

y métodos de optimización con restricciones físicas en las variables. La aplicación de los mismos se realiza en dos etapas. En la primera etapa, se comparan cuatro técnicas de optimización distintas (DFP, FR, AQN, LM) con el fin de seleccionar la más efectiva en encontrar los parámetros deseados, que en este caso son porosidad y permeabilidad. Se consideran como hipotéticos datos experimentales distribuciones de presión en función del tiempo que se obtienen perturbando en forma estadística la solución exacta calculada por el modelo matemático. Las cuatro técnicas obtienen valores óptimos únicos para los parámetros, pero la que indudablemente muestra una mayor eficiencia en encontrarlos es AQN. Una vez elegido este método y en una segunda etapa, se lo aplica a la interpretación de mediciones reales realizadas en un pozo fracturado hidráulicamente. La caída de presión medida en función del tiempo ha sido presentada por Matthews and Russell¹. Con el método propuesto aquí no es necesario separar el análisis en los casos transitorio (yacimiento infinito), transitorio final y semi-estacionario, sino que esta técnica ajusta la distribución completa de presión obteniendo con éxito únicos valores de los parámetros, que en este caso son permeabilidad, factor de daño y radio de drenaje.

Este método podría también usarse para el análisis de ensayos con caudales múltiples o ensayos de pozos inyectoras, e incluso para el análisis de ensayos a caudales variables que no pueden ser interpretados por los métodos tradicionales.

MODELO MATEMÁTICO

La ecuación radial de difusividad

El flujo isotérmico y monofásico de petróleo hacia el pozo productor ubicado en el centro de un reservorio circular está regido por la ecuación radial de difusividad que, expresada en términos adimensionales es:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad 1 \leq r_D \leq r_{eD} \quad (1)$$

donde se supone que¹:

- el reservorio es homogéneo, isótropo y tiene espesor uniforme.
- la porosidad y la permeabilidad son constantes.
- el petróleo tiene compresibilidad constante y pequeña y viscosidad constante.
- se anula el producto de la compresibilidad, c , por el gradiente de presión al cuadrado: $c(\partial p_D / \partial r_D)^2 \approx 0$.

Inicialmente, el flujo es nulo (la presión es uniforme):

$$p_D = 0 \quad ; \quad t_D = 0 \quad \forall r_D \quad (2)$$

En el borde interior el caudal de producción del pozo es constante,

$$\left. \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=1} = -1 \quad t_D > 0 \quad (3)$$

El problema inverso

El proceso de estimar parámetros del reservorio a partir de datos de presión medidos durante un ensayo de pozo se conoce como problema inverso o "history matching". Para estimar dichos parámetros se construye una función objetivo como una sumatoria pesada de los cuadrados de los residuos (diferencias entre las presiones medidas durante el ensayo y las calculadas por el modelo matemático).

La elección de la función objetivo más adecuada fue tratada con detalle por Carrera y Neuman⁸. Actualmente se trata de incorporar en la función objetivo toda información previa existente sobre los parámetros y a caracterizar estadísticamente dicha información. Sin embargo el propósito principal de esta presentación es la comparación entre cuatro diferentes técnicas de optimización que minimizan la función objetivo. En consecuencia, se elige la forma más simple de dicha función considerando que no existe información previa y que los parámetros son constantes (no varían espacialmente).

En la siguiente sección se presentarán tres ejemplos. En el primer y segundo ejemplos se determinan la porosidad y la permeabilidad minimizando la función objetivo F ,

$$F(\phi, k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i [p_i^o - p_i^c(\phi, k)]^2 \quad (8)$$

sujeto a

$$0 \leq \phi \leq \phi_{\max} \quad ; \quad 0 \leq k \leq k_{\max}$$

donde N es el número de datos ; p_i^o es la presión observada en el pozo y p_i^c es la presión calculada en el pozo para el paso de tiempo i ,

$$p_i^c = p_{IN} - \frac{q\mu}{2\pi kh} p_D(r_D = 1, t_{Di}) \quad (9)$$

$p_D(r_D = 1, t_{Di})$ se obtiene a partir de la Ec.(6) para tiempos menores que el tiempo de estabilización y a partir de la Ec. (7) para tiempos mayores; usando valores aproximados de permeabilidad y porosidad. El factor de peso w_i es la inversa de la varianza del error de la medición experimental i .

