compacta amb $c(S) > 0$.

Des de la seva aparició, el teorema de Gauss-Bonnet ha conegut un desenvolupament espectacular, i segueix essent un teorema central en la relació entre la geometria i la topologia de les varietats. La generalització de S.S. Chern per a varietats *n*-dimensionals l'any 1944 va suposar, a més, un nou i profund impuls a la Geometria Diferencial Intrínseca. Des d'aleshores, aquest concepte s'aplica no només a l'estudi del que succeeix *dintre* de la varietat, sinó també als fibrats que se li associen de forma natural (fibrats tangents, formes diferencials, ...) o a les aplicacions d'aquesta varietat en d'altres. En certa manera, aquests fibrats sorgeixen com a substituts de l'espai ambient, ara inexistent ($\mathbb{R}^3$ en el cas de les superfícies estudiades per Gauss).

APLICACIONS

Els darrers nou articles de les *Disquisitiones generales* estan dedicats a la comparació d'angles i àrees de triangles geodèsics dibuixats sobre una superfície i els corresponents triangles (rectilinis) plans amb costats d'igual longitud.

L’estudi és infinitesimal i requereix realitzar els càlculs per aproximació, desenvolupant en sèrie les quantitats que es volen calcular. Gauss demostra en aquest punt la seva habilitat en l’estudi i manipulació dels desenvolupaments en sèrie.

Fixem les notacions per descriure el resultat principal. Sigui Δ un triangle geodèsic sobre la superfície *S*, de vèrtexs *A*, *B*, *C*, angles a, b, g i costats (oposats) *a*, *b*, *c*. Com que les geodèsiques minimitzen distàncies, es té que $a \le b + c$ i, per tant, éspossible dibuixar un triangle rectilini en el pla amb costats de longituds *a*, *b*, *c*. Sigui Δ^* aquest triangle i a^*, b^*, g^* els angles corresponents (figura 15). Gauss desenvolupa en sèrie de potències la diferència $a - a^*$ i després de diverses manipulacions, resumeix els resultats obtinguts a l’article 28 en la forma

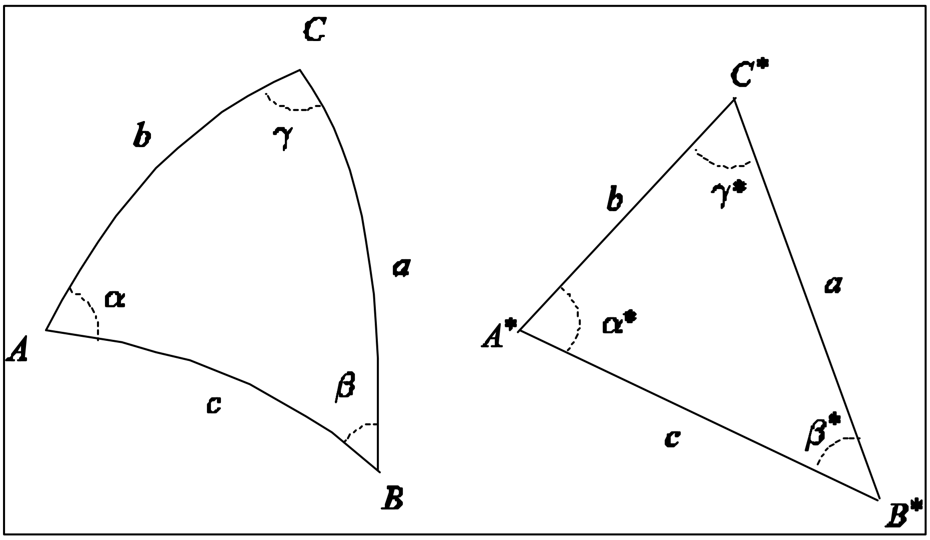

FIGURA 15. Triangles geodèsic i rectilini.

