

Models of some Stellated 4-Polytopes

by Koji Miyazaki

Résumé

Topologie Structurale #8, 1983

Modèles de quelques 4-polytopes étoilés

Dans cet article, des modèles de trois 4-polytopes étoilés réguliers, $\{5/2, 5, 3\}$, $\{5, 5/2, 2\}$ et $\{5/2, 3, 3\}$, sont construits comme des analogues quadri-dimensionnels de $\{5/2, 5\}$, $\{5, 5/2\}$ et $\{5/2, 3\}$ en trois dimensions. Ils sont tous obtenus par l'étoilement de la cellule-120.

De plus, un modèle de l'hyper stella octangula est également construit comme l'analogue quadri-dimensionnel du stella octangula de Kepler, un des composés réguliers. On l'obtient par l'étoilement de la cellule-24.

Méthode de base

Si chaque cellule polyédrale d'un 4-polytope est produite en quatre dimensions jusqu'à ce qu'elle rencontre une autre cellule ayant un plan en commun, les cellules agrandies entourent un espace additionnel à quatre dimensions à l'extérieur du polytope original. La configuration qui en résulte a une forme étoilée. Ce nouveau 4-polytope est appelé le 4-polytope étoilé lorsque c'est un polytope simple, ou l'hyper-composé lorsqu'il est composé.

Il y a dix 4-polytopes étoilés réguliers (Coxeter 1973). Parmi ceux-ci, $\{5/2, 5, 3\}$, $\{5, 5/2, 2\}$ et $\{5/2, 3, 3\}$ sont dérivés en remplaçant chaque cellule dodécaédrique régulière de la cellule-120 par $\{5/2, 5\}$, $\{5, 5/2\}$ et $\{5/2, 3\}$ respectivement.

De la même manière, on obtient l'hyper stella octangula en remplaçant chaque cellule octaédrique régulière de la cellule-24 par le stella octangula de Kepler.

Abstract

Structural Topology #8, 1983

In this paper, models of three regular star 4-polytopes, $\{5/2, 5, 3\}$, $\{5, 5/2, 2\}$, and $\{5/2, 3, 3\}$, are constructed as 4-dimensional analogues of $\{5/2, 5\}$, $\{5, 5/2\}$, and $\{5/2, 3\}$ in 3-space. All of them are obtained from the stellation of the 120-cell.

Further, a model of the hyper stella octangula is also constructed as the 4-dimensional analogue of the Kepler's stella octangula, one of the regular compounds. This is obtained from the stellation of the 24-cell.

Basic method

If each polyhedral cell of a 4-polytope is produced in 4-space till it meets each other cell having a plane in common, the extended cells enclose additional 4-space exterior to the original polytope. The resulting configuration is star-shaped. This new born stellated 4-polytope is called the star 4-polytope when it is a single polytope, or the hyper compound when it is compound.

There are ten regular star 4-polytopes (Coxeter 1973). Among them, $\{5/2, 5, 3\}$, $\{5, 5/2, 2\}$ and $\{5/2, 3, 3\}$ are derived by replacing of each regular dodecahedral cell of the 120-cell with $\{5/2, 5\}$, $\{5, 5/2\}$ and $\{5/2, 3\}$ respectively.

Similarly, the hyper stella octangula is made by replacing each regular octahedral cell of the 24-cell with the Kepler's stella octangula.

La **Figure 1** nous montre le processus employé pour la construction du modèle de la cellule-120 {5, 3, 3}.

Le **numéro 1** illustre la cellule dodécaédrique régulière centrale. Le **numéro 2**, douze cellules dodécaédriques légèrement tordues autour de la cellule centrale. Le **numéro 3**, 20 cellules de plus, comprimées et attachées aux fossettes apparaissant au **numéro 2**. Le **numéro 4**, douze autres cellules comprimées déposées dans les fossettes apparaissant au **numéro 3**. Au **numéro 5**, douze pentagones réguliers apparaissent et 30 cellules dodécaédriques régulières sont réduites à des plans hexagonaux.

Modèle de {5/2, 5, 3}

{5/2, 5, 3} est obtenu au premier étoilement de {5, 3, 3} en remplaçant les 120 cellules dodécaédriques par 120 {5/2, 5}.

