SOBRE LA DEFINICION DE K-TEORIA ALGEBRAICA

PERE PASCUAL GAINZA

Dept. Matemàtica Aplicada I, ETSEIB
Universitat Politècnica de Catalunya
Diagonal 647, 08028 Barcelona

25/07/96

Indice

Introducción.
1. El grupo K_0 de Grothendieck.
2. K-teoría topológica de Atiyah-Hirzebruch.
3. K-teoría de categorías monoidales, I.
4. K-teoría de categorías monoidales, II: versión functorial.
5. K-teoría de categorías exactas.
6. Propiedades fundamentales de la K-teoría algebraica.
7. K-teoría de las categorías de complejos.
8. El teorema de localización de Thomason.
Bibliografia.

Introducción.

La definición de la K-teoría algebraica es una definición calificada por algunos de formidable, en el sentido de que es muy abstracta y poco, o nada, inteligible. Mi propósito en estas notas es describir la K-teoría desde sus inicios con la definición de los grupos de clases K_0 de A.Grothendieck hasta las construcciones más abstractas de D.Quillen y F.Waldhausen, presentando las sucesivas generalizaciones según los problemas que se plantean.

La mejor opción para aquel que esté interesado en introducirse en el mundo de la K-teoría superior es la lectura de los artículos originales de su fundador Quillen, especialmente [Q], [Gr] para la construcción Q y el de J.L.Loday [L] para la construcción $+$. En la actualidad se dispone de algunos textos excelentes que exponen las principales construcciones de la K-teoría, como son los de J.Berrick, [Be], J.Rosenberg,

Financiado, en parte, por DGCYT PB 93-0790

[R], V.Srinivas, [Sr], o las notas de C.Weibel, [We]. No está de más, sin embargo, presentar otra aproximación al tema, que resulte más descriptiva de la evolución de las ideas que han conformado esta teoría. He aprovechado la existencia de los textos mencionados para presentar unas notas que lejos de suponerse autocontenidas deben pensarse como complementarias a la literatura existente. Esto ha hecho que los prerequisitos para leer estas notas varien de un apartado a otro. En particular se supone que el lector conoce la construcción del espacio clasificante de una categoría y sus propiedades principales.

A riesgo de no ser fiel a la evolución histórica de las ideas que han abocado al contexto actual, especialmente en lo que a la teoría de Waldhausen se refiere, he utilizado deliberadamente la K-teoría de esquemas para indicar el camino que deben tomar las sucesivas generalizaciones de los grupos de Grothendieck hasta llegar al teorema de localización de R.Thomason.

Como podrá comprobarse me he centrado en la definición de los grupos $K_*(\mathcal{M})$ de una categoría exacta $\mathcal{M}$, sin entrar en otros aspectos de la K-teoría igualmente importantes como los productos o las λ-operaciones, ni en las aplicaciones a la geometría algebraica. No he incluido las demostraciones de todos los resultados que se enuncian ya que pueden consultarse en las referencias originales. Respecto a la bibliografía he de señalar que únicamente se han reseñado los trabajos que se citan a lo largo del texto, y que por lo tanto no se pretende dar un panorama bibliográfico sobre la K-teoría.

Estas notas tienen su origen en algunas exposiciones sobre K-teoría realizadas entre 1993 y 1995 en la UPC y en el seminario *Faves* de la UB. Agradezco a todos los compañeros de seminario su interés y sus comentarios. J.Majadas provocó en parte este artículo al pedirme que presentara una definición natural de la K-teoría, lo que me obligó a revisar mis conocimientos, por lo que merece un agradecimiento específico. No puedo acabar esta breve introducción sin hacer extensivo mi agradecimiento a los fundadores de esta teoría, en cuyos artículos me he inspirado. El lector apreciará, sin duda, mi deuda con tal o cual artículo, según se vayan reflejando en las referencias de los distintos apartados.

1. El grupo K_0 de Grothendieck.

(1.1) Empezemos recordando una construcción elemental y bien conocida. Consideremos un monoide abeliano M, es decir, un conjunto M provisto de una ley de composición $+$ que satisface las propiedades de grupo abeliano excepto (posiblemente) la existencia de inversos. A M le podemos asociar un grupo abeliano $S(M)$ y un homomorfismo de monoides $s : M \longrightarrow S(M)$ que tenga la propiedad universal siguiente: para cada grupo abeliano A y todo morfismo de monoides $f : M \longrightarrow A$, existe un único morfismo de grupos $f^s : S(M) \longrightarrow A$ que factoriza f

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad s \quad} & S(M) \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f^s} & \\ & A & \end{array}$$

Conocemos ejemplos elementales de esta construcción, como $S(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$ o $S(\mathbb{Z}-0) = \mathbb{Q}$. En general, podemos describir $S(M)$ de la misma forma que pasamos de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, es decir, como clases de pares $(m,n) \in M \times M$ de la relación de equivalencia

$$(m,n) \sim (m',n') \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, p \quad m + n' + p = n + m' + p\,.$$

Hay otras descripciones equivalentes. Así, podemos tomar $F(M)$ el grupo libre generado por M y definir $S(M)$ como el cociente

$$S(M) = F(M)/ < [m+n] - [n] - [m] >\,,$$

donde $< [m+n] - [n] - [m] >$ indica el subgrupo normal de $F(M)$ generado por dichos elementos.

(1.2) Grothendieck ([BS]) propone una construcción similar en su formulación del teorema de Riemann-Roch: sea X un esquema (que supondremos siempre noetheriano y separado) y $\mathcal{V}ect(X)$ la categoría de haces localmente libres sobre X.

(1.2.1) Definición. *$K(X)$ es el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de $\mathcal{V}ect(X)$ módulo el subgrupo generado por los elementos del tipo*

$$[E] - [E'] - [E'']$$

siempre que E, E' y E'' esten relacionados por una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0\,.$$

Si X es un esquema afín, toda sucesión exacta de haces localmente libres escinde, y por lo tanto $K(X)$ corresponde exactamente a la construcción de (1.1), es decir

$$K(X) = S(\mathbb{V}ect(X))$$

donde $\mathbb{V}ect(X)$ es el monoide de las clases de equivalencia de isomorfismo de fibrados vectoriales sobre X.

Por otra parte, la definición anterior se aplica a cualquier categoría aditiva $\mathcal{A}$ con una noción de sucesión exacta, en particular a las categorías abelianas. Sea $Coh(X)$ la categoría de haces coherentes sobre un esquema X, en este caso el K-grupo asociado lo notaremos por

$$G(X) = K(Coh(X))\,.$$

(Algunos autores denotan este grupo por $K'(X)$, nosotros usaremos la notación anterior en honor de Grothendieck).

(1.2.2) Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas. La imagen recíproca de un fibrado vectorial sobre Y permite definir un morfismo de grupos

$$f^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$$

que convierten a $K(-)$ en un functor contravariante. Por otra parte $G(-)$ no es un morfismo covariante en general pues la imagen directa de un haz coherente no es necesariamente coherente. Si suponemos que f es un morfismo propio entonces los functores $R^i f_*$ transforman haces coherentes en haces coherentes y permiten definir un morfismo de grupos abelianos

$$f_* : G(X) \longrightarrow G(Y)$$

mediante

$$f_*[F] = \sum_{i\geq 0}(-1)^i[R^i f_*(F)]\,.$$

Con esta definición G_* se convierte en un functor covariante para morfismos propios. Señalemos que la igualdad $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$ se deriva de la sucesión espectral de Grothendieck de una composición de functores.

(1.3) De las propiedades de $K(X)$ y $G(X)$ demostradas por Grothendieck destacaremos las siguientes:

(1.3.1) Proposición. *Si X es un esquema regular, el morfismo natural*

$$K(X) \longrightarrow G(X)\,,$$

inducido por la inclusión $\mathcal{V}ect(X) \longrightarrow \mathcal{C}oh(X)$, es un isomorfismo.

La regularidad de X se usa para obtener resoluciones globales finitas de los haces coherentes por haces localmente libres

$$0 \longrightarrow E_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0\,,$$

lo que permite expresar la clase de F en $G(X)$ por

$$[F] = \sum (-1)^i [E_i]$$

y deducir que es de la imagen del morfismo natural mencionado.

(1.3.2) Invariancia por homotopía. *Sea* $\mathbf{k}$ *un cuerpo, X un* $\mathbf{k}$*-esquema de tipo finito y $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ el m-espacio afín sobre* $\mathbf{k}$. *La proyección $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}} \times X \longrightarrow X$ induce un isomorfismo*

$$G(X) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}} \times X)\,.$$

Es evidente que podemos restringirnos al caso $m=1$. La inyectividad se deduce de la existencia de una sección que proviene del morfismo

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \times X \\ x &\longmapsto (0,x)\,. \end{aligned}$$

La exhaustividad se prueba por inducción sobre la dimensión de X usando la sucesión exacta que aparece en el resultado siguiente.

(1.3.3) Escisión. *Si $Y \subseteq X$ es un subesquema cerrado de X de abierto complementario $U = X - Y$, se tiene una sucesión exacta*

$$G(Y) \xrightarrow{i_*} G(X) \xrightarrow{j^*} G(U) \longrightarrow 0\,,$$

donde i_* corresponde al functor exacto inducido por la inclusión $i : Y \longrightarrow X$ y j^* corresponde a la restricción de un haz coherente de X a U.

Aquí resulta esencial el hecho de que todo haz coherente sobre U se extiende a un haz coherente sobre X, (véase la discusión de §8).

En el caso de un $\mathbf{k}$-esquema regular X la proposición (1.3.1) asegura que el grupo $K(X)$ satisface las propiedades de escisión e invariancia por homotopía enunciadas en (1.3.2) y (1.3.3). Este es un esquema que se repite en gran parte de la teoría; en efecto algunos resultados resultan más fáciles de demostrar para los grupos G y se establecen para los grupos $K(X)$ de un esquema regular a través del isomorfismo (1.3.1).

2. K-teoría topológica de Atiyah-Hirzebruch.

(2.1) Como hemos mencionado, la definición de $K(X)$ se aplica a toda categoría exacta, y en particular a toda categoría aditiva (considerando como sucesiones exactas únicamente las escindidas). Atiyah y Hirzebruch ([AH]) parten de un espacio topológico compacto (del tipo de homotopía de un CW-complejo) X y definen

$$K^0_{top}(X) := S(\mathbb{V}ect(X))$$

donde ahora $\mathbb{V}ect(X)$ indica el monoide de clases de isomorfismo de fibrados vectoriales complejos sobre X. Utilizando la imagen inversa de un fibrado por una aplicación contínua, $K^0_{top}(-)$ se convierte en un functor contravariante a valores en $\mathcal{A}b$.

