Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 10, 3, 163–171(1994)

CONSIDERACIONES SOBRE UNA VARIANTE DEL MÉTODO DE RAYLEIGH

RICARDO OSCAR GROSSI
y
ARIEL ARANDA

Programa de Matemática Aplicada de Salta,
Facultad de Ciencias Tecnológicas,
Universidad Nacional de Salta,
Buenos Aires 177, 4400 – Salta, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se presentan ciertas consideraciones sobre una variante del clásico método energético de Rayleigh. Además, se aplica una extensión del mismo a un problema de vibraciones transversales de una viga que soporta una masa concentrada, destacándose las virtudes del método en lo que a su tratamiento analítico y numérico se refiere. Se incluyen también consideraciones sobre otras aplicaciones de interés en la ingeniería.

SUMMARY

This note is concerned with a variant of the classical Rayleigh method. An extension of the method is applied to a vibrating beam which supports a concentrated mass. A discussion about the analytical and numerical performances is included. Also other engineering applications of the method are discussed.

INTRODUCCION

El método energético de Rayleigh ha ocupado un lugar destacado en la determinación de soluciones aproximadas de problemas de contorno, y/o de autovalores, que describen el comportamiento estático o dinámico de sistemas estructurales.

En el año 1981, el profesor Robert Schmidt[1], aplica una versión modificada del clásico método de Rayleigh, utilizando funciones aproximantes del tipo:

$$u(x) \;=\; cf(x_1, x_2, \ldots, x_N, n) \tag{1}$$

donde la expresión analítica de f es conocida, pero no así los valores numéricos de los parámetros c y n. La variante con respecto al método clásico, es la inclusión del parámetro n que figura como exponente "ajustable", en la expresión de $u(x)$. Este

Recibido: Septiembre 1991

 ISSN 0213–1315

parámetro debe ser determinado, en el caso de problemas de autovalores, mediante un proceso de minimización (en forma exacta o aproximada) de los autovalores correspondientes. El profesor Schmidt demostró que es posible aumentar la precisión de los resultados, si se usa como función aproximante a la expresión $u = cx^n$ en lugar de $u = cx^2$, en la determinación de la frecuencia fundamental de una viga en voladizo. También, concretó aplicaciones del método a problemas de pandeo y de grandes deflexiones de placas circulares. En otro artículo[2], aplica el método de Rayleigh-Ritz mediante el uso de la siguiente función aproximante:

$$u(x) = \sum_k A_k f_k(x_1, x_2, \ldots, x_N, n_1, n_2, \ldots, n_M) \tag{2}$$

Posteriormente[3-6], el profesor Schmidt presenta diversas aplicaciones del método mencionado a problemas de: vibraciones de vigas y placas circulares, problemas de torsión de barras prismáticas, y problemas de pandeo. Por su parte, el profesor Charles Bert[7], demostró la importancia de explotar la simetría cuando se utiliza este nuevo método que el denominó "Método de Rayleigh-Schmidt". Cabe destacar, que el procedimiento indicado sobre el uso de funciones aproximantes del tipo dado por (1), fue ideado por el mismo Lord Rayleigh, quien lo aplicó en la determinación de valores aproximados del coeficiente de frecuencia fundamental de una cuerda elástica[8]. No obstante, el método no tuvo gran aceptación hasta su reaparición en el artículo del profesor Schmidt, arriba mencionado. A partir de ese año, fue utilizado con gran ímpetu por diversos investigadores. En referencia [9], se presenta una revisión de diversas aplicaciones del mencionado método, realizadas por distintos investigadores.

El profesor Charles Bert[10], en un muy interesante artículo presenta una amplia reseña de diversas aplicaciones del método entre las cuales cabe destacar a: análisis del comportamiento estático y dinámico de barras, columnas, membranas, vigas y placas, problemas de torsión, y pandeo de columnas y placas.