On construit le modèle selon la **Figure 2**. Les images des figures 1 et 2 portant le même numéro correspondent entre elles. Les images portant les numéros 1', 2', 3' et 4' de la **Figure 2** illustrent les stades intermédiaires de la construction. Dans chaque cas, les parties pentagonales de forme pyramidale de chaque cellule s'interpénètrent en trois dimensions, mais ne le font pas en quatre dimensions.

La vraie forme de chaque face est illustrée à la **Figure 3**, dont les parties foncées indiquent le plan (bas) et l'élévation (haut) de la projection orthogonale du dodécaèdre régulier.

Face **Z** = triangle isocèle abc

Face **Y** = triangle isocèle d'e'f'

Face **X** = triangle scalène d'g'h'

Face **W** = triangle scalène f'g'i'

Face **V** = triangle scalène d'f'g'

Face **U** = triangle scalène g'i'j'

Face **T** = triangle isocèle h'j'k'

Face **S** = triangle scalène f'i'j'

Là, une partie d'arête apparaît à l'intérieur des faces **T** et **S** du **numéro 5**.

Figure 1 shows the process constructing the model of the 120-cell {5, 3, 3}.

No 1 shows the central regular dodechaedral cell. **No 2**, twelve slightly distorted dodecahedral cells around the central one. **No 3**, twenty more distorted cells attached to the dimples appeared in **No 2**. **No 4**, twelve further distorted cells put into the dimples which appeared in **No 3**. In **No 5**, twelve regular pentagons appear and thirty regular dodecahedral cells are reduced to hexagonal planes.

Model of {5/2, 5, 3}

{5/2, 5, 3} is obtained as the first stellation of {5, 3, 3} by replacing the 120 dodecahedral cells with 120 {5/2, 5}'s.

The model is constructed as shown in **Figure 2**. The pictures bearing the same number correspond to one another in **Figure 1 and 2**. Those having the numbers 1', 2', 3' and 4' of **Figure 2** shows intermediate stages of the construction. In each case, the pentagonal pyramid-shaped parts of each cell penetrate each other in 3-space, but do not do so in 4-space.

The true shape of each face is shown in **Figure 3**, whose dark portions indicate the plan (bottom) and the elevation (top) of the orthogonal projection of the regular dodecahedron.

Face **Z** = Isoceles Triangle abc

Face **Y** = Isoceles Triangle d'e'f'

Face **X** = Scalene Triangle d'g'h'

Face **W** = Scalene Triangle f'g'i'

Face **V** = Scalene Triangle d'f'g'

Face **U** = Scalene Triangle g'i'j'

Face **T** = Isoceles Triangle h'j'k'

Face **S** = Scalene Triangle f'i'j'

Here, a portion of an edge appears within the faces **T** and **S** of **No 5**.