Las dos propiedades básicas que queremos resaltar de K^0_{top}, en correspondencia con las propiedades del caso algebraico enunciadas en (1.3), son:

(2.1.1) Invariancia por homotopía. *K^0_{top} es un functor homotópico, es decir, dadas dos aplicaciones homótopas $f, g : X \longrightarrow Y$, se tiene*

$$f^* = g^* : K^0_{top}(Y) \longrightarrow K^0_{top}(X)\,.$$

(2.1.2) Sucesión de Mayer-Vietoris. *Si $X = Y \cup Z$ con Y, Z compactos, la sucesión*

$$K^0_{top}(X) \longrightarrow K^0_{top}(Y) \oplus K^0_{top}(Z) \longrightarrow K^0_{top}(Y \cap Z)\,,$$

donde el primer morfismo es la suma y el segundo la diferencia de las restricciones correspondientes, es exacta.

La demostración de estas dos propiedades se hace, de hecho, en la propia categoría de fibrados vectoriales ya que se tiene el isomorfismo

$$f^* \cong g^* : \mathbb{V}ect(Y) \longrightarrow \mathbb{V}ect(X)$$

y la sucesión exacta

$$\mathbb{V}ect(X) \longrightarrow \mathbb{V}ect(Y) \times \mathbb{V}ect(Z) \rightrightarrows \mathbb{V}ect(Y \cap Z)\,.$$

Esta última expresa el hecho que fibrados sobre Y, Z isomorfos en la intersección $Y \cap Z$ permiten definir un fibrado sobre X, pegándolos según la instrucción dada por el isomorfismo en $Y \cap Z$.

Mientras que el isomorfismo $f^* \cong g^*$ a este nivel implica la propiedad (2.1.1), no es cierto en general que podamos deducir formalmente (2.1.2) de la sucesión exacta de monoides anterior. Aquí resulta esencial que al ser X compacto, todo fibrado vectorial F admite un fibrado complementario $F^\perp$ de forma que $F \oplus F^\perp$ sea trivial, (cf. [K1]), por lo que todo elemento de $K^0_{top}(X)$ se escribirá en la forma

$$\begin{aligned}[E] - [F] &= [E + F^\perp] - [F + F^\perp] \\ &= [E'] - m\end{aligned}$$

si $F + F^\perp \cong \mathbb{R}^m \times X$. Con esta observación es fácil ahora deducir (2.1.2) del proceso de pegado de fibrados vectoriales.

(2.2) El teorema de representabilidad de Brown, en la versión de Adams para functores definidos sobre los CW-complejos finitos a valores en *Ab* (cf. [Sw]), asegura que un functor de este tipo es representable, en el sentido de que existe un espacio topológico B y un isomorfismo natural

$$K^0_{top}(X) \cong [X, B]\,.$$

En el caso de los fibrados vectoriales complejos sobre X que estamos tratando podemos dar una descripción explícita y geométrica de B. En efecto, sabemos que la grassmaniana infinita

$$BU(n) = \varprojlim_N Grass_n(\mathbb{C}^N)$$

clasifica los fibrados vectoriales complejos de rango n sobre X:

$$\mathbb{V}ect_n(X) = [X, BU(n)]\,.$$

La compacidad de X permite pasar al límite en la forma

$$\mathbb{V}ect(X) = [X, BU]\,,$$

donde $BU = \varinjlim BU(n)$. (El lector advertirá cierto abuso de notación ya que BU indica normalmente el espacio clasificante del grupo topológico U. Este abuso está justificado porque las dos acepciones de la notación BU corresponden a espacios homotópicamente equivalentes). Se tiene ahora el siguiente resultado, que de hecho es válido para espacios paracompactos (cf. [K1]):

(2.2.1) Teorema. *Sea X un espacio compacto. Se tiene un isomorfismo natural*

$$K^0_{top}(X) \cong [X, \mathbb{Z} \times BU]\,.$$

La aparición del factor $\mathbb{Z}$ corresponde al rango del fibrado. De hecho, la función localmente constante

$$r : X \longrightarrow \mathbb{N}$$

que da el rango de un fibrado E se extiende a un morfismo exhaustivo

$$r : K^0_{top}(X) \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z})$$

de nucleo $K'(X) := \ker r$, de forma que se tiene una escisión natural

$$K^0_{top}(X) = H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus K'(X)$$

(cf. [K1]). Por otra parte, $H^0(X, \mathbb{Z}) \cong [X, \mathbb{Z}]$; mientras que no es difícil demostrar (cf. loc.cit.) que el morfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ect(X) &\longrightarrow K'(X) \\ E &\longmapsto [E] - n \end{aligned}$$

si $r(E) = n$, es un isomorfismo. En definitiva

$$\begin{aligned} K^0_{top}(X) &= [X, \mathbb{Z}] \oplus \mathbb{V}ect(X) \\ &= [X, \mathbb{Z}] \oplus [X, BU] \\ &= [X, \mathbb{Z} \times BU]\,. \end{aligned}$$

(2.3) Si Y es un subespacio compacto de X, Atiyah y Hirzebruch (cf. [AH]) definen

$$K^{-n}(X, Y) := \widetilde{K}(S^n(X/Y))$$

donde $S^n(X/Y)$ indica la suspensión

$$S^n(X/Y) = S^n \wedge X/Y\,,$$

estando X/Y punteado por la clase de Y, y donde $\widetilde{K}$ de un espacio punteado (X, x_0) corresponde a

$$\widetilde{K}(X) := \ker(K^0_{top}(X) \longrightarrow K^0_{top}(x_0) = \mathbb{Z})\,.$$

En particular, dado un espacio topológico X, si denotamos por X^+ el espacio X punteado por $\emptyset$, se obtienen grupos

$$K^{-n}(X) := \widetilde{K}(S^n(X^+))\,.$$

Atiyah y Hirzebruch demuestran que de esta forma se obtiene una teoría cohomológica generalizada, es decir, una sucesión de functores que verifica los axiomas de Eilenberg-Steenrod salvo el de la dimensión.

(2.4) El teorema de periodicidad de Bott ([K1]) asegura que esta teoría es periódica de período 2, es decir, se tienen isomorfismos

$$K^{-n}(X,Y) \cong K^{-n+2}(X,Y)\,.$$

De hecho podemos escribir

$$\begin{aligned} K^{-n+2}(X) &= [S^{n+2}(X^+), \mathbb{Z}\times BU]_* \\ &= [X^+, \Omega^{n+2}(\mathbb{Z}\times BU)]_* \\ &= [X^+, \Omega^{n}(\mathbb{Z}\times BU)]_* \\ &= K^{-n}(X) \end{aligned}$$

ya que el teorema de periodicidad de Bott puede expresarse mediante una equivalencia homotópica $\mathbb{Z}\times BU \sim \Omega U$, que da lugar a una equivalencia

$$\mathbb{Z}\times BU \sim \Omega^2 BU\,.$$

Esta equivalencia tiene la ventaja de que muestra que $\mathbb{Z}\times BU$ es un espacio de lazos infinitos, y que por tanto es una encarnación de la teoría cohomológica generalizada correspondiente, cf. [Sw].

(2.5) Para acabar este apartado señalaremos que los coeficientes de la K-teoría topológica vienen dados por las fórmulas siguientes, [loc.cit.]:

$$K^{-i}(pt) = \pi_i(BU) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i \text{ par} \\ 0 & i \text{ impar} \end{cases}$$

3. K-teoría de categorías monoidales, I.

(3.1) El problema de la definición de la K-teoría algebraica de un esquema X consiste en definir los grupos $K_i(X)$, $i \geq 1$, asociados a X de forma que verifiquen las propiedades análogas a las enunciadas en (1.3) para el caso $i=0$ y que formen una teoría homológica generalizada en la categoría de esquemas, en un sentido que habrá que precisar.

En el caso de esquemas afines, $X = Spec\,A$ se disponía clásicamente de candidatos para $i=1,2$. En efecto, si $GL(A)$ denota el grupo lineal general de matrices sobre A y $E(A)$ es el subgrupo de matrices elementales, es decir formado por aquellas matrices que difieren de la identidad en a lo sumo una posición, entonces se tiene

$$\begin{aligned} &K_1(A) = GL(A)/E(A) = H_1(GL(A),\mathbb{Z})\,, \\ &K_2(A) = H_2(E(A),\mathbb{Z})\,, \end{aligned}$$

cf. [Be], [Mi].

Estos grupos pueden compararse con la K-teoría topológica de Atiyah-Hirzebruch a través del teorema de Serre-Swan. En efecto, según este resultado la categoría de fibrados vectoriales sobre X es equivalente a la categoría de $C(X)$-módulos proyectivos finito generados, donde $C(X)$ indica el anillo de funciones contínuas a valores complejos definidas en X, [K1]. Esta equivalencia induce el isomorfismo

$$K^0_{top}(X) \cong K(C(X)) .$$

Este isomorfismo tiene, además, su réplica a nivel $i = 1$. En efecto, la función determinante definida sobre $GL(A)$ permite descomponer $K_1(A)$ en la forma

$$K_1(A) = A^* \oplus SK_1(A) ,$$

y análogamente se tiene una descomposición

$$K^{-1}_{top}(X) = H^1(X, \mathbb{Z}) \oplus SK^{-1}_{top}(X) .$$

Con estas notaciones, se tiene un isomorfismo, (cf. [Be]):

$$SK_1(C(X)) \cong SK^{-1}_{top}(X) .$$

En una aproximación naïve podría pensarse en substituir la $\mathbb{C}$ del caso topológico por el anillo A, es decir, en utilizar los $GL_n(A)$-fibrados principales sobre espacios compactos y definir

$$k^{alg}_i(X, A) = [X, K_0(A) \times BGL(A)] .$$

Por esta vía los grupos de K-teoría de A deberían ser los grupos de coeficientes de la teoría, es decir, $[S^i, K_0(A) \times BGL(A)]$. Observemos que esta aproximación no es correcta ya que resultaría $k^{alg}_1(A) = \pi_1(BGL(A)) = GL(A)$, que además de no coincidir con el grupo definido anteriormente, no es conmutativo (véase sin embargo la construcción de Karoubi de la K-teoría algebraica de un anillo a partir de los fibrados *virtuales* de A-módulos proyectivos, [K2]).