La Ec.(8), junto con Ec.(6) (o Ec.(7)) constituye un problema de optimización con restricciones que puede ser transformado en un problema irrestricto reemplazando las variables originales en función de nuevas variables

$$\phi = \phi_{\max} \text{sen}^2 x_1 \quad ; \quad k = k_{\max} \text{sen}^2 x_2 \quad (10)$$

Luego, la nueva función objetivo será

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i f_i^2(x_1, x_2) \quad (11)$$

donde

La aproximación Quasi-Newton para el problema de mínimos cuadrados

En general un algoritmo de minimización busca el óptimo de la función en forma iterativa usando direcciones de descenso \mathbf{d}_k (k es la iteración actual). El modo de elección de \mathbf{d}_k es lo que caracteriza a los diferentes métodos. Por ejemplo, el método de Newton, atractivo por sus propiedades de convergencia local, elige como dirección \mathbf{d}_k a la que minimiza el modelo cuadrático de la función objetivo, o sea

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}_k)\mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \quad (18)$$

donde $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$ es la matriz Hessiana de F en \mathbf{x}_k y $\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$ es el gradiente de F en \mathbf{x}_k .

Ahora bien, en muchos casos el cálculo del Hessiano de F puede resultar computacionalmente muy costoso. Por esta razón los métodos del tipo Quasi-Newton evitan este inconveniente utilizando en cada paso una matriz con la que se trata de aproximar a $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$.

En el caso particular del problema de mínimos cuadrados

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i^2(\mathbf{x}) \quad ; \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_N(\mathbf{x})) \quad (19)$$

(f_i es el residuo pesado de la medición i), el gradiente y el Hessiano adquieren una estructura especial:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (20)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}(\mathbf{x}) \quad (21)$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ es la matriz Jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y,

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{x}) \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{H}_i = \text{matriz Hessiana de } f_i. \quad (22)$$

Los métodos tradicionales que resuelven el problema de mínimos cuadrados desprecian el término \mathbf{R} que involucra derivadas de segundo orden, suponiendo que el término de primer orden $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ predominará sobre aquél. Pero esta suposición es válida sólo si el residuo en la solución es pequeño. Para problemas en los cuales el residuo en la solución no es tan pequeño la técnica AQN propone utilizar una aproximación Quasi-Newton \mathbf{M}_k de la matriz $\mathbf{R}(\mathbf{x}_k)$. El cálculo iterativo de \mathbf{M} sólo requiere la función objetivo, el Jacobiano y la aproximación previa de \mathbf{M} . En esta implementación se actualiza la matriz basándose en la fórmula de Broyden-Fletcher-Goldfarb y Shanno (BFGS):

$$\mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{M}_k - \frac{1}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{s}_k} \mathbf{W}_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{W}_k + \frac{1}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{s}_k} \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T \quad (23)$$

donde

ANÁLISIS DE RESULTADOS

La teoría descripta fue aplicada a tres ejemplos de ensayos de pozos en producción (caída de presión o “draw-down tests”). Las pruebas computacionales se llevaron a cabo en una VAX 11/750. En el primer ejemplo se analizan tres conjuntos de hipotéticos datos experimentales y se ajustan los parámetros permeabilidad y porosidad. El primer conjunto de datos de presión en función del tiempo es suministrado por la solución exacta de la ecuación de difusividad para $k = 0.0947 \mu\text{m}^2$ y $\phi = 0.1$. En este caso se verifica la capacidad del método AQN para arribar a esos valores de permeabilidad y porosidad exactos partiendo desde distintos puntos iniciales. El segundo y tercer conjunto de distribuciones temporales de presión son perturbaciones estadísticas, una más pronunciada que la otra, de la solución exacta. El propósito de estos dos casos es comparar y evaluar la capacidad de las cuatro técnicas de optimización DFP, FR, AQN y LM para encontrar el valor óptimo partiendo desde distintos puntos iniciales. Con este mismo propósito se estudia un segundo ejemplo, que también consiste en datos hipotéticos construidos perturbando estadísticamente la solución exacta (obtenida con $k = 0.0986 \mu\text{m}^2$ y $\phi = 0.18$).

