

A Model of the 120-Cell and some Spatial Arrangements Derived from Four Kinds of Pentagons

by Koji Miyazaki

Résumé

Topologie Structurale #7, 1982

Cet article traite de certaines formes spatiales, plus particulièrement d'un modèle de projection orthogonale à 3 dimensions de la cellule-120, qui a trait aux polyèdres et à l'occupation de l'espace. Ils sont construits à partir de quatre variétés de pentagones apparaissant lors de la projection orthogonale à deux dimensions du dodécaèdre régulier.

Enfin, les hyper-développements de la cellule-120 conduisent à des arrangements dans l'espace de dodécaèdres réguliers.

Abstract

Structural Topology #7, 1982

This paper deals with some spatial forms, especially a model of an orthogonal projection onto 3-space of the 120-cell, which relate to polyhedra and space-filling. They are constructed using four kinds of pentagons which appear in a 2-dimensional orthogonal projection of the regular dodecahedron.

Finally, hyper-developments of the 120-cell yield spatial arrangements of regular dodecahedra.

La structure de la cellule-120

La cellule-120, un des six polytopes réguliers en 4 dimensions, correspond au dodécaèdre régulier en 3 dimensions ou à un pentagone régulier en 2 dimensions. Dans les espaces de 5 dimensions et plus, il n'y a pas de figures comparables.

Ce polytope à 4 dimensions a 120 cellules dodécaédriques régulières (parties de l'espace à 3 dimensions). Chacune de ses 720 faces pentagonales régulières est commune à une paire de cellules; chacune de ses 1200 arêtes et de ses 600 sommets sont communs à trois ou quatre cellules respectivement. La **Figure 1** nous montre une partie de la structure interne et externe, dans une projection tridimensionnelle à partir de 4 dimensions. Elle est composée de cinq variétés de dodécaèdres pentagonaux, auxquels nous avons assigné les lettres **A** à **E**. (**A**) est un dodécaèdre régulier et les **E** projettent aux hexagones parallèles. Leurs échelles s'agrandissent de **A** à **E** dépendant de la propriété de la perspective quadri-dimensionnelle.

Structure of the 120-cell

The 120-cell, one of six regular polytopes in 4-space, corresponds to the regular dodecahedron in 3-space or a regular pentagon in 2-space. In spaces of dimension 5 or higher, there are no such comparable figures.

This polytope in 4-space has 120 regular dodecahedral cells (parts of 3-spaces). Each of its 720 regular pentagonal faces is common to a pair of cells; each of its 1200 edges and 600 vertices are common to three and four cells respectively.

Figure 1 shows a part of the inner and outer structure, in a «3-dimensional» projection from 4-space. It is composed of five kinds of pentagonal dodecahedra, to which we assign the letters **A** to **E**. **A** is a regular dodecahedron and the **Es** project to parallel hexagons. Their scales become larger from **A** to **E** according to property of the 4-dimensional perspective.

Un modèle de la cellule-120

La **Figure 2** nous montre la forme extérieure d'un modèle de projection orthogonale en trois dimensions de la cellule-120. C'est un 42-èdre convexe à douze pentagones réguliers et trente hexagones parallèles, composés chacun de quatre pentagones coplanaires. Il y a 120 dodécaèdres pentagonaux dans l'espace intérieur et sur la surface de ce polyèdre, certains sont réguliers, certains sont déformés, et certains sont aplatis, lesquels sont placés face-à-face comme suit:

Premièrement, douze cellules dodécaédriques régulières légèrement déformées (les **B** de la **Figure 1**) entourent un dodécaèdre régulier (**A**) constituant le centre, dont il résulte un groupe comportant des fossettes (**Figure 3**). Par la suite, on dépose dans ces fossettes 20 cellules déformées supplémentaires (les **C**) pour former un plus grand groupe avec de nouvelles fossettes (**Figure 4**). Finalement, si on attache douze autres cellules **D** déformées à ces fossettes, on obtiendra la forme extérieure d'un polyèdre convexe sans fossette (**Figure 5**).

A cette étape, chacun des 30 hexagones parallèles de la surface est considéré comme une cellule aplatie (**E**), leurs faces se chevauchant en paires. On a obtenu ces cellules **E** lors des résultats de la **Figure 1**.

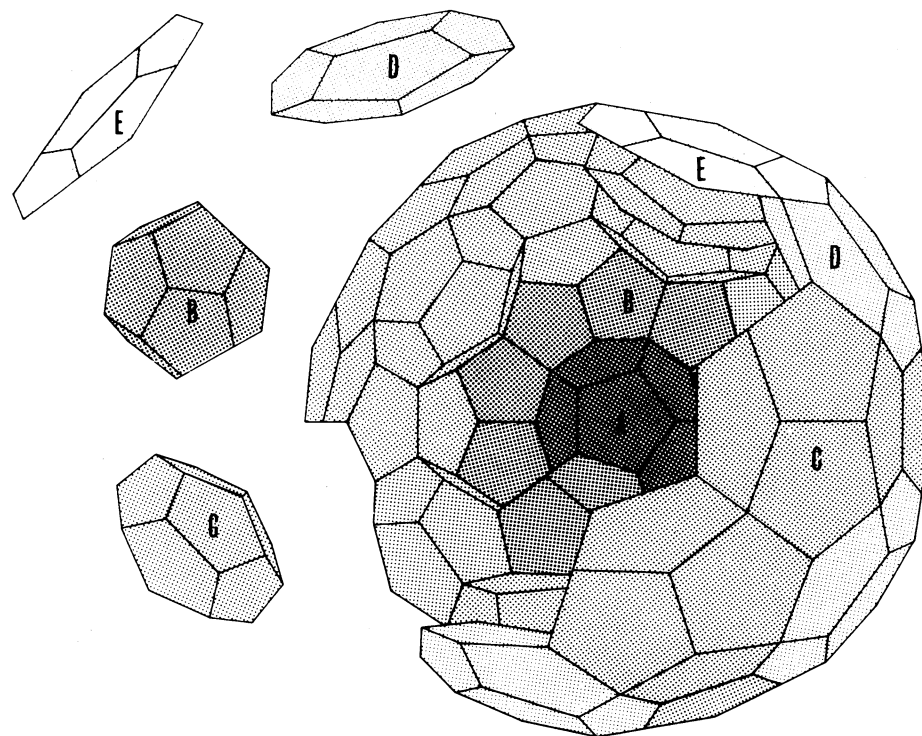


Figure 1.