(3.2) La interpretación de Quillen de las construcciones que hemos presentado en §2 es que el morfismo

$$BU \longrightarrow \mathbb{Z} \times BU$$

permite hacer la completación en grupo

$$\mathbb{V}ect(X) \longrightarrow K(X)$$

para todos los espacios X simultáneamente, y como $\mathbb{Z} \times BU$ es un espacio de lazos infinito, define una teoría cohomológica. Desde este punto de vista, para definir la K-teoría algebraica se tratará de precisar qué entendemos por completación en grupo de un espacio de forma que responda a la construcción de los grupos K.

Para ello partiremos de una categoría $\mathcal{C}$ monoidal, es decir, dotada de una ley de composición

$$+ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

y un objeto nulo 0, verificando los axiomas de asociatividad adecuados (cf. [Mc]). Por analogía a la definición de fibrado vectorial sobre un espacio X podemos definir el conjunto $\mathcal{C}(X)$ de fibrados $\mathcal{C}$-valorados sobre X, que en términos del espacio clasificante de $\mathcal{C}$ se describen por

$$\mathcal{C}(X) := [X, B\mathcal{C}]\,.$$

(3.2.1) Definición. *La K-teoría de $\mathcal{C}$ es un functor (contravariante) representable $K_{\mathcal{C}}$ de la categoría de espacios compactos en la categoría de grupos abelianos, dotado de una transformación natural*

$$\mathcal{C}(X) \longrightarrow K_{\mathcal{C}}(X)$$

universal entre las transformaciones de $\mathcal{C}(\ )$ en functores representables a valores en $\mathcal{A}b$, es decir, siempre que tengamos una transformación natural $a : \mathcal{C}(X) \longrightarrow [X, A]$, con $[X, A] \in \mathcal{A}b$, ha de factorizarse en la forma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(X) \arrow[rr] \arrow[dr, "a"'] & & K_{\mathcal{C}}(X) \arrow[dl] \\ & {[X, A]} & \end{tikzcd}$$

Al espacio que representa a $K_{\mathcal{C}}(X)$ lo denotaremos por $K\mathcal{C}$. El diagrama anterior puede escribirse en términos de espacios clasificantes en forma del diagrama homotópicamente conmutativo

$$\begin{tikzcd} B\mathcal{C} \arrow[rr] \arrow[dr] & & K\mathcal{C} \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Los grupos $K_i(\mathcal{C})$, $i \geq 0$, se definen como los valores de $K_{\mathcal{C}}$ en las esferas S^i, es decir

$$K_i(\mathcal{C}) = [S^i, K\mathcal{C}] = \pi_i(K\mathcal{C}) \quad i \geq 0\,.$$

Antes de estudiar la existencia de $K\mathcal{C}$ consideremos algunos ejemplos.

(3.2.2) Si $\mathcal{C} = \mathbb{V}ect(\mathbb{C})$ es la categoría de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de dimensión finita, los $\mathcal{C}$-fibrados sobre un espacio X no son otra cosa que los fibrados vectoriales complejos sobre X. Por otra parte, no es difícil comprobar que

$$B\mathbb{V}ect(\mathbb{C}) \cong BU$$

y por tanto $K\mathbb{V}ect(\mathbb{C}) = \mathbb{Z} \times BU$.

(3.2.3) Si $\mathcal{C} = Fin$ es la categoría de conjuntos finitos, los $\mathcal{C}$-fibrados sobre X corresponden a espacios recubridores de un número finito de hojas $Y \longrightarrow X$. Dado uno de estos recubrimientos se puede utilizar el lema de Urysohn para escoger una aplicación

$$\iota : Y \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$$

tal que

$$p \times \iota : Y \longrightarrow X \times \mathbb{R}^\infty$$

sea un encajamiento, de forma que tomando para cada $x \in X$ el conjunto finito $\iota(p^{-1}(x))$, se defina una aplicación

$$X \longrightarrow C(\mathbb{R}^\infty)\,,$$

donde $C(\mathbb{R}^\infty)$ es el espacio de configuraciones de conjuntos finitos de $\mathbb{R}^\infty$. Se puede probar ([S2]) que

$$C(\mathbb{R}^\infty) \cong BFin$$

y por lo tanto se tendrá que

$$Cov(X) = [X, C(\mathbb{R}^\infty)]\,.$$

Más adelante indicaremos el K-espacio que le corresponde.

(3.2.4) El ejemplo que nos interesa, y que desarrollaremos más detalladamente en apartados posteriores, es el de haces localmente libres sobre un esquema afín $X = Spec\ A$, es decir, tomando $\mathcal{C}$ la categoría de A-módulos projectivos finito generados.

(3.3) La defininción de $K\mathcal{C}$ es vacía si no se prueba un teorema de existencia. Para ello procederemos en dos etapas. En la primera representamos el functor $\mathcal{C}(-)$ estabilizado, i.e. el functor $\mathcal{C}^{stab}(X)$ que a X asocia el conjunto de diferencias formales

$$[E] - n\,, \qquad E \in \mathcal{C}(X)\,,$$

donde n es un objeto de $\mathcal{C}$ pensado como un $\mathcal{C}$-fibrado trivial. La representabilidad de $\mathcal{C}^{stab}(-)$ se deduce del teorema de Brown ya que este functor verifica las hipótesis pertinentes (comprobación que se deduce de la presentación de $\mathcal{C}(X)$ por $\mathcal{C}(X) = [X, B\mathcal{C}]$).

Notaremos $B^{stab}\mathcal{C}$ el espacio que representa a $\mathcal{C}^{stab}(X)$, i.e.

$$\mathcal{C}^{stab}(X) = [X, B^{stab}\mathcal{C}]\,.$$

En el ejemplo (3.2.2) de los fibrados vectoriales complejos sobre un espacio compacto X la estabilización completa el proceso, es decir, se tiene

$$B^{stab}\mathcal{C} = \mathbb{Z} \times BU\,.$$

Esto se debe a que el conjunto de fibrados estables sobre X forma un grupo abeliano. Sin embargo, los otros dos casos son diferentes. Por ejemplo, en el caso de los recubrimientos finitos de X no disponemos de recubrimientos complementarios a uno dado y $Cov^{stab}(X)$ no forma un grupo. De hecho, en este caso se puede identificar $B^{stab}\mathcal{C}$ como $\mathbb{Z} \times B\Sigma_\infty$ donde Σ_∞ es el grupo simétrico infinito (cf. [S2]), y por lo tanto

$$\pi_1(B^{stab}\mathcal{C}) = \Sigma_\infty$$

que no es un grupo abeliano, lo que nos indica que el proceso de representación de $K\mathcal{C}$ no ha concluido.

Análogamente, en el caso algebraico se obtiene el espacio $K_0(A) \times BGL(A)$ que, como ya hemos indicado, no agota el proceso.

(3.4) Para completar el proceso interesa ahora construir el espacio $K\mathcal{C}$ de forma que se pueda completar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & B\mathcal{C} \arrow[r] & B^{stab}\mathcal{C} \arrow[r] & K\mathcal{C} \\ & & Y & \end{tikzcd}$$

de forma universal, siempre que $[-, Y]$ tome valores en $\mathcal{A}b$.

Es decir, $K\mathcal{C}$ ha de ser un espacio tal que $[X, K\mathcal{C}]$ sea un grupo abeliano y

$$[K\mathcal{C}, Y] \longrightarrow [B^{stab}\mathcal{C}, Y]$$

sea un isomorfismo para todo espacio simple Y. La obstrucción a extender una aplicación contínua de $B^{stab}\mathcal{C}$ en Y a una aplicación de $K\mathcal{C}$ en Y está controlada por una clase de la homologia relativa $H_*(K\mathcal{C}, B^{stab}(\mathcal{C}))$, (cf. [Wh]), por lo que será suficiente construir un espacio $K\mathcal{C}$ y una aplicación $B^{stab}\mathcal{C} \longrightarrow K\mathcal{C}$ que sea una equivalencia homológica.

(3.5) Así, el problema general que se plantea es construir una equivalencia homológica del espacio $B^{stab}\mathcal{C}$ con un H-espacio $K\mathcal{C}$.

Por un isomorfismo en homología entendemos que induce isomorfismos para todo sistema de coeficientes de grupos abelianos A sobre $K\mathcal{C}$. Aunque esta generalidad no es necesaria en el proceso iniciado, este será el tipo de equivalencias homológicas que apareceran. En particular, si $\widetilde{K\mathcal{C}}$ es el recubrimiento universal de $K\mathcal{C}$ y $\widetilde{B^{stab}\mathcal{C}}$ es el pull-back correspondiente, resultarà que el morfismo

$$\widetilde{B^{stab}\mathcal{C}} \longrightarrow \widetilde{K\mathcal{C}}$$

será también una equivalencia homológica, y por lo tanto el grupo fundamental de $\widetilde{B^{stab}\mathcal{C}}$ deberá ser perfecto, lo que muestra que el conmutador de $\pi_1(B^{stab}\mathcal{C})$ es perfecto.