También varias extensiones o variantes de este método, fueron implementadas con éxito en la resolución del tipo de problemas recién mencionados[11,12,13,14,15,16,17].

En el presente trabajo se aplica la extensión del método de Rayleigh-Schmidt presentada en referencia [12], para determinar valores del coeficiente de frecuencia fundamental de vigas que poseen un extremo elásticamente restringido y soportan en el otro extremo a una masa concentrada. Mediante la resolución de este problema se muestra como el uso de sólo dos exponentes "ajustables", permite lograr una excelente precisión en los resultados numéricos.

PLANTEO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA

Consideremos una viga que posee un extremo elásticamente restringido contra rotación mediante un vínculo de constante de rigidez k, y en el otro soporta a una masa concentrada m.

En el caso en que se analizan modos normales de vibración, la energía de deformación máxima del sistema mecánico en estudio viene dada por:

$$E_D = \frac{1}{2}\int_0^l EI\, u''^2(x)\, dx + \frac{1}{2}k\, u'^2(O) \tag{3}$$

donde es:

EI: rigidez a la flexión de la viga
l: longitud de la viga
k: constante de rigidez del vínculo rotacional que actúa en el extremo $x = 0$
$u(x)$: la función que da los desplazamientos de los puntos de la viga.

Por otra parte, la energía cinética máxima que entra en juego cuando el sistema está vibrando viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A\int_0^l u^2(x)\, dx + \frac{1}{2}\, m\omega^2 u^2(l) \tag{4}$$

donde es:

ω: la frecuencia circular natural
A: el área de la sección transversal de la viga
ρ: densidad del material

Las condiciones de contorno de este problema vienen dadas por:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ ku'(0) &= EIu''(0) \\ u''(l) &= 0 \\ u'''(l) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RAYLEIGH-SCHMIDT

Vamos a adoptar como función aproximante a una expresión que contenga dos términos, cada uno de los cuales contiene un exponente indeterminado. Concretamente, consideremos la siguiente función aproximante:

$$u_a = A_1 \sum_{i=1}^{4} a_i\, x^{n_i} + A_2 \sum_{j=1}^{5} b_j\, x^{m_j} \tag{6}$$

donde es:

$a_4 = 1,\ n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 3$
$b_5 = 1,\ m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_4 = 5,\ m_5 = 6$
con n_4 y m_3 variables.

Los coeficientes a_i y b_j, se determinan mediante el reemplazo de la expresión (6) en las condiciones de contorno (5). Por otra parte, si se reemplaza la expresión (6) en (3) y (4), y se minimiza el correspondiente cociente de Rayleigh, respecto a los coeficientes A_1 y A_2, se obtiene una ecuación de frecuencias, que es del tipo:

$$P\lambda^4 + Q\lambda^2 + R = 0 \tag{7}$$

donde es:

$$\lambda = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$$

La expresión analítica de la ecuación (7) contiene a los parámetros m_3 y n_4, y en particular el coeficiente λ es función de los mismos, es decir es:

$$\lambda = \lambda(n_4, m_3) \tag{8}$$

El método de Rayleigh-Schmidt requiere minimizar a λ respecto de dichos parámetros. Dado que la expresión (8) proporciona cotas superiores para el valor exacto del coeficiente de frecuencia fundamental, se puede determinar un valor óptimo para λ mediante la condición:

$$\partial\lambda/\partial n_4 = \partial\lambda/\partial m_3 = 0 \tag{9}$$

Este procedimiento analítico es en general extenso y engorroso, dado que la expresión analítica de λ en (8) es compleja y por lo tanto las derivadas que deben determinarse de acuerdo a (9) conducen a un procedimiento analítico complejo. Por ello, resulta adecuado desde un punto de vista práctico, la implementación de un procedimiento numérico que evite dichos desarrollos analíticos. El mismo consiste en establecer un proceso de variación de los valores de m_3 y n_4 en entornos de los números enteros: 3 y 4 respectivamente. De esta forma, se determinan mediante una simple comparación, los valores mínimos de λ que resultan. Esta técnica que simplifica notablemente el proceso de minimización de λ, ha sido aplicada con éxito en la solución de diversos problemas de dinámica estructural[11,12,14,15].