A model of the 120-cell

Figure 2 shows the outer shape of a model of an orthogonal projection onto 3-space of the 120-cell. It is a convex 42-hedron having twelve regular pentagons and thirty parallel hexagons, each made of four coplanar pentagons. In the inner space and on the surface of this polyhedron, there are 120 pentagonal dodecahedra, some regular, some distorted, and some flattened, which are placed face-to-face as follows.

First, twelve slightly distorted regular dodecahedral cells (**Bs** of **Figure 1**) surround a regular dodecahedron (**A**) which serves as the center, and a cluster is constructed having some dimples (**Figure 3**). Next, into these dimples, twenty more distorted cells (**Cs**) are put so that a larger cluster appears with some new dimples (**Figure 4**). Lastly if twelve still more distorted cells (**Ds**) are put so that a larger cluster appears with some new dimples (**Figure 4**). Lastly if twelve still more distorted cells (**Ds**) be attached to these dimples, then a convex polyhedral outer shape without dimples can be obtained (**Figure 5**).

At this stage, each of thirty parallel hexagons on the surface is thought of as being a flattened cell (**Es**), its faces overlapping in pairs. Once these cells **E** have been glued on **Figure 1** results.

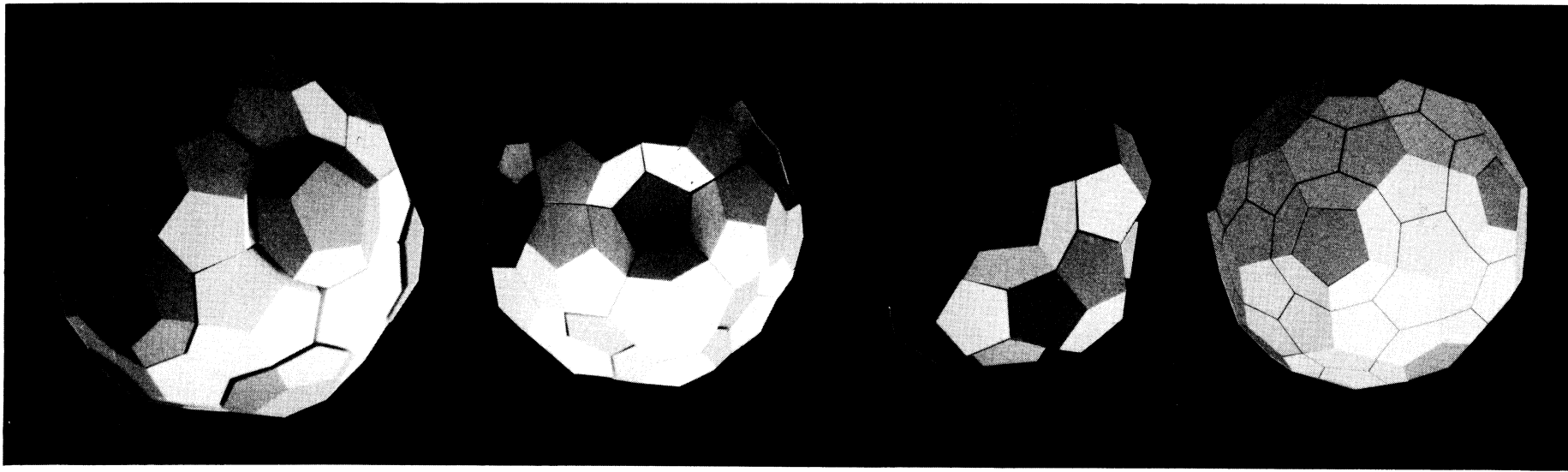


Figure 2.

Figure 3.

Figure 4.

Figure 5.

Cependant, nous n'avons pas encore toutes les cellules de la cellule-120; toutes les faces doivent ultimement être communes à deux cellules. Si nous retournons au dodécaèdre régulier (A) par le même chemin, chacune des faces extérieures de la **Figure 2** sera alors commune à deux cellules.

Le nombre total de cellules sera alors le suivant:

$$1A + 12B + 20C + 12D + 30E + 12D + 20C + 12B + 1A = 120$$

Projections spatiales des faces à forme de guitare

Les modèles ci-dessus mentionnés de la cellule-120 peuvent être reliés deux à deux, ayant une cellule (D) ou une face hexagonale (E) en commun. Suivant le procédé, on peut obtenir des organisations spatiales utilisant les faces à forme de guitare (**Figure 6**) lesquelles dérivent de deux pentagones coplanaires réguliers.

Nous verrons quelques exemples intéressants parmi ceux-ci: la **Figure 7** nous montre une unité polyédrique non-fermée dérivée des faces à forme de guitare; la **Figure 8** est un rassemblement triangulaire de trois unités. En développant la construction, on peut obtenir une couche rhombique fermée, comme dans la **Figure 9**, dont la forme enveloppante ressemble à une couche rhombique composée de huit dodécaèdres réguliers, laquelle fut d'abord découverte par Bonnie Stewart et Kurt Schmucker (Crapo 1980) et redécouverte comme la fourmière de Koji Miyazaki et Ichiro Takada (Miyazaki & Takada 1980). Si nous empilons trois de ces couches, il en résulte exactement un rassemblement rhomboédrique fermé (**Figure 10**). Si nous comparons, la **Figure 11** nous montre un rassemblement obtus non-fermé, dans lequel deux unités centrales se rejoignent uniquement à un sommet.

However, we do not yet have all the cells of the 120-cell; all faces must ultimately be common to two cells. If we return to the regular dodecahedron (A) along the same route, each of the outer faces of **Figure 2** will then be common to two cells.

As a result, the total number of cells is:

$$1A + 12B + 20C + 12D + 30E + 12D + 20C + 12B + 1A = 120$$

Spatial arrangements of the guitar-shaped faces

Above mentioned models of the 120-cell can be connected two by two, holding a cell (D) or a hexagonal face (E) in common. According to the procedure, some spatial arrangements can be obtained using the guitar-shaped faces (**Figure 6**) each of which derived from two coplanar pentagons.