El tercer ejemplo es un ensayo “draw-down” de un pozo petrolífero fracturado hidráulicamente. Se aplica la técnica AQN para encontrar tres parámetros: permeabilidad, radio de drenaje y factor de daño.

Las características del reservorio y del pozo para los tres ejemplos se muestran en Tabla I.

Características del reservorio y caudal de extracción					
		Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	
Radio del pozo	r_w	0.1 m	0.084 m	0.1 m	
Radio externo	r_e	304.8 m	168 m		
Espesor de formación ...	h	6.096 m	10.67 m	2.44 m	
Porosidad	ϕ	0.1	0.18	0.14	
Viscosidad del petróleo.....	μ	10^{-3} Pa.s	3×10^{-3} Pa.s	10^{-3} Pa.s	
Compresibilidad total ..	c	2.57×10^{-9} Pa $^{-1}$	1.19×10^{-9} Pa $^{-1}$	2.57×10^{-9} Pa $^{-1}$	
Caudal de extracción ...	q	7.36×10^{-4} m 3 /s	3.95×10^{-4} m 3 /s	1.47×10^{-3} m 3 /s	
Presión inicial del reservorio.....	p_{IN}	20.68 MPa	20 MPa	13.062 MPa	
Permeabilidad	k	$0.0947 \mu\text{m}^2$	$0.0986 \mu\text{m}^2$		

Tabla I

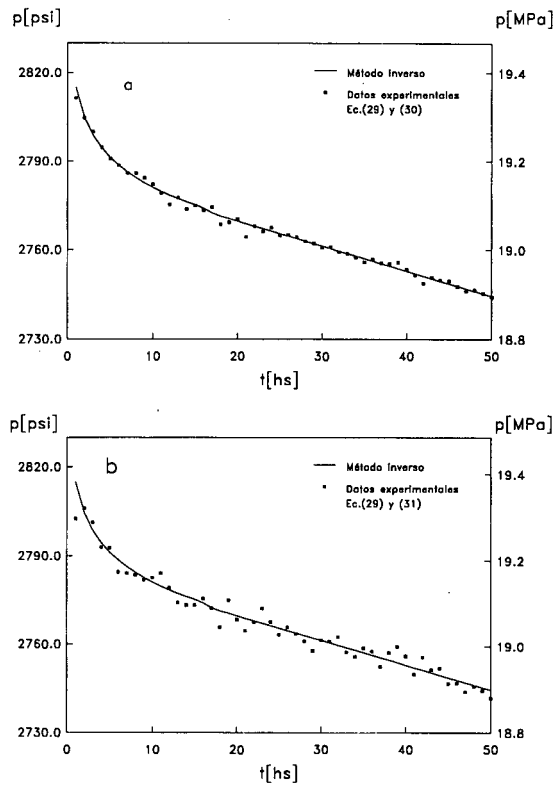


Figura 1. Distribución de presión en función del tiempo. Comparación entre los resultados del método inverso y datos experimentales, Ejemplo 1: (a) Pequeñas oscilaciones; (b) Mayores oscilaciones.

Comportamiento de las cuatro técnicas de optimización Ejemplo 1 - Perturbación pequeña					
	Convergencia, $k = 0.0942\mu\text{m}^2$ $\phi = 0.103$ $F = 45.27$	Estancamiento $k = 0.0825\mu\text{m}^2$ $\phi = 0.5$ $F = 243.26$	Estancamiento $k = 1.0\mu\text{m}^2$ $\phi = 0.1/0.2/0.3$ $F > 200.000$	No convergencia	Tiempo promedio de CPU(min)*
DFP	11	5	0	5	1.53
FR	7	5	3	6	1.14
LM	12	9	0	0	1.08
AQN	19	2	0	0	2.19

*(Casos que convergen)

Tabla II

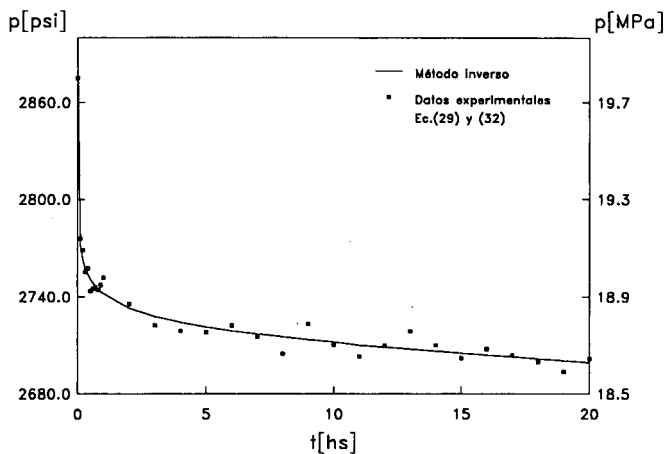


Figura 2. Distribución de presión en función del tiempo. Comparación entre los resultados del método inverso y datos experimentales, Ejemplo 2.