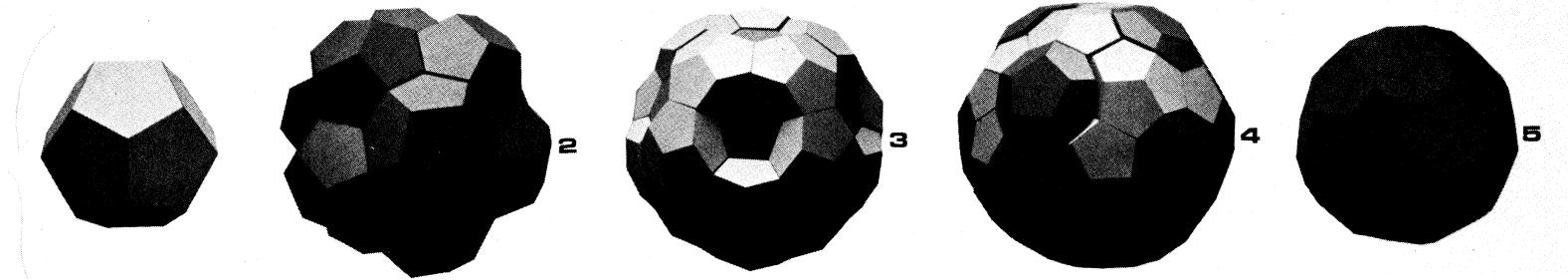


Figure 1

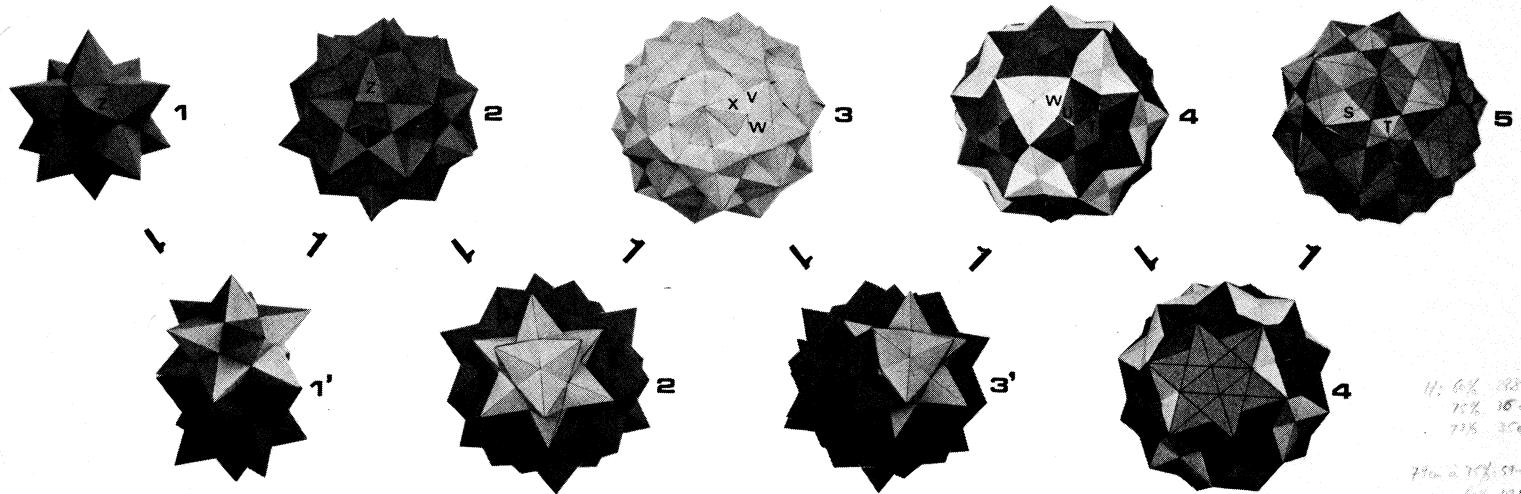
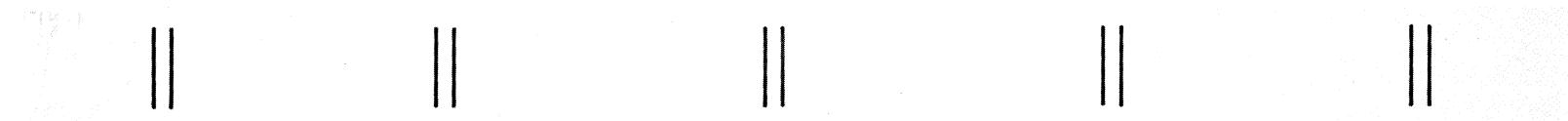


Figure 2

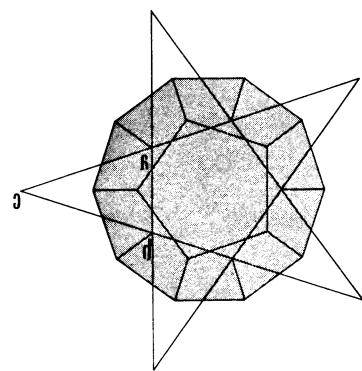
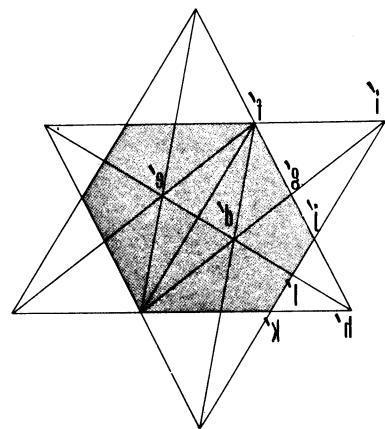


