

UNA CONTRIBUCIÓN AL ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE FLUJO COMPRESIBLE SIN UTILIZACIÓN DE VISCOSIDAD ARTIFICIAL

FERNANDO QUINTANA

*División Mecánica Computacional
Centro Atómico Bariloche. CNEA. Argentina.*

RESUMEN

En este trabajo se presentan unas técnicas desarrolladas con el objeto de obtener un algoritmo para la solución de problemas de flujo compresible sin la aplicación de términos de viscosidad artificial. Esto es motivado por el hecho de que si bien la calidad de la solución obtenida mediante procedimientos conocidos es muy buena -en particular los choques y las capas límite son capturados de manera muy precisa y sin oscilaciones-, en muchas ocasiones es preciso recurrir a la pericia del usuario para ajustar unos coeficientes de *difusión artificial* para preservar la monotonicidad de la solución, en particular cuando en la misma aparecen choques como es el caso de problemas transónicos y supersónicos.

Las ideas propuestas se basan en aumentar la *viscosidad numérica propia* de un algoritmo conocido (Taylor Galerkin), teniendo en cuenta las velocidades de transporte de cada ecuación. Este tipo de técnica resulta adecuada para problemas subsónicos, pero en problemas supersónicos e hipersónicos, las discontinuidades (choques) que aparecen en la solución son muy severas y hacen que la viscosidad numérica sea insuficiente para eliminar las oscilaciones. Se resuelven algunos ejemplos de flujo subsónico para un perfil NACA0012 mediante las ecuaciones de Euler. Se estudia el mismo problema a número de Mach creciente hasta llegar a un problema transónico con aparición de un choque.

SUMMARY

The present study is devoted to the development of an algorithm for the solution of compressible flow problems without artificial viscosity. The study is motivated by the fact that the solution obtained using known algorithms is accurate and free of oscillations close to shocks and boundary layers, but some tuning is necessary for the artificial viscosity coefficients if monotonicity is to be preserved when the solution presents discontinuities.

The algorithm used is one-step Taylor-Galerkin. The proposed ideas are based on increasing the numerical viscosity according with the transport velocities. Although the techniques here presented work for subsonic problems, in supersonic and hypersonic cases, the strong discontinuities that the solution may present induce oscillations that are not suppressed with the numerical viscosity that the algorithm introduces. Some subsonic examples for a NACA0012 are studied, and to analyze the behaviour of the algorithm, the Mach number is increased for the same geometry, until a shock is obtained in a transonic problem.

Recibido: Septiembre 1993

A. ECUACIONES DIFERENCIALES DEL PROBLEMA

Se trata de modelar problemas de flujo compresible sin tener en cuenta los términos viscosos. Para ello se utiliza el sistema de ecuaciones de conservación, lineales, de primer orden y acopladas, conocido como ecuaciones de Euler, que escritas en forma conservativa se escriben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_j \\ \rho \varepsilon \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + p \delta_{ij} \\ (\rho \varepsilon + p) u_j \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, ε es la energía total por unidad de volumen (cinética más interna), las u_k son las componentes cartesianas del vector velocidad V y p es la presión, que para el caso del aire, se calcula en base a la ecuación de estado para un gas perfecto:

$$p = \rho RT \quad (2)$$

donde R es una constante del gas, que está relacionada con los calores específicos por medio de:

$$R = C_p - C_v = (\gamma - 1) C_v \quad (3)$$

y T es la temperatura $T = \frac{[\varepsilon - 0.5u_i u_i]}{C_v}$, con lo cual, la ecuación de estado (2) puede escribirse:

$$p = \rho (\gamma - 1) [\varepsilon - 0.5u_i u_i] \quad (4)$$

B. IMPORTANCIA DEL PASO TEMPORAL

La extensión a elementos finitos del esquema de Lax-Wendroff en diferencias finitas, es conocida como algoritmo de Taylor-Galerkin¹⁰. En su versión de un paso, el método permite escribir el sistema discreto de ecuaciones como:

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \simeq \Delta t \left(-\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i} \right)^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mathbf{A}_i \left(-\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} \right) \right] \right\}^n \quad (5)$$

Puede observarse, tal como lo hiciera notar el autor de este algoritmo², que el término disipativo que introduce el mismo está vinculado al incremento de tiempo Δt . La ecuación (5) puede escribirse nuevamente como:

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \simeq \Delta t \left\{ -\frac{\partial \mathbf{f}_i^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} \right)^n \right] \right\} \quad (6)$$

Se observa aquí que con el incremento de tiempo Δt varía linealmente la magnitud del término disipativo. La idea consiste en incrementar este término y una forma de hacerlo es a través del incremento de tiempo:

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \simeq \Delta t^a \left\{ -\frac{\partial \mathbf{f}_i^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^b}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} \right)^n \right] \right\} \quad (7)$$

Se han colocado los supraíndices a y b para destacar que no necesariamente se trata del mismo Δt . En efecto: si se incrementa Δt^b para aumentar el término disipativo, dado el carácter *explícito* del algoritmo, será también necesario disminuir Δt^a para preservar la estabilidad del esquema. El siguiente análisis permite determinar el valor de Δt^a que garantiza estabilidad para el caso de incrementos de tiempo diferentes.

C. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Según se demostrara en¹⁰, para el caso unidimensional lineal el algoritmo de Lax-Wendroff (LW) en diferencias finitas, resulta totalmente equivalente a Taylor Galerkin (TG). Se analiza aquí la estabilidad del algoritmo de Lax-Wendroff siguiendo el método de Von Neumann o de Fourier en el caso en que se escoge un incremento de tiempo mayor para el término que aplica la disipación numérica.

Siendo ϕ una variable escalar, para el caso unidimensional, en una malla uniforme de tamaño elemental Δx , la ecuación tipo que resulta para un nodo cualquiera de la malla luego de efectuar las integraciones correspondientes es:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{C}{2} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{C^2}{2} (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \quad (8)$$

Donde $C = \frac{A\Delta t}{\Delta x}$ es el número de Courant, el subíndice indica número de nodo y el supraíndice paso temporal.