Quillen presenta dos formas de realizar este proceso. La primera corresponde a la construcción $+$. Quillen observa que añadiendo 2 y 3-celulas a un espacio X, se puede abelianizar su grupo fundamental sin variar su homología, ([L]):

(3.5.1) Teorema. *Sea X un espacio topológico del tipo de homotopía de un CW-complejo, y $N \subset \pi_1(X)$ un subgrupo perfecto. Existe una equivalencia homológica*

$$f : X \longrightarrow X^+$$

de forma que

$$f_* : \pi_1(X)/N \xrightarrow{\sim} \pi_1(X^+)\,.$$

Además es universal, en el sentido de que si $g : X \longrightarrow Y$ es otra aplicación acíclica con $N \subset \ker \pi_1(g)$, existe un diagrama homotópicamente conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & X^+ \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Si aplicamos este proceso al espacio $K_0(A) \times BGL(A)$ respecto al subgrupo perfecto maximal de $\pi_1(BGL(A)) = GL(A)$ que es el subgrupo de matrices elementales $E(A)$, encontraremos

$$\pi_1(K_0(A) \times BGL(A)^+) = GL(A)/E(A)$$

que es el grupo que clásicamente se ha tomado como $K_1(A)$. Además no es difícil probar que se tiene

$$\begin{aligned} \pi_2(K_0(A) \times BGL(A)^+) &= H_2(E(A), \mathbb{Z}) \\ &= K_2(A) \end{aligned}$$

Estos isomorfismos, y el cálculo de los grupos de homotopia de $BGL(\mathbb{F}_q)^+$, indujeron a Quillen a proponer la siguinete definición

(3.5.2) Definición. $K_i(A) := \pi_i(BGL(A)^+) \quad i \geq 1.$

En general, podemos tomar como definición de K-teoría de $\mathcal{C}$

$$K\mathcal{C} := (B^{stab}\mathcal{C})^+\,.$$

En el caso de la categoría de recubrimientos finitos de un espacio X, un teorema de Barrat, Priddy y Quillen, ([S2]), establece una equivalencia homotópica

$$\mathbb{Z} \times B\Sigma_\infty^+ \sim \varinjlim \Omega^n S^n\,,$$

por lo que la teoría resultante no es otra cosa que la cohomotopía estable, es decir, la teoría cohomológica universal.

La otra opción para completar $B^{stab}\mathcal{C}$ consiste en considerar $B\mathcal{C}$ como un monoide topológico, que como tal tendrá un espacio clasificante $B(B\mathcal{C})$. En este caso el resultado a demostrar es el que se conoce como teorema de completación en grupo, del que existen varias versiones (cf. por ejemplo [M1], [M2] y [MS]):

(3.5.3) Teorema de la completación en grupo. *Existe un morfismo natural*

$$B^{stab}\mathcal{C} \longrightarrow \Omega B(B\mathcal{C})$$

que es un isomorfismo en homología.

(3.6) Esta presentación de la K-teoría algebraica no resulta aún satisfactoria en varios aspectos. En efecto, por una parte la construcción se realiza sobre el espacio topológico $B\mathcal{C}$ mientras que sería más conveniente realizarla a partir de la propia categoría $\mathcal{C}$, de forma que pudieramos reflejar la estructura de $\mathcal{C}$. Por otra parte se ha de tener en cuenta que esta construcción puede resultar adecuada para categorías monoidales, pero que en el caso de una estructura de categoría exacta en la que intervienen sucesiones exactas no necesariamente escindidas, no reflejaría esta situación. Los apartados siguientes presentan la solución de Quillen a ambos problemas.

4. K-teoría de categorías monoidales, II: versión functorial.

(4.1) Notemos $\mathcal{S}$ una categoría monoidal conmutativa. Queremos realizar la completación en grupo de (3.4) directamente sobre $\mathcal{S}$. Para ello Quillen propone mimetizar en este contexto la construcción (1.1) del grupo abeliano $S(M)$ asociado a un monoide abeliano M. Recordemos que $S(M)$ puede describirse a partir de las clases de equivalencia de pares de $M \times M$ definidas por la acción diagonal de M

$$S(M) = M \times M/M\,.$$

Con estas notaciones, M actúa sobre $S(M)$ mediante las traslaciones

$$m + (p,q) = (p, m+q)\,,$$

que definen un isomorfismo de inverso

$$(p,q) \longmapsto (m+p,q)\,.$$

(4.1.1) Definición. *Definimos la categoría $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ como la categoría cuyos objetos son pares de objetos de $\mathcal{S}$, (B,C), y cuyos morfismos de (B,C) en (B',C') corresponden a clases de isomorfismo de parejas de $(ob\ \mathcal{S}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(B,B') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(C+A,C'))$. Un isomorfismo de tales parejas corresponde a un isomorfismo $A \cong A'$ de $\mathcal{S}$ que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C+A & \xrightarrow{\sim} & C+A' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & C' & \end{array}$$

Por analogía al caso del monoide M, podemos pensar los pares (B,C) como la diferencia $[C]-[B]$. $\mathcal{S}$ actúa en $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ según

$$A + (B,C) = (B, A+C)\,,$$

que admite el inverso

$$(B, C) \longmapsto (A + B, C)\,.$$

En particular, la órbita de $(0,0)$ define un functor natural

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} \\ A &\longmapsto (0, A)\,. \end{aligned}$$

La universalidad de la construcción la expresa el resultado siguiente (cf. [Gr])

(4.1.2) Teorema. *Sea $\mathcal{S}$ una categoría monoidal en la que todo morfismo sea un isomorfismo. El functor*

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$$

es una equivalencia homotópica si, y sólo si, $\mathcal{S}$ actúa inversiblemente sobre $\mathcal{S}$, es decir, si todo functor de traslación

$$\begin{aligned} r_A : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ B &\longmapsto A + B \end{aligned}$$

es una equivalencia homotópica.

La hipótesis realizada sobre los morfismos de $\mathcal{S}$ se verificará en muchos casos, en particular en las categorías que aparecen en la K-teoría de anillos.

(4.2) La construcción $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ realiza la completación en grupo deseada pues se tiene el siguiente resultado, que es el análogo al teorema de completación en grupo (3.5.3) en este contexto, (cf. [Gr]):

(4.2.1) Teorema. *El functor*

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$$

induce un isomorfismo

$$(\pi_0\mathcal{S})^{-1} H_*(B\mathcal{S}) \longrightarrow H_*(B\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})\,.$$

(4.3) En el caso de la K-teoría algebraica de un anillo A, sea $\mathcal{S} =$ Iso $\mathcal{P}(A)$ la categoría formada por los isomorfismos de la categoría $\mathcal{P}(A)$ de A-módulos proyectivos finito generados. $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ realiza la construcción + functorialmente ya que se tiene (cf. [Gr])

(4.3.1) Teorema. $B\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} \cong K_0(A) \times BGL(A)^+$.

Idea de la demostración: Una simple comprobación muestra que $\pi_0 B\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} = K_0(A)$. Si P es un A-módulo proyectivo, consideremos Aut (P) como categoría; definimos un functor

$$\text{Aut}\,(P) \longrightarrow \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$$

enviando el isomorfismo $u : P \cong P$ al morfismo de $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$, dado por $(1, u) : (P, P) \cong (P, P)$. La transformación natural

$$(P, Q) \longrightarrow (P \oplus A, Q \oplus A)$$

en $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ muestra que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Aut}\,(P) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Aut}\,(P \oplus A) \arrow[dl] \\ & \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} & \end{tikzcd}$$

es homotópicamente conmutativo y, por consiguiente podemos definir una aplicación

$$\eta : BGL(A) \longrightarrow B\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}\,,$$

cuya imagen está, de hecho, en la componente conexa de $B\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ correspondiente a la identidad.

Como el grupo fundamental de $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ es abeliano, de la propiedad universal de la construcción $+$, (3.5.1), se deduce un diagrama homotópicamente conmutativo

$$\begin{tikzcd} BGL(A) \arrow[rr] \arrow[dr, "\eta"'] & & BGL(A)^{+} \arrow[dl, "\eta'"] \\ & B\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} & \end{tikzcd}$$

Mediante la construcción telescopio se puede realizar η y deducir de (4.2.1) que induce un isomorfismo (loc. cit.)

$$H_*(BGL(A)) \xrightarrow{\sim} H_*(B\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})\,,$$

por lo que, teniendo en cuenta a su vez que la construcción $+$ es un ismorfismo en homologia, del diagrama anterior concluimos que η'_* es también un isomorfismo.

Finalmente, observemos que $B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})$ y $BGLA^{+}$ son H-espacios y por lo tanto la versión para H-espacios del teorema de Whitehead permite concluir que son homotópicamente equivalentes.

(4.4) El estudio de las teorías homológicas asociadas a categorías monoidales dió lugar a una amplia bibliografía en los años 70 y 80, cf. por ejemplo [M2], [S3]. Especialmente reseñable es el teorema de unicidad de May y Thomason, [MT], que asegura que bajo buenas hipótesis, las distintas *máquinas* definidas sobre las categorías monoidales inducen espectros equivalentes.

5. K-teoría de categorías exactas.

(5.1) El grupo de Grothendieck de fibrados sobre un esquema arbitrario X se forma a partir de las sucesiones exactas. Como ya hemos señalado, si $X = Spec\ A$ todas las sucesiones escinden, por lo que es suficiente considerar la estructura de categoría monoidal de $\mathbb{V}ect(X)$ para construir la K-teoría como en el apartado anterior. Sin embargo si X no es afín, la situación es distinta.

Quillen parte de una categoría exacta $\mathcal{M}$, es decir, una categoría aditiva con unas sucesiones exactas distinguidas

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

(de hecho se puede caracterizar como una subcategoría de una categoría abeliana cf. [Q]). La idea de Quillen consiste en asociar a $\mathcal{M}$ una categoría monoidal de forma que incorpore en su estructura la información que dan las sucesiones exactas distinguidas.

En el caso afín, las sucesiones escinden y dan lugar a isomorfismos

$$E \cong E' \oplus E''\,.$$

En general, se construye una nueva categoría donde estas sucesiones "escindan". Para ello necesitamos secciones de

$$E \longrightarrow E''\,.$$

Diremos que $E' \longrightarrow E$ es un monomorfismo admisible, lo que denotaremos simplemente por $E' \longrightarrow E$, si forma parte de una sucesión exacta de $\mathcal{M}$ de la forma

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0\,.$$

En tal caso, diremos que $E \longrightarrow E''$ es un epimorfismo admisible, $E \longrightarrow E''$.

(5.2) Definición. *$Q\mathcal{M}$ es la categoría formada por los mismos objetos que $\mathcal{M}$ y que tiene por morfismos de M' en M'' las clases de isomorfismo de diagramas*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \\ M' & \end{tikzcd}$$

No resulta difícil probar:

(5.2.1) Lema. *Dar un morfismo de M' en M'' es equivalente a dar un par admisible $M_1 \subset M_2 \subset M''$ y un isomorfismo*

$$M' \cong M_2/M_1\,.$$

Es decir, $Q\mathcal{M}$ es la categoría de subcocientes de $\mathcal{M}$.

