

The Use of Polyhedra for Building Structures

by Pieter Huybers

Résumé

Topologie Structurale #6, 1982

«L'utilisation de polyèdres pour les structures de construction»

Prévoyant utiliser le polyèdre uniforme comme élément de base dans les systèmes de construction standard, le Building Technology Research Group, à Delft, a jugé nécessaire d'étudier dans le détail les propriétés métriques de ces polyèdres. Le groupe s'est servi des techniques des sciences de l'ordinateur. On trouve parmi les applications des exemples d'abris provisoires.

Des formes pyramidales, des antiprismes juxtaposés et des éléments fermés de tétraèdres ont été utilisés pour les toits, voûtes, et surfaces d'amortissement du bruit.

Abstract

StructuralTopology #6, 1982

Planning to use uniform polyhedra as elementary units in standardized construction systems, the Building Technology Research Group in Delft has found it necessary to study the metric properties of these polyhedra in detail. Computer graphics techniques were employed. Applications include emergency housing kits.

Pyramidal forms, juxtaposed antiprisms and closed tetrahedral elements have been adapted to roofing, vaults, and sound-damping surfaces.

Introduction

Cet article décrit les résultats du travail théorique et expérimental fait par le Building Technology Research Group du département de Génie civil à l'Université technologique de Delft aux Pays-Bas. L'intérêt dans la géométrie des polyèdres provient de la recherche dans le domaine des structures de construction standard avec l'accent mis sur la matière plastique en tant que matériau de structure principal (réf. 1, **Figures 1 et 2**). Notre travail a commencé avec le développement d'un ensemble de cartes modèles en couleur de format A4, permettant la construction de polyèdres réguliers et semi-réguliers, de prismes, d'anti-prismes et de polyèdres étoilés (réf. 2, **Figure 3**).

Introduction

This article describes the outcome of theoretical and experimental work done by the Building Technology Research Group of the Civil Engineering Department, Technological University, Delft, The Netherlands. The interest in the geometry of polyhedra originates from research in the field of standardized building structures with an emphasis on plastics as the main structural material (ref.1, **Figures 1 and 2**). Our work started with the development of a set of coloured model cards of A4 format, facilitating the construction of the regular and semi-regular polyhedra, prisms, anti-prisms and star-polyhedra (ref 2, **Figure 3**).

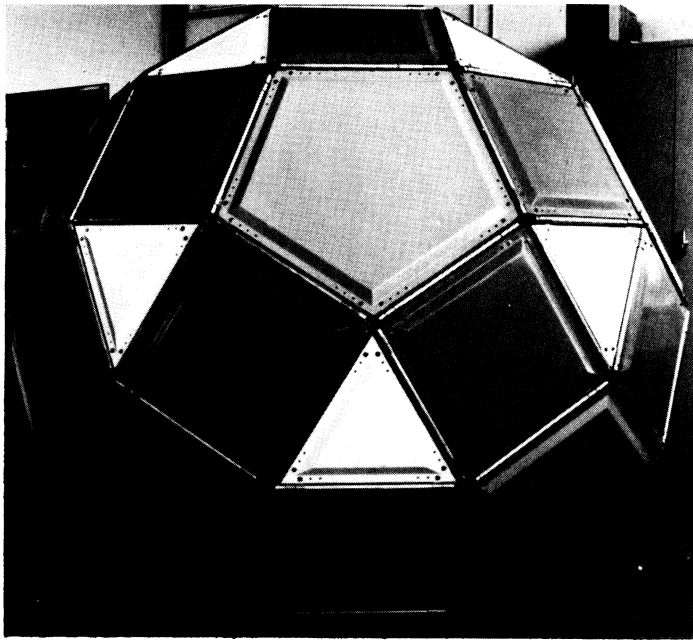


Figure 1. Model system for the construction of polyhedra, composed of GRP sandwich panels with an edge length of 50 cm ● Système modèle pour la construction de polyèdres, composés de panneaux en sandwich, avec une arête de 50 cm de long.

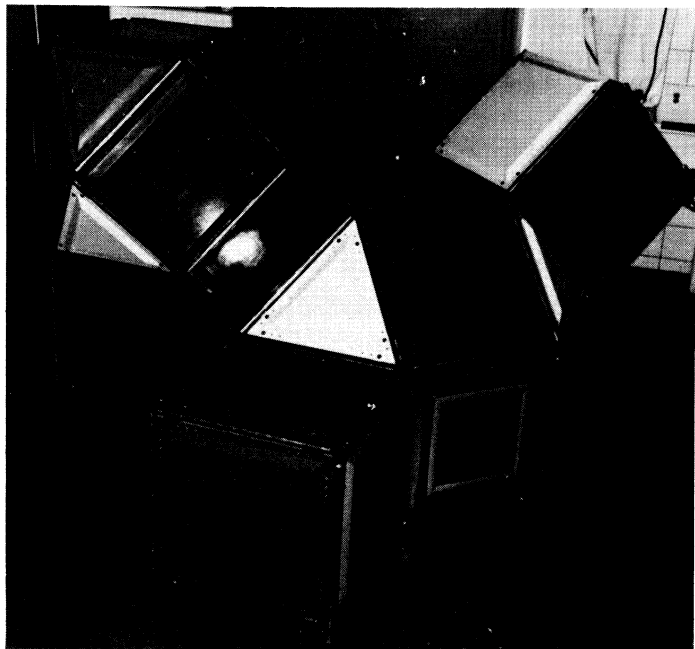


Figure 2. A combination of a rhombicuboctahedron, a cuboctahedron and 3 cubes, using the same construction method as the model in **Figure 1.** ● Combinaison d'un rhombicuboctaèdre, d'un cuboctaèdre et de 3 cubes, en se servant de la même méthode de construction que le modèle de la **Figure 1.**