Les nostres fórmules generals, negligint termes de quart ordre, resulten extremadament simples, concretament

$$a = a^* - \frac{1}{12}\text{àrea}(\Delta)\left(2K(A) + K(B) + K(C)\right),$$

$$b = b^* - \frac{1}{12}\text{àrea}(\Delta)\left(K(A) + 2K(B) + K(C)\right),$$

$$g = g^* - \frac{1}{12}\text{àrea}(\Delta)\left(K(A) + K(B) + 2K(C)\right).$$

i, anàlogament, en l’article 29 compara les àrees dels triangles Δ, Δ^*, obtenint l’aproximació

$$\text{àrea}(\Delta) = \text{àrea}(\Delta^*)\left[1 + \frac{1}{120}\left(K(A)(s - a^2) + K(B)(s - b^2) + K(C)(s - c^2)\right)\right],$$

negligint un cop més els termes de quart ordre, i amb $s = 2(a^2 + b^2 + c^2)$.

De fet Gauss troba fins i tot una expressió pels termes d'ordre 4, tot i que no és gaire explícita i no la reproduirem aquí. En el cas de l'esfera de radi *R*, que és una superfície de curvatura constant $K = R^{-2}$, les fórmules anteriors s'escriuen

$$a = a^* - \frac{\text{àrea}(\Delta)}{3}\frac{1}{R^2}, \quad b = b^* - \frac{\text{àrea}(\Delta)}{3}\frac{1}{R^2}, \quad g = g^* - \frac{\text{àrea}(\Delta)}{3}\frac{1}{R^2}.$$

resultat que ja havia provat Legendre l'any 1787, com assenyala el propi Gauss.

Sembla clar que Gauss efectua aquests càlculs amb les aplicacions geodèsiques en ment. Si es pren una esfera com a model de la terra, la correcció dels angles que cal efectuar en triangles geodèsics és la calculada per Legendre i, per tant, és la mateixa per a tots els angles, mentre que si es pren un esferoide com a model, les fórmules de Gauss indiquen que les correccions angulars a prop dels pols són menors, ja que la curvatura disminueix quan ens acostem als pols. Gauss contrasta aquestes diferències en el triangle més gran que ha mesurat fins aleshores, amb costats d'aproximadament 69, 85 i 107 quilòmetres. En efecte, al final de l'article 28 llegim

> *Així, e.g., en el més gran dels triangles que hem mesurat en els darrers anys, concretament el que es troba entre els punts de Hohehagen, Brocken, Inselsberg, en el qual l'excés de la suma dels angles era* $14.85348''$*, el càlcul va donar la reducció següent que hem d'aplicar als angles*
>
> Hohehagen .... $-4.95113''$
> Brocken .... $-4.95104''$
> Inselsberg .... $-4.95131''$

La correcció esfèrica de Legendre, que és la mateixa per a tots els vèrtexs, és de $4.95116''$. Gauss comenta aquesta diferència en una carta a Olbers de l'any 1827 en els termes següents

> *Sens dubte a la pràctica això* [la diferència de correccions] *no és gens important, ja que és negligible pels triangles més grans que es poden mesurar a la terra; malgrat això, la dignitat de la ciència requereix que entenguem clarament la naturalesa d'aquesta desigualtat.*

Diversos historiadors de les matemàtiques han interpretat els càlculs d'aquestes últimes seccions de les *Disquisitiones generales* com el resultat d'un experiment imaginat per Gauss per comprovar la naturalesa euclidiana de l'espai, mentre que d'altres consideren mítica aquesta intencionalitat, ja que Gauss no va fer mai cap menció en aquest sentit. La confusió parteix, en part, de les següents paraules extretes de l'obituari de Gauss realitzat per Sartorius

> *i el triangle més gran* [...] *entre Hohehagen, Brocken, Inselsberg, va ésser mesurat per aquest instrument*, [l'heliotropi], *de forma tant acurada que la suma dels angles difereix de dos angles rectes només per aproximadament dues dècimes de segon,*

completades més endavant amb una menció explícita a la geometria euclidiana

> [Gauss] *tenia la convicció que aquesta proposició,* [l'axioma de les paral·leles], *no es podia provar encara que era conegut per l'experiència ? per exemple, dels angles de Hohehagen, Brocken, Inselsberg? que era aproximadament correcte.*

Els contraris a l'experiment de Gauss argumenten que Sartorius, que era geòleg, no coneixia prou acuradament el treball matemàtic de Gauss, i que aquestes deduccions reflecteixen la confusió amb la qual va intentar resumir algunes de les fites científiques del seu amic. Sigui com sigui, sembla clar, però, que les mesures fetes per Gauss confirmaven, incidentalment, el caràcter euclidià de l'espai fins allà on permetien arribar les tècniques del moment.

