

Does Every Type of Polyhedron Tile Three-Space?

by Ludwig Danzer, Branko Grünbaum¹ and G.C. Shephard

Topologie Structurale #8, 1983

Tous les types de polyèdres peuvent-ils carreler
l'espace à trois dimensions?

Structural Topology #8, 1983

Il est bien connu que si, pour un n donné, le plan peut être carrelé par des n -gones convexes, alors $n = 3, 4, 5$ ou 6 . Comme plusieurs énoncés qui appartiennent au folklore des mathématiques, cette assertion est, au mieux, seulement partiellement vraie. On devrait remarquer que nous n'insistons pas pour que les polygones soient réguliers, ou même congruents les uns avec les autres. De fait, sans congruence, l'affirmation est totalement fausse comme on peut le voir grâce aux carrelages de la **Figure 1**. Nous y illustrons un carrelage du plan par des heptagones convexes, trois heptagones se rejoignant à chaque sommet. Les heptagones ne sont pas congruents, mais dans le plan hyperbolique (non-euclidien), il existe un carrelage régulier par des heptagones se rejoignant par trois à chaque sommet (Fejes Toth 1964).

Des exemples comme ceux-ci peuvent être éliminés et la vérité ramenée à l'affirmation originale si nous nous restreignons à étudier les carrelages *normaux*. Cela garantit que les tuiles ne deviennent ni trop longues ni trop minces, et qu'elles ne s'entassent pas les unes sur les autres lorsque nous allons de plus en plus loin à partir d'un point fixe O . La définition formelle de la normalité est la suivante: s'il existe deux nombres positifs u et U de telle sorte que chaque tuile d'un carrelage T contient un disque circulaire de rayon u et qu'elle est contenue dans un disque circulaire de rayon U , alors T est appelé un carrelage **normal**². La véracité de l'assertion voulant que pour chaque carrelage normal du plan par des n -gones convexes, $n = 3, 4, 5$ ou 6 , a été établie à plusieurs reprises (Reinhardt 1918, Niven 1979, Grünbaum-Shephard 1982).

It is well-known that if, for a given n , the plane can be tiled by convex n -gons, then $n = 3, 4, 5$ or 6 . Like many statements that belong to the folklore of mathematics, this assertion is, at best, only partially true. It should be noted that we do not insist that the polygons be regular, or even congruent to each other. In fact, without congruence the statement is clearly untrue as can be seen from tilings such as that of **Figure 1**. Here we show a tiling of the plane by convex heptagons, three meeting at each vertex. The heptagons are not congruent but in the hyperbolic (non-Euclidean) plane there exists a regular tiling by heptagons meeting three at a vertex (Fejes Toth 1964).

Examples like this can be eliminated, and truth restored to the original statement if we restrict attention to *normal* tilings. This ensures that the tiles do not get too long and thin, and so «bunch up» too much as we proceed further and further from the point O . The formal definition of normality is as follows: if there exist two positive numbers u and U such that every tile of a tiling T contains a circular disc of radius u and is contained in a circular disc of radius U , then T is called a **normal**² tiling. The truth of the assertion that for every normal tiling of the plane by convex n -gons, $n = 3, 4, 5$, or 6 , has been established many times (Reinhardt 1918, Niven 1979, Grünbaum-Shephard 1982).

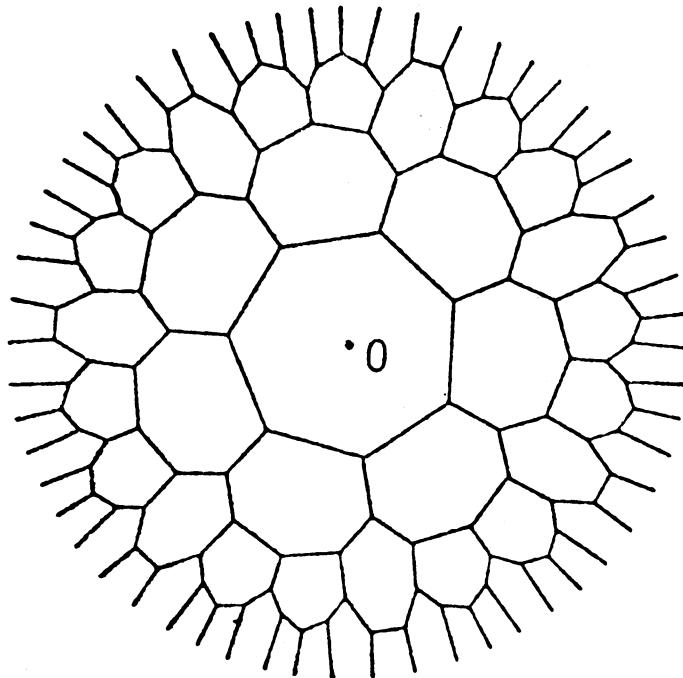


Figure 1. A tiling of the plane by heptagons, three of which meet at each vertex ● Un carrelage du plan par des heptagones, où trois de ceux-ci sont incidents à chaque sommet.

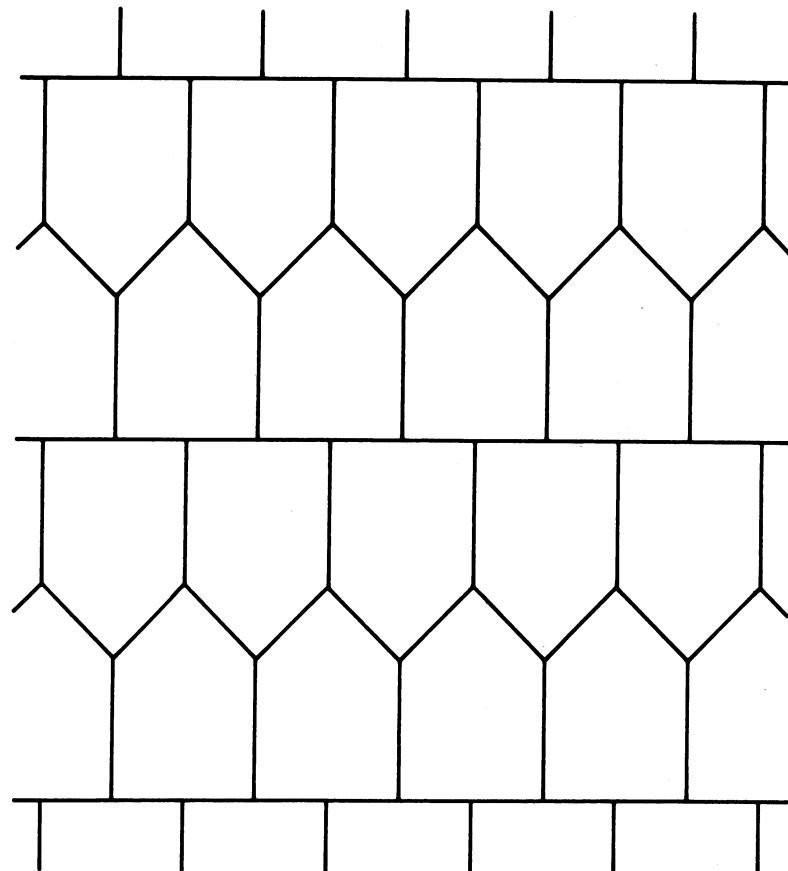


Figure 2. An isohedral tiling of the plane by pentagons. This tiling is not edge-to-edge ● Un carrelage isoédrique du plan par des pentagones. Ce carrelage n'en est pas un du type d'arête-à-arête.