Se parte desde 57 pares de datos iniciales (todas las combinaciones de $k(\mu\text{m}^2) = 0.01/0.02/\dots/0.09$ y $k(\mu\text{m}^2) = 0.1/0.2/\dots/1$, con $\phi = 0.1/0.2/0.3$). Las soluciones muestran dos comportamientos: convergencia a un único óptimo $k = 0.0995\mu\text{m}^2$ y $\phi = 0.151$ o no convergencia, que se resumen en la Tabla IV.

Comportamiento de las cuatro técnicas de optimización Ejemplo 2			
	Convergencia $k = 0.0995\mu\text{m}^2$ $\phi = 0.151$ $F = 402.07$	No convergencia	Tiempo promedio de CPU(min)*
DFP	16	41	0.82
FR	33	24	0.97
LM	52	5	0.62
AQN	57	0	1.40

*(Casos que convergen)

Tabla IV

Aplicación de la técnica AQN a un pozo real, partiendo de tres puntos iniciales			
Punto Inicial	Iteraciones	Orden del gradiente en el óptimo	Número de evaluaciones de la función
$k = 10$ mD $r_e = 100$ ft $s = 0$	65	10^{-4}	238
$k = 25$ mD $r_e = 700$ ft $s = 4$	33	10^{-5}	79
$k = 200$ mD $r_e = 800$ ft $s = -1$	84	10^{-6}	495

Tabla V

Entonces, los parámetros buscados son permeabilidad, k , factor de daño, s , y radio de drenaje, r_e . Para encontrarlos se aplica el método inverso con la función objetivo definida en la Ec.(14) y las restricciones de la Ec.(15) donde

$$k_{\max} = 300 \text{ mD} = 0.296 \mu\text{m}^2 \quad ; \quad r_{\max} = 1000 \text{ ft} = 304.8 \text{ m}$$

$$s_{\min} = -10 \quad ; \quad s_{\max} = 10$$

Se considera que w_i es igual en todos los términos de la sumatoria de la Ec.(14). Se utiliza la técnica AQN partiendo desde tres puntos iniciales, los resultados del cálculo se muestran en la Tabla V.

Los tres puntos iniciales convergen al único óptimo:

$$k = 69.48 \text{ mD} = 0.0686 \mu\text{m}^2 \quad ; \quad r_e = 467.7 \text{ ft} = 142.55 \text{ m} \quad ; \quad s = -5.16$$

donde la función objetivo es $F = 3280.74$.

Con los valores óptimos y otras propiedades enunciadas en la Tabla I – Ejemplo 3, se aplica la Ec.(5) para hallar el tiempo de estabilización. Este es de 5.28 hs y separa el límite de validez de la solución para tiempos cortos, Ec.(6) de la solución para tiempos largos Ec.(7). Se lo muestra en la Figura 3.

mínimos cuadrados y técnicas de optimización en multivariable. El análisis de los casos presentados permite concluir lo siguiente:

1- Se resuelve la ecuación de difusividad radial en términos de presión, con valores de permeabilidad y porosidad conocidos. Su solución suministra la distribución temporal de presiones exacta que se utiliza como dato para verificar la capacidad del método inverso con la técnica de aproximaciones Quasi-Newton (AQN) de encontrar los valores verdaderos de permeabilidad y porosidad. En efecto, el método converge a dichos valores de permeabilidad y porosidad partiendo desde 37 pares de valores iniciales, sobre 45 pares dispersos que fueron probados. Los ocho pares restantes se estancan en un valor límite.