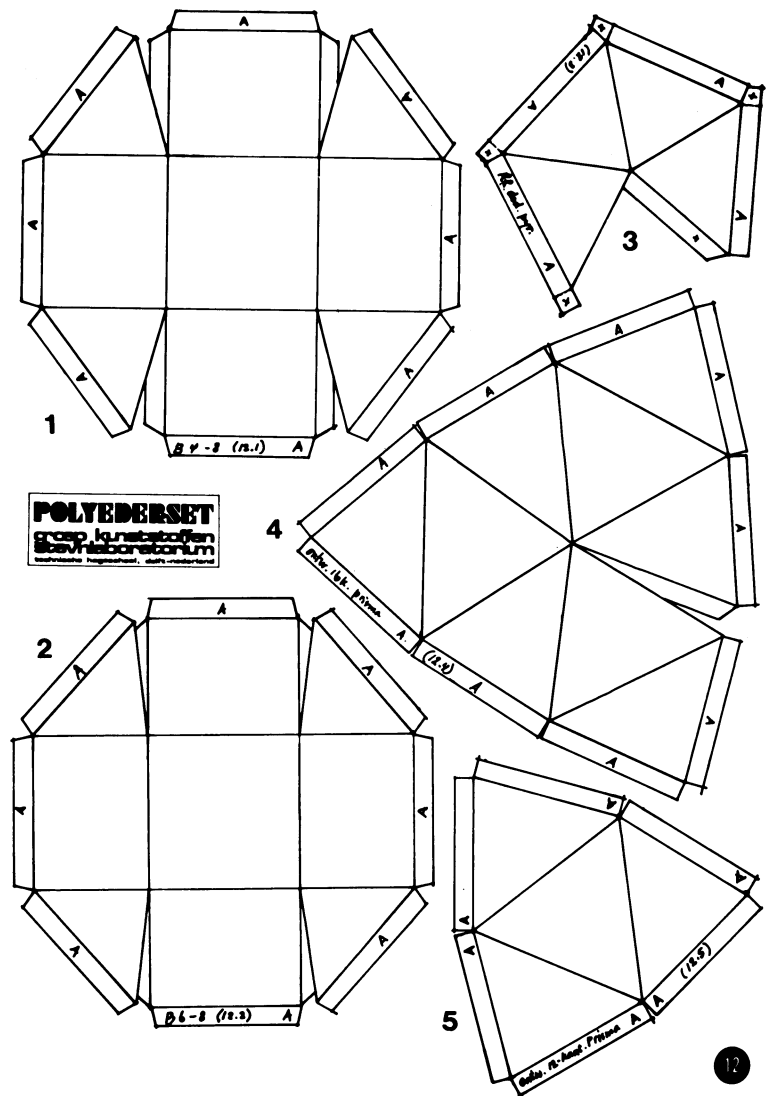


Figure 3. Sample of model card. ● Exemple de carte modèle.

Les données fournies dans la littérature existante ne semblaient pas assez complètes pour le but poursuivi, surtout en ce qui concerne les dimensions de solides duals ou réciproques. Cela signifiait le début d'une étude sur les propriétés géométriques des polyèdres soi-disant uniformes, caractérisés par les cinq conditions limitatives suivantes:

- Ils sont composés de 1, 2 ou 3 sortes de polygones réguliers plans;
- Les polygones se rencontrent par paires à une arête commune;
- L'angle dièdre à une telle arête est toujours convexe, c'est-à-dire de moins de 180°;
- Tous les sommets sont identiques, de sorte qu'à chaque sommet les mêmes polygones présentent le même nombre et le même ordre d'enchaînement;
- Tous les sommets sont placés sur une sphère circonscrite.

Si on apporte la restriction supplémentaire que les polygones n'ont pas plus de dix arêtes, on trouvera alors au total un nombre de 28 solides différents: 5 solides platoniques et 13 archimédiens, 5 prismes et 5 anti-prismes. (Nous ne comptons pas le cuboctaèdre modifié).

Les rapports et autres publications de notre groupe, rattachés directement à ce sujet, sont inscrits à la fin de cet article. La plupart cependant sont écrits en néerlandais, de sorte qu'ils ne sont pas facilement accessibles à beaucoup de lecteurs. La base théorique et les données les plus significatives se trouvent dans un article écrit en anglais pour l'Architectural Science Review (environ juin 1980, réf. /°).

Nous allons mentionner brièvement quelques applications de polyèdres dans les structures de construction, applications avec lesquelles l'auteur s'est trouvé personnellement impliqué.

Calcul et graphiques par ordinateur

Dans une première étape, on a mis au point un programme CPS (système de programmation interactif), qui fournissait toutes les données pertinentes pour les 28 polyèdres uniformes pour leurs formes augmentées (cette augmentation étant quelquefois mentionnée comme une élévation de points sphériques) et leurs formes réciproques (réf. 3). Les données ainsi obtenues ont permis une extension plus ample des ensembles de modèles créés auparavant, basés sur une arête de 4 cm de long. 28 différentes cartes sont disponibles au total, avec lesquelles on peut construire plus de 150 modèles de formes polyédriques, incluant des subdivisions à une fréquence plus élevée de surfaces sphériques. Un autre programme, convenant au calcul des coordonnées, est disponible depuis peu.

On peut définir la forme de tous les solides semi-réguliers par la rotation d'un n -gon avec des arêtes au nombre de 1 à 10, respectivement d'une position verticale à l'origine et perpendiculaire à l'axe z pour arriver aux positions de face d'un des cinq solides réguliers et de quelques autres solides semi-réguliers possibles, 10 en tout.

Ce procédé qui permet de créer les coordonnées des faces d'un polyèdre se réalise en 4 étapes, une fois que l'utilisateur a établi: le nombre n des faces du polygone, le nombre de groupes de rotation applicable, la distance dz de la translation le long de l'axe z (cet-

The data provided in the existing literature appeared to be not complete enough for the intended purposes, particularly (not so) with respect to the dimensions of the dual or reciprocal solids. This meant the beginning of a study on the geometric properties of the so-called uniform polyhedra, which are characterized by the following five limiting conditions:

- They are composed of 1, 2 or 3 kinds of plane regular polygons;
- The polygons meet in pairs at a common edge;
- The dihedral angle at such an edge is always convex, i.e. less than 180°;
- All vertices are identical, so that at each vertex the same polygons occur in the same number and in the same order of sequence;
- All vertices are positioned upon one circumscribed sphere.

If the further restriction is made, that the polygons have no more than ten edges, then a total number of 28 different solids are found: 5 Platonic and 13 Archimedean solids, 5 prisms and 5 antiprisms. (We do not count the revised cuboctahedron).

The reports and other publications of our group, directly related to this subject, are listed at the end of this article. Most of these, however, are written in the Dutch language, so that they are not easily accessible to many readers. The theoretical background and most relevant data are contained in an English language article prepared for the Architectural Science Review (about June 1980, ref. 12).

Briefly, a few applications of polyhedra in building structures will be mentioned, those applications with which the author has been personally involved.

Computation and computer graphics

As a first step, a CPS (conversational programming system) programme was developed, providing all relevant data for the 28 uniform polyhedra, for their augmented forms (this augmentation sometimes being referred to as *sphere point raising*) and their reciprocal forms (ref 3). The data thus obtained permitted a further extension of the previously designed model set, based on an edge length of 4 cm. A total of 28 different cards is available, with which over 150 models of polyhedral forms can be built, including higher frequency subdivisions of spherical surfaces. Another programme, suitable for the computation of the coordinates, has recently become available.

The shape of all semi-regular solids can be defined by the rotation of an n -gon with 1 to 10 edges, respectively, from a vertical position at the origin and perpendicular to the z -axis into the positions of the faces of one of the five regular solids and of a few other eligible semi-regular solids, 10 altogether.