C'est un fait remarquable que si n est tel qu'un carrelage normal du plan par des n -gones convexes est possible, alors il est aussi possible de carreler par des n -gones d'une manière isoédrique. Un carrelage est appelé **isoédrique** si, pour chaque deux tuiles T_i , T_j de \mathbf{T} , il existe une symétrie du carrelage \mathbf{T} qui fait recouvrir T_i par T_j . (Ici une **symétrie** signifie toute isométrie du plan euclidien sur lui-même.) Les carrelages réguliers bien connus illustrent cette assertion pour $n = 3, 4$ ou 6 et il existe plusieurs carrelages isoédriques par des pentagones (voir, par exemple, Schattschneider 1978, 1981 et Grünbaum-Shephard 1982 et la **figure 2**). Toutefois, si un carrelage par un n -gone convexe donné est possible alors il ne s'ensuit pas que le même n -gone carrelera nécessairement d'une manière isoédrique. Un exemple d'un tel carrelage, avec $n = 5$, est présenté à la **figure 3**. Il n'en découle pas non plus que si un n -gone convexe carrelle le plan alors il carrelera également d'arête à arête, c'est-à-dire de telle sorte que l'intersection de n'importe quelles deux tuiles voisines constitue une arête de chacune d'entre elles, voir à la **figure 4**.

It is a remarkable fact that if n is such that a tiling of the plane by convex n -gons is possible, then it is also possible to tile by n -gons in an isohedral manner. A tiling is called **isohedral** if, for every two tiles T_i , T_j of \mathbf{T} , there exists a **symmetry** of the tiling \mathbf{T} which maps T_i onto T_j . (Here a **symmetry** means any isometry of the Euclidean plane onto itself.) The well-known regular tilings illustrate this assertion for $n = 3, 4$ or 6 and many isohedral tilings by pentagons exist (see, for example, Schattschneider 1978, 1981 or Grünbaum - Shephard 1982 and **Figure 2**). However, if a tiling by a given convex n -gon is possible then it does not follow that the same n -gon will necessarily tile isohedrally. An example of such a tiling, with $n = 5$, is shown in **Figure 3**. Nor does it follow that if a convex n -gon will tile the plane then it will also tile in an edge-to-edge manner, that is, so that the intersection of any two neighbouring tiles is an edge of each, see **Figure 4**.

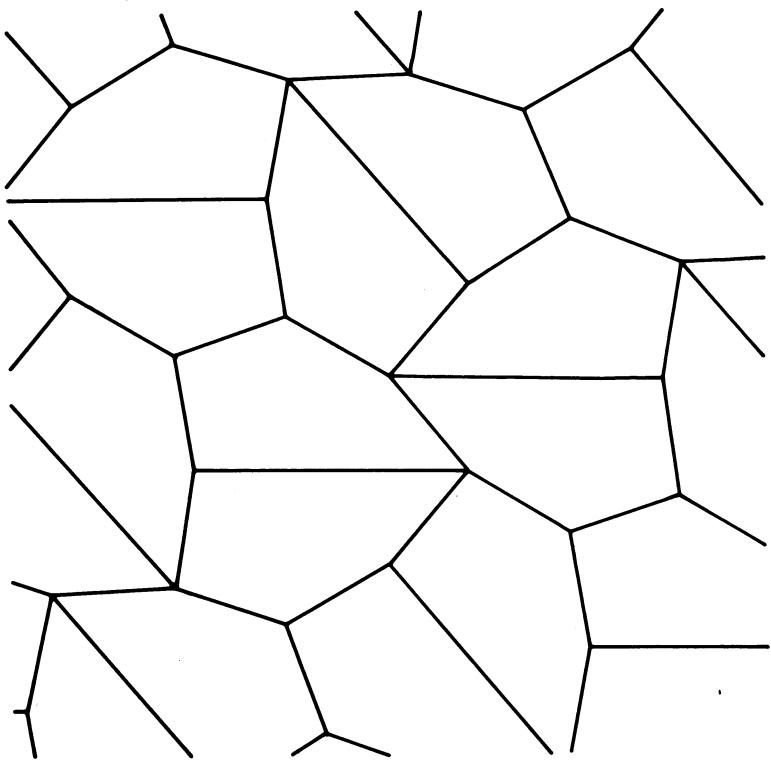


Figure 3. A tiling by convex pentagons which is not isohedral; there exists no isohedral tiling using this shape of tile. This tiling was discovered by Kershner in 1968 ● Un carrelage par des pentagones convexes qui n'est pas isoédrique; il n'existe aucun carrelage isoédrique qui utilise cette forme de tuile. Ce carrelage fut découvert par Kershner en 1968.

Le but de ce court article est d'attirer l'attention sur le fait que nous connaissons peu de choses sur le problème analogue des carrelages dans l'espace tridimensionnel. Afin de pouvoir étudier ces problèmes, il est nécessaire d'introduire le concept du type d'*isomorphisme* d'un polyèdre convexe. Nous pourrons dire que deux polyèdres P_1 et P_2 sont **isomorphes**, ou du **même type**, s'il existe une correspondance parfaite entre les sommets, les arêtes et les faces de P_1 , et les sommets, les arêtes et les faces de P_2 , ce qui est compatible avec la relation d'incidence. En d'autres mots, P_1 et P_2 sont du même type si l'on peut transformer l'un en l'autre en effectuant une déformation qui conservera la convexité et l'aspect plat des faces³. Ainsi, par exemple, chaque polyèdre (tel qu'un parallélépipède) possédant six faces quadrangulaires, trois faces se rejoignant à chaque sommet, est isomorphe à tout autre polyèdre semblable. Comme autre exemple, nous pouvons mentionner que n'importe quel prisme hexagonal est isomorphe au tronc d'une pyramide hexagonale. Les polyèdres isomorphiques doivent posséder le même nombre de faces n -gonales pour chaque n , le même nombre d'arêtes et, pour chaque m , le même nombre de sommets où les arêtes m se rencontrent. Mais ces seuls nombres ne sont pas suffisants pour l'*isomorphisme* (voir à la **figure 5**); il faut également que les faces, les arêtes et les sommets «s'adaptent ensemble de la même manière».

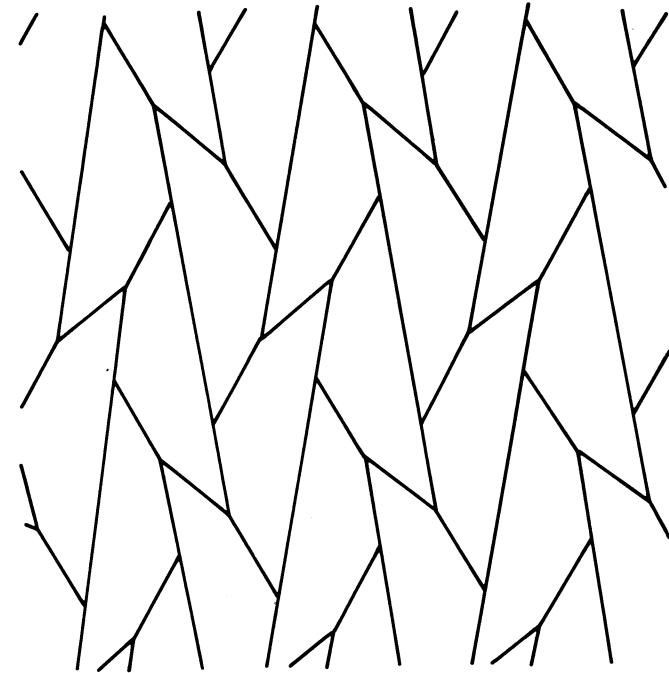


Figure 4. A tiling discovered by H. Heesch (Heesch 1968, p. 46). There exists no edge-to-edge tiling of the plane using this pentagonal tile ● Un carrelage découvert par H. Heesch (Heesch 1968, p. 46). Il n'existe aucun carrelage du plan du type d'arête-à-arête qui utilise cette tuile pentagonale.