2- Se analiza el comportamiento de cuatro técnicas de optimización para converger a los valores óptimos de permeabilidad y porosidad, partiendo de distribuciones de presión con errores al azar que simulan mediciones experimentales. Ellas son las técnicas de Davidon-Fletcher-Powell (DFP), Fletcher-Reeves (FR), Levenberg-Marquardt (LM) y AQN. Se analizan dos ejemplos sintéticos. En el primero se parte desde 54 pares de valores iniciales considerando dos distribuciones temporales de presión. En el segundo ejemplo se parte de 57 pares de valores iniciales. Los resultados de ambos ejemplos permiten afirmar que las técnicas específicas para mínimos cuadrados (AQN y LM) se comportan mejor que las otras dos ya que las técnicas DFP y FR tienen problemas en la convergencia. El método AQN se muestra superior al LM pues este último se estanca, con frecuencia, en un valor límite y en algunos pocos casos no converge. Pero esta habilidad de AQN para obtener el óptimo se basa en asegurar el descenso estricto de la función en cada iteración, lo que aumenta el tiempo de cálculo.

3- Se aplica este "history-matching" a un ensayo de bombeo (caída de presión) de larga duración realizado en un pozo fracturado hidráulicamente para encontrar el radio de drenaje, el factor de daño y la permeabilidad. Se comparan los resultados obtenidos con los suministrados aplicando los métodos gráficos tradicionales. En estos últimos hay que dividir "a priori" la distribución temporal de presiones en tres etapas: el estado transitorio, último estado transitorio y estado semi-estacionario. Los valores de los parámetros hallados en cada etapa difieren entre sí, pues reflejan la llegada de la perturbación originada por el pozo a zonas cada vez más alejadas del mismo. En cambio, este método inverso utiliza todas las mediciones de presión. Por eso los resultados de permeabilidad, radio de drenaje y factor de daño son únicos e intermedios entre los hallados por las técnicas tradicionales.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo fue solventado con subsidios de la Universidad de Buenos Aires, del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC), todos en Argentina. Se reconoce el valioso aporte de Marcela B. Goldschmit en los aspectos computacionales del método.

k correspondiente a la k ésima iteración de la técnica AQN
 max máximo valor del parámetro
 min mínimo valor del parámetro

Supraíndices

c calculado
 e exacto
 o observado

REFERENCIAS

1. C.S. Matthews and D.G. Russell, "Pressure Buildup and Flow Test in Wells", *Monograph Vol. 1*, Henry L. Doherty Series, Society of Petroleum Engineers, (1967).
2. E. Darderes, V. Vampa, O. Sorarrain y M.S. Bidner, "Gas Well Testing Analysis Using Finite-Difference Models and Optimization Techniques", *Revue de L'Institut Francais du Pétrole*, Vol. **43(3)**, pp. 371-387, (1988).
3. E. Darderes, V. Vampa, O. Sorarrain y M.S. Bidner, "Metodología para la Determinación de la Permeabilidad de un Yacimiento Gasífero aplicando Simulación Numérica y Regresión no Lineal", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **4(3)**, pp. 297-311, (1988).
4. J.R. Cannon y A.H. Dogru, "Estimation of Permeability and Porosity From Well Test Data", (Forum SPE5345), *J. Pet. Tech.*, Vol. **32**, pp. 1323-1324, (1980).
5. A. Dogru, T. Dixon y T. Edgar, "Confidence Limits on the Parameters and Predictions of Slightly Compressible Single-Phase Reservoirs", *Transactions AIME*, Vol. **263**, pp. 42-56, (1977).
6. H.K. Van Poollen, "Radius-of-Drainage and Stabilization Time Equations", *Oil and Gas Journal*, Vol. **62**, pp. 138-146, (1964).
7. G.B. Savioli, M.B. Goldschmit y M.S. Bidner, "Discusión sobre las soluciones analíticas y numéricas de la ecuación radial de difusividad que representa el flujo en medios porosos", *Revista Brasileira de Engenharia*, Vol. **5(2)**, pp. 65-79, (1988).
8. J. Carrera y S.P. Neuman, "El Problema Inverso de la Hidrología Subterránea: Estado del Arte y Método de Solución", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **2(1)**, pp. 3-25, (1986).
9. P.E. Gill, W. Murray y M.H. Wright, "Practical Optimization", *Academic Press inc.*, London, Great Britain, (1981).
10. J.E. Dennis Jr. y R. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice Hall, (1983).