Among them, next examples are interesting. **Figure 7** shows a not-closed polyhedral unit derived from the guitar-shaped faces; **Figure 8** is a triangular stacking of three units. Expanding the construction, a closed packed rhombic layer shown in **Figure 9** can be obtained whose surrounding shape resembles the rhombic layer composed of eight regular dodecahedra which was originally discovered by Bonnie Stewart and Kurt Schmucker (Crapo 1980) and was rediscovered as the Ant-hill by Koji Miyazaki and Ichiro Takada (Miyazaki & Takada 1980). If three of such layers be piled on, then an acute close packed rhombohedral stacking appears (**Figure 10**). By way of comparison, **Figure 11** shows an obtuse stacking which is not close packed, in which two central units make contact only at a vertex.

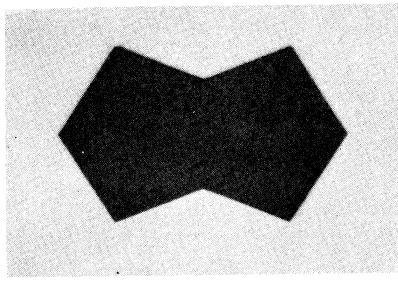


Figure 6.

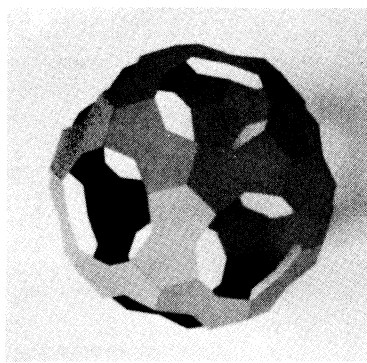


Figure 7.

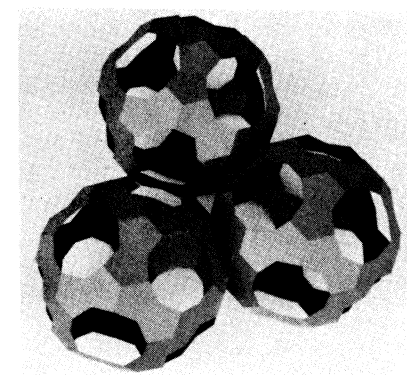


Figure 8.

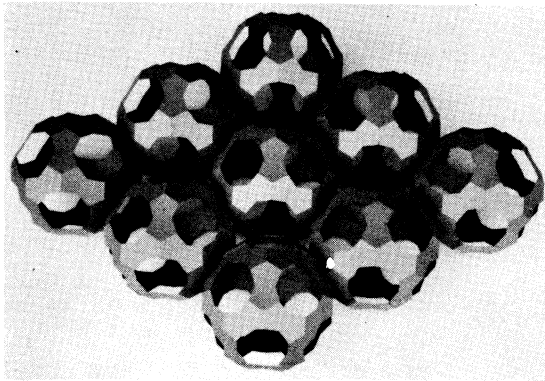


Figure 9.

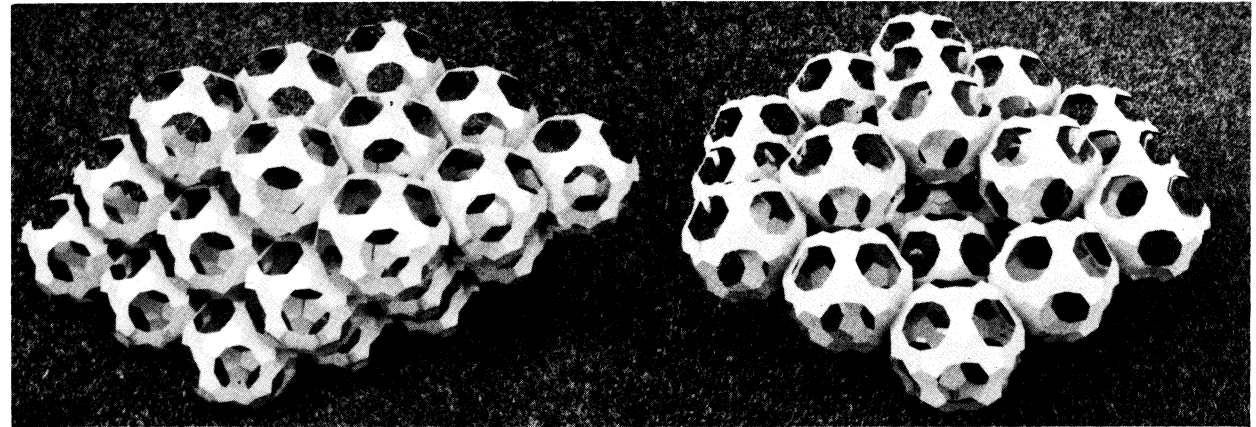


Figure 10.

Figure 11.

Dérivation de quatre variétés de pentagones

Maintenant, comment pouvons-nous décider de la forme de chaque pentagone déformé?

On peut voir chacune de leurs formes réelles dans la **Figure 12**, laquelle représente une projection orthogonale en 2-dimensions du dodécaèdre régulier. On la dessine comme suit (**Figure 13**):

- (1) Placer le pentagone régulier ABD de telle sorte que l'arête AB est perpendiculaire à la ligne horizontale $a'd'$ et tracer le plan abd et l'élévation $a'b'd'$ (réduit à un segment d'une droite).
- (2) Faire tourner ABD autour de AB , et tracer le plan abk et l'élévation $a'b'k'$ (un segment d'une droite) de l'autre pentagone régulier ABK .
- (3) Tracer les plans et élévations des pentagones réguliers qui restent en utilisant le point central U comme le point de symétrie. En bref, la hauteur de chaque sommet à partir de la ligne horizontale est donnée par les dimensions v et w apparaissant dans le plan.

Derivation of four kinds of pentagons

Now, how do we decide the shape of each distorted pentagon?

All of their true shapes can be seen in **Figure 12**, which is an orthogonal projection onto 2-space of the regular dodecahedron. It is drawn as follows (**Figure 13**):

- (1) Put the regular pentagon ABD such that the edge AB is perpendicular to the ground line $a'd'$, and draw the plan abd and elevation $a'b'd'$ (reduced to a line segment).
- (2) Rotate ABD around AB , and draw the plan abk and elevation $a'b'k'$ (a line segment) of the other regular pentagon ABK .
- (3) Draw plans and elevations of the remaining regular pentagons using the body center U as the point of symmetry. In short, the height from the ground line of each vertex is given by the dimensions v and w appearing in the plan.