The purpose of this short note is to draw attention to the fact that we know extremely little about the corresponding problems for tilings in three-dimensional space. In order to state these problems it is necessary to introduce the concept of the *isomorphism type* of a convex polyhedron. We shall say that two convex polyhedra P_1 and P_2 are **isomorphic**, or of the same type, if there exists a one-to-one correspondence between the vertices, edges and faces of P_1 , and the vertices, edges and faces of P_2 which is compatible with incidence. In other words P_1 and P_2 are of the same type if one can be transformed into the other by a deformation which preserves convexity and the flatness of faces³. Thus, for example, every polyhedron (such as a parallelopiped) which has six quadrangular faces, three meeting at each vertex, is isomorphic to any other such polyhedron. As another example we mention that any hexagonal prism is isomorphic to the frustum of a hexagonal pyramid. Isomorphic polyhedra must have the same number of n -gonal faces for each n , the same number of edges and, for each m , the same number of vertices at which m edges meet. But these numbers alone are not sufficient for isomorphism (see **Figure 5**); it is also necessary that the faces, edges and vertices «fit together in the same way».

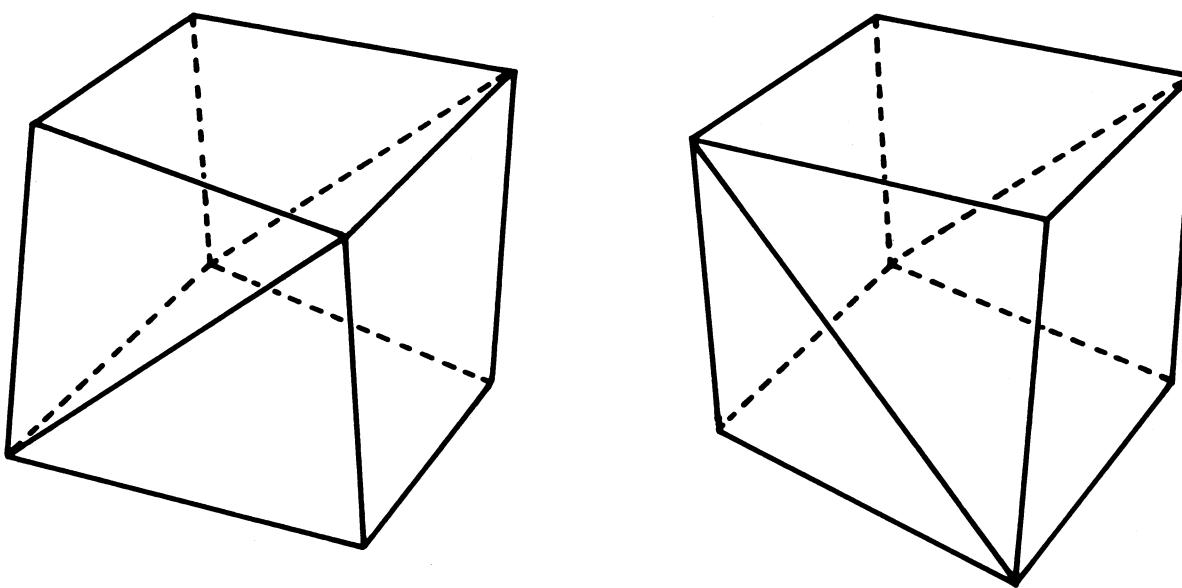


Figure 5. Two polyhedra which have the same number of n -gonal faces (for each n), the same number of edges, and, for each m , the same number of vertices at which m edges meet, yet these polyhedra are not isomorphic

- Ces deux polyèdres ont le même nombre de faces n -gonales (pour chaque n), le même nombre d'arêtes, et, pour chaque m , le même nombre de sommets avec m arêtes incidentes; et pourtant, ils ne sont pas isomorphes.

Nous pouvons maintenant aborder le principal problème.

Est-il possible de carreler l'espace tridimensionnel par des polyèdres convexes chacun pouvant être de n'importe quel type d'isomorphisme?

La réponse à cette question, originellement posée par un premier auteur en 1975, n'est pas connue; nous avons le sentiment que sans autres restrictions elle pourrait être vraie. Toutefois, le problème devient beaucoup plus intéressant si nous nous restreignons à l'étude des carrelages normaux. (Dans l'espace à trois dimensions, la normalité est définie comme ci-haut sauf qu'il est nécessaire que chaque tuile contienne une balle sphérique de rayon u , et que chaque tuile soit contenue dans une balle sphérique de rayon U .) C'est pour une question de commodité que nous restreignons notre attention aux polyèdres convexes; laisser tomber la convexité ajouterait des complications superflues à un problème déjà suffisamment complexe.

Comme dans le cas bidimensionnel, la nature du problème change d'une manière radicale si nous insistons pour que toutes les tuiles soient congruentes. En dépit de plusieurs affirmations contraires (voir Coxeter 1978, Critchlow 1970, Goldberg 1979, Williams 1972), on ne connaît pas de limite supérieure au nombre de faces d'un polyèdre convexe, dont les copies congruentes pourraient carreler l'espace à trois dimensions. Pendant longtemps, on a cru que le nombre maximum de faces était de 26 (Brunner-Laves 1978), mais en 1981 Engel (voir Engel 1981) a découvert plusieurs polyèdres de cette sorte possédant un plus grand nombre de faces — jusqu'à 38, voir à la **figure 6**. En fait, non seulement les copies congruentes de ce polyèdre peuvent carreler l'espace tridimensionnel, mais elles le font d'une manière isoédrique et face-à-face. (**Face-à-face** signifie que les tuiles voisines se rejoignent dans une des faces de chacune d'entre elles). Toutefois, on ne sait pas si 38 est le nombre maximum possible,

We can now state the central problem.

Is it possible to tile three-dimensional space by convex polyhedra all of which are of any given isomorphism type?

The answer to this question, originally posed by the first author in 1975, is not known, and we suspect that without further restriction it may be in the affirmative. However, the problem becomes much more interesting if we restrict attention to normal tilings. (In three dimensions normality is defined as above except that we require each tile to contain a spherical ball of radius u , and to be contained in a spherical ball of radius U .) It is for convenience that we restrict attention to convex polyhedra: to drop convexity would add needless complications to an already difficult problem.

As in the two-dimensional case, the character of the problem changes radically if we insist that all the tiles are congruent. In spite of various assertions to the contrary (see Coxeter 1978, Critchlow 1970, Goldberg 1979, Williams 1972), no upper bound for the number of faces of a convex polyhedron, of which congruent copies will tile three-space, is known. For a time it was thought that the maximum number of faces was 26 (Brunner - Laves 1978), but in 1981 Engel (see Engel 1978) discovered several such polyhedra with more faces - up to 38, see **Figure 6**. In fact, not only do congruent copies of this polyhedron tile three-space, but they do so in an isohedral and face-to-face manner. (**Face-to-face** means that neighboring tiles intersect in a face of each.) However, it is unknown if 38 is the maximum possible number, or, indeed, if any such maximum exists. On the other hand, a result of Delone (Delone 1961) implies that a convex polyhedral tile which isohedrally and face-to-face cannot have more than 390

ou vraiment, s'il existe un tel maximum. D'un autre côté, un résultat obtenu par Delone (Delone 1961) implique qu'une tuile polyédrique convexe qui carrelle d'une manière *isoédrique et face-à-face* ne peut pas avoir plus de 390 faces. Pour avoir des renseignements supplémentaires et pour connaître l'historique de ces problèmes, il serait bon de consulter Grünbaum-Shephard 1980.

faces. For further information and a history of these problems see Grünbaum-Shephard 1980.