Si se utiliza un incremento de tiempo α veces mayor para el segundo término:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{C}{2} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{\alpha C^2}{2} (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \quad (9)$$

Se inserta un modo de Fourier:

$$\begin{aligned} \phi_i^n &= \lambda^n e^{ikx_i} \\ \lambda &= 1 + \alpha C^2(\cos p - 1) - iC \sin p \quad (p = k\Delta x) \end{aligned} \quad (10)$$

Para prevenir el crecimiento no acotado de la solución, debe verificarse que $|\lambda| \leq 1$, que es equivalente a:

$$(\alpha C^2)^2 (\cos p - 1)^2 + 2\alpha C^2 (\cos p - 1)(\cos p + 2) + C^2 \sin^2 p \leq 0 \quad (11)$$

Con lo que la condición de estabilidad resulta en una limitación del número de Courant, y por tanto en el paso de tiempo:

$$C < \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

(12)

En el caso de trabajar con matriz de masas consistente, la condición resultante es:

$$C < \sqrt{\frac{1}{3\alpha}} \quad (13)$$

C1. EJEMPLOS NUMERÉICOS

Se propone como caso de prueba, resolver el flujo no viscoso alrededor de un perfil NACA0012 con un número de Mach igual a 0.5 en el flujo no perturbado. El mismo se resuelve usando la técnica de TG de dos pasos con viscosidad artificial, la cual será usada como referencia. A continuación, se resuelve el mismo problema introduciendo las modificaciones propuestas en el Apartado B, y se comparan los resultados. La malla utilizada en ambos casos tiene 2550 elementos y 1226 nodos y fue generada con un generador automático que utiliza la técnica de avance frontal.

En las Figuras 1 a 3 se pueden apreciar los resultados obtenidos utilizando la técnica de TG de dos pasos con viscosidad artificial. Las Figuras 1 y 2 corresponden a las isolíneas de presión alrededor del perfil NACA0012 y un detalle del aspecto de las mismas en proximidades del punto de estancamiento. Para la interpretación de los valores numéricos debe tenerse en cuenta que se ha efectuado una *normalización* (adimensionalización) de las ecuaciones utilizando como variables adimensionales las siguientes:

$$\begin{array}{lll} \bar{x} = \frac{x}{L} & \bar{y} = \frac{y}{L} & \bar{V}_x = \frac{V_x}{V_r} \\ \bar{V}_y = \frac{V_y}{V_r} & \bar{t} = \frac{t}{\left(\frac{L}{V_r}\right)} & \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_r} \\ \bar{T} = \frac{C_p T}{V_r^2} & \bar{p} = \frac{p}{(\rho_r V_r^2)} & \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{V_r^2} \\ \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_r} & \bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa_r} & \end{array}$$

Donde el subíndice r indica valores de referencia. La barra destaca que se trata de magnitudes adimensionales, aunque en adelante y para simplificar la notación se omitirá el uso de la misma. En este sentido, la presión adimensional calculada en el flujo no perturbado es $p_\infty = 2.857$. Este valor surge de considerar que la velocidad y la densidad en el flujo no perturbado tienen valor unitario. Como la velocidad del sonido es $c_\infty = \sqrt{\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}}$, de aquí puede despejarse p_∞ en función de magnitudes conocidas como el número de Mach y el cociente de calores específicos γ .

En la Figura 3 se observa la variación de la presión a lo largo de la línea de corriente correspondiente al punto de estancamiento, en los nodos próximos al mismo.

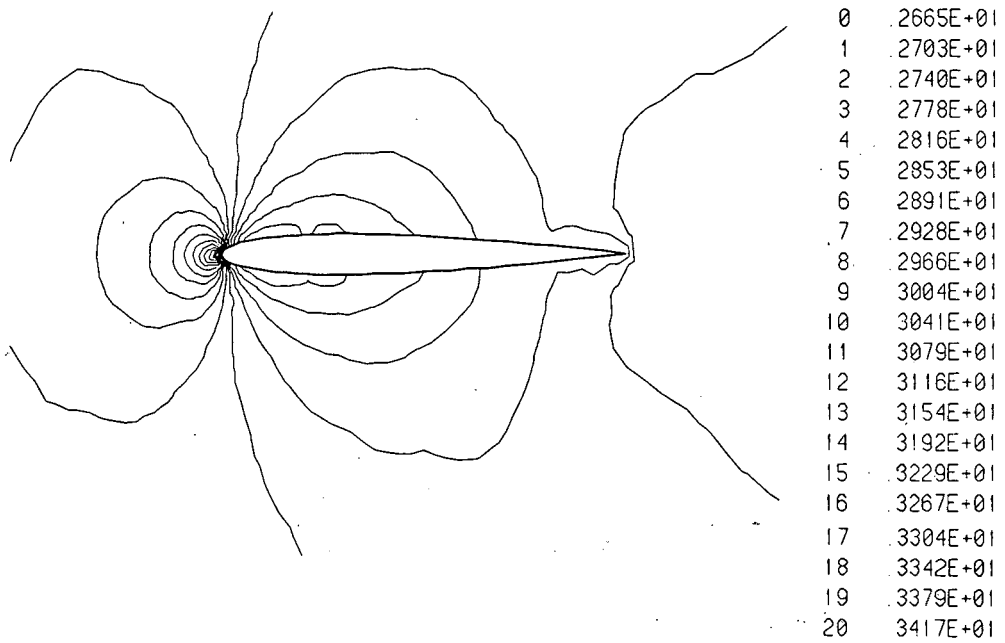


Figura 1. Isolíneas de presión para $M_\infty = 0.5$

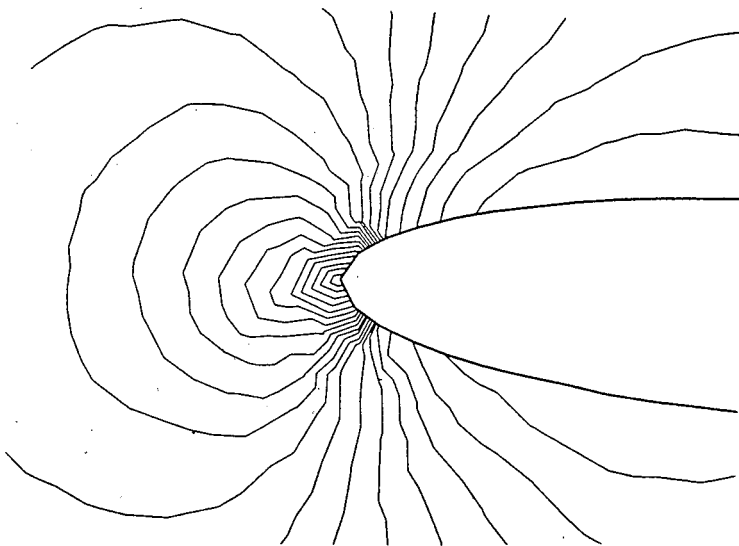


Figura 2. Detalle de las isolíneas de presión en la zona próxima al punto de estancamiento.