Quatre pentagones identifiés de **1** à **4** dans la **Figure 12** présentent de curieuses coïncidences. Par exemple, leur plus grande largeur est mutuellement égale à $a\tau$, où a est la longueur de l'arête du pentagone régulier du No **1** et τ le nombre doré (= 0,618).

Ils peuvent former différentes configurations comme on peut le voir dans la **Figure 14**. On connaît bien les configurations périodiques dérivées des hexagones parallèles obtenus lors de l'élévation (supérieure) et les configurations non-périodiques dérivées des décagones réguliers ou des pentagones réguliers obtenus sur le plan (inférieur).

En outre, en 3 dimensions, ils peuvent construire cinq dodécaèdres pentagonaux parmi lesquels nous en avons déjà vu quatre dans la **Figure 1**. Ce sont:

- à partir de douze **1** **A**
- à partir de deux **1** et dix **3** **B**
- à partir de six **3** et six **4** **C**
- à partir de deux **1** et dix **4** **D**
- à partir de six **2** et six **3** non-utilisés.

Si on en ajoute un aplati (**E**), dérivé de deux **3** et deux **4**, au lieu du dernier, on obtient les **Figures 1 à 5**. Les **Figures 6 à 11** peuvent évidemment être obtenues à partir des pentagones du No **3**.

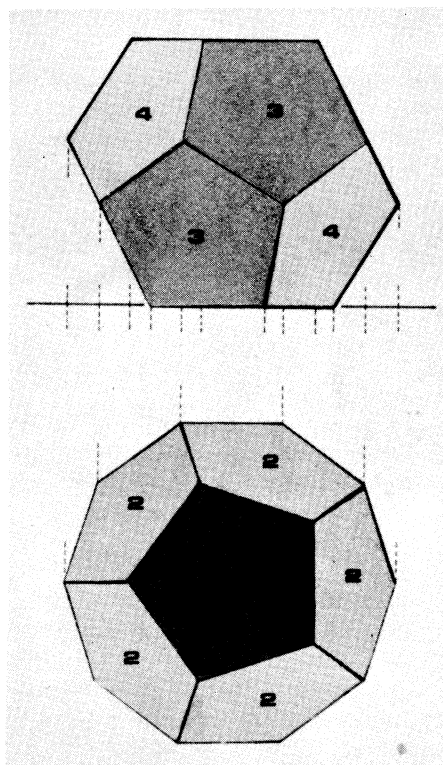


Figure 12.

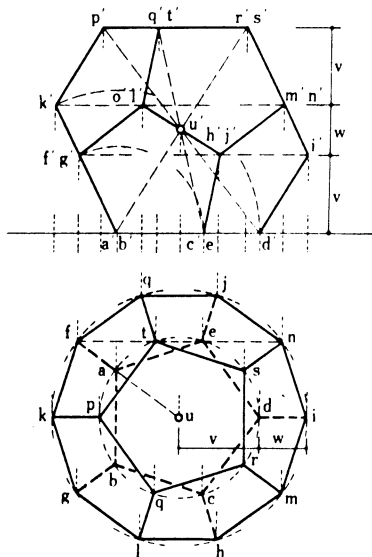


Figure 13.

Four pentagons labelled **1** to **4** in **Figure 12** have some curious coincidences. For instance, their largest width are mutually equal to $a\tau$, where, a is the edge length of the regular pentagon of No. **1** and τ the golden number (= 0,618).

They can form various planar patterns such as **Figure 14**. Periodic patterns derived from parallel hexagons seen at the elevation (upper) and non-periodic ones from regular decagons or regular pentagons seen at the plan (lower) are well known.

Further, in 3-space, they can construct five pentagonal dodecahedra four of which were already seen in **Figure 1**. They are:

- from twelve **1**s **A**
- from two **1**s and ten **3**s **B**
- from each six of **3**s and **4**s **C**
- from two **1**s and ten **4**s **D**
- from each six of **2**s and **3**s not used.

And, if a flattened one (**E**) derived from two each of **3**s and **4**s be added instead of the last one, **Figures 1 to 5** are obtained. **Figures 6 to 11** can, of course, be derived from pentagons of No. **3**.

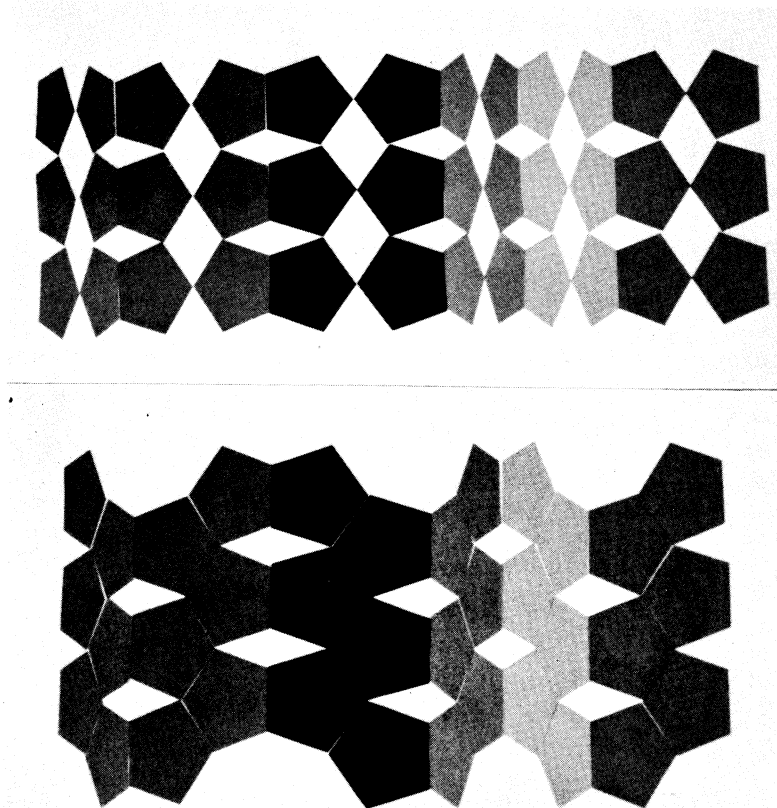


Figure 14.