Observemos que dada una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} E'' \longrightarrow 0$$

podemos considerar los morfismos de $Q\mathcal{M}$

$$i_! : E' \longrightarrow E$$
$$j^! : E'' \longrightarrow E$$

asociados a las parejas

$$0 \subset E' \subset E \qquad \text{y} \qquad E' \subset E \subset E\,.$$

En un sentido vago, que precisaremos en el teorema (6.1), podemos pensar $j^!$ como una sección que escinde la sucesión exacta considerada. Que esta construcción va en la buena dirección lo prueba el siguiente resultado de Quillen([Gr])

(5.3) Teorema. *Sea $\mathcal{P}(A)$ la categoría de A-módulos proyectivos finito generados y $\mathcal{S}$ la categoría monoidal formada por los isomorfismos de $\mathcal{P}(A)$. Existe una equivalencia homotópica*

$$\Omega BQ\mathcal{P}(A) \cong B\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}\,.$$

Este resultado motiva pues la siguiente definición

(5.4) Definición. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría exacta. Se define el espacio de K-teoría de $\mathcal{M}$ mediante*

$$K\mathcal{M} := \Omega BQ\mathcal{M}\,,$$

y los grupos de K-teoría de $\mathcal{M}$ como los grupos de homotopía

$$\begin{aligned} K_i(\mathcal{M}) &= \pi_i(\Omega BQ\mathcal{M}) \\ &= \pi_{i+1}(BQ\mathcal{M})\,. \end{aligned}$$

En el caso algebraico, si X es un esquema y $\mathcal{P}(X)$, $Coh(X)$ denotan las categorías de haces localmente libres y de haces coherentes respectivamente, se definen los grupos

$$\begin{aligned} K_*(X) &:= K_*(\mathcal{P}(X))\,, \\ G_*(X) &:= K_*(Coh(X))\,. \end{aligned}$$

Los grupos $K_*(X)$ son claramente contravariantes, mientras que los grupos $G_*(X)$ lo son para morfismos planos, en particular para las inmersiones abiertas. Estudiaremos su covariancia en §7.

No vamos a probar el teorema (5.3), sin embargo señalemos que es posible comprobar directamente que $\pi_1(BQ\mathcal{M})$ es isomorfo al grupo de Grothendieck $K_0(\mathcal{M})$. Indiquemos al menos como se define un morfismo de grupos

$$\chi : K_0(\mathcal{M}) \longrightarrow \pi_1(BQ\mathcal{M})\,.$$

dejando las demás comprobaciones para [Q].

Dado un objeto E de $\mathcal{M}$ podemos considerar el lazo r_E de $Q\mathcal{M}$

$$0 \xrightarrow{i_E} E \xrightarrow{j^E} 0$$

que corresponde a las parejas admisibles

$$0 \subset 0 \subset E \qquad \text{y} \qquad E \subset E \subset E\,.$$

lo que define la aplicación χ. Para comprobar que tenemos un morfismo hemos de ver que dada una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} E'' \longrightarrow 0$$

se tiene una homotopia $r_E \sim r_{E'} \circ r_{E''}$. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
E' & \xrightarrow{\quad i_! \quad} & & E & & \xleftarrow{\quad j^! \quad} & E'' \\
 & & i_E & & j^E & & \\
 & i_{E'} & & & & j'' & \\
j' & & & & & & i_{E''} \\
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

en el que los triángulos sombreados definen 2-símplices de $BQ\mathcal{M}$. Es fácil comprobar que

$$i_! j^{E'} = j^! i_{E''} \, ,$$

y por consiguiente podemos añadir el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "i_!"] & E & E \arrow[l, "j^!"'] \\
 & 0 \arrow[ul, "j^{E'}"] \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "i_{E''}"'] &
\end{tikzcd}$$

En definitiva, se obtiene un diagrama del tipo

que es homeomorfo a una esfera con tres círculos, todos ellos pasando por el cero, y que dan los lazos r_E, $r_{E'}$ y $r_{E''}$. Considerando oportunamente las orientaciones se comprueba que

$$r_E \sim r_{E'} \circ r_{E''} \, .$$

6. Propiedades fundamentales de la K-teoría algebraica.

(6.1) Sean $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dos subcategorias de $\mathcal{M}$. Notemos $\mathcal{E}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, o simplemente $\mathcal{E}$ en el caso en que $\mathcal{A}=\mathcal{B}=\mathcal{M}$, la categoría formada por sucesiones exactas de $\mathcal{M}$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

tales que $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$. $\mathcal{E}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es, de forma natural, una categoría exacta y se tienen functores exactos

$$\begin{aligned} s :&\mathcal{E}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{A} \\ q :&\mathcal{E}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B} \end{aligned}$$

(6.1.1) Teorema. *El functor*

$$(s,q) : Q\mathcal{E}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \longrightarrow Q\mathcal{A} \times Q\mathcal{B}$$

induce una equivalencia homotópica. En particular,

$$BQ\mathcal{E} = BQ\mathcal{M} \times BQ\mathcal{M}\,.$$

Es decir, a nivel de la construcción Q podemos pensar que todas las sucesiones de $\mathcal{M}$ escinden.

La demostración de este teorema es una aplicación del teorema A de Quillen. Consiste en comprobar que la fibra $(s,q)/(M,N)$ es contráctil, para lo que, despues de algunas reducciones, se puede suponer que M y N son el objeto cero de $\mathcal{M}$. Pero en ese caso la sucesión exacta formada por ceros es un objeto inicial de $(s,q)/(0,0)$, por lo que dicha fibra es contráctil.

(6.1.2) Corolario. *Si*

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de functores exactos entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$, entonces

$$F_* = F'_* + F''_* : K_*(\mathcal{M}) \longrightarrow K_*(\mathcal{M}')\,.$$

En efecto, consideremos

$$M' \xrightarrow{(F',F,F'')} \mathcal{E} \xrightarrow{(s,t,q)} \mathcal{M}\times\mathcal{M}\times\mathcal{M}$$

será suficiente provar que

$$s_* + q_* = t_*\,.$$

Ahora tomamos

$$\begin{aligned} f :& \mathcal{M}\times\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{E} \\ &(M',M'') \longmapsto [0 \to M' \to M'\oplus M'' \to M'' \to 0] \end{aligned}$$

entonces

$$tf \cong \oplus(s,q)f$$

y por tanto

$$t_* f_* = (s_* + q_*) f_* \,.$$

Pero f_* es una sección de (s_*, q_*), que es un isomorfismo, por lo que también es un isomorfismo y se acaba el corolario.

(6.2) Sea $\mathcal{M}$ una categoría exacta i $\mathcal{P}$ una subcategoría plena estable por extensiones, es decir, siempre que se tenga una sucesión exacta de $\mathcal{M}$

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

con M' y M'' de $\mathcal{P}$, entonces M también es un objeto de $\mathcal{P}$.

(6.2.1) Teorema de resolución. *Supongamos que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{P}$ verifican:*

1. *Dada una sucesión exacta de $\mathcal{M}$ (*), si M es de $\mathcal{P}$, también lo es M'.*
2. *Todo objeto M'' de $\mathcal{M}$ admite una resolución (*) en la que M es de $\mathcal{P}$.*

Entonces el functor de inclusión

$$Q\mathcal{P} \longrightarrow Q\mathcal{M}$$

induce una equivalencia homotópica

$$BQ\mathcal{P} \xrightarrow{\sim} BQ\mathcal{M}\,,$$

y por lo tanto

$$K_i(\mathcal{P}) \cong K_i(\mathcal{M}), \quad i \geq 0.$$

Sea $\mathcal{P}_\infty$ la subcategoria plena de $\mathcal{M}$ formada por los objetos de $\mathcal{M}$ que admiten una resolución finita por objetos de $\mathcal{P}$. La categoría $\mathcal{P}_\infty$ tiene una estructura natural de categoría exacta. Como consecuencia del teorema anterior se tiene

(6.2.2) Corolario. *Con las hipótesis de (6.2.1), la inclusión $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}_\infty$ induce una equivalencia homotópica $BQ\mathcal{P} \sim BQ\mathcal{P}_\infty$, y por lo tanto, isomorfismos*

$$K_i(\mathcal{P}) \cong K_i(\mathcal{P}_\infty)\,, \quad i \geq 0.$$

En efecto, si denotamos por $\mathcal{P}_n$ la subcategoría plena de objetos de $\mathcal{P}_\infty$ que admiten una resolución de longitud $\leq n$, no es difícil probar que para una sucesión exacta (*) se verifican las implicacions siguientes

1. $M \in \mathcal{P}_n, M'' \in \mathcal{P}_{n+1} \Longrightarrow M' \in \mathcal{P}_n$
2. $M', M'' \in \mathcal{P}_{n+1} \Longrightarrow M \in \mathcal{P}_{n+1}$
3. $M, M'' \in \mathcal{P}_{n+1} \Longrightarrow M' \in \mathcal{P}_{n+1}$

por lo que en cada una de las inclusiones $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ se dan las hipótesis del teorema (6.2.1), de donde se deducen isomorfismos

$$K_i(\mathcal{P}_n) \cong K_i(\mathcal{P}_{n+1}) \quad \forall n\,,$$

lo que por paso al límite permite concluir el corolario.

En particular, si $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{M}$ se deducen isomorfismos $K_*(\mathcal{P}) \cong K_*(\mathcal{M})$. Esta es la situación que se da entre las categorías de haces localmente libres y de haces coherentes sobre un esquema regular, lo que permite generalizar (1.3.1) a los grupos de K-teoría superiores

(6.2.3) Corolario. *Sea X un esquema regular. Se tienen isomorfismos*

$$K_i(X) \cong G_i(X)\,, \quad i \geq 0.$$

El teorema de resolución, en su versión dual, ha sido durante algún tiempo el resultado que ha permitido estudiar la covariancia de los grupos $G_*(X)$ para algunos morfismos propios. Aunque presentaremos esta covariancia en general en §7, creo interesante repoducir ahora el razonamiento original de Quillen

(6.2.4) Corolario. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo proyectivo de esquemas. Existe un morfismo*

$$f_* : G_*(X) \longrightarrow G_*(Y)$$

que depende functorialmente de f.

En efecto, f_* es un functor exacto sobre la categoría de haces f-acíclicos, por lo que por el teorema dual de resolución basta ver que todo haz coherente de X admite una inyección en un haz acíclico. Sea $\mathcal{L}$ un haz amplio relativo a f. $\mathcal{L}(n) = \mathcal{L}^{\otimes n}$ está generado por secciones globales si n es suficientemente grande, por lo que admite un epimorfismo

$$\mathcal{O}_X^r \longrightarrow \mathcal{L}(n)\,.$$

Dualizando y tensorializando por $\mathcal{L}(n)$ resultará una sucesión exacta de haces localmente libres

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L}(n)^r \longrightarrow E_n \longrightarrow 0\,.$$

Sea F un haz coherente sobre X. Tensorializando la sucesión exacta anterior por F resultará una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow F^r(n) \longrightarrow F \otimes E_n \longrightarrow 0\,.$$

Ahora se acaba aplicando el teorema de Serre, ya que $F(n)$ es acíclico para $n >> 0$.