CONSIDERACIONS FINALS

Disquisitiones generales circa superficies curvas representa la culminació de més de quinze anys de treball sobre la geometria de les superfícies. Com ja hem comentat, la presentació no segueix el desenvolupament temporal de les idees i resultats de Gauss, sinó que basa el seu contingut en la darrera de les seves troballes, la *fórmula de Gauss*, que se situa així al centre de tota la teoria.

Gauss no publica les *Disquisitiones generales* fins que ha obtingut una presentació que considera òptima, cosa que comparteixen els seus altres escrits. De fet, va publicar relativament pocs treballs en comparació als descobriments que va realitzar a causa, en gran part, al fet que al seu geni creador unia un profund sentit crític, per la qual cosa només publicaria les investigacions que haguessin arribat al més alt grau de perfecció. En diverses cartes dirigides als seus col·laboradors, la majoria de les quals daten de l'època en què estava treballant en les *Disquisitiones generales*, Gauss explica la seva posició al respecte.

Així, en una carta al seu amic Olbers, escrita el 1825, expressa la necessitat de presentar els resultats en una forma definitiva:

> *Tot i que l'aspecte matemàtic d'una investigació és normalment el més interessant per a mi, no puc negar d'altra banda que per estar satisfet d'una investigació de llarga durada com aquesta, he de veure finalment l'emergència d'una entitat meravellosament organitzada, desproveïda d'aparença de desordre.*

A aquests comentaris afegirem el següent extracte d'una carta a Schumacher,

> *Les meves investigacions em resulten extremadament costoses pel desig, que sempre he tingut, de donar-les un tal grau de perfecció, «ut nihil amplius desiderari possit».* [que res més comprensiu fos desitjable.]

Aquests posicionaments van ser mal interpretats per alguns dels seus col·legues, per als quals Gauss dedicava un temps excessiu a donar forma a les seves investigacions en detriment del seu procés creatiu més genuí. En paraules de Schumacher,
«cada any de la vostra vida augmenta el nombre d'idees només intel·ligibles per a vos. Es perdrà tot això?» El mes de gener de 1827 escriu una carta a Schumacher en la qual, referint-se al seu treball sobre les *Disquisitiones generales*, comenta

> *Hi trobo moltes dificultats, però la que podem anomenar pròpiament* forma *no és la que produeix un retard considerable (si exceptuem la inflexibilitat del llatí), és més aviat la concatenació coherent de veritats, i aquesta feina no és satisfactòria fins que el lector no reconeix el llarg esforç emprat en la seva execució. Per tant, no puc negar que no tinc una idea clara de com puc realitzar un treball d'aquest caire de manera diferent a com estic acostumat, sense, com ja he expressat anteriorment, subministrar un edifici en lloc dels blocs constructius.* [...] *Per tant, en la mesura que la discussió és relativa a qüestions importants, coses essencialment completes o res de res.*

Anys més tard, en una altra carta a Schumacher datada el 1850, Gauss torna a reflexionar sobre la importància de la forma que cal donar a les seves investigacions i la interpretació equivocada que se n'ha fet,

> *Estàs completament equivocat si creus que per això em refereixo únicament a la darrera revisió del llenguatge i de l'elegància de la presentació. Aquests aspectes costen comparativament només una fracció poc important del temps; el que vull dir és completesa* interior. *Punts que m'han costat anys d'esforços estan en els meus textos i per la seva curta i concentrada presentació, ningú no s'adona de la dificultat que s'ha hagut de superar.*

D'altra banda, Gauss reconeix que aquesta exigència de perfecció en la forma final de les seves investigacions, comporta el risc que altres matemàtics arribin als mateixos resultats i s'avancin en la seva publicació. En aquest sentit, llegim en una carta a Encke de 1832,