Projections orthogonales de la cellule-120

La **Figure 15** montre brièvement une projection orthogonale en 3 dimensions de la cellule-120.

On procède comme suit:

- 1) Placez le dodécaèdre régulier AB de telle sorte que la face AC soit perpendiculaire à la ligne horizontale laquelle est parallèle à $a''b''$ et tracez le plan ab et l'élévation $a'b'$.
- 2) Faites tourner AB autour de AC , et tracez le plan am et l'élévation $a'm'$ du second dodécaèdre régulier AM .
- 3) Faites tourner AM autour de la face MN , et tracez le plan np et l'élévation $n'p'$ du troisième dodécaèdre régulier NP .
- 4) Tracez $a''b''$ (un segment de droite), ce qui représente l'hyper-élévation de AB . Ceux des AN et NP deviennent $a''n''$ et $n''p''$, comme le démontre la figure, où la hauteur à partir de la ligne $a''b''$ de l'hyper-élévation de chaque sommet est égale aux dimensions apparaissant à la ligne $r's'$ de l'élévation (on aurait besoin d'illustrations compliquées pour en expliquer la raison).

Toutes les projections de la cellule-120 dont il est question dans cet article furent tracées de la manière suivante par Ichiro Takada de Kobe University à l'aide d'un ordinateur.

Chaque sommet de la cellule-120 possède quatre coordonnées orthogonales, ce qui est connu par (Coxeter 1961, 1973).

Il faut au moins trois figures pour représenter le sommet sur un plan bidimensionnel. Dans cet article, elles sont déterminées par les coordonnées (X, Y) , (X, Z) et (X, U) qui représentent respectivement le plan, l'élévation et l'hyper-élévation.

La **Figure 15** nous montre le plan (en bas), l'élévation (au centre) et l'hyper-élévation (en haut). Les lignes brisées indiquent tous les axes coordonnés dont les axes horizontaux sont les axes X et chaque axe vertical sont les axes Y -, Z - et U - respectivement. La **Figure 16** illustre la projection orthogonale curieuse dans laquelle les trois projections sont congruentes avec la projection centrale de la **Figure 15**.

Malheureusement, les personnes tridimensionnelles n'ont pas la capacité de percevoir totalement et intuitivement les **Figures 15 et 16**, mais les personnes à quatre dimensions le peuvent. Par conséquent, nous, personnes à 3 dimensions, devons imaginer deux modèles tridimensionnels différents dérivés de deux dimensions soit du plan, de l'élévation ou de l'hyper-élévation. Curieusement, ces modèles diffèrent considérablement l'un de l'autre.

Le modèle présenté dans les **Figures 1 à 5** dérive de telle sorte que son plan et son élévation correspondent au plan et à l'élévation de la **Figure 15**. Si l'on adoptait le plan et l'élévation de la **Figure 15** comme plan et élévation du modèle, le dodécaèdre régulier central de la **Figure 1** (AB à la **Figure 15**) dépasserait dans l'espace extérieur. Pour cette raison, on peut dire qu'il est possible d'extraire un jaune d'oeuf sans briser la coquille dans un espace à 4 dimensions.

Orthogonal projections of the 120-cell

An orthogonal projection onto 3-space of the 120-cell is briefly shown in **Figure 15**.

That is:

- (1) Place the regular dodecahedron AB such that the face AC is perpendicular to the ground line which is parallel to $a''b''$, and draw the plan ab and elevation $a'b'$.
- (2) Rotate AB around AC , and draw the plan am and elevation $a'm'$ of the second regular dodecahedron AM .
- (3) Rotate AM around the face MN , and draw the plan np and elevation $n'p'$ of the third regular dodecahedron NP .
- (4) Draw $a''b''$ (a line segment) which is the hyper-elevation of AB . Those of AN and NP become $a''n''$ and $n''p''$ as shown in the figure, where, the height from the line $a''b''$ of the hyper-elevation of each vertex is equal to the dimensions appearing on the line $r's'$ of the elevation (some complicated pictures are necessary to explain the reason).

All projections of the 120-cell for this paper were drawn by Ichiro Takada of Kobe University using a computer, as follows.

Each vertex of the 120-cell has four orthogonal coordinates, known from (Coxeter 1961, 1973). If one wishes to represent the vertex on a 2-dimensional plane, at least three figures are necessary. In this paper, they are determined by the coordinates (X, Y) , (X, Z) and (X, U) which are called the plan, elevation and hyper-elevation respectively.

Figure 15 shows a plan (bottom), elevation (center) and hyper-elevation (top). The broken lines indicate coordinate axes all of whose horizontal ones are X -axes, and each vertical one is Y -, Z - or U -axis respectively.

Figure 16 shows the curious orthogonal projection in which all three projections are congruent with the central one of **Figure 15**.

Unfortunately, 3-dimensional persons lack the ability to apprehend totally and intuitively **Figures 15 or 16**, though 4-persons have it. Therefore, 3-persons are obliged to imagine two different 3-dimensional models derived from any two of the plan, elevation and hyper-elevation. Curiously, these models differ considerably one from the other.

The model shown in **Figures 1 to 5** is derived so that its plan and elevation correspond to the plan and elevation of **Figure 15**. If the plan and hyper-elevation of **Figure 15** be adopted as the plan and elevation of the model, then the regular dodecahedron at the center of **Figure 1** (AB in **Figure 15**) will protrude to the outer space. For this reason, it is said that, in 4-space, an egg yolk can be taken out without breaking the shell.