(6.3) Como en el caso de los grupos definidos en §1, los grupos $G_*(X)$ tienen mejores propiedades que los grupos $K_*(X)$. El teorema de localización en este contexto que generaliza a (1.3.3) se deduce de

(6.3.1) Teorema de localización. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $\mathcal{B}$ una subcategoría abeliana. Se tiene una fibración*

$$\Omega BQ\mathcal{B} \longrightarrow \Omega BQ\mathcal{A} \longrightarrow \Omega BQ\mathcal{A}/\mathcal{B}$$

y por consiguiente una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow K_{i+1}(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \longrightarrow K_i(\mathcal{B}) \longrightarrow K_i(\mathcal{A}) \longrightarrow K_i(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \longrightarrow \dots$$

Este resultado es uno de los logros de la construcción Q de Quillen. Su demostración es bastante laboriosa y se basa en el teorema B que permite reconocer las fibras homotópicas de aplicaciones entre categorías, [Q]. Señalesmos también que este teorema esta en la base de otras extensiones, como las sucesiones espectrales que se obtienen via límites homotópicos ([T]), que permiten expresar la K-teoría como una teoría homológica definida en la categoría de las categorías monoidales.

En el caso de una inmersión cerrada de esquemas $Y \hookrightarrow X$ se prueba que

$$Coh(X)/Coh(Y) = Coh(U)$$

por lo que del teorema de localización se deduce

(6.3.2) Corolario. *Si $Y \hookrightarrow X$ es una inmersión cerrada de esquemas de abierto complementario $U = X - Y$, se tiene una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow G_1(U) \longrightarrow G_0(Y) \longrightarrow G_0X \longrightarrow G_0U \longrightarrow 0\,.$$

Otra consecuencia importante de los teoremas abstractos que hemos presentado es la verificación del axioma de homotopía. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo y X un $\mathbf{k}$-esquema.

(6.3.3) Teorema. *La proyección $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \times X \longrightarrow X$ induce isomorfismos*

$$G_i(X) \longrightarrow G_i(\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \times X)\,, \quad i \geq 0\,.$$

Como en el caso de G_0 se razona por inducción sobre n y sobre la dimensión de X, usando la fibración (6.3.2), lo que reduce la prueba a demostrar que el morfismo $\mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{k}[t]$ induce un isomorfismo de los grupos G_*. Este es un hecho no trivial que depende del teorema de resolución y de otros resultados que no hemos presentado, como el teorema de dévissage, cf. [Q].

El último corolario es válido no solo para las proyecciones mencionadas sino también siempre que se tenga un torsor afín $T \longrightarrow X$. Este hecho resulta especialmente relevante porque toda variedad quasi-proyectiva admite un torsor afin que es a su vez un esquema afín, lo que en cierta medida reduce el estudio de la G-teoría de variedades quasi-proyectivas al de las variedades afines. Es lo que se conoce como truco de Jouanolou [Q].

7. K-teoría de categorías de complejos.

(7.1) Hemos observado que G_0 es un functor covariante para morfismos propios de esquemas. Recordemos que si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo propio se define

$$f_* : G_0(X) \longrightarrow G_0(Y)$$

mediante

$$f_*([F]) = \sum(-1)_i[R^i f_*(F)].$$

Esta definición de f_* presenta el inconveniente de realizarse directamente en los grupos de Grothendieck de las categorías de haces coherentes correspondientes, y no sobre dichas categorías. Lógicamente, el problema proviene de que en general el functor

$$f_* : Coh(X) \longrightarrow Coh(Y)$$

no es exacto, y se han de considerar sus functores derivados. Si f es un morfismo proyectivo se pueden evitar estas dificultades via el teorema de resolución como hemos mostrado en (6.2.4).

Una forma de empaquetar toda la información de los functores derivados de f_* es utilizar el formalismo de las categorías derivadas. En efecto, si $D^b(X)$ denota la categoría derivada de complejos acotados de haces coherentes sobre X, f define un functor triangulado

$$\mathbb{R}f_* : D^b(X) \longrightarrow D^b(Y)\,.$$

Para que esta presentación sea útil en nuestro contexto debemos disponer de la K-teoría de categorías trianguladas.

(7.1.1) Definición. *Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada. Se define el grupo de Grothendieck de $\mathcal{T}$, que denotaremos por $K(\mathcal{T})$, como el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de los objetos de $\mathcal{T}$ módulo las clases de la forma*

$$[T] - [T'] - [T'']$$

siempre que T, T' y T'' esten relacionados por un triangulo distinguido

$$\begin{array}{ccc} T' & \longrightarrow & T \\ \uparrow & & \\ T'' & & \end{array}$$

Es immediato comprobar que todo functor triangulado

$$t : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$$

induce un morfismo de grupos

$$t_* : K(\mathcal{T}) \longrightarrow K(\mathcal{T}')\,.$$

En particular, volviendo a la situación algebraica de la que partíamos, $\mathbb{R}f_*$ induce un morfismo

$$f_* : K(D^b(X)) \longrightarrow K(D^b(Y))\,.$$

La conexión de esta construcción con los grupos G_0 la da el siguiente resultado clásico (cf. [SGA 6])

(7.1.2) Proposición. *Sea X un esquema. El functor natural $Coh(X) \longrightarrow D^b(X)$ induce un isomorfismo*

$$G_0(X) \xrightarrow{\cong} K(D^b(X))\,.$$

Si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo propio, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_0(X) & \xrightarrow{\cong} & K(D^b(X)) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ G_0(Y) & \xrightarrow{\cong} & K(D^b(Y)) \end{array}$$

es conmutativo.

Mediante este resultado se consigue la presentación de f_* a nivel de categorías, pero a costa de trabajar con categorías trianguladas, a las que en principio no son aplicables sin más las técnicas de Quillen, por lo que no es posible extender esta construcción a la K-teoría superior (véase sin embargo [N]).

(7.2) Siguiendo las ideas de Waldhausen, introducidas en un contexto topológico, Gillet, Thomason y otros autores han propuesto definir la K-teoría de las categorías derivadas a partir de la K-teoría de las categorías de complejos y los quasi-isomorfismos. Para presentar estas ideas empezemos modificando la construcción Q de Quillen.

(7.2.1) Sea $\mathcal{M}$ una categoría exacta. Recordemos, (5.2.1), que los morfismos de $Q\mathcal{M}$ estan determinados por pares admisibles $M_1 \subset M_2 \subset M$, (5.3). El nervio de esta categoría, $NQ\mathcal{M}$, tiene por p-símplices las composiciones de p morfismos de $Q\mathcal{M}$, en particular $N_1 Q\mathcal{M} = Mor(Q\mathcal{M})$. Es un ejercicio probar que la composición de dos morfismos de $Q\mathcal{M}$ corresponde a filtraciones admisibles de orden cuatro

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset M_4 \subset M\,,$$

y en general, una composición de p morfismos corresponde a una filtración admisible de longitud 2^p.

Sea $s(\mathcal{M})$ el conjunto simplicial que tiene por p-símplices las clases de isomorfismo de composiciones de $(p-1)$ monomorfismos admisibles

$$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow \cdots M_{p-1} \longrightarrow M_p\,,$$

con los morfismos cara y degeneración evidentes. Mediante un proceso de subdivisión este conjunto simplicial es homotópicamente equivalente al correspondiente al considerar sucesiones de longitud 2^p, por lo que se tiene (cf. [W])

(7.2.2) Proposición. *$NQ\mathcal{M}$ y $s(\mathcal{M})$ son conjuntos simpliciales homotópicamente equivalentes, y por consiguiente se tienen isomorfismos*

$$K_i(\mathcal{M}) \cong \pi_{i+1}(s(\mathcal{M})) \quad i \geq 0\,.$$

Observemos que en esta presentación la K-teoría depende únicamente de los monomorfismos admisibles de $\mathcal{M}$. La idea de Waldhausen es reproducir esta construcción en una categoría con cofibraciones refinándola de forma que se obtenga una categoría simplicial, $S(\mathcal{M})$, y no sólo un conjunto simplicial, en la que tenga sentido considerar la subcateoría de equivalencias débiles.

(7.3) Definición. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría punteada, y sea $co(\mathcal{C})$ una subcategoría de $\mathcal{C}$. Diremos que $co(\mathcal{C})$ es una subcategoría de cofibraciones de $\mathcal{C}$ si se verifican los axiomas siguientes:*

(co 1). Todo isomorfismo es una cofibración.

(co 2). Todos los objetos de $\mathcal{C}$ son cofibrantes, es decir, para todo objeto A de $\mathcal{C}$ el morfismo $* \longrightarrow A$ es una cofibración.

(co 3). Las cofibraciones admiten cambio de cobase y son estables por esta operación, es decir, dado el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

existe $C \cup_A B$ y el morfismo $C \longrightarrow C \cup_A B$ es una cofibración.

Por ejemplo, si $\mathcal{M}$ es una categoría exacta podemos considerar los monomorfismos admisibles como subcategoría de cofibraciones, y por consiguiente admite una estructura de categoría con cofibraciones. Obsérvese que en una categoría con cofibraciones podemos definir los cocientes de las cofibraciones usando el axioma 3 según el cambio de cobase

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & * \cup_A B = B/A \end{array}$$

y dar asi una noción de epimorfismo admisible y de sucesión exacta, como en el caso de categorías exactas. La diferencia ahora está en el hecho de que en general los epimorfismos admisibles no tienen porque formar una categoría.

Notaremos $Mor[n]$ la categoría que tiene por objetos las parejas (i, j) con $0 \leq i < j \leq n$, y un único morfismo $(i, j) \to (i', j')$ cada vez que $i \leq i'$ y $j \leq j'$.

(7.3.1) Definición. *Sea $(\mathcal{C}, co(\mathcal{C}))$ una categoría con cofibraciones. Se define la categoría $S_n(\mathcal{C})$ como la categoría formada por los functores*

$$\begin{aligned} A : Mor[n] &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (i, j) &\longrightarrow A_{ij} \end{aligned}$$

que verifican

1. $A_{ii} = *$.