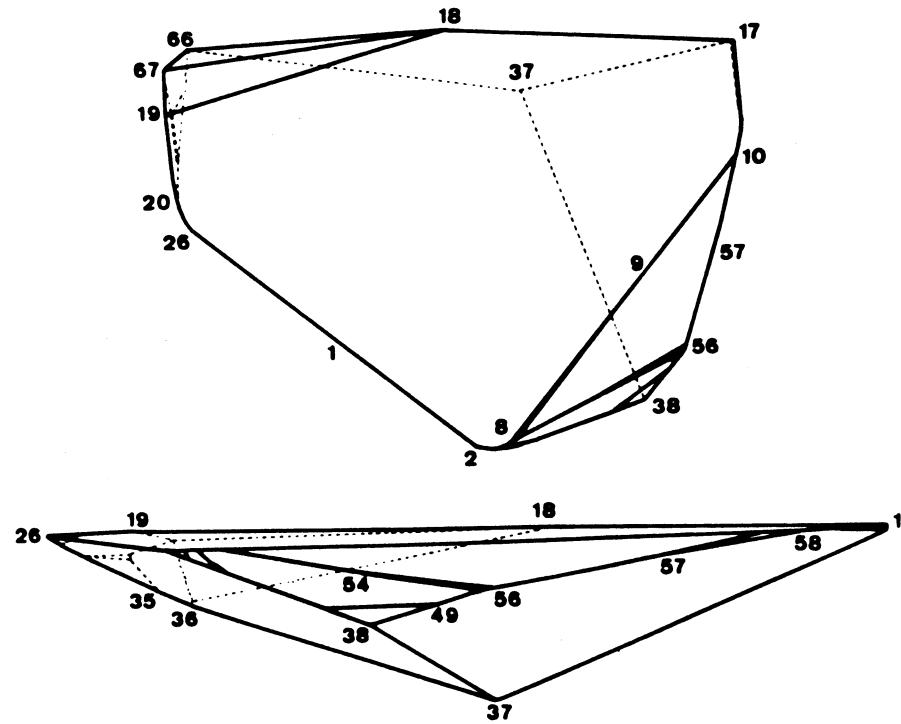


Figure 6. One of Engel's 38-faces polyhedra which will tile three-dimensional space isohedrally and face-to-face

- Un des polyèdres d'Engel à 38 faces qui produit un carrelage isoédrique de l'espace tridimensionnel du type face-à-face.

Considérons maintenant le problème en excluant la condition qui veut que les tuiles soient congruentes, mais en considérant uniquement qu'elles soient du même type d'isomorphisme. Nous spécifions également que tous les carrelages étudiés sont normaux. La première remarque que nous pouvons faire est que dans cette formulation, il n'existe pas de limite supérieure pour le nombre de faces. On peut le voir dans la construction illustrée à la **figure 7**. Un **6-coins** est un polyèdre à 7 faces: deux hexagones, trois triangles et trois quadrilatères. Plus fréquemment, un **n-coin** est l'enveloppe convexe de deux n -gones réguliers ayant une arête commune, situés dans des plans distincts; il possède $n + 1$ faces. Il est maintenant facile de carreler l'espace tridimensionnel par des 6-coins puisqu'ils peuvent être assemblés par paires pour former des prismes à 6 côtés, et le dernier peut être installé par couches comme les hexagones dans un carrelage régulier du plan. De plus, il est possible de séparer un 6-coins en deux 7-coins dans une coupe plane — ceci est indiqué par la fine ligne à la **figure 7**. En

Now consider the problem without the condition that the tiles be congruent, but only that they are of the same isomorphism type. We also specify that all tilings to be considered are normal. The first remark is that in this formulation there is no upper bound to the number of faces. This can be seen from the construction shown in **Figure 7**. A **6-wedge** is a polyhedron with 7 faces: two hexagons, two triangles and three quadrilaterals. More generally an **n-wedge** is the convex hull of two regular n -gons with one edge in common, situated in distinct planes; it has $n + 1$ faces. Now it is easy to tile three-space by 6-wedges since they can be assembled in pairs to form 6-sided prisms, and the latter can be arranged in layers like the hexagons in a regular tiling of the plane. Moreover it is possible to cut a 6-wedge into two 7-wedges by a plane cut - this is indicated by the thin line in **Figure 7**. In general, in a similar manner, an n -wedge can be cut by a plane into two $(n + 1)$ -wedges. Consequently, repeated application of this procedure leads to a tiling of three-space by n -wedges for arbitrarily large n , and so to a tiling by

général, d'une manière semblable, un n-coin peut être séparé par un plan en deux (n+1)-coins. Conséquemment, la répétition de ce procédé nous amène à un carrelage de l'espace tridimensionnel par n-coins pour un n arbitrairement grand et ainsi, à un carrelage par des polyèdres convexes isomorphes ayant un nombre de faces arbitrairement grand. Nous devons mentionner que le carrelage obtenu n'est pas «face-à-face», et nous ne connaissons pas de méthode pour le modifier en carrelage «face-à-face». Les n-coins produits par cette construction ne sont évidemment pas congruents.

Figure 7. A 6-wedge and how it may be cut by a plane (indicated by the thinner line) into two 7-wedges
 • Un 6-coins et la façon dont un plan (indiqué par la ligne la plus mince) peut le découper en deux 7-coins.

En utilisant une procédure légèrement plus compliquée, il est toutefois possible d'obtenir un carrelage face-à-face et normal par des polyèdres convexes isomorphes ayant un nombre de faces arbitraire. Ceci est illustré dans les **figures 8 et 9**. Pour tout nombre entier positif n nous empilons des briques (parallélépipèdes réguliers) de dimension $1 \times 1 \times 2n$ au-dessous et au-dessus d'un carré de côté $2n$ situé dans le plan (x, y) et centré à l'origine $(0, 0, 0)$, voir à la **figure 8(a)**. (Pour tout nombre entier t , les briques entre les plans $z = 2t - 1$ et $z = 2t$ ont leurs longs côtés parallèles à l'axe x , et celles entre les plans $z = 2t$ et $z = 2t + 1$ ont leurs longs côtés parallèles à l'axe y). Les juxtapositions mutuelles des briques donne à chaque brique la «structure de face» d'un prisme à $(4n + 2)$ côtés, voir à la **figure 8(b)**. Naturellement, de cette façon aucun des carrés obtenus après la division des deux longues faces des briques est une face authentique au sens habituel puisque les carrés adjacents sont coplanaires. Mais, comme nous le démontrerons maintenant, on pourra remédier à la situation par une simple modification et convertir ainsi chaque brique en un polyèdre convexe du même type d'isomorphisme que le prisme à $(4n + 2)$ côtés. Pour effectuer cette modification, nous remplaçons chaque «face» carrée à sommets

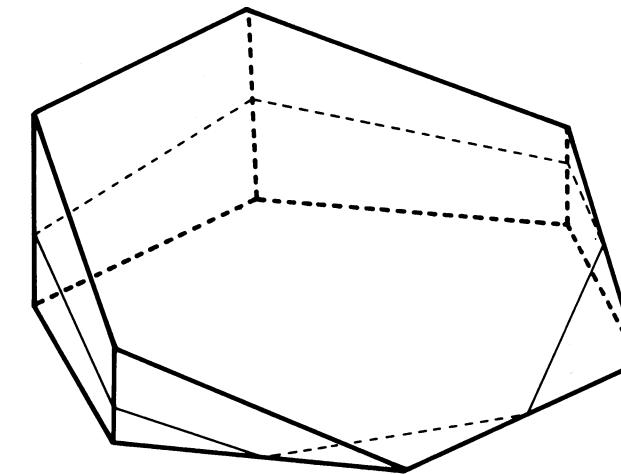
$$(p, q, k) (p+1, q, k) (p+1, q+1, k) (p, q+1, k)$$

où p, q, k sont des nombres entiers et $-n \leq p < n, -n \leq q < n$, par le quadrilatère à sommets

$$(p, q, f(p, q)) (p+1, q, f(p+1, q)) (p+1, q+1, f(p+1, q+1)) (p, q+1, f(p, q+1))$$

Ici $z = f(x, y) = k + (-1)^k(x^2 - y^2)/100n^2$ est un paraboloïde hyperbolique qui est très «plat» et repose près du plan original du carré $z = k$ dans la région étudiée. Il est facile de vérifier que chacun de ces quadrilatères est effectivement planaire et que l'effet sur chaque brique est la transformation de celle-ci en polyèdre convexe du type désiré. Dans la **figure 9**, nous pouvons observer l'empilement modifié; pour plus de clarté, l'effet des modifications a été exagéré.

isomorphic convex polyhedra with arbitrarily many faces. It should be mentioned that the resultant tiling is not face-to-face, and we know of no method of turning it into a face-to-face tiling. The n -wedges resulting from this construction are not, of course, congruent.