Cabe destacar que en la expresión (6), de la función aproximante utilizada, se consideran tan sólo dos exponentes indeterminados. El mismo procedimiento puede ser aplicado aumentando la cantidad de estos exponentes ajustables. Consecuentemente en general, es posible un aumento de la precisión de los resultados numéricos, pero lógicamente esto implica un aumento en el trabajo computacional correspondiente. No obstante, para el problema resuelto en el presente trabajo, se determinó que el uso de una mayor cantidad de exponentes indeterminados no produce un aumento significativo de los resultados numéricos. Esto en general no ocurre cuando se resuelven otros tipos de problemas.

RESULTADOS NUMÉRICOS

En las Tablas I a III se muestran valores del coeficiente de frecuencia fundamental λ para distintos valores del coeficiente de rigidez rotacional $\overline{k} = \frac{kl}{EI}$ y de la relación de masas μ =masa concentrada/masa de la viga, obtenidos con el método de Rayleigh-Schmidt. Además, se incluyen los valores de los exponentes m_3 y n_4 que corresponden a los valores mínimos de λ obtenidos. A efectos de poder comparar valores numéricos con los obtenidos con otras metodologías se incluyen en las mencionadas tablas los valores obtenidos por T.W. Lee[18], mediante la resolución del problema de autovalores correspondiente con el uso de series de funciones. La comparación de valores numéricos muestra la excelente precisión del método utilizado en este trabajo, el cual se caracteriza por una gran simplicidad tanto en el tratamiento analítico como en el numérico.

μ	$\overline{k}$	I	II	n_4	m_3
	0.01	0.4159	0.4159	4.6	4.6
	0.1	0.7358	0.7358	4.4	4.5
0	1.0	1.2479	1.2479	4.6	4.0
	10	1.7227	1.7228	4.6	4.0
	100	1.8568	1.8569	4.6	4.0
	∞	1.8751	1.8752	4.6	4.0

$\overline{k} = kl/EI$, μ =masa concentrada/masa viga.
I: Valores de λ de referencia[18]
II: Valores de λ obtenidos con el método Rayleigh-Schmidt.

Tabla I

μ	$\overline{k}$	I	II	n_4	m_3
	0.01	0.3895	0.3895	4.6	4.0
	0.1	0.6887	0.6887	4.5	4.6
0.1	1.0	1.1642	1.1642	4.6	4.0
	10	1.5912	1.5913	4.6	4.0
	100	1.7071	1.7071	4.6	4.0
	∞	1.7230	1.7230	4.6	4.0

I: Valores de λ de referencia[18]
II: Valores de λ obtenidos con el método Rayleigh-Schmidt.

Tabla II

μ	$\overline{k}$	I	II	n_4	m_3
1	0.01	0.2941	0.2940	4.2	4.7
	0.1	0.5194	0.5194	4.4	4.4
	1.0	0.8705	0.8705	4.6	4.1
	10	1.1642	1.1646	4.6	4.0
	100	1.2381	1.2386	4.6	4.3
	∞	1.2470	1.2483	4.6	4.8

I: Valores de λ de referencia[18]
II: Valores de λ obtenidos con el método Rayleigh-Schmidt.