Figure 3

Figure 4

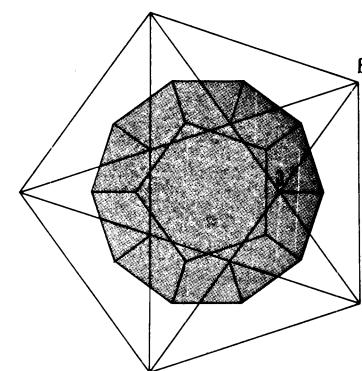
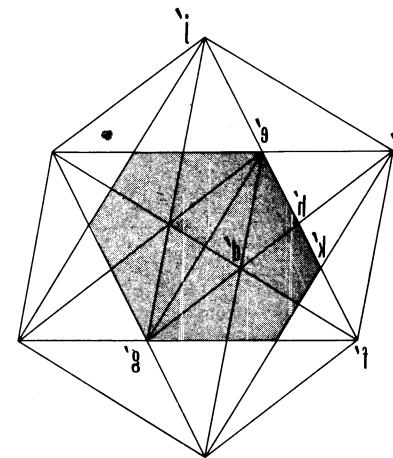
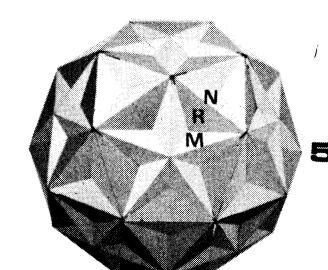
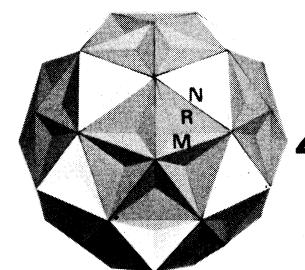
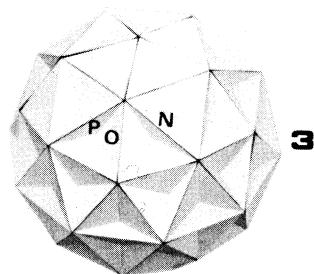
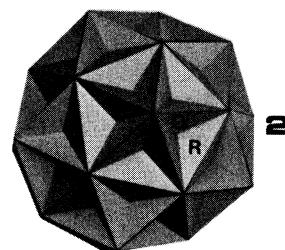
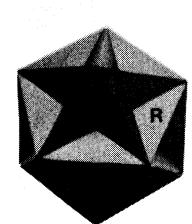


Figure 5



Modèle de {5, 5/2, 3}

{5, 5/2, 3} est obtenu en remplaçant les cellules de {5, 3, 3} par celles de {5, 5/2}.

Le modèle est construit comme à la **Figure 4**. Les images portant les mêmes numéros correspondent entre elles dans les **Figures 1 et 4**.

La véritable forme de chaque face est illustrée à la **Figure 5**.

Face **R** = triangle isocèle abc

Face **Q** = triangle scalène d'f'g'

Face **P** = triangle isocèle d'e'g'

Face **O** = triangle scalène f'h'i'

Face **N** = triangle isocèle e'i'j'

Face **M** = triangle scalène f'i'k'

Ici, les **numéros 4 et 5** ont la même forme extérieure mais sont de couleurs différentes.

Ici, une partie d'arête apparaît à l'intérieur des faces **T** et **S** du **numéro 5**.

Model of {5, 5/2, 3}

{5, 5/2, 3} is obtained by replacing the cells of {5, 3, 3} with 5, 5/2's.

The model is constructed as in **Figure 4**. The pictures bearing the same numbers correspond to each other in **Figures 1 and 4**.

The true shape of each face is shown in **Figure 5**.

Face **R** = Isosceles Triangle abc

Face **Q** = Scalene Triangle d'f'g'

Face **P** = Isosceles Triangle d'e'g'

Face **O** = Scalene Triangle f'h'i'

Face **N** = Isosceles Triangle e'i'j'

Face **M** = Scalene Triangle f'i'k'

Here, **Nos 4 and 5** have the same outer shape but different color, and a portion of an edge appears within the faces **T** and **S** of **No 5**.

Modèle de {5/2, 3, 3}

{5/2, 3, 3} est obtenu en remplaçant les cellules de {5, 3, 3} par celles de {5/2, 3}.

Le modèle est construit comme à la **Figure 6**. Les images ayant le même numéro correspondent entre elles dans les **Figures 1 et 6**.

La véritable forme de chaque face est illustrée à la **Figure 7**. Ici, ad || xy, rd || uz, as || bv, h'm' || e'i', e'g' ⊥ f'g', o't' ⊥ f'g'.