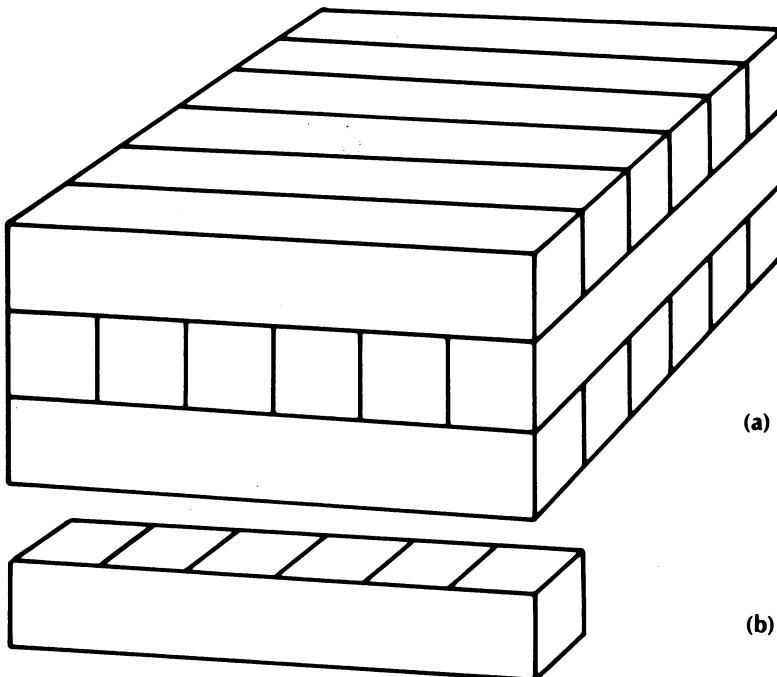
However, by a slightly more complicated procedure it is possible to obtain a face-to-face and normal tiling by isomorphic convex polyhedra with arbitrarily many faces. This is illustrated in **Figures 8 and 9**. For any positive integer n we stack bricks (rectangular parallelopipeds) of size $1 \times 1 \times 2n$ under and over a square of side $2n$ lying in the (x, y) -plane and centred at the origin $(0, 0, 0)$, see **Figure 8(a)**. (For any integer t , the bricks between the planes $z = 2t - 1$ and $z = 2t$ have their long sides parallel to the x -axis, and those between the planes $z = 2t$ and $z = 2t + 1$ have their long sides parallel to the y -axis.) The mutual adjacencies of the bricks impart to each brick the face structure of a $(4n + 2)$ -sided prism, see **Figure 8(b)**. Of course, none of the squares into which two long faces of the brick are divided in this way is a genuine face in the usual sense since adjacent squares are coplanar. But, as we shall now show, a slight modification will remedy this situation and convert each brick into a convex polyhedron with the same isomorphism type as the $(4n + 2)$ -sided prism. To do this we replace each square face with vertices

$$(p, q, k) (p+1, q, k) (p+1, q+1, k) (p, q+1, k)$$

where p, q, k are integers and $-n \leq p < n, -n \leq q < n$, by the quadrangle with vertices

$$(p, q, f(p, q)) (p+1, q, f(p+1, q)) (p+1, q+1, f(p+1, q+1)) (p, q+1, f(p, q+1)).$$

Here $z = f(x, y) = k + (-1)^k(x^2 - y^2)/100n^2$ is a hyperbolic paraboloid which is very flat and lies near the original plane of the square $z = k$ in the region under consideration. It is an easy exercise to check that each of these quadrangles is, indeed, planar and that the effect on each brick is to turn it into a convex polyhedron of the required type. In **Figure 9** we show the appearance of the modified stack; for clarity the effect of the modifications has been exaggerated.



(a)

(b)

Figure 8. The first stage in the construction of a tiling by isomorphic convex polyhedra with arbitrarily many faces. In (a) we show how bricks of size $1 \times 1 \times 2n$ can be stacked so as to impart to each the face-structure of a $(4n + 2)$ -sided prism, as shown in (b). The diagram shows the case $n = 3$. • La première étape dans la construction d'un carrelage par des polyèdres convexes isomorphes ayant un nombre arbitraire de faces. En (a) nous démontrons comment les briques de dimension $1 \times 1 \times 2n$ peuvent être empilées pour donner à chacune la structure de face d'un prisme à $(4n + 2)$ côtés, comme démontré en (b). Le diagramme démontre le cas $n = 3$.

Pour obtenir un carrelage de tout l'espace à trois dimensions, nous prenons les assemblages de toutes les reproductions de l'empilement modifié par des vecteurs de forme $2ni + 2nsj$, où i et j sont des vecteurs unitaires parallèles aux axes x et y respectivement, et r, s sont des nombres entiers. Il est évident que le carrelage ainsi obtenu est face-à-face et que les tuiles forment exactement n classes de transitivité sous les symétries (isométriques) du carrelage. Il est alors normal. La construction peut être modifiée, si on le veut, pour s'appliquer au cas où l'empilement original est basé sur un carré à côtés de longueur impaire au lieu d'un carré à côtés de longueur paire. Dans ce cas, les briques deviennent des polyèdres convexes de longueur $2n + 1$ du même type d'isomorphisme que le prisme à $(4n + 4)$ côtés.

Puisqu'il n'y a pas de limite supérieure pour le nombre de faces, on peut alors se demander si chaque type d'isomorphisme de polyèdre convexe carrelera normalement l'espace tridimensionnel. Nous supposons que ce n'est pas le cas (bien que comme pour un grand nombre d'autres suppositions, nous n'avons pas la conviction profonde que cela est vrai — nous ajoutons ceci pour susciter chez les lecteurs la tentation de vouloir prouver ou désapprouver cette supposition.) Un élément évident qui tend à appuyer la supposition réside dans le fait qu'il existe des types d'isomorphisme qui ne carrelent pas normalement si nous insistons pour que les carrelages soient face-à-face.