Tabla III

OTRAS APLICACIONES

Varios otros problemas de interés en el área de la dinámica estructural pueden ser resueltos con el método de Rayleigh-Schmidt. Así por ejemplo, consideremos una viga de espesor variable de longitud l, con sección transversal A cuya base y altura están dadas por las funciones $b(x)$ y $h(x)$ respectivamente, las cuales varían en forma lineal entre $x = 0$ y $x = l$. Sea $b(0) = b_0$, $b(l) = b_1$, $h(0) = h_0$, $h(l) = h_1$. Entonces; las variaciones de b y h con x vienen dadas por:

$$b(x) = b_0[1 + (\frac{b_1}{b_0} - 1)\frac{x}{l}], \qquad h(x) = h_0[1 + (\frac{h_1}{h_0} - 1)\frac{x}{l}]$$

Estas variaciones deben ser tenidas en cuenta en las correspondientes expresiones de energía potencial y cinética. Consideremos la siguiente expresión analítica:

$$u_a = A_1 \sum_{i=1}^{4} a_i\, x^{n_i} + A_2 \sum_{j=1}^{5} b_j\, x^{m_j} \tag{10}$$

donde es: $a_4 = 1$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $b_5 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, y donde los restantes n_i y m_j son variables.

El uso de la expresión (10) en el método Rayleigh-Schmidt, permite la resolución del problema de la determinación de coeficientes de frecuencias de una viga de espesor variable cuyos extremos están elásticamente restringidos contra rotación, con un desarrollo analítico y trabajo computacional similares a los implicados en la resolución del problema de la viga con una masa en un extremo, antes expuesto. Al considerar que ambos extremos están elásticamente restringidos contra rotación, se posibilita la consideración de los casos de apoyos clásicos: rígidamente empotrado y simplemente apoyado con las posibles combinaciones, como casos particulares. Con este mismo procedimiento pueden incluirse otros parámetros de importancia, tales como: variaciones de espesor de otro tipo al considerado, inclusión de fuerzas de tensión en los extremos de la viga, extremos elásticamente restringidos contra rotación y translación, etc.

El método Rayleigh-Schmidt es también apropiado para resolver problemas de dinámica de placas. A modo de ejemplo consideremos una placa circular, de radio a cuyo contorno está elásticamente restringido contra rotación. Valores del coeficiente de frecuencia fundamental pueden obtenerse con una muy buena precisión, mediante la aplicación del método mencionado, al tomar como función aproximante para el modo fundamental de vibración a la siguiente expresión:

$$U_a(r) \;=\; A[\alpha_2(\frac{r}{a})^{n_2} \;+\; \alpha_1(\frac{r}{a})^{n_1} \;+\; 1] \tag{11}$$

El algoritmo resultante, es de fácil manejo tanto analítico como numérico, y permite la inclusión de diversos efectos adicionales, tales como ortotropía polar en el material, espesor variable y masas concentradas, sin que el trabajo analítico y computacional aumente en gran medida. También pueden considerarse modos superiores de vibración. Así, para analizar los dos primeros modos de vibración de la placa circular, con las características mencionadas, se puede usar la siguiente función aproximante:

$$U_a(r) \;=\; A_1\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\frac{r}{a})^{n_i} \;+\; A_2\sum_{j=1}^{3}\beta_j(\frac{r}{a})^{m_j} \tag{12}$$

con $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, $m_1 = 0$, y $m_1 = 2$. Los restantes exponentes son variables.

Con las mismas características de la simplicidad evidenciadas en los problemas tratados, se puede aplicar el método de Rayleigh-Schmidt a problemas tales como: vibraciones libres y forzadas de placas rectangulares, problemas de pandeo en vigas y placas; vibraciones de: placas rectangulares con puntos de apoyo, placas rectangulares con fundaciones elásticas, y placas rectangulares con cortes, entre varios otros problemas. Finalmente cabe destacar que el método puede ser aplicado a problemas que impliquen dominios de forma irregular. Así puede ser usado en el análisis del comportamiento dinámico de placas triangulares, y de placas con otras configuraciones poligonales.

CONCLUSIONES

La aplicación del método Rayleigh-Schmidt, mediante el uso de una función aproximante que contiene sólo dos exponentes indeterminados, permitió la construcción de un algoritmo de gran simplicidad que proporciona resultados numéricos precisos para un problema de interés en la dinámica estructural.