This process of generating the co-ordinates of the polyhedron faces is performed in four stages, once the user has stated the number n of the polygon faces, the number of the rotation class which is applicable, the distance dz of the translation along the z -axis

te valeur peut être trouvée dans les rapports du 10-76-1 et -2 traitant de la géométrie des polyèdres en général), et une rotation supplémentaire possible α du n -gon autour de l'axe z .

Les autres rotations par les angles α , γ et β s'effectuent automatiquement d'une manière et avec une fréquence qui dépend du groupe de rotation considéré (Figure 4). A part cela, on a le choix de donner au polyèdre, en totalité, une rotation ou translation supplémentaires par rapport à l'axe x , y ou z et en outre de le multiplier par un facteur, diminuant ou grossissant de cette façon ses dimensions totales.

Trois rapports ont été consacrés à ce sujet. Le premier (10-76-08, réf. 6) explique le programme et donne les coordonnées et les dessins isométriques de tout solide uniforme (y compris les prismes et anti-prismes avec un maximum de 30 arêtes pour leurs faces polygonales). Le second rapport (10-78-03, réf. 7) montre que chaque polyèdre peut être construit de différentes manières. Il résume toutes les possibilités pour les solides platoniques et archimédiens. Dans le troisième rapport de cette série (10-79-01, réf. 8), on a décrit des polyèdres étoilés de Kepler-Poinsot (Figure 5). On trouve les coordonnées d'étoiles régulières en réalisant plus d'un procédé de rotation par figure. Les étoiles ont ce fait en commun avec les autres figures polaires, comme les polyèdres réciproques et ceux qu'on devrait appeler «pyramidisés» (Figure 6). Il est donc souhaitable de calculer les divers cas d'affilée et de mettre de côté les résultats précédents, d'une façon interactive. Malgré les difficultés initiales, cela fut possible et nous a menés au calcul successif de 10 cas en un cycle. On est en train de préparer un rapport qui puisse servir de manuel.

(this value can be found in the reports 10-76-1 and -2, dealing with the geometry of polyhedra in general), and a possible additional rotation α of the n -gon about the z -axis.

The other rotations through the angles α , γ and β are carried out automatically in a manner and with a frequency depending on the rotation class under consideration (Figure 4). Apart from that, options are available for giving the polyhedron as a whole an additional rotation or translation with respect to the x -, y - or z -axis and moreover to multiply it by a factor, thus diminishing or magnifying its overall dimensions.

Three reports have been devoted to this subject. The first one (10-76-08, ref. 6) explains the programme and gives the coordinates and isometric sketches of all uniform solids (including the prisms and antiprisms with a maximum of 30 edges for their polygonal faces). The second report (10-78-03, ref. 7) shows that each polyhedron can be derived in various ways. It summarizes all possibilities for the Platonic and Archimedean solids. In the third report of this series (10-79-01, ref. 8) the star-shaped or Kepler-Poinsot polyhedra have been described (Figure 5). The coordinates of regular stars are found by the execution of more than one rotation procedure per figure. The stars have this fact in common with the other polar figures, like the reciprocals and the — what should be called — *pyramidized* polyhedra (Figure 6). This makes it desirable to compute the various cases consecutively and to safeguard the previous results, in an interactive mode. Notwithstanding initial difficulties, this was possible, and led to the consecutive computation of as many as 10 cases in one cycle. A report serving as a manual is being prepared.

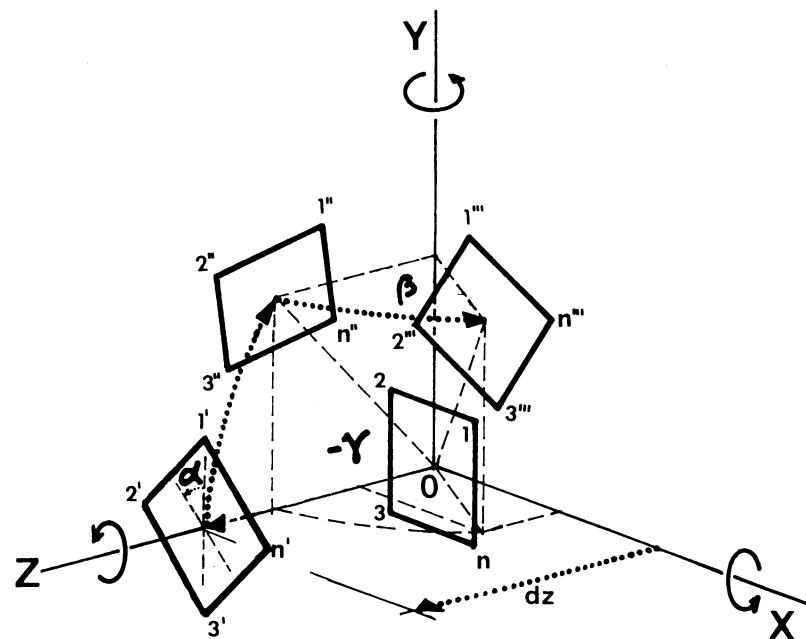
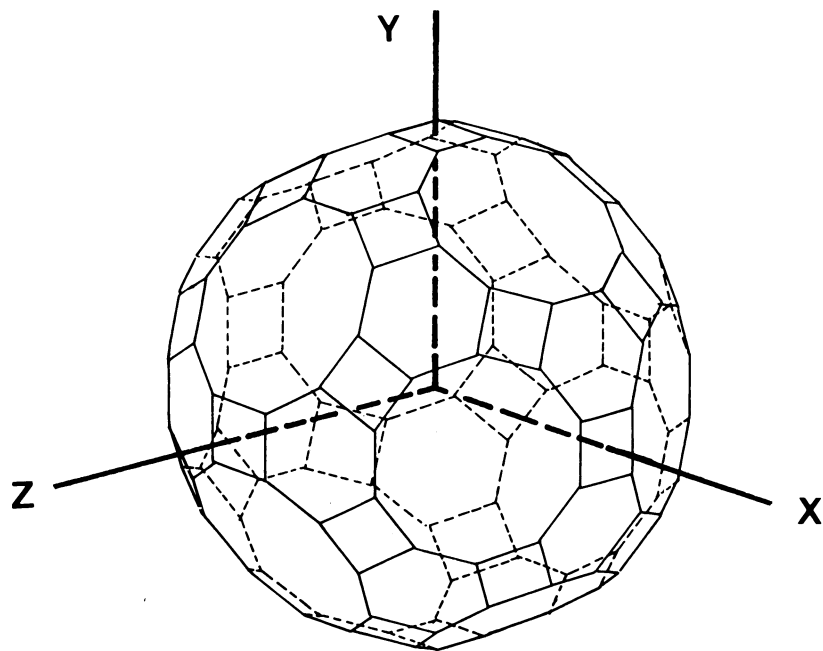


Figure 4. Principle of forming a polyhedron by rotating an n -gon, and an isometric sketch of the truncated icosidodecahedron thus formed. ● Principe de formation d'un polyèdre par la rotation d'un n -gon et un dessin isométrique du icosidodécaèdre tronqué ainsi formé.