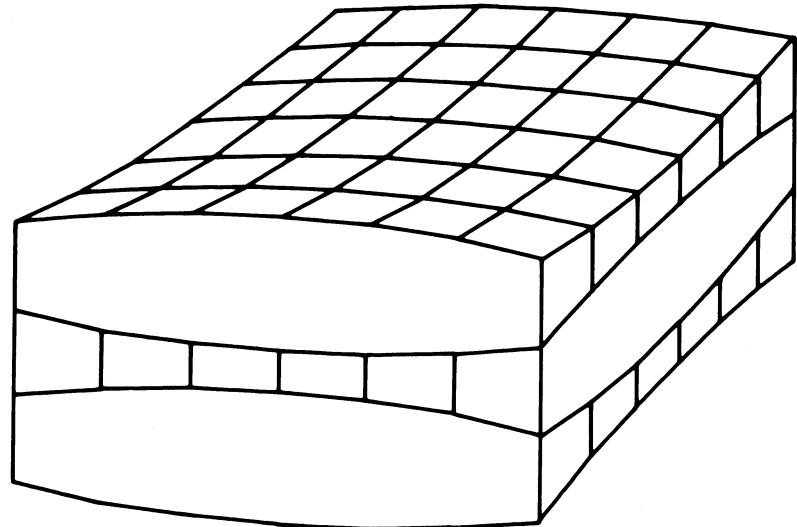


Figure 9. The second stage of a face-to-face tiling by isomorphic convex polyhedra. The stack of bricks shown in the previous diagram is modified as indicated here; each small square is replaced by a rhomb is such a way that the resulting faceted surface approximates a hyperbolic paraboloid. The resulting face-to-face tiling is by polyhedra each of which is of the isomorphism type of a $(4n + 2)$ -sided prism. • La seconde étape de la construction d'un carrelage du type face-à-face par des polyèdres convexes isomorphes. L'empilement des briques illustré dans le diagramme précédent est modifié comme l'indique le présent diagramme; chaque petit carré est remplacé par un losange de telle sorte que la surface à facettes obtenue s'approche d'un paraboloïde hyperbolique. Le carrelage du type face-à-face est obtenu en utilisant des polyèdres qui ont tous le même type d'isomorphisme qu'un prisme à $(4n + 2)$ côtés.

To obtain a tiling of the whole three-space we take unions of all translates of the modified stack by vectors of the form $2nri + 2nsj$, where i and j are unit vectors parallel to the x and y axes respectively, and r, s are integers. It is obvious that the tiling so obtained is face-to-face and that the tiles form exactly n transitivity classes under the (isometric) symmetries of the tiling. It is therefore normal. The construction can be modified, if one wishes, to apply to the case where the original stack was based on an odd-sided square instead of one with sides with even length. In this case the bricks become convex polyhedra of length $2n + 1$ with the same isomorphism type as a $(4n + 4)$ -sided prism.

Since there is no upper bound on the number of faces, one may therefore ask whether every isomorphism type of convex polyhedron will tile three-space normally. We conjecture that this is not so (though like a lot of other conjectures we do not have any strong conviction that it is true - we state it thus as a challenge to readers to prove or disprove it). Evidence to support the conjecture comes from the fact that there exist isomorphism types which do not tile if we insist that our tilings be face-to-face.

L'exemple le plus simple que nous connaissons d'un type qui ne carrelera pas normalement et face-à-face (ou un «**non-carrelant**» comme nous pourrions l'appeler), est démontré à la **figure 10**. Pour prouver que c'est un «**non-carrelant**», nous modifions une méthode décrite par Perles-Shephard 1967, qui nous permet de démontrer que si le plus long circuit d'arêtes élémentaire d'un polyèdre contient moins d'un tiers des arêtes du polyèdre, alors l'angle dièdre moyen sur les arêtes est plus grand que 120° . (L'**angle dièdre moyen** est défini comme la somme des angles dièdres de toutes les arêtes du polyèdre, divisée par le nombre total d'arêtes.) Dans le cas d'un carrelage normal cela est suffisant pour démontrer que ce type ne carrelera pas. Le polyèdre de la **figure 10** a 45 arêtes mais une méthode élaborée par Moon et Moser (voir Moon-Moser 1963) nous permet de démontrer que le plus long circuit d'arêtes élémentaire possède 14 arêtes (un de ceux-ci est indiqué dans le diagramme). Alors la condition tient et conséquemment c'est un «**non-carrelant**». D'un autre côté, nous ne connaissons pas de manière pour démontrer que ce polyèdre ne carrelera pas si nous laissons tomber la condition qui veut que le carrelage soit face-à-face; en fait, nous pouvons prouver qu'un carrelage face-à-face est possible si nous n'exigeons pas que ce carrelage soit normal.

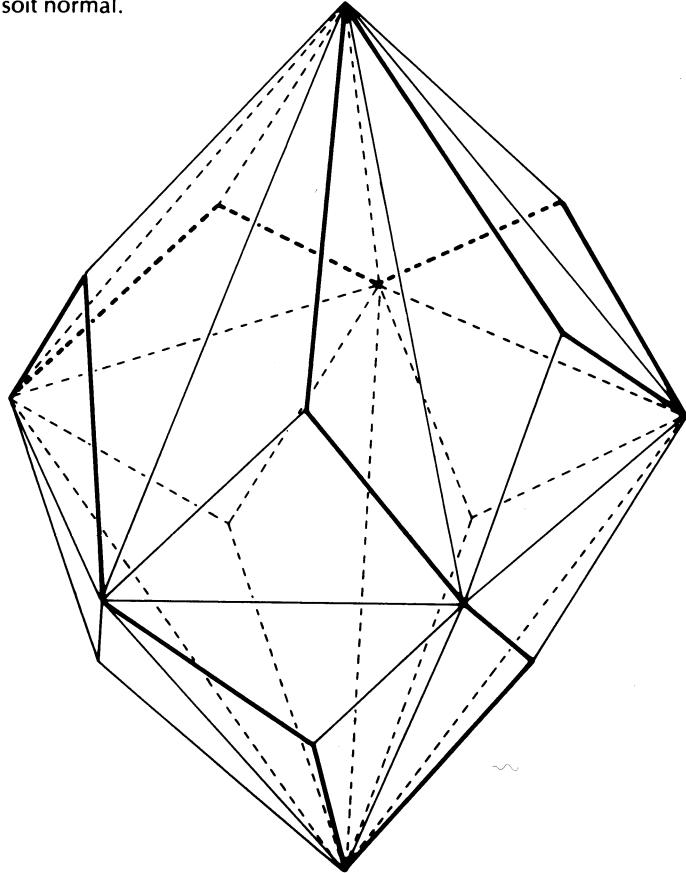


Figure 10. The smallest known convex non-tiling. It may be constructed by adjoining a small three-sided pyramid to each of the ten regular faces of a pentagonal bipyramid in such a way that convexity is preserved. ● Le plus petit non-carrelant convexe connu. Il peut être construit en collant une petite pyramide à trois côtés sur chacune des dix faces triangulaires d'une pyramide double pentagonale, tout en ayant soin de sauvegarder la convexité du polyèdre.

The simplest example which we know of a type that will not tile normally and face-to-face (or a **non-tile**, as we shall call it), is shown in **Figure 10**. To prove that it is a non-tile we modify a method described in Perles-Shephard 1967, which enables us to show that if the longest elementary edge-circuit on a polyhedron contains less than one-third of the edges of the polyhedron, then the average dihedral angle at the edges is greater than 120° . (The **average dihedral angle** is defined as the sum of the dihedral angles at all the edges of the polyhedron, divided by the total number of edges.) In the case of a normal tiling this is sufficient to show that the type will not tile. The polyhedron of **Figure 10** has 45 edges but a method of Moon and Moser (see Moon- Moser 1963) enables one to show that the longest elementary edge-circuit has 14 edges (one such is indicated in the diagram). The condition therefore holds and so this is a non-tile. On the other hand, we know no way to show that this polyhedron will not tile if we relax the condition that the tiling must be face-to-face; in fact, we can prove that a face-to-face tiling is possible if we do not require the tiling to be normal.