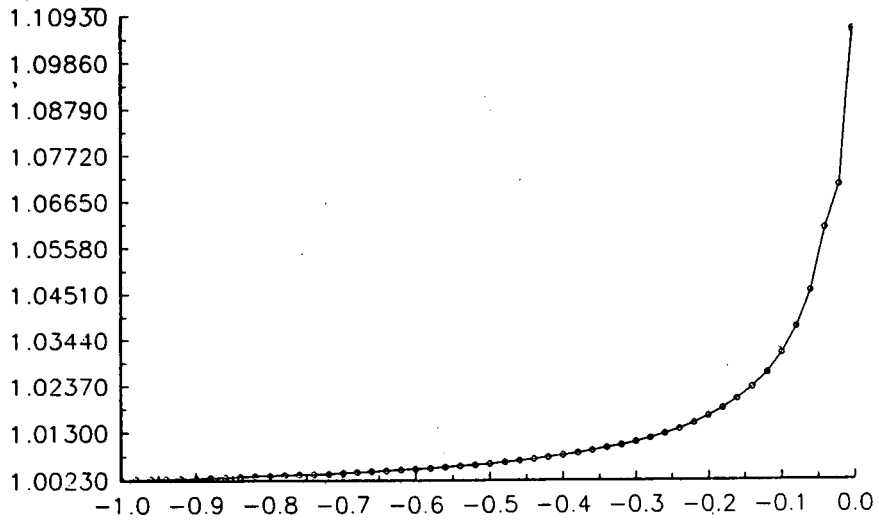


Figura 3. Variación de la presión a lo largo de la línea de corriente de estancamiento

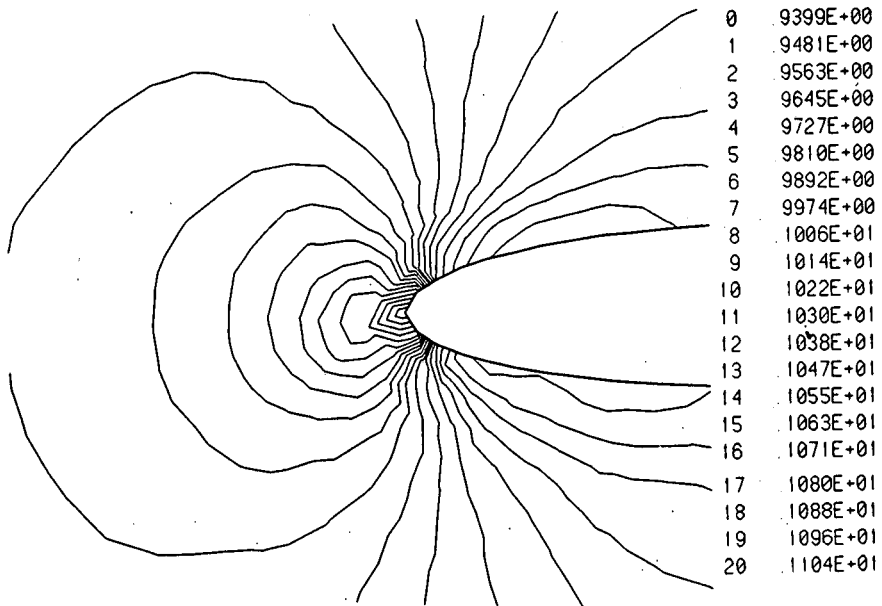


Figura 4. Detalle de las isolíneas de densidad en la zona cercana al punto de estancamiento.

La Figura 4 muestra las isolíneas de densidad en la zona próxima a dicho punto. Debe tenerse en cuenta que la densidad para el flujo no perturbado es $\rho_\infty = 1$. La Figura 5 representa el comportamiento de la densidad a lo largo de la línea de corriente del punto de estancamiento, en los nodos situados cerca del extremo anterior del perfil.

En las siguientes Figuras (6 a 10) se presentan los mismos resultados obtenidos utilizando la técnica presentada anteriormente. Asimismo se ha indicado el valor "teórico". Estos valores fueron obtenidos en base a las relaciones válidas para un gas ideal que sufre una compresión isoentrópica[†] y considerando que en el punto de parada la velocidad es cero. Analizando la Figura 6 puede verse que el campo de presiones es coincidente de forma general con el obtenido con el método usado como referencia por lo que la solución puede considerarse como buena.

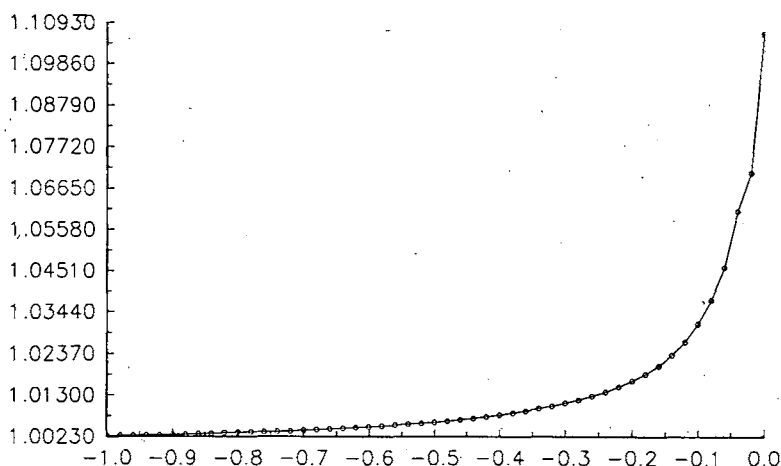


Figura 5. Variación de la densidad a lo largo de la línea de corriente del punto de estancamiento.