Una característica esencial del método es que permite aumentar la precisión de los resultados, mediante un refinamiento de las formas modales propuestas, en contraposición a otros métodos que para lograr un incremento en la precisión de los resultados, requieren un aumento de la cantidad de términos de la función aproximante. Esto hace que en el método de Rayleigh-Schmidt, tanto los desarrollos analíticos necesarios para obtener la ecuación de frecuencias, como la determinación de los correspondientes valores numéricos, sean procesos caracterizados por una gran simplicidad.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento a los revisores por sus importantes sugerencias.

El presente trabajo se realizó con el apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina (PID Nro. 3-139000/88).

REFERENCIAS

1. R. Schmidt, "A Variant of the Rayleigh-Ritz Method", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, Vol. **31**(1), pp. 37–46, (1981).
2. R. Schmidt, "Estimation of Buckling Loads and Other Eigenvalues via a Modification of the Rayleigh-Ritz Method", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **49**(3), pp. 639–640, (1982).
3. R. Schmidt, "Technique for Estimating Natural Frequencies", *Journal of Engineering Mechanics*, Proc. ASCE, Vol. **109**(2), pp. 654–657, (1983).
4. R. Schmidt, "A Method for Estimating Torsional Rigidity of Prismatic Bars", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, Vol. **32**(2), pp. 133–136, (1982).
5. R. Schmidt, "A Way of Estimating Lower Bounds for Eigenvalues in Buckling and Vibration Problems", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, Vol. **33**(2), pp. 163–167, (1983).
6. R. Schmidt, "Modification of Timoshenko's Technique for Estimating Buckling Loads", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, Vol. **33**(2), pp. 169–173, (1983).
7. Ch. Bert, "Use of Symmetry in Applying the Rayleigh-Schmidt Method to Static and Free Vibration Problems", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, Vol. **34**(1), pp. 65–67, (1984).
8. J.W. Strutt, Baron Rayleigh, "The Theory of Sound", Vol. **1**, 2nd. edition, Dover Publications, New York, (1945).
9. R. Grossi, "A Note on the Rayleigh-Schmidt Method", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, Vol. **37**(1), pp. 29–35, (1987).
10. Ch. Bert, "Application of a version of Rayleigh Technique to Problems of Bars, Beams, Columns, Membranes and Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **119**(2), pp. 317–326, (1987).
11. R. Grossi, and R. Bhat, "A Note on Vibrating Tapered Beams", *Journal or Sound and Vibration*, Vol. **174**(1), pp. 174–178, (1991).
12. R. Grossi, R. Bhat and A. Aranda, "Vibration of tapered beams with one end spring hinged and the other end with tip mass", Aceptado para publicación en *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **160**(1), pp. 175-178, (1993).
13. R. Grossi and P. Mac Gaul, "On the Use of Several Undetermined Exponents in the Rayleigh-Schmidt Technique", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, Vol. **38**(2), pp. 163–171, (1989).
14. R. Grossi, "On the Use of the Rayleigh-Schmidt Approach", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, Vol. **40**(2), pp. 115–122, (1990).
15. R. Grossi, P. Laura and Y. Narita, "A Note on Vibrating Polar Orthotropic Circular Plates Carrying Concentrated Masses", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **106**(2), pp. 181–186, (1986).
16. I. Elishakhoff, "A Variation of the Rayleigh's and Galerkin's Methods with Variable Parameter as a Multiplier", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **114**(1), pp. 159–163,

(1987).
17. P. Laura, V. Cortinez, "Use of Exponential Co-ordinate Functions Containing an Optimization Parameter When Solving Mechanical Vibrations Problems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **129**(3), pp. 520–522, (1989).
18. T.W. Lee, "Vibration frequencies for a Uniform Beam with one End Spring Hinged and Carrying a Mass at the Other Free End", *J. App. Mech.*, Vol. **95**, pp. 313–315, (1973).