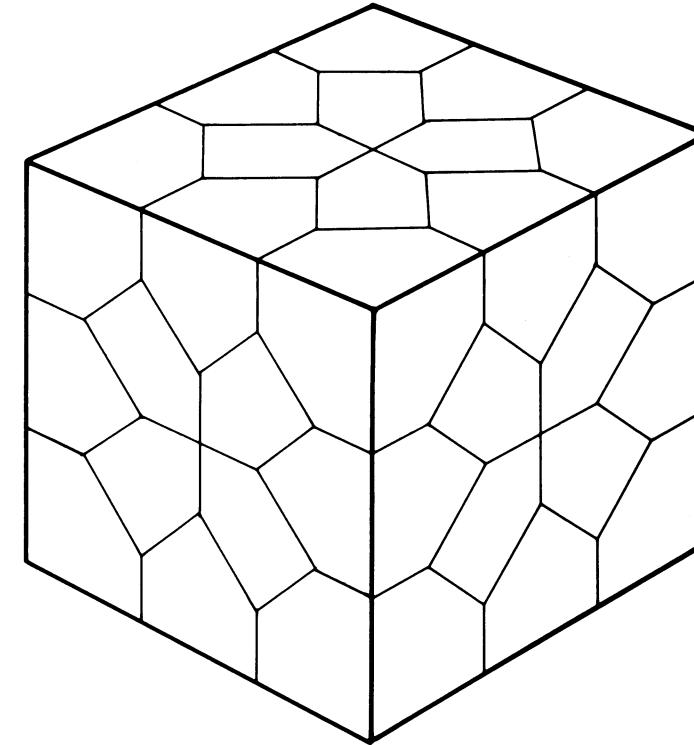


Figure 11. One method of constructing a face-to-face tiling of three-dimensional space by pentagonal pyramids. This construction is due to Danzer, Ewald, Zamfirescu and to Zaks. ● Une façon de construire un carrelage de l'espace tridimensionnel de type face-à-face par des pyramides pentagonales. Cette construction fut conçue par Danzer, Ewald, Zamfirescu et Zaks.

Nous avons maintenant un polyèdre à 30 faces dont les copies isomorphiques ne carreleront pas normalement et face-à-face. D'un autre côté, nous pouvons démontrer que chaque type de polyèdre convexe comprenant au plus 6 faces carrelera l'espace. Le dernier résultat est attribuable à Goldberg (voir Goldberg 1977), excepté pour le cas de la pyramide pentagonale que Danzer, Ewald et Zamfirescu, Joseph Zaks de Haifa et I.K. Zhuk de Minsk (communications privées) avaient résolu indépendamment. Leurs méthodes sont basées sur le fait que la surface d'un cube peut être séparée en pentagones (comme nous pouvons le voir, par exemple, à la **figure 11**) et alors, en les joignant au centre, on peut obtenir une dissection du cube en pyramides pentagonales. On peut alors facilement carreler avec les cubes et il n'y a alors aucune difficulté pour faire en sorte que le carrelage obtenu par les pyramides pentagonales soit face-à-face.

Le problème de trouver des «non-carrelants» est plus difficile si nous limitons notre attention aux polyèdres ayant seulement trois arêtes qui se rejoignent à chaque sommet. En utilisant la méthode des circuits d'arêtes décrite ci-haut, de même que les résultats de Grünbaum-Walther 1972, l'existence de tels non-carrelants peut être établie. Toutefois, ces méthodes produisent des «non-carrelants» très grands; en fait, en tenant compte des résultats obtenus à date, le plus petit nombre de sommets de «non-carrelants» de la sorte peut être évalué à environ 2×10^{21} .

D'un autre côté, il est possible qu'un type d'isomorphisme aussi petit que le dodécaèdre régulier 5.5.5 soit un «non-carrelant». Nous croyons qu'il vaudrait la peine de régler la question à savoir si n'importe quel carrelage est possible par ce type, même d'une manière face-à-face ou autrement. Nous pouvons nous poser des questions similaires à propos d'autres types, par exemple, le cube tronqué 3.8.8 (à 6 faces octogonales et 8 faces triangulaires), la pyramide hexagonale (à une face hexagonale et 6 faces triangulaires), et la bipyramide pentagonale (à 10 faces triangulaires). Il semble qu'il n'y ait pas de méthode connue pour traiter de tels problèmes.

On est amené à conclure que non seulement la plupart des problèmes dans ce domaine des mathématiques restent encore à résoudre, mais on doit également s'inquiéter de l'ignorance profonde des mathématiciens à propos des questions relatives à la géométrie tridimensionnelle, telles que celles que nous avons posées ici.

Notes:

- 1) Recherche subventionnée par un octroi du NSF, no MCS77-01629A01 et par une bourse de la Guggenheim Foundation.
- 2) Il faut noter que dans la littérature russe sur les carrelages dans le plan ou dans l'espace tridimensionnel, le mot «normal» est employé dans un sens différent; il est employé pour la propriété que nous appelons arête-à-arête ou face-à-face (Delone 1961).
- 3) Strictement parlant, la relation basée sur la déformation d'un polyèdre en un autre est une **isotopie**, mais pour nos besoins nous l'avons traitée de la même manière qu'un isomorphisme.
- 4) Depuis que cet article fut écrit, Ludwig Danzer a démontré qu'il existe un carrelage normal par des polyèdres de ce type. Les détails seront publiés plus tard.

So we now have a polyhedron with 30 faces of which isomorphic copies will not tile normally and face-to-face. On the other hand, it can be shown that every type of convex polyhedron with at most 6 faces will tile. The latter result is due to Goldberg (see Goldberg 1977) except for the case of the pentagonal pyramid for which it was settled independently by Danzer, Ewald and Zamfirescu, by Joseph Zaks of Haifa and by I.K. Zhuk of Minsk (private communications). Their methods depend on the fact that the surface of a cube can be cut into pentagons (for example, as shown in **Figure 11**), and then, by joining to the centre, a dissection of the cube into pentagonal pyramids can be obtained. One can then easily tile with the cubes and there is clearly no difficulty in arranging that the resulting tiling by pentagonal pyramids is face-to-face.

The problem of finding non-tiles is more difficult if we restrict attention to polyhedra with only three edges meeting at each vertex. Using the method of edge-circuits described above, along with results of Grünbaum-Walther (1973), the existence of such non-tiles can be established. However these methods produce very «large» non-tiles; in fact, with results that are available at present, the smallest number of vertices of such a non-tile turns out to be about 2×10^{21} .

On the other hand it is possible that even such a «small» isomorphism type as the regular dodecahedron 5.5.5 may be a non-tile⁴. We believe that it would be worth the effort to settle the question whether any normal tiling is possible by this type, either in a face-to-face manner, or otherwise. Similar questions can be asked about other types, for example, the truncated cube 3.8.8 (with 6 octagonal and 8 triangular faces), and the pentagonal bipyramid (with 10 triangular faces). It seems that no methods are known to deal with such problems.

One is forced to the conclusion that not only do most of the problems in this area of mathematics remain open, but one must also be impressed by the profound ignorance of mathematicians of questions related to three-dimensional geometry such as those we have asked here.

Footnotes

- 1) Research supported by NSF Grant no. MCS77-01629A01 and by a Fellowship from the Guggenheim Foundation.
- 2) Note that in Russian literature on tilings in the plane or three-dimensional space the word «normal» is used in a different sense; it is used for the property we shall call edge-to-edge or face-to-face (Delone 1961).
- 3) Strictly speaking, the relation based on deforming one polyhedron into the other is that of *isotopy*, but for our purposes we may regard this as the same as isomorphism.
- 4) Since this article was written, Ludwig Danzer has shown that there exists a normal tiling using polyhedra of this type. The details will be published later.

Bibliographie

Bibliography

Le code dans la première partie de chaque donnée bibliographique consiste en trois parties, séparées par des tirets. La première lettre indique si le texte est un **Livre**, **Article**, **Pré-impression**, ou **Notes de cours**. La deuxième partie indique si le texte a été rédigé pour des lecteurs qui ont une formation de **Mathématicien**, **Architecte**, ou **Ingénieur**. La partie finale du code indique si le texte touche un ou plus d'un des thèmes principaux de la topologie structurale: **Géométrie** (en général), **Polyédres**, **Juxtaposition**, ou **Rigidité**.