En la Figura 7 el detalle de las isolíneas de presión demuestra que no existen comportamientos oscilatorios ni picos espúreos y lo mismo puede decirse de la Figura 8 que muestra una variación suave de la presión a lo largo de la línea de corriente que pasa por el punto de parada.

Sin embargo, puede verse en las Figuras 9 y 10 que la densidad sufre un pequeño salto (*overshoot*) localizado en dos o tres elementos vecinos. Los autores han podido comprobar que este comportamiento persiste en caso que se haga un remallado y se utilice en esta región un tamaño de elemento más pequeño y en todos los casos estará limitado a los dos o tres elementos que tienen en común el nodo situado exactamente en el punto de parada. Si se modifica la malla de manera que no haya un nodo coincidente con dicho punto, el comportamiento de las isolíneas de densidad resulta más suave. En ningún caso estas oscilaciones ponen en peligro la estabilidad del método propuesto.

[†] Ver Apartado 2.10 de la referencia 3.

En este Apartado se ha mostrado que en base a las consideraciones hechas anteriormente es posible obtener soluciones sin la adición de viscosidad artificial para problemas que no presenten choques. Se ha mostrado que la calidad de las soluciones es muy buena y solo persiste un problema de oscilaciones en una región muy limitada. Mediante el siguiente estudio, se muestra que las velocidades con que se transportan cada una de las ecuaciones son diferentes, se deducen unos incrementos de tiempo óptimos, se establece un criterio para elegir el tamaño elemental y se presentan los correspondientes ejemplos numéricos.

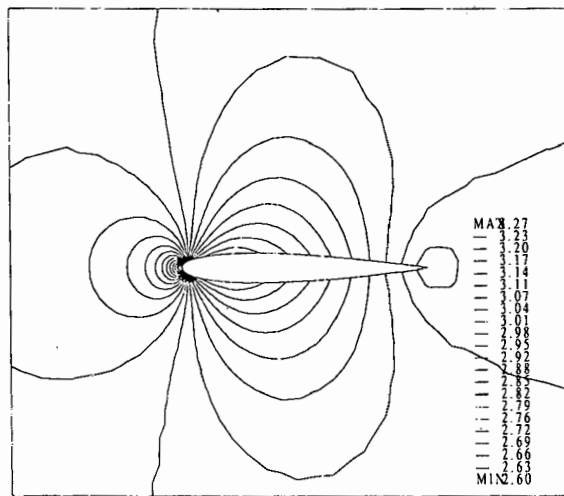


Figura 6. Isolíneas de presión usando TG de un paso sin viscosidad artificial

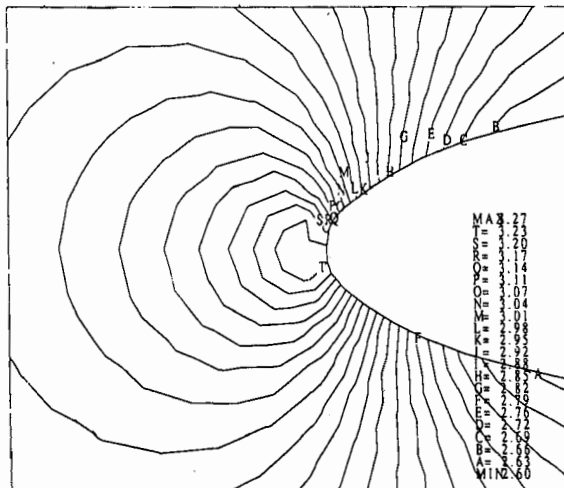


Figura 7. Detalle de las isolíneas de presión usando la técnica de TG de un paso sin viscosidad artificial.

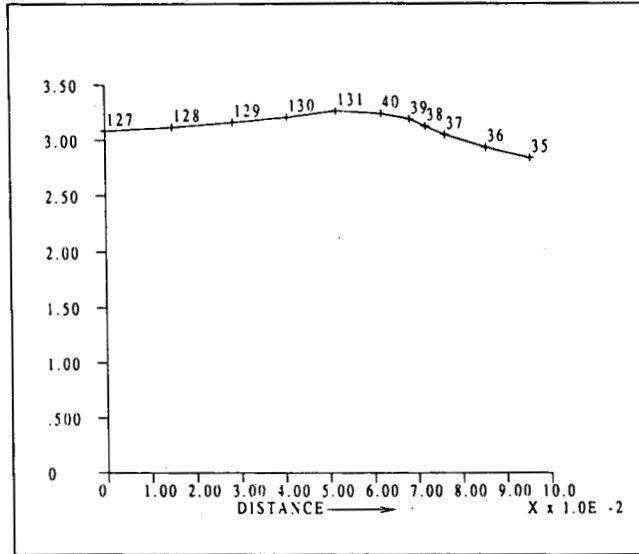


Figura 8. Variación de la presión a lo largo de la línea de corriente del punto de estancamiento.

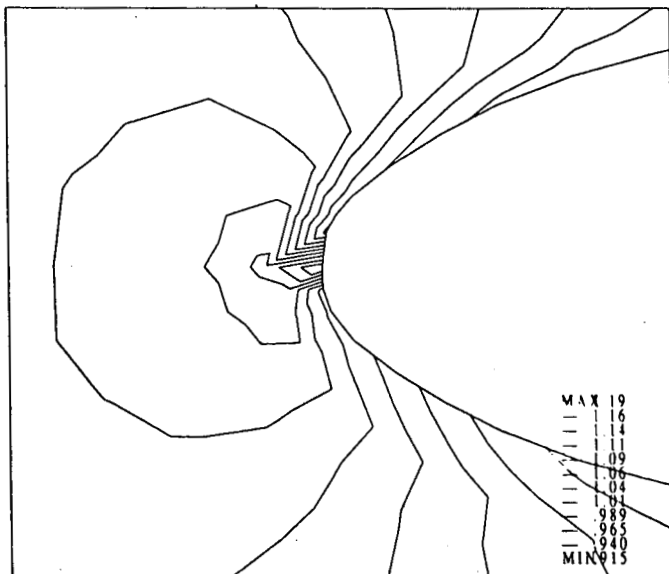


Figura 9. Detalle de las isóneas de densidad en la zona próxima al punto de estancamiento.