Structures pyramidales

Le travail plus ancien du Building Technology Research avait à faire avec l'utilisation de plastiques dans la construction, surtout dans ses applications structurales. On a dessiné ces structures spatiales, consistant en pyramides de fibre de verre renforcé de polyester (GRP), dont les sommets pointent vers le haut communiquant par des barres. L'une était pour un toit en baldaquin à Arnhem (1968) et l'autre était pour l'entrée d'un immeuble à Delft (1971) (réf. 1, **Figures 7 et 8**). Dans le premier cas, les pyramides ont leurs faces inclinées faisant un angle de 45° avec le plan horizontal, ce qui en fait des parties d'un dodécaèdre rhombique. Dans l'autre cas, on a utilisé des moitiés et des quarts d'octaèdres.

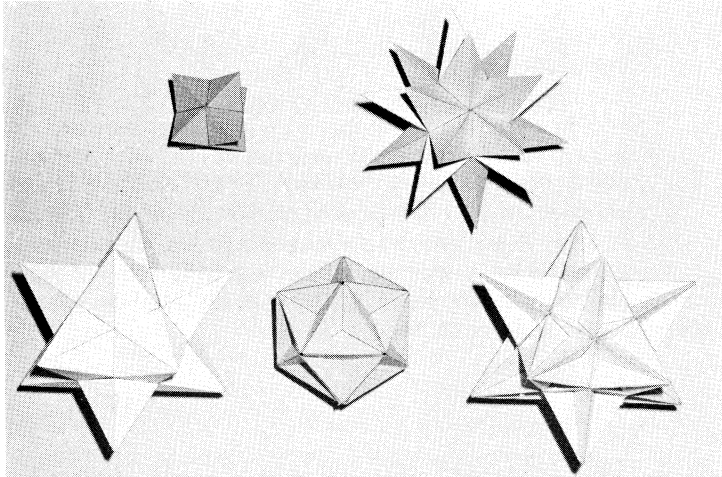


Figure 5. The four regular stellated polyhedra and the Stella Octangula. ● Les quatre polyèdres réguliers étoilés et le Stella Octangula.

Pyramidal structures

The earlier work of the Building Technology Research Group had to do with the use of plastics in building, particularly in structural applications. Thus spatial structures have been designed, consisting of glass-fibre reinforced polyester (GRP) pyramids, the apexes of which are pointing upwards, interconnected by bars. One was for a building entrance at Delft (1971), (ref. 1, **Figures 7 and 8**). In the first case the pyramids have their inclined faces running at an angle of 45° with the horizontal plane, which makes them parts of the rhombic dodecahedron. In the other case, halves and quarter parts of octahedra were utilized.

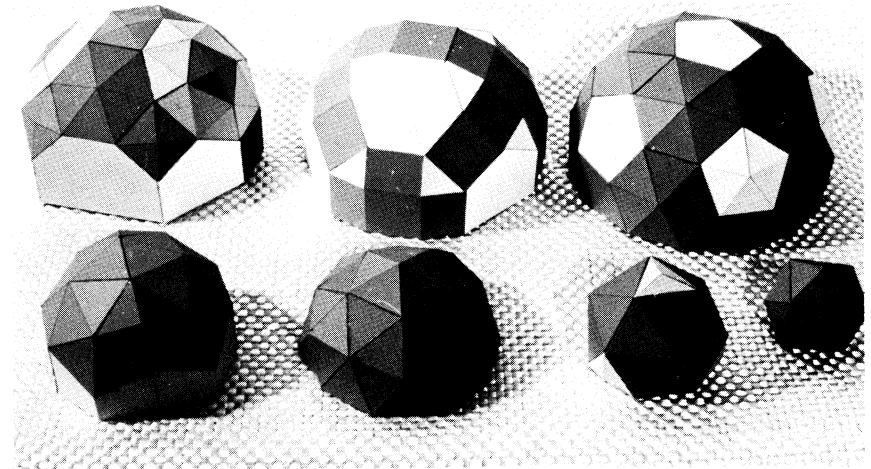


Figure 6. Models of a number of pyramided polyhedra. ● Modèles d'un nombre de polyèdres pyramidisés.

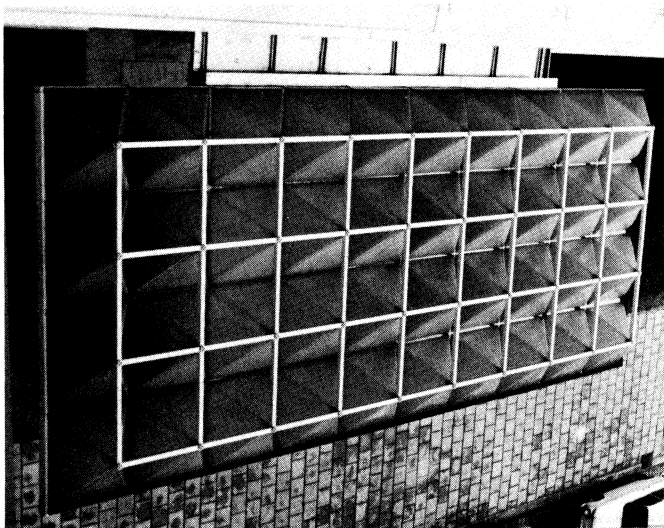


Figure 7. Pyramidal canopy roof structure at Arnhem. ● Structure d'un toit à baldaquin pyramidal à Arnhem.

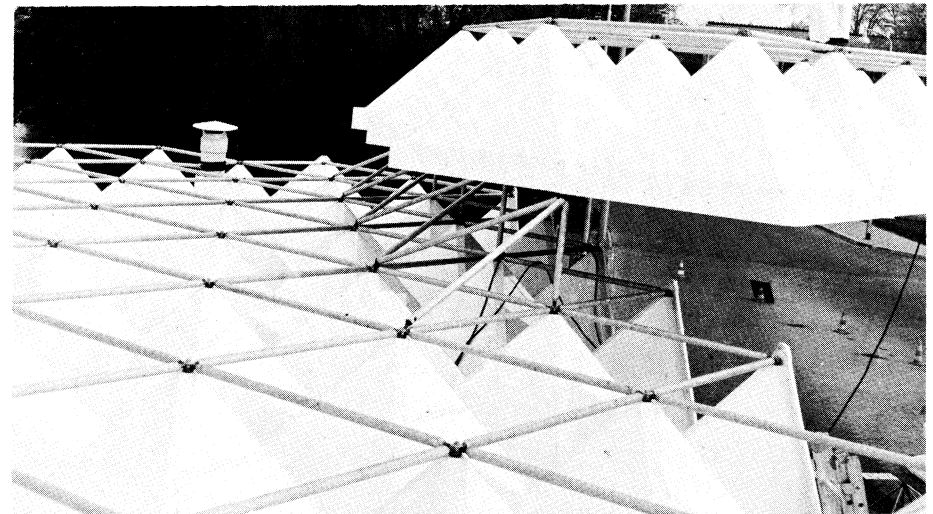


Figure 8. Entrance building at Delft. ● Entrée d'immeuble à Delft.

