

Geodesic dome with three different bar lengths

by Tibor Tarnai

Topologie Structurale #8, 1983

Dôme géodésique à trois longueurs de barres différentes

La base géométrique des dômes géodésiques est la subdivision en triangles de la surface de la sphère. Par analogie avec la structure de l'enveloppe des virus, Coxeter a démontré que les dômes géodésiques peuvent être faits à partir d'un réseau de type $\{3,5+\}_{bc}$ (Coxeter 1972). Le symbole $\{3,5+\}_{bc}$ indique une mosaïque de triangles sphériques dérivée de la mosaïque comportant des triangles équilatéraux, cinq ou six à chaque sommet, remplissant et couvrant la surface de l'icosaèdre régulier, dans laquelle on peut arriver à un sommet de l'icosaèdre à partir d'un sommet adjacent le long des arêtes de la mosaïque par b étapes sur les sommets de la mosaïque dans une direction et ensuite, par c étapes après un changement de direction de 60° . Une famille complète de réseaux de ce type est illustrée par une figure ingénieuse de Clinton que l'on peut voir dans (Clinton 1980).

Le système $\{3,5+\}_{bc}$ détermine le réseau uniquement de manière topologique car les longueurs d'arêtes de la sphère ne peuvent pas être égales, excepté pour le cas où $b = 1, c = 0$, ou $b = 0, c = 1$. Pour des raisons pratiques les longueurs d'arêtes dans un réseau fixé topologiquement sont, en général, déterminées de telle sorte que le nombre de types d'éléments structuraux soit petit (qu'il soit même un minimum dans un cas extrême). Mais on peut inverser le problème du cas des dômes géodésiques à barres et à joints de la manière suivante: pour un nombre donné de différentes longueurs de barres, trouver les valeurs de b et c qui sont le produit du nombre maximum de triangles sur la sphère.

En étudiant le remplissage de cercles égaux ne se chevauchant pas sur une sphère, nous avons trouvé un arrangement de 180 cercles dans le système $\{3,5+\}_{bc}$ (Tarnai 1982). Le graphe de cet arrangement détermine un polyèdre convexe fixé à l'intérieur

Structural Topology #8, 1983

The geometric basis of geodesic domes is the subdivision of the surface of the sphere into triangles. By an analogy to the structure of virus coats, Coxeter has shown that geodesic domes can be made with network of type $\{3,5+\}_{bc}$ (Coxeter 1972). The symbol $\{3,5+\}_{bc}$ denotes a spherical triangle tessellation derived from the tessellation consisting of equilateral triangles, five or six at each vertex, filling and covering the surface of the regular icosahedron, in which a vertex of the icosahedron can be arrived at from an adjacent one along the edges of the tessellation by b steps on the vertices of the tessellation in one direction then c steps after a change in direction by 60° . A complete family of networks of this type is illustrated by an ingenious figure of Clinton, which may be seen in (Clinton 1980).

The system $\{3,5+\}_{bc}$ determines the network only topologically since the edge-lengths on the sphere cannot be equal, apart from the case of $b = 1, c = 0$, or $b = 0, c = 1$. For reasons of practice the edge-lengths in a topologically fixed network are, in general, determined so that the number of types of structural elements be small (be a minimum in an extreme case). But the problem can be reversed which in the case of bar and joint geodesic domes is the following: for fixed number of different bar-lengths, to find the values b and c which result in the maximum number of triangles on the sphere.

Studying the packing of nonoverlapping equal circles on a sphere we have found an arrangement of 180 circles in the system $\{3,5+\}_{bc}$ (Tarnai 1982). The graph of this packing determines a convex polyhedron inscribed into a sphere, bounded by 380