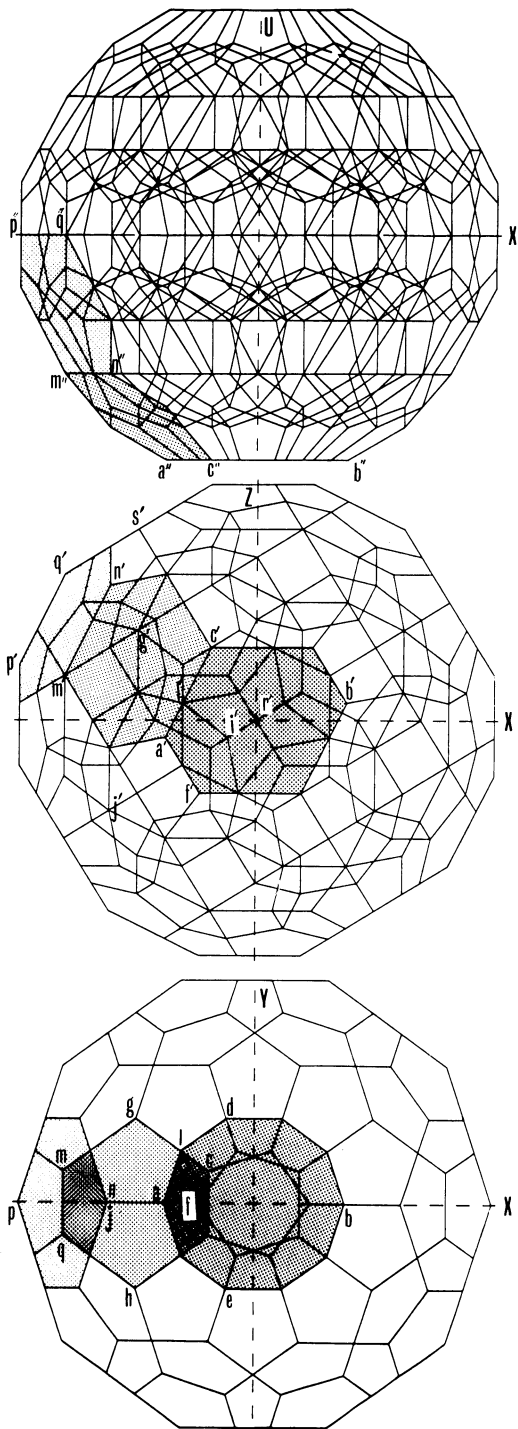


Figure 15.

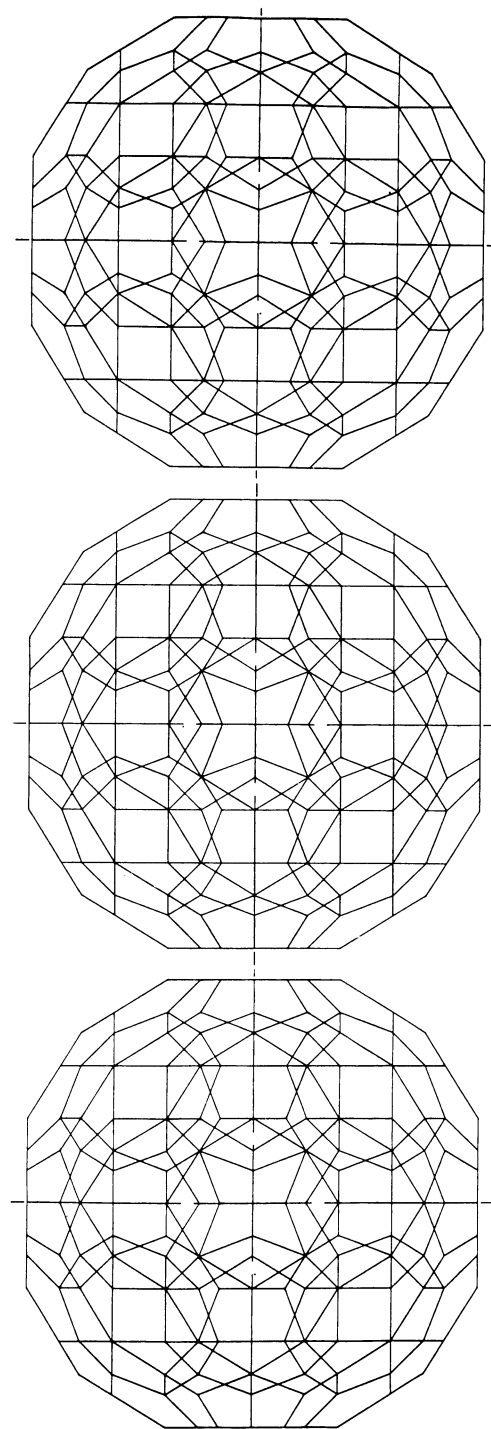


Figure 16.

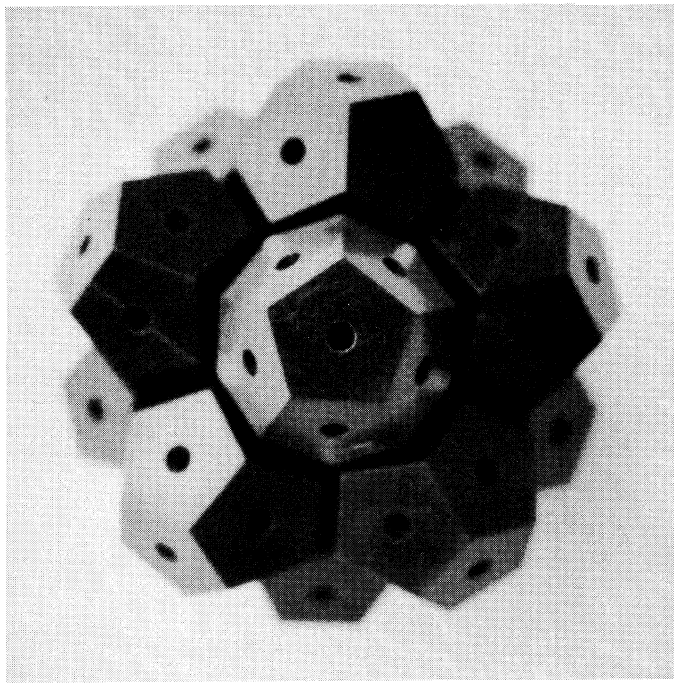


Figure 17.