Después de efectuar todas las derivadas indicadas, y mediante algunas operaciones algebraicas, se puede mostrar que:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \simeq u^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \quad (29)$$

puede escribirse nuevamente la ecuación (24), reemplazando $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ por la segunda ecuación de (25), y $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$ por (29) con lo que resulta:

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \left(u^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \simeq 0 \quad (30)$$

Es evidente que en la ecuación anterior, el término encerrado entre paréntesis es una difusión que se ha introducido al reemplazar la derivada temporal por una aproximación, y el coeficiente es $K = V^2 \frac{\Delta t}{2}$.

Para ponderaciones tipo Pétrov Galerkin, se ha demostrado¹, que la cantidad óptima de difusión artificial es $K = \frac{\alpha V h_e}{2}$, donde: V es la velocidad $\sqrt{(u^2 + v^2)}$, h_e es el tamaño del elemento, y $\alpha = \coth(\frac{\gamma_u}{2}) - \frac{2}{\gamma}$, siendo:

$$\gamma_u = \frac{\rho Re V h}{1 + \frac{u^2}{3V^2}} \quad (31)$$

$Re = \frac{\rho V L}{\mu}$, es el número de Reynolds basado en una dimensión representativa L y h un tamaño elemental.

Para las ecuaciones de Euler, dado que $Re = \infty$, resulta $\alpha = 1$. Igualando ambos coeficientes, se obtiene para la ecuación de continuidad:

$$\Delta t_\rho = \frac{h_\rho}{u} \quad (32)$$

Donde los subíndices ρ se han utilizado para destacar que se las magnitudes correspondientes están relacionadas con la ecuación de continuidad.

Ecuación de cantidad de movimiento x:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (2 - \gamma)u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = RHS$$

Mediante un desarrollo totalmente análogo se puede demostrar, que:

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + u_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\Delta t}{2} \left(u_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\rho} RHS \quad (33)$$

con $u_1 = (2 - \gamma)u$.

Idénticos conceptos a los expresados en la ecuación de continuidad permiten escribir, para el incremento de tiempo de la ecuación de cantidad de movimiento x:

$$\Delta t_u = \frac{h_u}{V_u} \quad (34)$$

con $V_u = \sqrt{u_1^2 + v^2}$

Ecuación de cantidad de movimiento y:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + (2 - \gamma)v \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = RHS$$

nuevamente:

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\Delta t}{2} \left(u_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\rho} RHS$$

se obtiene:

$$\Delta t_v = \frac{h_v}{V_v} \tag{35}$$

donde $V_v = \sqrt{u^2 + v_1^2}$

Ecuación de la energía:

Partiendo de la ecuación:

$$\rho \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \gamma u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \gamma v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right\} = RHS$$

y siguiendo un desarrollo análogo:

$$\Delta t_\varepsilon = \frac{h_\varepsilon}{V_\varepsilon} \tag{36}$$

debe recordarse que $\alpha = \alpha_u = \alpha_v = \alpha_\varepsilon = 1$

Como consecuencia, es preciso utilizar cuatro incrementos de tiempo distintos para las cuatro ecuaciones que gobiernan el problema. Se elige el incremento de tiempo que multiplica al término de difusión numérica mayor, de manera de aplicar la cantidad óptima de "upwinding" ya encontrada por otros autores.

F. TAMAÑO DEL ELEMENTO

En las ecuaciones (32), (34), (35) y (36) se ha designado con h_ρ, h_u, h_v y h_ε , respectivamente, a los tamaños elementales.

El criterio seguido para determinar dichos tamaños es el siguiente: como ya se ha mostrado en el Apartado E, los vectores velocidad son distintos en módulo y dirección para la densidad, las cantidades de movimiento y la energía. Por tanto, un criterio posible para elegir el tamaño elemental es tener en cuenta estas direcciones (ver Figura 11).

Para cada elemento se calculan los cuatro vectores velocidad como promedio de los nodos. Se hace la proyección (producto escalar) de cada lado con el vector velocidad correspondiente y se escoge el mayor. La Figura 11 es un esquema que representa la

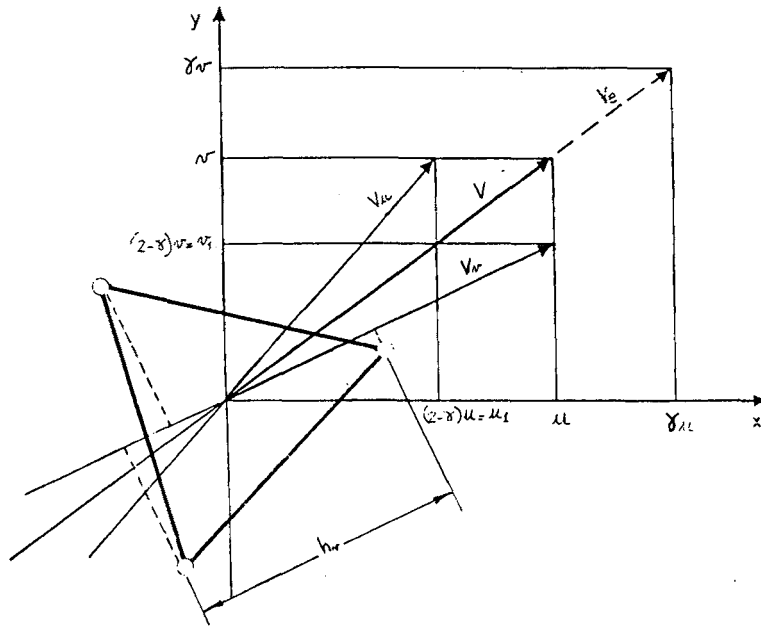


Figura 11. Obtención del tamaño de elemento.

alternativa elegida para obtener el tamaño del elemento en la dirección de la velocidad para la ecuación de cantidad de movimiento según y , designada con h_y .

G. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se ha estudiado el comportamiento del algoritmo presentado anteriormente para el caso de flujo subsónico y transónico (desde número de Mach 0.5 hasta 0.8), y se ha estudiado la solución para el caso de usar la misma técnica tomando un incremento de tiempo $\Delta t_b = \Delta t_p$ para las cuatro ecuaciones. Las soluciones obtenidas se comparan con otras obtenidas en las mismas condiciones pero usando el algoritmo de TG de dos pasos con la adición de viscosidad artificial.