Structures de plis anti-prismatiques

Une étude spéciale a été faite en géométrie des voûtes en berceau en forme d'accordéon. On peut les considérer comme une rangée d'anti-prismes, se trouvant face à face, la surface de la voûte étant composée des triangles de leurs manteaux. On a considéré l'effet que produisaient les variations de dimensions des faces triangulaires, de leurs angles de face et de leurs angles de plis entre les triangles adjacents (réf. 1). On a mis au point une méthode qui permette de créer automatiquement des représentations visuelles sur un écran de télévision (Figure 9).

Structures tétraédriques

A partir d'éléments tétraédriques fermés (toutes les faces triangulaires étant en matériaux de feuilles G.R.P.), on peut composer des voûtes en berceau aussi bien que des structures sphériques. La forme du tétraèdre dans ce cas n'est plus régulière, mais doit être adaptée selon les besoins spécifiques, selon la forme globale de la macrostructure et de la position relative du tétraèdre. On peut se servir de structures cylindriques à la fois horizontalement et verticalement, par exemple par l'insonorisation des autoroutes (réf. 11, Figures 10, 11 et 12). N'importe quelle sorte de matériaux, fournie sous forme d'éléments aux parois minces, est valable. On a considéré l'utilisation du GRP aussi bien que celle du GRC (fibre de verre renforcée de polyester ou de ciment). En 1973, une voûte en berceau cylindrique couvrant 7 m a été construite à partir d'une paroi faite de trois couches de carton gaufré. En 1979, on s'est servi d'une portée plus longue, 25,60 m de G.R.P. comme toit d'une construction expérimentale (Figures 13, 14).

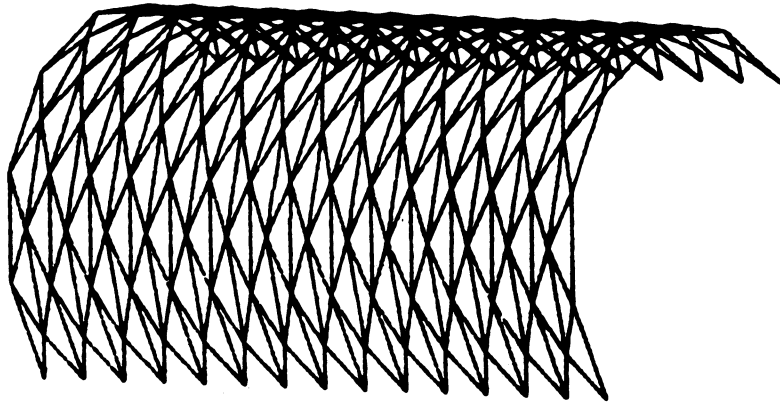


Figure 9. Computer graph of an antiprismatic folding structure. ● Dessin par ordinateur d'une structure antiprismatique pliante.

Antiprismatic folding structures

A special study was made into the geometry of concertina-like barrel vaults. They can be considered as a row of anti-prisms, meeting face-to-face, the surface of the vault being composed of the triangles of their mantles. The effect of varying the dimensions of the triangular faces, their face angles and the folding angles between adjacent triangles has been considered (ref. 1). A method for automatically generating visual representations on a television screen was developed (Figure 9).

Tetrahedral structures

Starting from closed tetrahedral elements (all triangular faces being of G.R.P. sheet material), barrel vaults as well as spherical structures can be composed. The shape of the tetrahedron is in this case no longer regular but has to be adapted according to specific requirements, depending on the over-all shape of the macrostructure and on the relative position of the tetrahedra. Cylindrical structures can be used both horizontally and vertically, e.g. for sound-damping walls along motorways (ref. 11, Figures 10, 11 and 12). Any kind of material, supplied in the form of thin-walled elements, is suitable. The use of GRP as well as that of GRC (glass-fibre reinforced polyester or cement) has been considered. In 1973 a cylindrical barrel vault, spanning 7,00 m was constructed of triple wall corrugated cardboard. In 1974 a longer one of 25,60 m span of G.R.P. was used as a roof of an experimental building (Figures 13, 14).

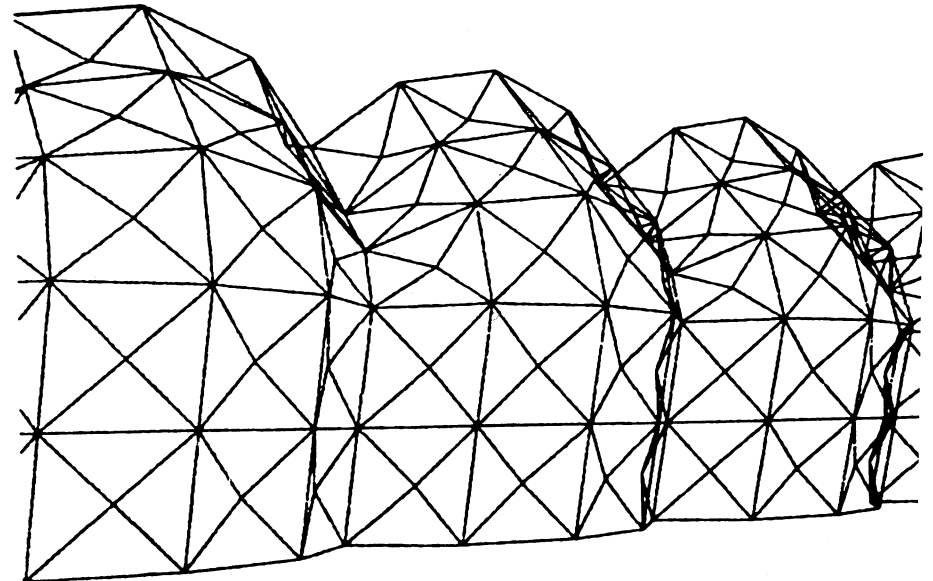


Figure 10. Computer graph of tetrahedral sound damping traffic wall structure. ● Dessin par ordinateur de la structure tétraédrique d'un mur pour l'insonorisation d'autoroutes.

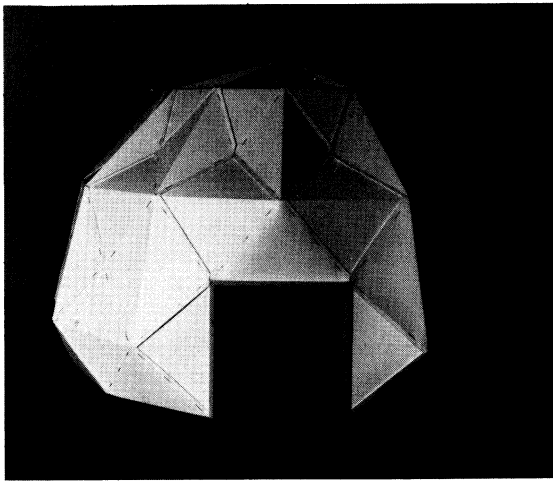


Figure 11. Spherical tetrahedral structure (model scale 1 to 10).
 ● Structure tétraédrique sphérique (échelle 1/10e).