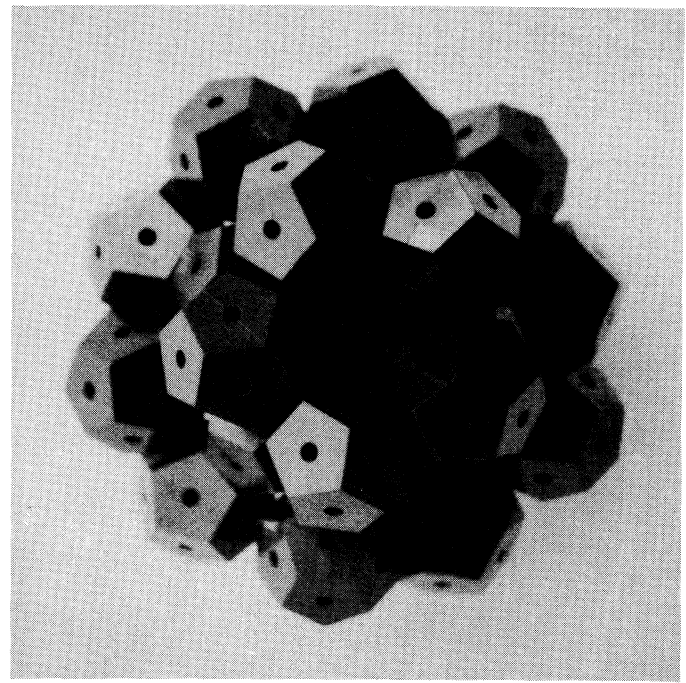


Figure 18.

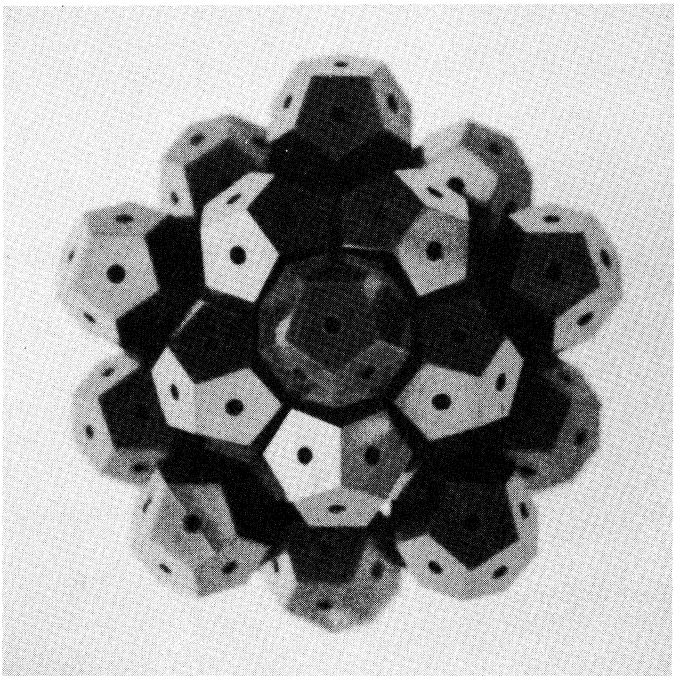


Figure 19.

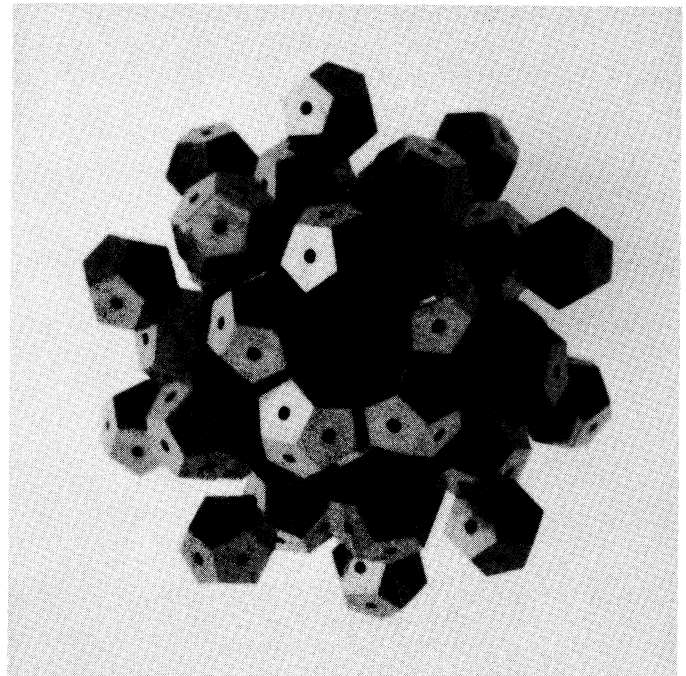


Figure 20.

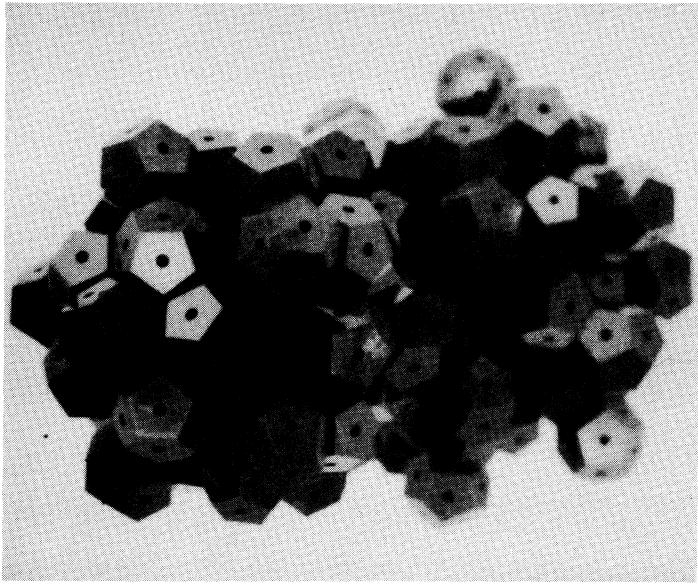


Figure 21.