2. Si $i \leq i \leq k$, el morfismo $A_{ij} \longrightarrow A_{ik}$ es una cofibración, y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_{ij} & \longrightarrow & A_{ik} \\ \downarrow & & \downarrow \\ * = A_{jj} & \longrightarrow & A_{jk} \end{array}$$

es cocaretesiano.

Notaremos por $S(\mathcal{C})$ la categoría simplicial asociada a las categorías $S_n(\mathcal{C})$ de la forma usual.

Observemos que las propiedades de los functores A de la definición anterior dan lugar a 'sucesiones exactas'

$$A_{ij} \longrightarrow A_{ik} \longrightarrow A_{jk}$$

y que, por consiguiente, los objetos de $S_n(\mathcal{C})$ se pueden identificar a sucesiones de $(n-1)$ cofibraciones en $\mathcal{C}$

$$A_{01} \longrightarrow A_{02} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{0n}\,,$$

con cocientes prefijados

$$A_{ij} = A_{0j}/A_{0i}$$

lo que permite ver la similitud con el conjunto simplicial $s(\mathcal{M})$ introducido en (7.2.1). Señalemos que el hecho de prefijar los cocientes es un elemento técnico necesario en las demostraciones, pero que en cierta medida puede obviarse en las definiciones, lo que asemeja más aún esta construcción con el conjunto simplicial $s(\mathcal{M})$.

(7.3.2) Definición. *Sea $(\mathcal{C}, co(\mathcal{C}))$ una categoría con cofibraciones y $w(\mathcal{C})$ una subcategoría de $\mathcal{C}$. Diremos que $w(\mathcal{C})$ es una categoría de equivalencias débiles si verifica*

(w1) Los isomorfismos de $\mathcal{C}$ son equivalencias débiles.

(w2) Dado un diagrama commutativo

$$\begin{array}{ccccc} B & \longleftarrow & A & \longrightarrow & C \\ \sim\downarrow & & \sim\downarrow & & \sim\downarrow \\ B' & \longleftarrow & A' & \longrightarrow & C' \end{array}$$

en el que los morfismos verticales sean equivalencias débiles, el morfismo

$$B \cup_A C \longrightarrow B' \cup_{A'} C'$$

es una equivalencia débil.

En el caso de las categorías de complejos, que es el que motiva en estas notas el desarrollo de este apartado, tanto las cofibraciones como las equivalencias débiles verifican algunas propiedades más que aseguran que se verifican las hipótesis de los teoremas abstractos demostrados por Waldhausen. Dado que nuestra presentación en este punto va a ser superficial, no las detallaremos (véase [Wa] y [TT]).

La noción de functor exacto entre categorías con cofibraciones y equivalencias débiles se define de la forma natural, es decir, son aquellos que conservan toda la estructura.

(7.3.3) Definición. *Sea $(\mathcal{C}, co(\mathcal{C}), w(\mathcal{C}))$ una categoría con cofibraciones y equivalencias débiles. Se define el espacio de K-teoría de $\mathcal{C}$ según*

$$K\mathcal{C} = \Omega|wS\mathcal{C}|\,,$$

y los grupos de K-teoría de $\mathcal{C}$ por

$$\begin{aligned} K_i(\mathcal{C}, w) &:= \pi_i(K\mathcal{C}) \\ &= \pi_{i+1}(|wS\mathcal{C}|)\,. \end{aligned}$$

Observemos que $|wS\mathcal{C}|$ es un conjunto bisimplicial.

El grupo $K_0(\mathcal{C}, w)$ admite una presentación simple. En efecto, es el grupo generado por las clases $[C]$ de objetos de $\mathcal{C}$ sujetas a las relaciones siguientes

1. $[A] = [A']$ siempre que se tenga una equivalencia débil $A \cong A'$.
2. Dada una sucesión exacta en $\mathcal{C}$: $A \longrightarrow B \longrightarrow B/AQ$, se tiene

$$[B] = [A] + [B/A]\,.$$

La K-teoría de categorías exactas corresponde a la elección de los isomorfismos como equivalencias débiles, (7.3.2). La ventaja ahora es que podemos incorporar la información de los quasi-isomorfismos de las categoarías de complejos para realizar la K-teoría.

(7.4) Sea $\mathcal{M}$ una categoría exacta, y notemos por $C^b(\mathcal{M})$ la categoría de complejos acotados de $\mathcal{M}$. Esta categoría tiene una estructura de categoría exacta natural si consideramos las sucesiones exactas como aquellas que lo son grado a grado. Lógicamente al no tener en cuenta las diferenciales, esta estructura da lugar a una equivalencia homotópica

$$BQC^b(\mathcal{M}) \sim \vee_{\mathbb{N}} BQ\mathcal{M}\,.$$

Consideremos $\mathcal{M}$ como una subcategoría plena de una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Podemos definir el concepte de quasi-isomorfismo en la categoría $C^b(\mathcal{M})$, relativo a $\mathcal{A}$, y considerar la siguiente estructura

$co(C^b(\mathcal{M})) =$ monomorfismos admisibles grado a grado,
$w(C^b(\mathcal{M})) =$ quasi-isomorfismos.

Con esta estructura $C^b(\mathcal{M})$ es una categoría con cofibraciones y equivalencias débiles y por consiguiente podemos considerar su K-teoría $K(C^b(\mathcal{M}), w)$. Se tiene

(7.4.1) Teorema. (Gillet-Waldhausen) *La inclusión de $\mathcal{M}$ en $C^b(\mathcal{M})$ en grado cero, induce una equivalencia homotópica*

$$K\mathcal{M} \sim K(C^b(\mathcal{M}), w)$$

y por consiguiente se tienen isomorfismos

$$K_i(\mathcal{M}) \cong K_i(C^b(\mathcal{M}), w), \quad i \geq 0.$$

La demostración de este resultado depende del teorema de fibración demostrado por Waldhausen, que es el análogo en el contexto de las categorías fibradas del teorema de localización de Quillen enunciado en (6.3.1). Para no alargar la exposición nos referiremos al trabajo de Walhausen, [W], para su enunciado y demostración. En cualquier caso, a nivel de K_0 el resultado se sigue de las presentaciones explícitas de ambos grupos.

En efecto, podemos definir un morfismo inverso al inducido por la inclusión $\mathcal{M} \longrightarrow C^b(\mathcal{M})$ mediante la característica de Euler

$$\chi : K_0(C^b(\mathcal{M}), w) \longrightarrow K_0(\mathcal{M})$$
$$A^\bullet \mapsto \chi(A^\bullet) = \sum(-1)^i[A^i]$$

que, como se puede comprobar, esta bien definida sobre los grupos K_0. Para acabar el razonamiento, basta ver que toda clase de $K_0(C^b(\mathcal{M}), w)$ es de la forma $\chi(A^\bullet)$, lo que se comprueba sin dificultad por inducción sobre la longitud del complejo.

(7.4.2) Corolario. *Sea X un esquema noetheriano y denotemos por $C^b(X)$ la categoría de complejos acotados de haces coherentes. La inclusión de $Coh(X)$ en $C^b(X)$ induce isomorfismos*

$$G_i(X) \cong K_i(C^b(X), w), \quad i \geq 0.$$

El resultado anterior es la extensión de (7.2) a la K-teoría superior, y se puede reproducir el razonamiento a nivel G_0 para deducir

(7.4.3) Corolario. *La G-teoría de un esquema es covariante para morfismos propios.*

(7.5) Antes de acabar este apartado señalemos que la K-teoría de Waldhausen ha permitido proponer una solución a otro problema estructural de la K-teoría de Quillen. La definición de Quillen $K\mathcal{M} = \Omega BQ\mathcal{M}$ tiene un inconveniente que no hemos tratado en estas notas, a saber, que se ha de tomar el espacio de lazos de $BQ\mathcal{M}$. ¿Existe alguna construcción categórica que realice este espacio de lazos? Esta no es únicamente una cuestión retórica ya que amenudo es difícil definir algunas nociones en K-teoría superior por no poder trasladar las construcciones categóricas a los espacios de lazos. Esto es así por ejemplo para los productos o las λ-operaciones, e incluso para identificar el espacio de K-teoría como un espacio de lazos infinitos.

Obsérvese por ejemplo que dado un functor exacto

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$$

entre categorías exactas, define una aplicación contínua

$$BQ\mathcal{A} \times BQ\mathcal{B} \longrightarrow BQ\mathcal{C},$$

por lo que de esta forma no se conseguiría un morfismo en K-teoría con los grados adecuados, es decir, un morfismo

$$K_i(\mathcal{A}) \times K_j(\mathcal{B}) \longrightarrow K_{i+j}(\mathcal{C}) .$$

Algunos de estos problemas fueron resultos por Waldhausen antes de proponer la K-teoría de categorías con cofibraciones. Usando esta nueva teoría de Waldhausen, Gillet y Grayson [GG] han propuesto una construcción de un conjunto simplicial, que han denotado por $G\mathcal{M}$, cuya realización geométrica es equivalente a $K\mathcal{M}$ y que se describe a partir de la categoría $\mathcal{M}$, por lo que se adaptada mejor a este tipo problemas. Todo ello ha permitido introducir las λ-operaciones en la K-teoría superior de forma abstracta.

8. El teorema de localización de Thomason.

El corolario (6.2.3) responde al teorema de localización para la G-teoría de esquemas. Por otra parte, si $f : X \longrightarrow Y$ es una immersión cerrada es natural preguntarse sobre la fibra homotópica de la aplicación

$$KX \longrightarrow KY ,$$

y en particular, si es posible identificarla en términos de haces sobre X, Y y el abierto complementario U. En esta dirección, Quillen estudió en [Gr] un caso particular que mostraba que en la solución de este tipo de problemas intervenían de forma natural las categoprías de complejos. A partir de los trabajos de Quillen se fueron desarrollando otros resultados parciales por parte de diversos autores, especialmente Grayson, Levine y Srinivas. La teoría de Waldhausen ha permitido a Thomason [TT] dar la solución general, que exponemos en este apartado.