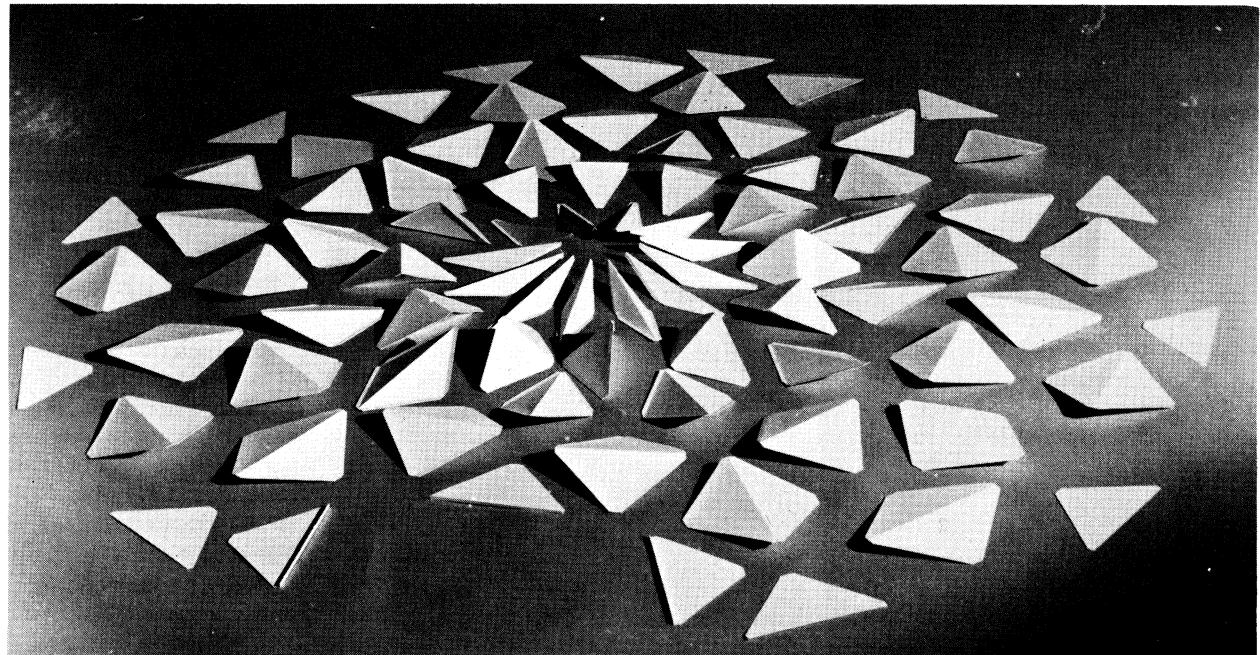


Figure 12. Constituent tetrahedra of dome structure in Figure 11. ● Éléments tétraédriques de la structure du dôme de la Figure 11.

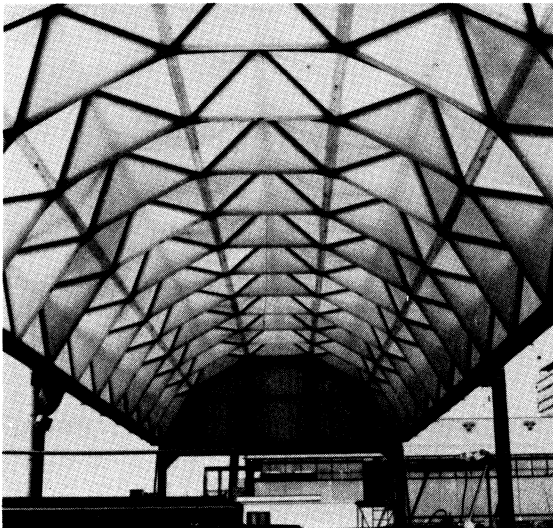


Figure 13. Semi-cylindrical shell structure, composed of GRP tetrahedra and facilitating a column-free span of 26,60m.
 ● Structure d'une carcasse semi-cylindrique, composée de tétraèdres GRP et permettant une portée sans colonne de 26,60 m.

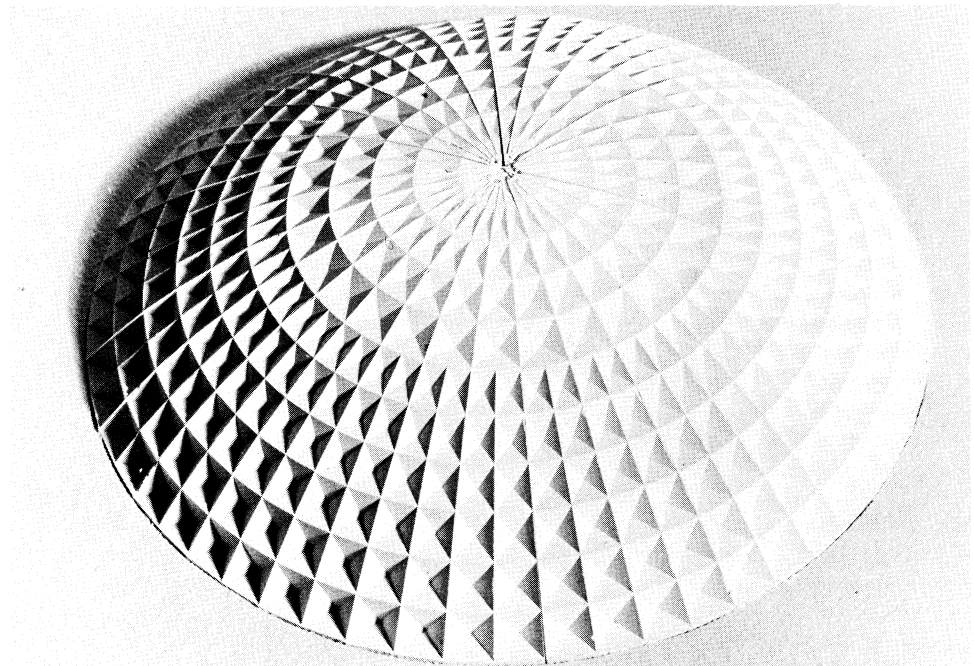


Figure 14. Model of a spherical structure based on the same construction method as that of Figures 11, 12 and 13.
 ● Modèle d'une structure sphérique basée sur la méthode de construction que celle des Figures 11, 12 et 13.