Face **L** = triangle isocèle abc

Face **K** = forme d'arête abcd

Face **J** = triangle droit e'f'g'

Face **I** = forme d'arête h'i'j'

Face **H** = triangle scalène f'h'l'

Face **G** = forme de cerf-volant j'm'k'n'

Face **F** = quadrilatère convexe l'o'q'p'

Face **E** = forme d'arête crds

Face **D** = triangle droit f'o't'

Ici, les **numéros 4 et 5** ont la même forme extérieure, mais des couleurs différents.

Model of {5/2, 3, 3}

{5/2, 3, 3} is obtained by replacing the cells of {5, 3, 3} with {5/2, 3}'s.

The model is constructed as in **Figure 6**. Pictures having the same number correspond to each other in **Figures 1 and 6**.

The true shape of each face is shown in **Figure 7**. Here, ad || xy, rd || uz, as || bv, h'm' || e'i', e'g' ⊥ f'g', o't' ⊥ f'g'.

Face **L** = Isosceles Triangle abc

Face **K** = Arrow Shape abcd

Face **J** = Right Triangle e'f'g'

Face **I** = Arrow Shape h'i'j'

Face **H** = Scalene Triangle f'h'l'

Face **G** = Kite Shape j'm'k'n'

Face **F** = Convex Quadrangle l'o'q'p'

Face **E** = Arrow shape crds

Face **D** = Right Triangle f'o't'

Here, **Nos 4 and 5** have the same outer shape but the different color.