Del análisis de las figuras es inmediato que hay un mejor comportamiento de la técnica descrita en primer lugar. Sin embargo, en la vecindad del punto de estancamiento, Δt_b se hace muy pequeño y a la vez se observa un comportamiento oscilatorio espúreo en la densidad.

Para intentar remediar esta situación, y observando el tamaño relativo de las magnitudes u y c (velocidad del sonido), se corrieron unos ejemplos de prueba en los que Δt_b se elige de manera que sea sólo levemente mayor que $\frac{h}{u+c}$ dado que los valores del incremento de tiempo óptimo conducen a un algoritmo excesivamente difusivo (especialmente en zonas donde $u \rightarrow 0$).

Los resultados son en general buenos, y se puede observar una fuerte dependencia de la solución en el valor de Δt_b . Respecto a la oscilación en la densidad se ha observado

que mediante un remallado adaptativo es posible reducir su valor pero siempre que haya un nodo en el punto de estancamiento el valor de la densidad allí será espúreo.

Es muy importante destacar que para el caso transónico ($M = 0.8$), se ha podido obtener una solución muy buena, aún en vecindades del shock, sin haber agregado difusión artificial, y sin que el usuario tenga que especificar parámetros.

Caso $M = 0.6$

Se ha resuelto el problema de flujo no viscoso alrededor de un perfil NACA 12 con ángulo de ataque 0° . En la Figura 12 puede verse la malla de elementos finitos usada de 1530 elementos y 804 nodos. Las Figuras 13 y 14 representan las isolíneas de presión correspondientes a este caso y la variación de la presión en la línea de corriente del punto de parada. Puede observarse que las isolíneas son muy suaves y la Figura 14 demuestra que la técnica de cálculo ha permitido obtener una solución sin oscilaciones espúreas. En la Figura 15 se representa la variación de los residuos en los primeros 1000 pasos (norma L_2). Puede decirse que para este caso la solución obtenida ha sido satisfactoria y el procedimiento es apto para problemas subsónicos.

Caso $M = 0.8$

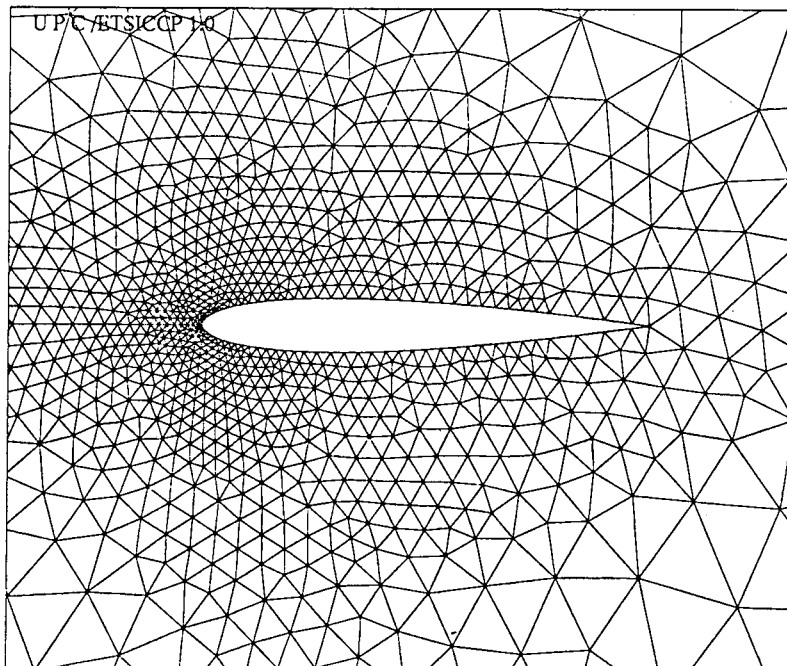


Figura 12. Malla de Elementos Finitos utilizada para los ejemplos del Apartado 4.3.

Este problema es un clásico. Se trata de resolver el flujo no viscoso alrededor de un perfil NACA0012 con ángulo de ataque 0° y con número de Mach en el infinito igual a 0.8. Debido a las aceleraciones locales que sufre el fluido, aparecen zonas transónicas y

supersónicas y un choque localizado próximo al borde de fuga del perfil. La agudeza de este choque y muy especialmente su *localización* con respecto al borde de fuga (*trailing edge*) son elementos a tener muy en cuenta a la hora de comparar los resultados. En particular, de una correcta aproximación del campo de presiones en la región del borde de ataque, dependerá que la ubicación del choque.

La Figura 16 corresponde a las isolíneas de densidad y presión y las obtenidas mediante Taylor Galerkin de dos pasos con viscosidad artificial. Es evidente que la solución obtenida es de tan buena calidad o incluso mejor que la usada como comparación. La Figura 17 representa la variación de los residuos (norma L_2). Se ha graficado el comportamiento de las cuatro variables nodales (los residuos más elevados corresponden a la energía total). La Figura 18 muestra la variación de la presión alrededor del perfil donde se puede ver la presión alta del punto de parada (sin oscilaciones) y los dos saltos correspondientes al choque. Por último, la Figura 18 corresponde a la variación de la densidad alrededor del perfil donde pueden asimismo observarse los dos saltos correspondientes al choque.

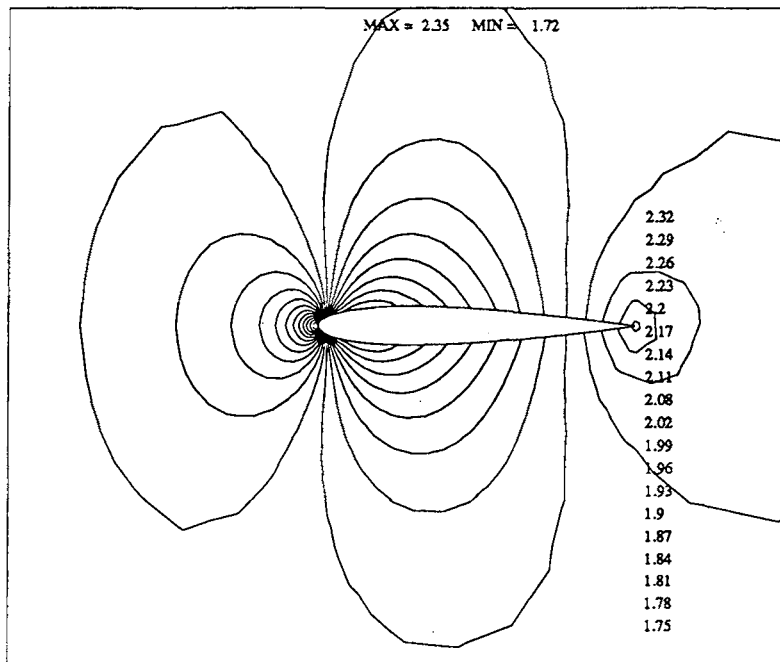


Figura 13. Isolíneas de presión para el caso $M_\infty = 0.6$.