Projet de construction au Mali en Afrique

On a choisi le rhombicuboctaèdre comme élément de base pour la construction en 1977 d'un petit immeuble destiné à des bureaux à Bamako au Mali (**Figure 15**). Il consiste en trois modules sur un plan horizontal octogonal. Les murs sont des blocs de ciment creux et la structure du toit est faite d'un bois résistant aux termites, fait de palmes de Rhonier. Le toit est couvert de feuilles d'acier ondulé galvanisé.

Abris provisoires

Pour des logements dans des régions touchées par un désastre ou pour des abris de réfugiés, on a mis au point une construction polyédrique, en se servant de panneaux en sandwichs avec les faces extérieures en aggloméré traité à l'huile et résistant aux intempéries et avec des alvéoles imprégnées de résine comme matériaux de base (réf. 9). Un minimum de différentes formes et tailles de panneaux devrait fournir un maximum de différentes formes de constructions de dimensions variées. La «troncation» de polyèdres le long de plans équatoriaux crée des formes appropriées à des plans horizontaux. 12 formes de base différentes ont été adaptées, permettant la formation d'un grand nombre de formes de construction (**Figures 16 et 17**). Les panneaux sont pourvus de treillis collés avec des systèmes de connection en forme de gonds si bien qu'on peut obtenir différents angles de rencontre pour les panneaux. Un certain nombre de panneaux de base peuvent d'abord être utilisés pour la construction de containers standard servant au transport de marchandises par avion.

Building project at Mali-Africa

The rhombicuboctahedron was chosen as the basic unit for the construction in 1977 of a small office-building at Bamako in Mali (**Figure 15**). It consists of three units on an octogonal ground plan. The walls are of hollow sand cement blocks and the roof structure of the termite-resistant wood of the Rhonier palm. The roof is covered with sheets of corrugated galvanized steel.

Emergency housing

For disaster area housing or for refugee shelters a polyhedral building system is being worked out, using sandwich panels with outer faces of oil-treated weather-resistant hardboard and with resin-impregnated honeycomb as the core material (ref. 9). A minimum number of different kinds of panel shapes and sizes should yield a maximum number of different building forms of various dimensions. The truncation of polyhedra along equatorial planes creates desirable forms for ground plans. 12 different basic forms have been adapted, facilitating the formation of a great number of building forms (**Figures 16 and 17**). The panels are provided with glued-in lattices with connection devices in the form of hinges, so that various meeting angles can be achieved. A number of basic panels can be initially used for the construction of standard containers for air cargo transport. devices in the form of hinges, so that various meeting angles can be achieved. A number of basic panels can initially be used for the construction of standard containers for air cargo transport.



Figure 15. Small office building in Mali-Africa, consisting of 3 units based on the rhombicuboctahedron. ●
Petit immeuble de bureaux au Mali en Afrique, consistant en 3 modules basos sur le rhombicuboctaèdre.

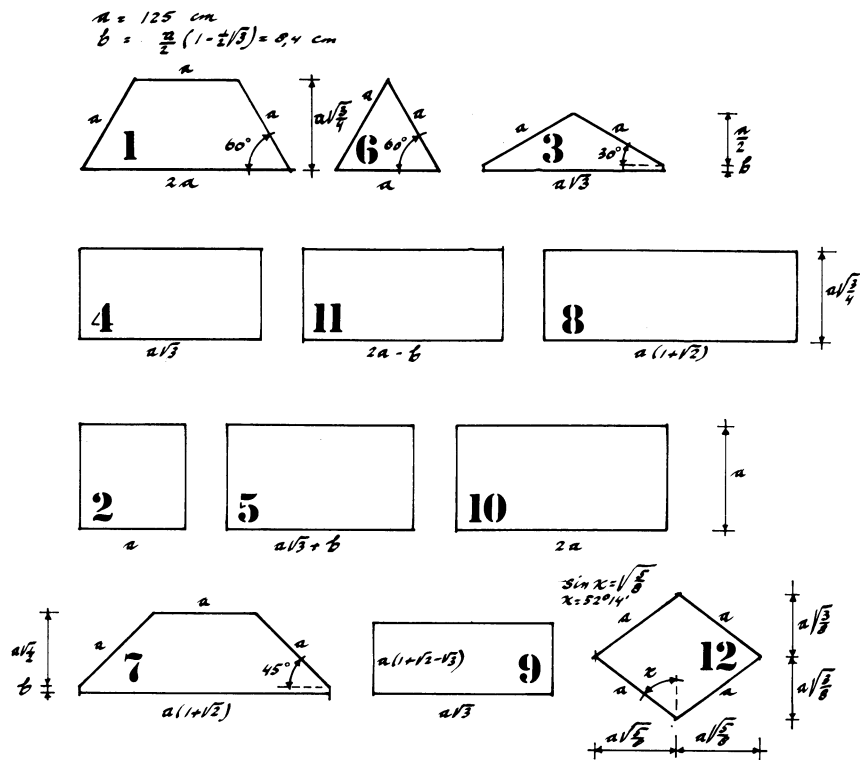


Figure 16. Different panel forms of emergency housing-system. ● Différentes sortes de panneaux du système d'abris provisoires.

Des étudiants de 1^{ère} année ont construit des modèles grandeur nature de maisons polyédriques, basées sur le système des logements d'urgence, en utilisant des éléments de carton gaufré à triple paroi. Les contours des éléments ont dû être marqués avec l'aide de modèles en contre-plaqué, les trous des écrous étaient percés avec un tuyau creux, les panneaux coupés avec une scie à main et les lignes flexibles calculées avec une machine qu'on faisait marcher manuellement. Les éléments tenaient ensemble avec des bandes de contre-plaqué de chaque côté des ailes de 10 cm de large (Figure 18).

Remerciements

L'auteur souhaite mentionner avec gratitude la contribution des membres ou des anciens membres du *Building Technology Research Group* de l'Université technologique de Delft avec beaucoup de respect pour les aspects théoriques, techniques, expérimentaux ou photographiques de leur oeuvre: G.J. Arends, J. Blok, G.V.D. Ende, C.J.W.P. Groot, M.T.T. Kwik, J. Lanser, J.A. van Nellestijn, S.Th.V.D. Reijken, J.J. de Rooy et G. M. Slimmer. Vous pouvez obtenir de plus amples informations en vous adressant directement à l'auteur: *Stevin Laboratory, 4 Stevinweg, Delft, Pays-Bas.*