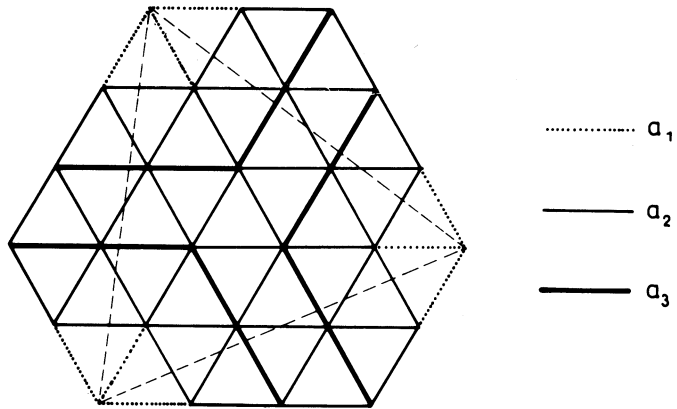
d'une sphère, borné par 380 faces triangulaires, où le nombre d'arêtes différentes est de 3, le nombre de faces différentes est de 3 et le nombre de sommets différents est de 4. On peut voir une esquisse d'une partie de ce polyèdre à la **Figure 1** où le grand triangle composé de lignes pointillées représente une face de l'icosaèdre régulier. Quand le rayon de la sphère est l'unité alors les longueurs d'arêtes (facteurs de corde) ont les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,2357541; \\ a_2 &= 0,2752134 \\ a_3 &= 0,2913202 \end{aligned}$$

et le quotient des longueurs d'arêtes maximales et minimales est $\eta = 1,235695$.

Nous avons construit d'autres polyèdres à faces triangulaires inscrits dans la sphère avec 3 longueurs d'arêtes différentes dans les systèmes $\{3,5+\}_{3,0}$, $\{3,5+\}_{3,1}$ mais les nombres de faces dans ces cas sont seulement de 180 et 260, respectivement. En même temps, nous pourrions construire d'autres polyèdres de 380 faces triangulaires et plus, uniquement avec 4 longueurs d'arêtes différentes ou plus.

Ce résultat démontre qu'il est préférable de chercher de nouveaux réseaux pour les dômes géodésiques par le système $\{3,5+\}_{b,c}$, $b \neq c$, au lieu d'utiliser le système habituel $\{3,5+\}_{b,0}$ et $\{3,5+\}_{b,b}$.



triangular faces, in which the number of different edges is 3, the number of different faces is 3, and the number of different vertices is 4. A sketch of a part of this polyhedron may be seen in **Figure 1** where the large triangle composed of dashed lines is a face of the regular icosahedron. When the radius of the sphere is the unity then the edge-lengths (chord factors) have the following values:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,2357541; \\ a_2 &= 0,2752134; \\ a_3 &= 0,2913202; \end{aligned}$$

and the quotient of the maximal and minimal edge-lengths is $\eta = 1,235695$.

We have constructed other inscribed triangle-faced polyhedra of the sphere with 3 different edge-lengths in the systems $\{3,5+\}_{3,0}$, $\{3,5+\}_{3,1}$ but the numbers of faces in these cases are only 180 and 260, respectively. At the same time we could construct other polyhedra of 380 and more than 380 triangle faces only with 4 or more than 4 different edge-lengths.

This result shows that it is worth to search after new networks for geodesic domes in the system $\{3,5+\}_{b,c}$, $b \neq c$, instead of the usual systems $\{3,5+\}_{b,0}$ and $\{3,5+\}_{b,b}$.

<p>Clinton 1980 J. D. Clinton P—ME—P</p>	<p>$(p, q+)_b, c$ Preprint, Kean College, Union, N.J., U.S.A., September, 1980</p>	<p>Classification and notation of geodesic domes ● La classification et notation des dômes géodésiques.</p>
<p>Coxeter 1972 H.S.M. Coxeter A—ME—P</p>	<p>Virus Macromolecules and Geodesic Domes S Spectrum of Mathematics (ed. J.C. Butcher) Auckland University Press and Oxford University Press 1972, 98-107.</p>	<p>Classification of geodesic domes ● Classification des dômes géodésiques.</p>
<p>Tarnai 1982 T. Tarnai A—M—P</p>	<p>Packing of 180 Equal Circles on a Sphere Elemente der Mathematik (submitted for publication) 1982.</p>	<p>Spherical circle packing in icosahedral symmetry ● Assemblages de cercles à symétrie icosaédrique sur la sphère.</p>