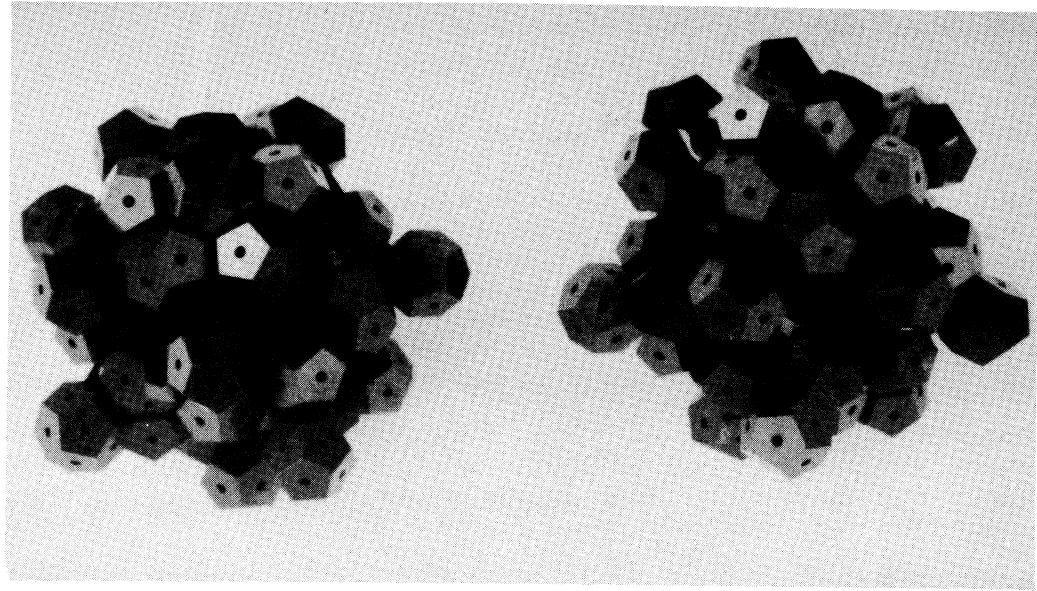


Figure 22.

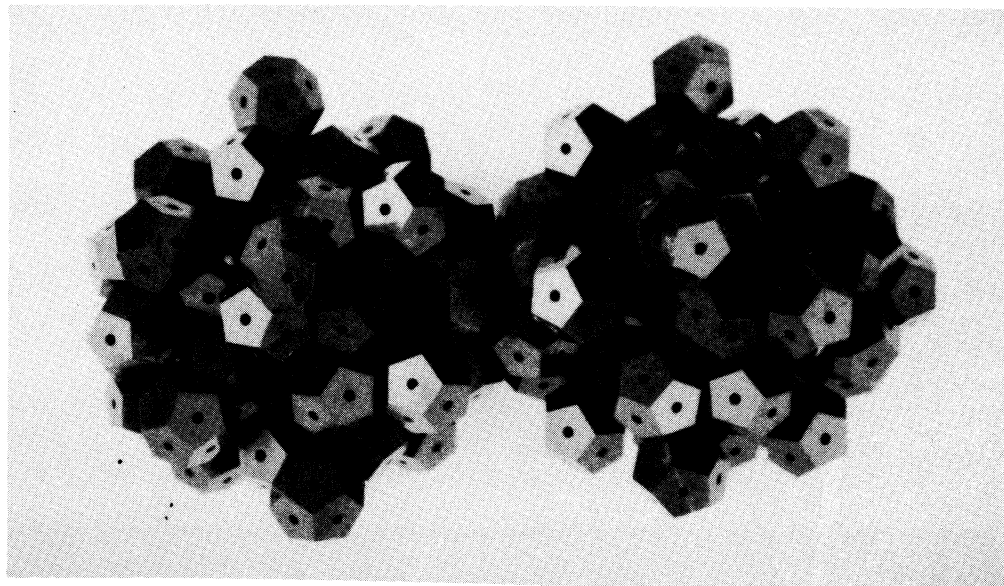


Figure 23.

L'hyper-développement de la cellule-120

On peut considérer l'hyper-développement de la cellule-120 comme une fourmilière de dodécaèdres réguliers en procédant de la façon suivante:

Premièrement, nous avons un dodécaèdre régulier (correspondant à A de la **Figure 1**) entouré de douze B (**Figure 17**), mis face-à-face.

Par la suite, on ajoute successivement 20 dodécaèdres réguliers C, douze D et trente E, comme le montrent les **Figures 18, 19 et 20**.

Finalement, si on rassemble le même groupe de douze D, vingt C, douze B et un A, comme à la **Figure 19**, à une face du groupe de la **Figure 20**, on obtient un hyper-développement de la cellule-120 (**Figure 21**).

Si on désire d'autres formes symétriques, il y a un exemple dans lequel on relie deux groupes congruents (dont on voit les deux projections à la **Figure 22**), dérivés de la **Figure 20** en leur retirant quinze dodécaèdres réguliers (**Figure 23**).

Remerciements

Je remercie Monsieur Henry Crapo d'avoir bien voulu corriger mon anglais malhabile.

Hyper-development of the 120-cell

The hyper-development of the 120-cell can be considered as if it were an Ant-hill of regular dodecahedra as follows.

First, placed face-to-face, a regular dodecahedron (corresponding to **A** of **Figure 1**) is surrounded by twelve **Bs** (**Figure 17**).

Next, twenty **Cs**, twelve **Ds** and thirty regular dodecahedra **Es** are successively adjoined such as **Figures 18, 19 and 20**.

Lastly, if the same cluster as **Figure 19**, which has twelve **Ds**, twenty **Cs**, twelve **Bs** and an **A**, be connected to one of **Figure 20** at a face, a hyper-development of the 120-cell can be obtained (**Figure 21**).

If more symmetrical shape be desired, there is an example, in which two congruent clusters (the front and back view are as in **Figure 22**), derived from **Figure 20** by removing fifteen regular dodecahedra, are connected (**Figure 23**).

Acknowledgement

I thank to Mr. Henry Crapo for his nice corrections to my unskillful English.

| | | |
|---|--|--|
| Coxeter 1961 H.S.M. Coxeter B-M-GPJ | Introduction to Geometry John Wiley and Sons, 1961. | Chapter 22, Four-dimensional Geometry. |
| Coxeter 1973 H.S.M. Coxeter B-M-GPJ | Regular Polytopes Dover, 1973. | Chapter 8, Truncation. |
| Crapo 1980 Henry Crapo | Revue of «Adventures among the toroids», by Bonnie Stewart Structural Topology, 5 (1980), 45-48. | Book review |
| Miyazaki 1980 Koji Miyazaki, Ichiro Takada A-MA-PJ | Uniform Ant-hills in the World of Golden Isozonohedra Structural Topology, 4 (1980), 21-30. | Uniform polyhedral clusters. |