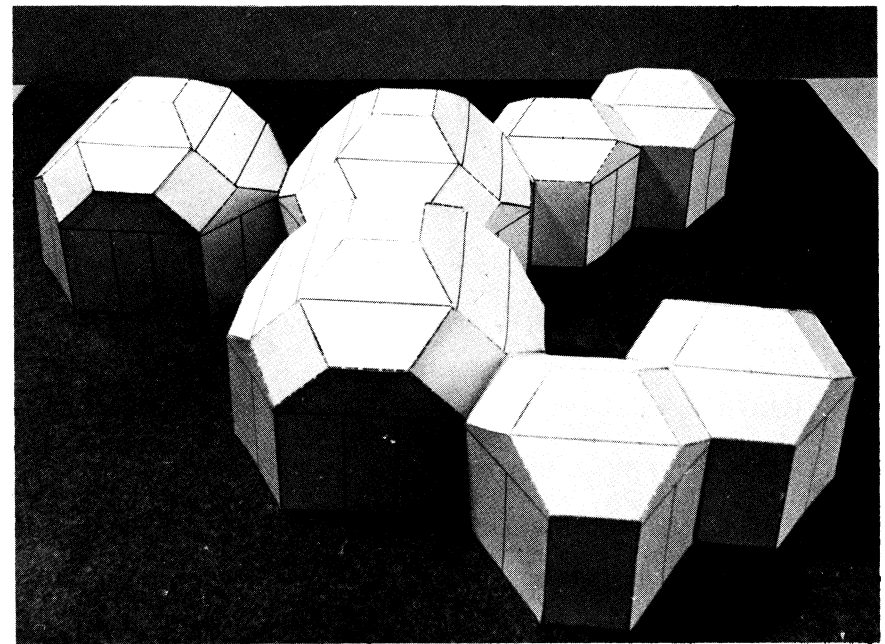


Figure 17. Model of envisaged prefabricated emergency building, using some of the panel forms in Figure 16. ● Modèle d'un projet d'immeuble d'urgence préfabriqué, utilisant certaines des formes de panneaux de la Figure 16.

First-year students built full-size models of polyhedral houses, based on the emergency housing system, using elements of triple-wall corrugated cardboard. The contours of the elements had to be marked with the help of plywood templates, boltholes were punched with a hollow pipe, the panels were cut with a handsaw and the bending lines scored with a manually operated machine. The elements were bolted together with plywood strips at both sides of 10 cm wide flanges (Figure 18).

Acknowledgements

The author wishes to mention with gratitude the contribution of the members or former members of the *Building Technology Research Group* of the Delft Technological University with respect to the theoretical, technical, experimental or photographic aspects of the work: G.J. Arends, J. Blok, G.V.D. Ende, C.J.W.P. Groot, M.T.T. Kwik, J. Lanser, J.A. van Nellestijn, S.Th.V.D. Reijken, J.J. de Rooy and G.M. Slimmer. Further information can be obtained directly from the author at the address: *Stevin Laboratory, 4 Stevinweg, Delft, The Netherlands.*

Bibliographie

- 1 *Development of standardized plastics building structures*, I.A.S.S. Bulletin, April 1974, 19-30.
- 2 *Polyëderset*, Stevinreport 10-75-2.
- 3 *De geometrie van uniforme polyëders*, Stevinreports 10-76-1 and -2, March 1976.
- 4 *De afgesloten veelvlakken en hun relaties met de platonische figuren*, Stevinreport 10-76-6, December 1976.
- 5 With J. Lanser, *Bouwproject in Mali-Africa*, Stevinreport 10-77-1, July 1977.
- 6 *Koördinaten van uniforme polyëders*, Stevinreport 10-76-08, August 1979.
- 7 *Rotatiemogelijkheden voor de Platonische en Archimedische veelvlakken*, Stevinreport 10-78-03 (in print).

Bibliography

- 8 *De geometrie van de regelmatige gestelleerde polyëders*, Stevinreport 10-79-01, January 1979.
- 9 *Polyhedral housing units*, Int. Journal for housing science and its applications, vol. 3, n° 3, 1979, 215-225.
- 10 . . . With H.S.M. Coxeter, *A new approach to Chiral Archimedean Solids*, Math. Reports of the Academy of Sciences, Toronto, vol. 1, n° 5, 1979, 269-274.
- 11 . . . With G.J. Arends, *Bouwmethode voor geluidsschermen van dunwandige materialen*, Stevinreport 10-79-09, September 1979.
- 12 . . . *The Geometry of uniform polyhedra*, Arch. Science Review, vol. 3, n° 2, June 1980.

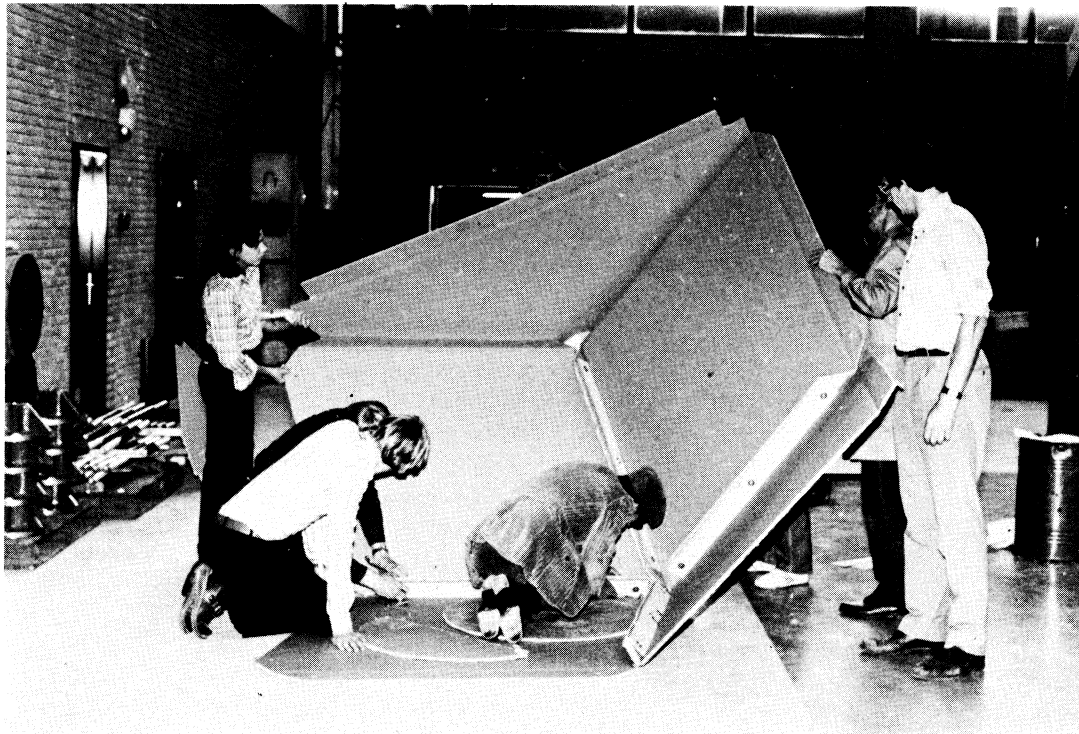


Figure 18. Construction of full-size cardboard models by students in civil and building engineering. ● Construction de modèles en carton grandeur nature réalisée par des étudiants en génie civil.