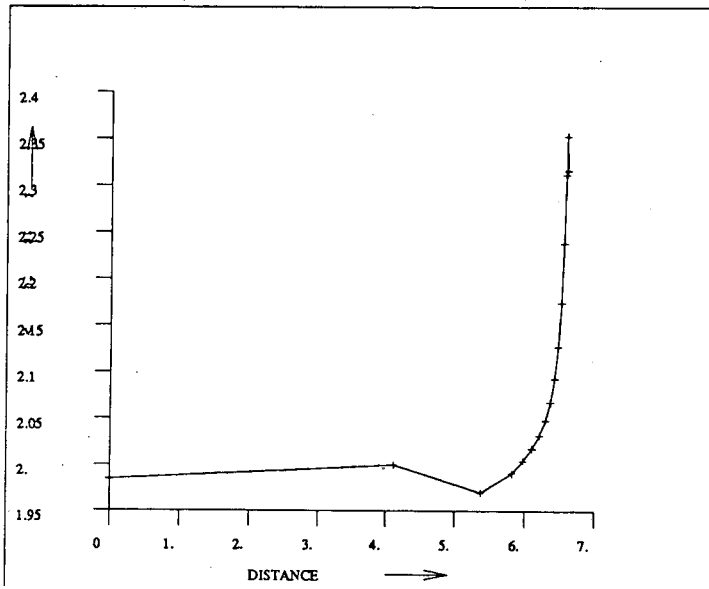


Figura 14. Variación de la presión a lo largo de la línea de corriente del punto de estancamiento para el caso $M_\infty = 0.6$.

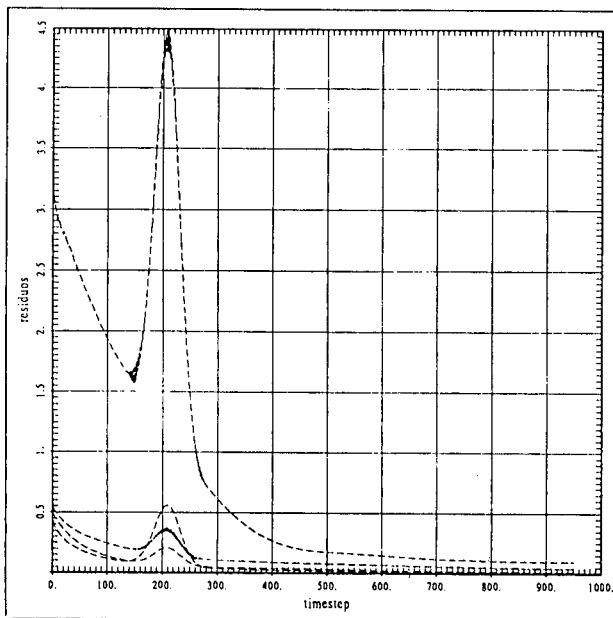


Figura 15. Variación de los residuos (norma L_2) para el caso $M_\infty = 0.6$.

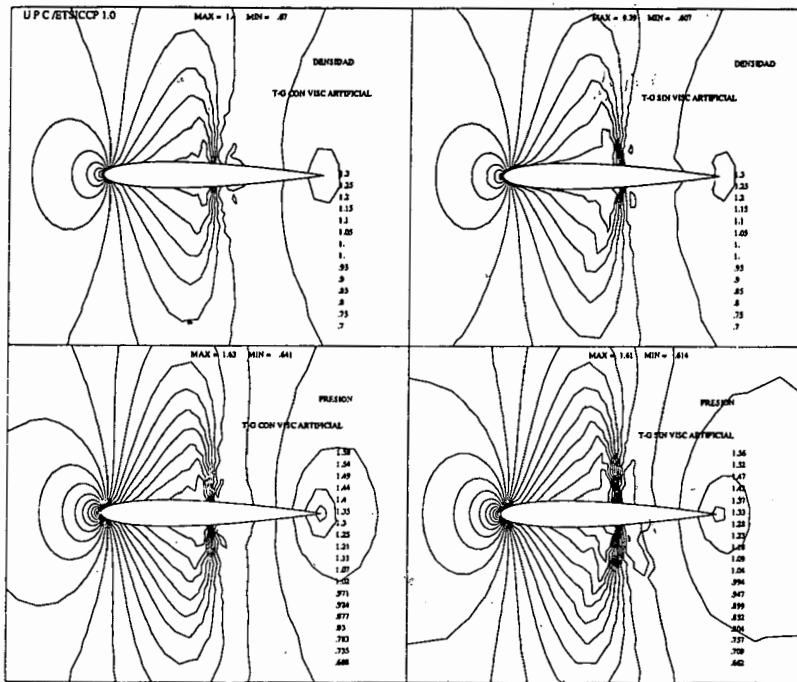


Figura 16. Comparación de las isolíneas de presión y densidad para el caso $M_\infty = 0.8$ versus la solución por Taylor Galerkin usando viscosidad artificial.