(8.1) Recordemos la definición siguiente de [SGA 6]

(8.1.1) Definición. *Dado un esquema X, un complejo E de $\mathcal{O}_X$ se dice que es perfecto si es localmente quasi-isomorfo a un complejo acotado de haces localmente libres.*

Localmente significa que para cada $x \in X$ existe un entorno $U \subseteq X$ y un complejo acotado de $\mathcal{O}_U$-módulos localmente libres $\mathcal{L}$ tal que

$$E_{|U} \cong \mathcal{L} .$$

El complejo $\mathcal{L}$ dependerá generalmente del abierto U. Si X admite una familia amplia de haces de linea (e.g. si es afín, regular o quasi-proyectivo sobre un esquema afín), entonces E será globalmente quasi-isomorfo a un complejo acotado de haces localmente libres.

Denotemos por $Perf(X)$ la categoría de complejos perfectos sobre un esquema X. Esta categoría hereda una estructura de categoría con cofibraciones y equivalencias débiles de la categoría de complejos de haces coherentes, por lo que podemos realizar su K-teoría. Así, siguiendo las ideas de Grothendieck en [SGA 6] Thomason propone la siguiente

(8.1.2) Definición. $K'_*(X) := K_*(Perf(X), w)$.

Sobre un esquema que admita una familia amplia de haces de linea, el comentario anterior y el teorema de Gillet-Waldhausen (7.4.1) aseguran que se verifica

(8.1.3) Corolario. *Sea X un esquema con una familia amplia de haces de linea. Los grupos de K-teoría definidos via los complejos perfectos son isomorfos a los grupos de K-teoría definidos por Quillen, es decir, $K_*(X) \cong K'_*(X)$.*

Más generalmente, si $Y \subseteq X$ es un subesquema cerrado Thomason propone la definición siguiente

(8.1.4) Definición. *Se define la K-teoría de X con soporte en Y, que denotaremos por $K_*(XonY)$, como la K-teoría de complejos perfectos de X que son exactos en $U = X - Y$.*

El interés de estos grupos es que identifican la fibra del morfismo

$$K'X \longrightarrow K'Y\,,$$

pues se tiene [TT]

(8.2) Teorema de localización. *En la situación anterior se tiene una sucesión exacta*

$$\cdots \to K_i(XonY) \to K'_i(X) \to K'_i(Y) \to \cdots \to K_0(XonY) \to K'_0(X) \to K'_0(Y)\,.$$

Obérvese que esta sucesión no acaba en un epimorfismo en $K_0(Y)$.

La idea de la parte geométrica de la demostración de este resultado es suficientemente simple como para que intentemos reproducirla. En efecto, después de utilizar los teoremas generales de la K-teoría de Waldhausen, especialmente el teorema de fibración y resultados de cofinalidad, el teorema se reduce a probar

(8.2.2) Proposición. *Sea X un esquema con una familia amplia de haces de linea. Un complejo perfecto F de U es la restricción de otro E de X, es decir, $F \cong j^*E$, si y sólo si $[F] \in Im(K'_0(X) \longrightarrow K'_0(Y))$.*

La demostración de esta proposición es paralela a la de extensión de un haz coherente de U a un haz coherente de X. Empecemos recordando este caso.

Si $F \in Coh(U)$, entonces $j_*(F)$ es un haz quasi-coherente, y como tal es límite de sus submódulos coherentes

$$j_*(F) = \varinjlim E_\alpha \qquad E_\alpha \in Coh(X)\,.$$

Ahora, de la compatibilidad de $\varinjlim$ com los Hom que se deriva de que los haces coherentes son de presentación finita, se siguen las igualdades siguientes

$$\begin{aligned}
\varinjlim Hom(F, j^*E_\alpha) &= Hom(F, \varinjlim j^*E_\alpha) \\
&= Hom(F, j^* \varinjlim E_\alpha) \\
&= Hom(F, j^*j_*F) \\
&= Hom(F, F)
\end{aligned}$$

y por lo tanto el morfismo identidad de F se factoriza a través de algún j^*E_α, es decir

$$F \to j^*E_a \longrightarrow F\,.$$

Pero al ser j^*E_α un submódulo de F encontramos necesariamente que

$$F = j^*E_\alpha\,.$$

La generalización de este razonamiento a los complejos perfectos de haces se basa en dos hechos

1. Si F es un complejo perfecto, existe un isomorfismo

$$\varinjlim Hom_{\mathcal{D}}(F, E_\alpha) = Hom_{\mathcal{D}}(F, \varinjlim E_\alpha)$$

para todo sistema directo de complejos E_α en la categoría derivada.

2. Todo complejo F es quasi-isomorfo al límite disrecto de sus subcomplejos perfectos.

La primera aserción esta clara localmente, es decir, para los haces $\mathcal{H}om$ ya que si F es un complejo perfecto estricto del tipo

$$0 \longrightarrow F^a \longrightarrow F^{a+1} \longrightarrow \cdot \longrightarrow F^b \longrightarrow 0$$

con cada F^e un haz localmente libre de rango k_e, entonces

$$\mathcal{H}om(F^e, E) = \bigoplus^{k_e} E\,,$$

y por consiguiente el complejo $\mathcal{H}om(F, E)$ será el complejo total del complejo

$$\cdots \bigoplus^{k_e} E \longrightarrow \bigoplus^{k_{e+1}} E \longrightarrow \cdots$$

que es compatible con los límites directos en la variable E. La globalización del resultado de la aserción 1 se deriva ahora por el proceso habitual del paso local-global mediante la sucesión espectral conveniente.

La seguna aserción es falsa en su formulación anterior. En general se verifica

Aserción. *Todo complejo F es quasi-isomorfo a un límite directo de complejos perfectos.*

Si X tiene una familia amplia de haces de linea, la demostración de esta aserción consiste en usar inductivamente que todo haz es el cociente de una suma de haces localmente libres. Por ejemplo, en el caso de complejos de haces acotados superiormente podemos indicar la construcción en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & E^{b-1} & \longrightarrow & E^b & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & F^{b-1} & \longrightarrow & F^b & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Donde dado el complejo $F^\bullet$ empezamos por considerar F^b como cociente de una haz localmente libre E^b. Después de efectuar el pullback del diagrama resultante, resolvemos por otro haz localmente libre E^{b-1}, y continuamos así el proceso.

Volviendo a la extensión de complejos perfectos de U a X, la aserción anterior no permite reproducir todo el razonamiento que hemos indicado en el caso de los haces coherentes. Unicamente permite deducir

(8.2.3) Proposición. *Todo $F \in Perf(U)$ es un sumando directo de algún j^*E, con $E \in Perf(X)$.*

Este hecho es el reponsable de la falta de exhaustividad al final de la sucesión exacta del teorema. Deberíamos señalar aquí que Thomason ha extendido resultados clásicos de Bass que permiten extender la sucesión hacia la derecha usando grupos de K-teoría negativos, [TT].

Bibliografia.

References

[**AH**] M.Atiyah, F..Hirzebruch, *Vector bundles and Homogeneous spaces*, Proc. Symposium in Pure Math. **3** (1961), 7-38.
[**Ba**] H.Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin Inc., 1968.
[**Be**] J.Berrick, *An approach to Algebraic K-theory*, Pitman, 1981.
[**BS**] A.Borel, J.P.Serre, *Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck)*, Bull. Soc. Math. France **86** (1958), 97-136.
[**GG**] H.Gillet, D.Grayson, *The loop space of the Q-construction*, Ill. J. Math. **31** (1987), 574-597.
[**Gr**] D.Grayson, *Algebraic K-theory, II [after D.Quillen]*, Springer L.N. 551 (1976), 217-240.
[**SGA 6**] A.Grothedieck, *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Springer L.N. 225, 1971.
[**H**] D.Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer Verlag, 1974.
[**K1**] M.Karoubi, *Introduction to K-theory*, Springer Verlag, 1978.
[**K2**] M.Karoubi, *Homologie cyclique et K-théorie*, Astérisque 149, Soc. Math. de France, 1987.
[**L**] J.L.Loday, *K-théorie algébrique et répresentation de groupes*, Ann. Scient. E.N.S. **9** (1976), 309-377.
[**M1**] J.P.May, *E_∞ ring spaces, group completions and permutative categories*, London Math Soc. Lect. Notes **11** (1974), 61-93.
[**M2**] J.P.May, *Classifying spaces and Fibrations*, Memoirs AMS 155, 1975.
[**MT**] J.P.May, R.Thomason, *The uniqueness of infinite loop space machines*, Topology **17** (1978), 205-224.
[**MS**] D.MacDuff, G.Segal, *Homology fibrations and the "group completion" theorem*, Invent. math. **31** (1976), 279-284.
[**Mc**] S.MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer Verlag, 1972.
[**Mi**] J.Milnor, *Introduction to Algebraic K-theory*, Annals of Math. Studies 72, AMS, 1971.
[**N**] A.Neeman, *K-theory for triangulated categories $3\frac{1}{2}$. An abbreviated proof of the theorem of Homological fuctors*, Preprint, K-theory archive (Oct./1994), 122 pp..
[**Q**] D.Quillen, *Higher Algebraic K-theory*, Springer L.N. 341 (1972), 85-147.
[**R**] J.Rosenberg, *Algebraic K-theory and its applications*, Springer Verlag, 1994.
[**S1**] G.Segal, *Classifying spaces and spectral sequences*, Publ. Math. I.H.E.S. **34** (1968), 105-112.
[**S2**] G.Segal, *K-homology theory and Algebraic K-theory*, Springer L.N. 575, 113-127.
[**S3**] G.Segal, *Categories and cohomology theories*, Topology **13** (1974), 293-312.
[**Sr**] V.Srinivas, *Algebraic K-theory*, Birkhauser, 1996.
[**Sw**] Switzer, *Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1975.
[**T**] R.Thomason, *First quadrant spectral sequences in Algebraic K-theory via homotopy colimits*, Comm. in Alg. **10** (1988), 1589-1668.
[**TT**] R.Thomason,T.Trobaugh, *Higher Algebraic K-theory of schemes and of Derived Categories. Grothendieck Festschrift, vol. III.* (1990), Progress in Math. 88, Birhäuser Verlag.
[**W**] F.Waldhausen, *Algebraic K-theory of spaces*, Springer L.N. 1126 (1985), 318-419.
[**We**] C.Weibel, *Notes on Algebraic K-theory, chapters 1,2,3*, Disponible en la página del web de Weibel (1996).
[**Wh**] G.Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, GTM 61, Springer Verlag, 1978.