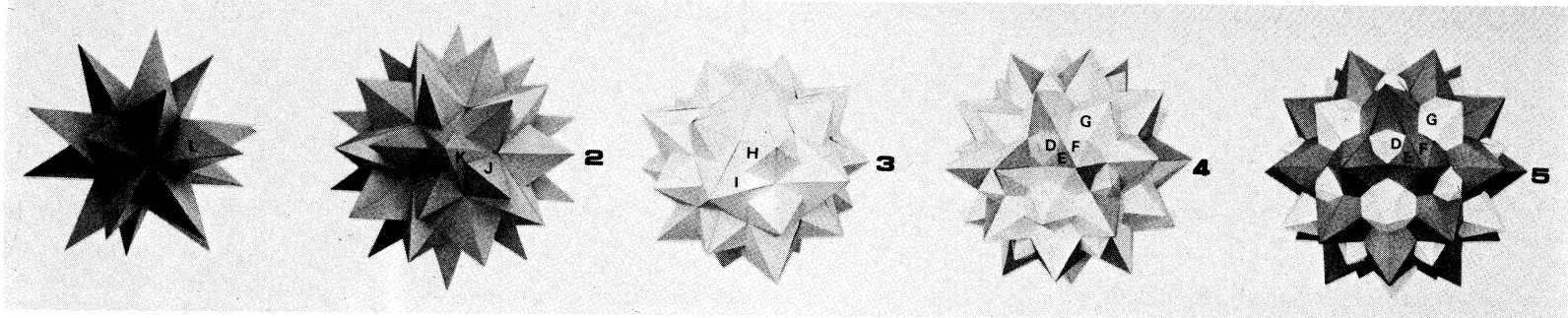


Figure 6

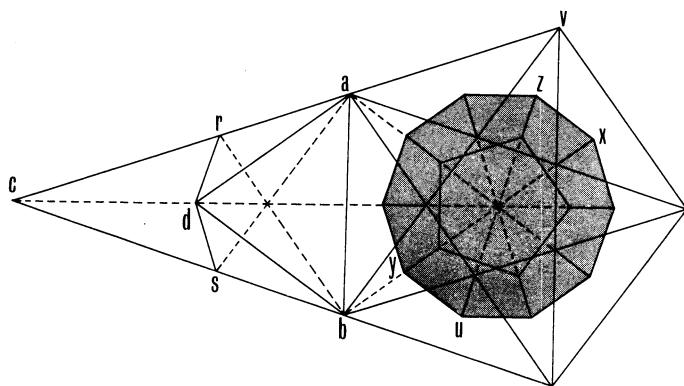
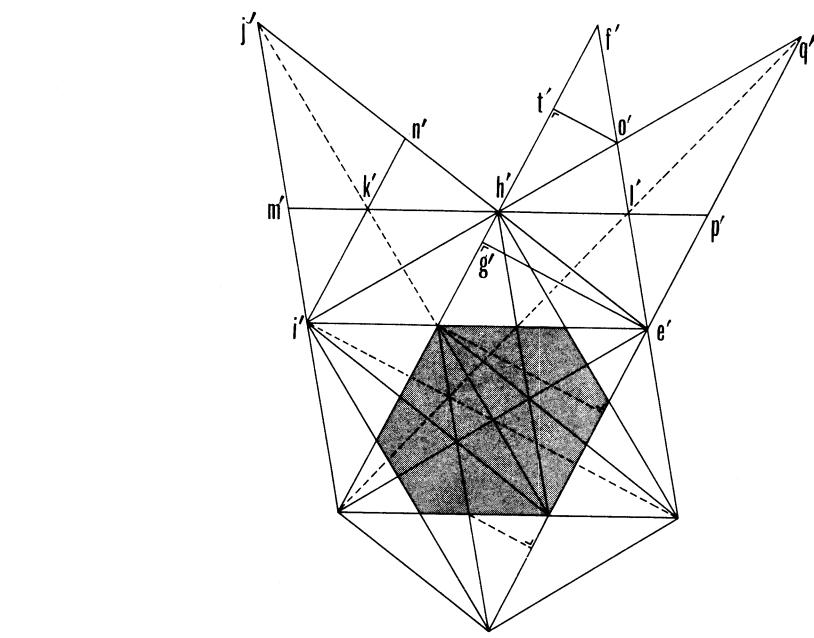


Figure 7

Modèle de l'hyper stella octangula

Il n'y a pas de polytopes étoilés dérivés de 5-, 8-, 16-, et de la cellule 24. Mais on obtient un hyper-composé à partir de la cellule-24 {3, 4, 3}, l'hyper stella octangula.

La Figure 8 illustre le processus employé pour obtenir le modèle de {3, 4, 3}.

Le **numéro 1** montre la cellule octaédrique régulière centrale. Le **numéro 2**, quatre cellules octaédriques légèrement comprimées autour de la cellule centrale. Le **numéro 3**, quatre cellules additionnelles pour illustrer la forme extérieure d'un cuboctaèdre. Au **numéro 4**, six cellules sont réduites à des plans carrés attachés aux faces carrées du cuboctaèdre.

Le **numéro 4** nous montre la carcasse extérieure de {3, 4, 3}, et lorsqu'on répète le procédé à partir de l'extérieur vers l'intérieur jusqu'à ce que la cellule octaédrique régulière centrale du **numéro 1** apparaisse, alors la forme entière de {3, 4, 3} apparaîtra.