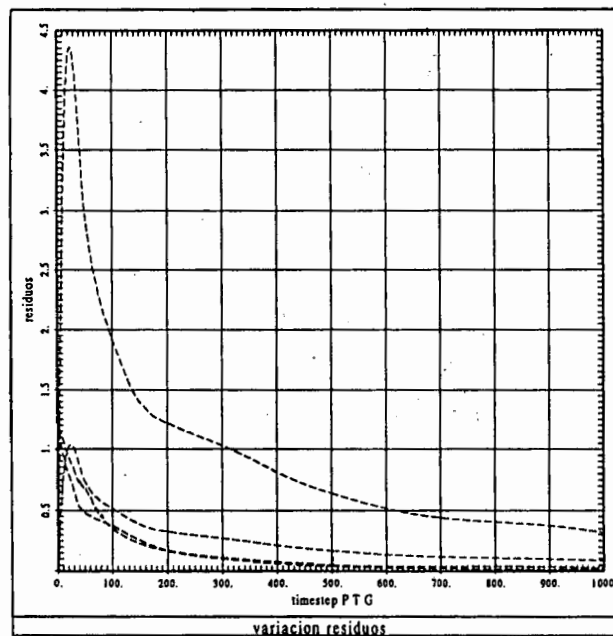


Figura 17. Variación de los residuos (norma L_2) para el caso $M_\infty = 0.8$.

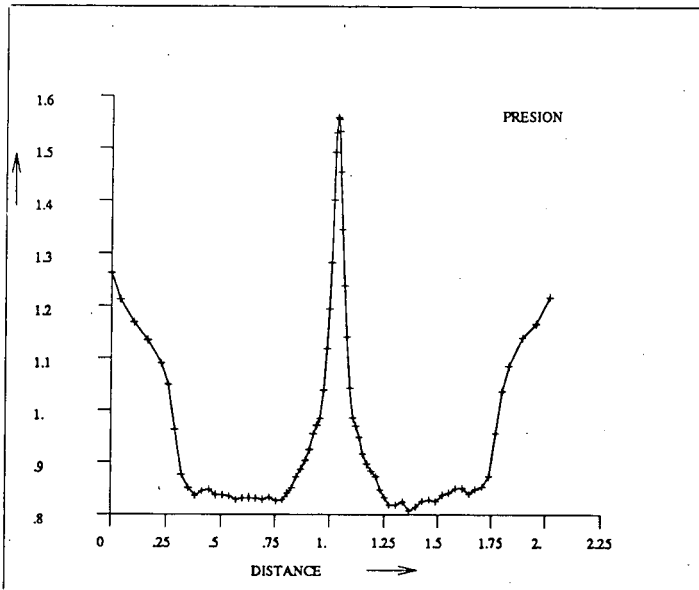


Figura 18. Variación de la presión alrededor del perfil para el caso $M_\infty = 0.8$.

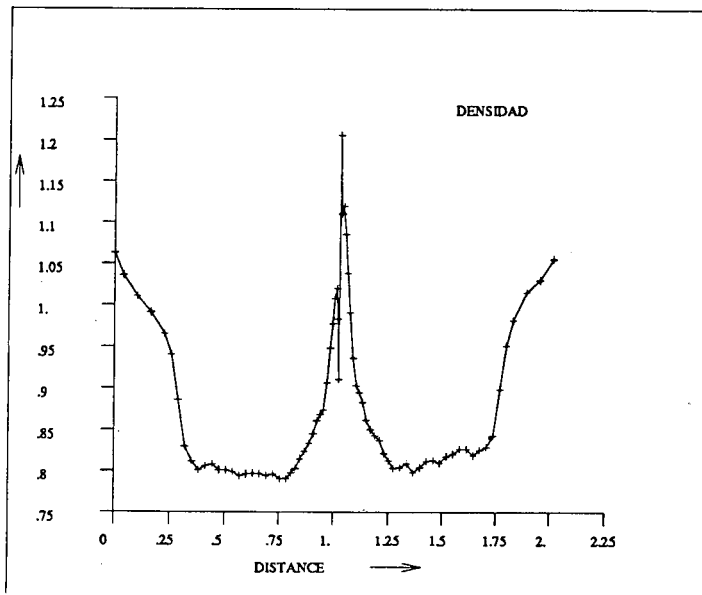


Figura 19. Variación de la densidad alrededor del perfil para el caso $M_\infty = 0.8$.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a los profesores Eugenio Oñate y Juan Miquel Canet de la Universidad Politécnica de Cataluña por su asesoramiento durante la realización de la tesis doctoral^{10,11} de la cual se han extraído los resultados de este artículo. Se agradece también la ayuda prestada por el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería para la realizar este trabajo.

REFERENCIAS

1. F.P. Brueckner & J.C. Heinrich, "Petrov Galerkin finite element model for compressible flows", Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Arizona, Tucson, Arizona 85721, (1990).
2. J. Donea, "A Taylor-Galerkin Method for the convective transport problems," *Int. Journal Num. Methods in Engineering*, Vol. 20, pp. 101-119, (1984).
3. H. Liepmann & A. Roshko, "Elements of Gasdynamics," Galcit Aeronautical Series, John Wiley & Sons Ed, (1957).
4. J. Miquel, E. Oñate, & F. Quintana, "A Formulation for the Solution of Euler Equations for Compressible Flow using Finite Elements.", Proceedings of the 5th Int. Symp. on Num. Methods in Engineering, Springer Verlag Ed.(1989), Lausanne, Switzerland, (1989).
6. H. Liepmann & A. Roshko, "Elements of Gasdynamics," Galcit Aeronautical Series, John Wiley & Sons Ed. (1957).
7. D. Potter, *Computational Physics*, John Wiley & Sons, (1980), (First Edition 1972).
8. W. J. Usab & E. Murman, "Embedded Mesh Solutions of the Euler Equations Using a Multiple Grid Method", en *Advances in Computational Transonics*, (W. G. Habashi, Ed). Pineridge Press, pp. 447-472, (UK), (1985).
9. O.C. Zienkiewicz & R.L. Taylor, "The Finite Element Method", Fourth edition, Mc. Graw-Hill, (1989).
10. J.F. Quintana, *Análisis de problemas de flujo compresible de advección dominante por el método de elementos finitos*, Tesis Doctoral, E.T.S.E.C.C.P.B., Universidad Politécnica de Cataluña, España, Marzo, (1993).
11. F. Quintana, "Análisis de problemas de flujo compresible de advección dominante por el método de elementos finitos", *Tesis doctoral* Universidad Politécnica de Cataluña, Marzo (1993).
12. E. Oñate, F. Quintana, R. Codina y J. Miquel, "Finite element formulations for compressible and incompressible fluids", *Publicación de Investigación N° 14*, CIMNE, Barcelona, (1991).