> *Aquesta forma de treballar pot tenir com a conseqüència, algunes vegades, com m'ha succeït sovint, que coses que he conegut des de fa anys han estat descobertes i publicades per altres; pot tenir com a conseqüència també que algunes coses desapareguin amb mi, i sé que alguns dels meus amics els agradaria que treballés menys amb aquest esperit. Però això no succeirà mai; no puc trobar plaer en resultats fragmentaris, i un treball en el que no hi trobo plaer m'és un turment.*

Bona part del pensament resumit en aquestes cartes s'expressa en l'epitafi de la tomba de Gauss

Pauca, sed matura,

és a dir, «poc, però madur». Les *Disquisitiones generales* exemplifiquen perfectament aquest lema, mentre que la decisió de no publicar les seves reflexions al voltant de l'axioma de les paral·leles seria una mostra dels perills al·ludits en la carta a Encke.

Per acabar aquesta dissertació vull referir-me a unes paraules de A. Einstein, de principis dels anys ’50, sobre les *Disquisitiones generals* recollides per Dunnington,

> *El millor que ens ha llegat Gauss va ésser una producció exclusiva. Si no hagués creat la seva geometria de superfícies, que va servir a Riemann com a base, és dubtosament concebible que algú altre l’hagués descobert. No puc deixar de confessar que, en certa manera, es pot trobar un plaer similar sumint-nos en les qüestions de la geometria pura.*

REFERÈNCIES

Per a l'elaboració d'aquesta conferència he utilitzat diverses fonts, que no he detallat al llarg del text per mantenir el seu caràcter expositiu.

La biografia de Dunnington resulta imprescindible. Conté nombroses cites i extractes de la correspondència personal de Gauss, tant amb personalitats del món de la ciència com de l'entorn familiar. La biografia de Bühler és més succinta en l'aspecte personal, però més completa en la valoració de les aportacions científiques de Gauss.

Sobre les *Disquisitiones generales* m'han estat de gran ajut els excel·lents comentaris de Dombrowski i de Spivak, així com les versions anglesa i francesa citades més avall. La versió actual de la teoria de superfícies està magníficament presentada al llibre de Do Carmo.

Per a una bibliografia més completa, així com altres dades referents a Gauss, vegeu la pàgina web de la universitat de Saint Andrews,

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gauss.html

- Breitenberger, E. *Gauss' Geodesy and the Axioms of Parallels*. Archive for the History of Exact Sciences 29 (1984), 273-289.
- Bühler, W.K. *Gauss, A biographical Study*. Springer Verlag. Berlin, 1981.
- Do Carmo, M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, 1976.
- Domrowski, P. *150 years after Gauss' «Disquisitiones generales circa superficies curvas»*. Astérisque 62. Soc. Math. France, 1979.
- Dunnington, G.W. *Carl Friederich Gauss, Titan of Science*. Reprinted from the 1955 edition with additional material by J. Gray. Math. Assoc. Of America, 2004.
- Gauss, C.F. *Werke*. Teubner, Springer.
- Gauss, C.F. *Recherches générales sur les surfaces courbes*. Edició i notes de M.E.Roger. Grenoble, 1870.
- Gauss, C.F. *General investigations of curved surfaces of 1825 and 1827*. Edició i notes de J. Cadall Morehead i A. Miller Hiltebeitel. New York, 1968. Està prevista la reedició per part de Dover Inc. al llarg d'aquest any.
- Gauss, C. F. *Disquisicions aritmètiques*. Edició a cura de G. Pascual Xufré. Societat Catalana de Matemàtiques. Barcelona, 1996.
- Miller, A.I. *The Myth of Gauss' Experiment on the Euclidean Nature of Physical Space*. Isis 63 (1972), 345-348. Vegeu també Isis 65 (1974), 83-87.
- Rassias, G. M. (ed.). *The mathematical heritage of C.F. Gauss*. World Scientific, Singapure, 1991.
- Spivak, M. *A Comprehensive introduction to Differential Geometry*, vol. 2. Publish or perish,. Boston, 1970.

Pere Pascual Gainza
Departament de Matemàtica Aplicada 1
Universitat Politècnica de Catalunya