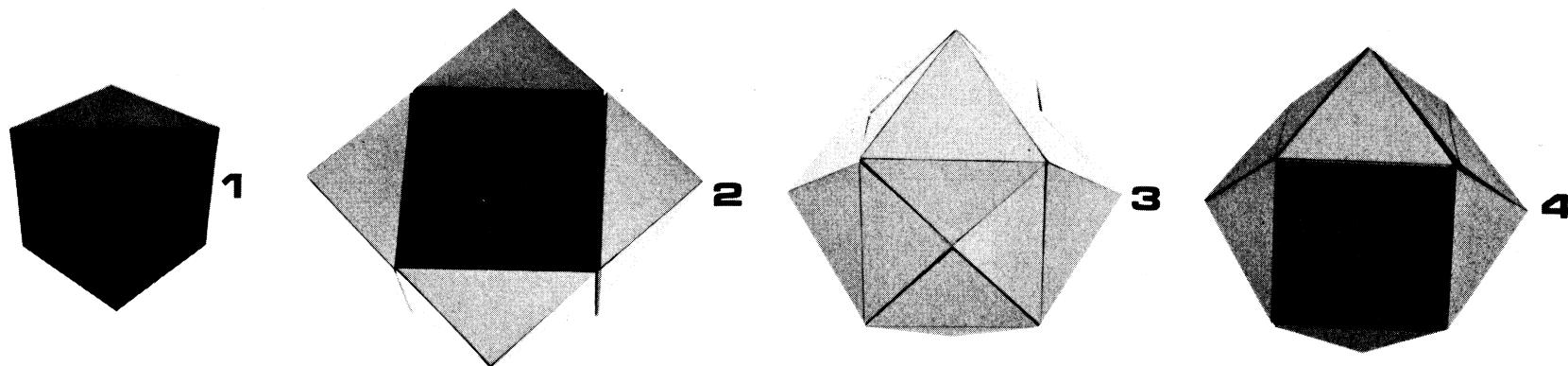
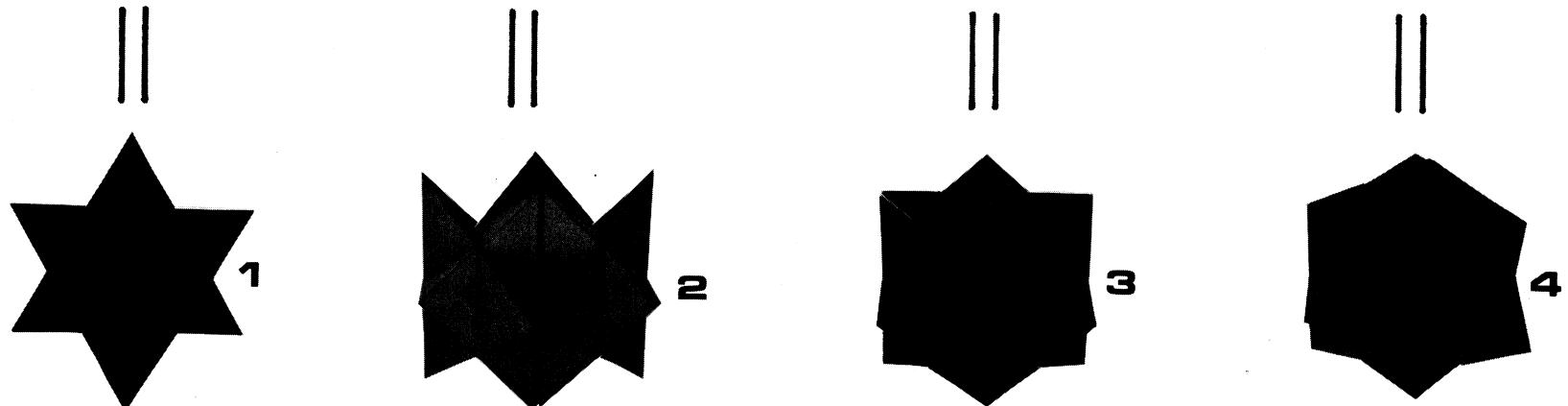


Figure 8



Model of the Hyper Stella Octangula

There are no star polytopes which are derived from the 5-, 8-, 16-, and 24-cell. But a hyper compound is obtained from the 24-cell {3, 4, 3}, the hyper stella octangula.

Figure 8 shows the process making the model of {3, 4, 3}.

No 1 shows the central regular octahedral cell. No 2, four slightly distorted octahedral cells around the central one. No 3, additional four cells to show the outer shape of a cuboctahedron. In No 4, six cells are reduced to square planes which are attached to the square faces of the cuboctahedron.

No 4 shows the outer shell of {3, 4, 3}, and when the procedure is repeated from outside in, till the central regular octahedral cell of No 1 appears, then the whole shape of {3, 4, 3} will be shown.

Le nombre de cellules est:

$$1 \text{ No } 1 + 8 \text{ No } 3 + 6 \text{ No } 4 + 8 \text{ No } 3 + 1 \text{ No } 1 = 24$$

L'hyper stella octangula est obtenu en remplaçant les cellules de cette cellule-24 par le stella octangula de Kepler, comme à la **Figure 9**. Les images ayant le même numéro correspondent entre elles dans les **Figures 8 et 9**. Le **numéro 4**, la forme la plus à l'extérieur, est composé d'un cube à diagonales de face et d'un heptaèdre à un seul côté.

La véritable forme de chaque face est évidente par elle-même.

The number of cells is:

$$1 \text{ No } 1 + 8 \text{ No } 3 + 6 \text{ No } 4 + 8 \text{ No } 3 + 1 \text{ No } 1 = 24$$

The hyper stella octangula is obtained by replacing the cells of this 24-cell with Kepler's stella octangula as in **Figure 9**. The pictures having the same number are corresponding each other in **Figures 8 and 9**. **No 4** as the outermost shape is composed of a cube with face diagonals and a one-sided heptahedron.

The true shape of each face is self-evident.

Bibliography

Coxeter 1973		
H.S.M. Coxeter	Regular Polytopes	Chap. XIV (Star-Polytopes)
B-M-P	3rd edition, Dover, 1973	