Les mots-clés ou autres annotations dans la colonne finale montreront l'intérêt pas toujours ni l'ensemble de son contenu ni l'intention de l'auteur.

The code in the first block of each bibliographic item consists of three parts, separated by dashes. The first letter indicates whether the item is a **B** ook, **A** rticle, **P** reprint, or **C** ourse notes. The middle letter(s) indicates whether the piece was intended primarily for an audience of **M** athematicians, **A** rchitects, or **E** ngineers. The final letter(s) indicated if the piece touches on one or more of the principal themes of structural topology: **G**eometry (in general), **P**olyhedra, **J**uxtaposition, or **R**igidity:

The key words or other annotations in the third column are intended to show the relevance of the work to research in structural topology, and do not necessarily reflect its overall contents, or the intent of the author.

Brunner & Laves 1978 G.O. Brunner and F. Laves A-MAE-JP	How many faces has the largest space-filling polyhedron? Zeitschr. Kristal. 147 (1978), 39-43	Heuristic arguments relating to the maximum number of faces of a polyhedral tile • Une démonstration heuristique qui traite du nombre maximum de faces d'une tuile polyédrique.
Coxeter 1978 H.S.M. Coxeter A-M-JP	Review of «Three-dimensional nets and polyhedra» by A.F. Wells Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), 466-470.	Conjecture that in an isohedral tiling of three-space, each tile can have no more than 16 faces • Suggère que, dans un carrelage isoédrique de l'espace tridimensionnel, chaque tuile ne peut avoir plus de 16 faces.
Critchlow 1970 K. Critchlow B-MAE-PJ	Order in space Viking Press, New York 1970.	Non-mathematical account of tilings of three-space • Un exposé non mathématique sur les carrelages de l'espace tridimensionnel.
Delone 1961 B.N. Delone A-M-PJ	A proof of the fundamental theorem of the theory of stereohedra. In Russian Dokl. Akad. Nauk SSSR 138 (1961), 1720-1722. English translation: Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 812-815.	Establishes upper bounds for the number of faces of tiles in isohedral face-to-face tilings of three and higher dimensional spaces • Etablit les limites supérieures pour le nombre de faces des tuiles dans les carrelages isoédriques du type face-à-face des espaces à trois dimensions ou plus.
Engel 1981 P. Engel A-MA-P	Über Wirkungsbereiche von kubischer Symmetrie Zeitschr. Kristal. 154 (1981), 199-215.	Using computer techniques produces many examples of families of convex polyhedra with up to 38 faces that tile isohedrally and face-to-face • A l'aide de techniques informatiques, génère plusieurs exemples de familles de polyèdres convexes ayant jusqu'à 38 faces et qui forment des carrelages isoédriques du type face-à-face.
Fejes Toth 1964 L. Fejes Toth B-MAE-GPJ	Regular Figures Pergamon, New York 1964.	A classic book on packings and related subjects • Un texte de référence sur l'empilement et les sujets connexes.

Goldberg 1977 M. Goldberg A-MAE-PJ	On the space-filling hexahedra Geom. Dedicata 6 (1977), 99-108.	Polyhedral tiles with 6 faces • Les tuiles polyédriques à 6 faces.
Goldberg 1979 M. Goldberg A-MAE-PJ	Convex polyhedral space-fillers of more than twelve faces Geom. Dedicata 8 (1979), 491-500.	Polyhedral tiles with more than twelve faces • Les tuiles polyédriques ayant plus de douze faces.
Grünbaum & Shephard 1978 B. Grünbaum and G.C. Shephard A-MA-I	Isohedral tilings of the plane by polygons Comment. Math. Helvet. 53 (1978), 542-571.	Historical survey and detailed classification of isohedral tilings by triangles, quadrangles, pentagons and hexagons • Les carrelages isoédriques par les triangles, les quadrangles, les pentagones et les hexagones: un compte rendu historique et une classification détaillée.
Grünbaum & Shephard 1980 B. Grünbaum and G.C. Shephard A-MAE-JP	Tilings with congruent tiles Bull. Amer. Math. Soc. 3 (1980), 951-973.	General survey of tilings in three dimensions • Une étude générale de la question des carrelages en trois dimensions.
Grünbaum & Shephard 1982 B. Grünbaum and G.C. Shephard B-MAE-GJ	Tilings and Patterns Freeman, San Francisco 1982.	Extensive exposition of all aspects of tilings in the plane • Une présentation détaillée de tous les aspects du carrelage dans le plan.
Grünbaum & Walther 1973 B. Grünbaum and H. Walther A-M-P	Shortness exponents of families of graphs J. Combinat. Theory (A) 14 (1973), 364-385.	Constructions of polyhedra with relatively short longest circuits • Construction de polyèdres dont les circuits les plus longs sont relativement courts.
Heesch 1968 H. Heesch B-MAE-J	Reguläres Parkettierungsproblem Westdeutscher Verlag, Köln—Opladen 1968.	Investigation of isohedral tilings in the plane • Un examen des carrelages isoédriques dans le plan.
Moon & Moser 1963 J.W. Moon and L. Moser A-M-P	Simple paths on polyhedra Pacific J. Math. 13 (1963), 629-631.	Lengths of edge-paths on polyhedra • Les longueurs des chaînes d'arêtes sur les polyèdres.
Niven 1978 I. Niven A-M-J	Convex polygons that cannot tile the plane Amer. Math. Monthly 85(1978), 785-792.	Detailed proof that no normal tiling of the plane by convex n-gons can have $n = 7$ • Preuve détaillée qu'il n'existe aucun carrelage normal du plan par des n-gones convexes pour $n = 7$.
Perles & Shephard 1967 M.A. Perles and G.C. Shephard A-M-JP	Facets and non-facets of convex polytopes Acta Math. 119 (1967), 113-145.	Criteria for an n-dimensional polytope to be isomorphic to all facets of some $(n + 1)$ -dimensional polytope • Critères qui établissent qu'un polytope n-dimensionnel est isomorphe à chacune des facettes d'un quelconque polytope $(n + 1)$ -dimensionnel.

Reinhardt 1918 K. Reinhardt T-M-J	Über die Zerlegung der Ebene in Polygone Ph. D. thesis, Univ. Frankfurt a. M., Noska, Borna-Leipzig 1918.	Classic but difficult thesis on the fundamentals of plane tilings ● Thèse classique mais ardue sur les notions fondamentales de carrelage du plan.
Schattschneider 1978 D. Schattschneider A-MAE-J	Tiling the plane with congruent pentagons Math. Magazine 51 (1978), 29-44.	Detailed description of the tilings of the plane by pentagons ● Description détaillée des carrelages du plan par les pentagones.
Schattschneider 1981 D. Schattschneider A-MAE-J	In praise of amateurs In: «The Mathematical Gardner», D.A. Klarner, ed. Prindle, Weber & Schmidt, Boston 1981.	Popular account of tiling the plane by polygons ● Un exposé de vulgarisation sur le carrelage du plan par les polygones.
Williams 1972 R. Williams B-MAE-PJ	Natural Structure: Toward a form language Eudemon Press, Moorpark, CA 1970.	A non-mathematical account of tilings and related matters ● Un exposé non mathématique sur les carrelages et les sujets connexes.

Adresses des auteurs:

Ludwig Danzer,
Mathematisches Institut,
Universität Dortmund,
Postfach 50 05 00,
D 46 Dortmund 50, Fed. Rep. Germany

Branko Grünbaum,
Department of Mathematics,
University of Washington GN-50,
Seattle, WA 98195, U.S.A.

Adresses of the authors:

G.C. Shephard,
University of East Anglia,
Norwich NR14 8QJ, England.