

## LOS EFECTOS DE BORDE EN PROBLEMAS GEOTECNICOS ESTATICOS ANALIZADOS POR EL M.E.F.

CARLOS NAVARRO  
y  
AVELINO SAMARTIN

*Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos,  
Universidad Politécnica de Madrid  
Ciudad Universitaria s/n,  
28040 Madrid.*

### RESUMEN

En el presente artículo se plantea el problema de las condiciones de borde que deben ser consideradas, para los límites laterales de un modelo de elementos finitos, en el caso de que se pretenda analizar un problema geotécnico en condiciones estáticas. Partiendo de las soluciones existentes para el caso de problemas dinámicos de interacción suelo-estructura, los autores demuestran que puede deducirse un nuevo borde aplicable a las condiciones estáticas. Dicho borde se materializa en una matriz de rigidez que interrelaciona entre sí todos los nudos del lado que se considera. La bondad de la solución propuesta, así como la correspondiente a otras condiciones de borde, es estudiada en un problema concreto que dispone de una solución, estableciéndose unas conclusiones particulares respecto al comportamiento de las diferentes condiciones de borde analizadas.

### SUMMARY

In this paper the boundary conditions problem, for the edges of a static geotechnical model analyzed by the Finite Element Method, is considered. Starting from the available solutions for Dynamic Soil-Structure Interaction Problems, the authors show that a new boundary condition, obtained from the dynamic case, can be used for static geotechnical problems. Such boundary condition is represented by a stiffness matrix which relate all the degrees of freedom along the considered model edge. The agreement between the proposed solution and the theoretical one for a particular problem is studied. Additionally, other boundary conditions are also analyzed and particular conclusions, related to the behaviour of the different boundary conditions, are pointed out.

Recibido: Octubre 1987

## INTRODUCCION

En un problema geotécnico, analizado mediante el método de los elementos finitos (M.E.F.), surge habitualmente la dificultad de fijar unas dimensiones mínimas, al modelo que se haya realizado del problema, de forma que quede garantizado que la situación de los bordes físicos del modelo no afectan a la calidad de los resultados obtenidos.

El problema señalado adquiere una importancia decisiva en el caso de problemas de naturaleza dinámica debido al hecho de que, las reflexiones ondulatorias en los bordes del modelo, pueden alterar considerablemente las respuestas halladas. En este aspecto se han realizado esfuerzos importantes en los últimos veinte años, pudiéndose encontrar dentro de un reciente artículo<sup>3</sup> un breve resumen del trabajo realizado hasta la actualidad.

La situación, en el caso de que el problema geotécnico caiga dentro del campo estático, no es tan dramática. Efectivamente, pueden obtenerse soluciones correctas sin más que poner un especial cuidado en situar los bordes físicos del modelo de elementos finitos lo suficientemente alejados de la zona de interés, de forma que se garantice una influencia mínima en los resultados obtenidos. Adicionalmente, existe la posibilidad de empleo de los denominados elementos infinitos<sup>1,2</sup> que permiten la modelización del resto del continuo.

Aprovechando la experiencia adquirida en el desarrollo de bordes transmisores y absorbentes utilizados en problemas dinámicos, en este trabajo se presenta una metodología simplificada que permite, en los lados del modelo, imponer unas determinadas condiciones de rigidez que posibiliten el reducir, de forma importante, el tamaño del modelo que se analiza.

## CONDICIONES DE BORDE EN LOS LADOS DE UN MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

El problema relativo a las condiciones de borde que deben imponerse en los lados de un modelo de elementos finitos constituye una de las facetas más importantes del cálculo. Así, en los problemas dinámicos en suelos, en los que la energía se propaga de manera ondulatoria, pueden producirse fenómenos de interferencia no realísticos entre las ondas generadas en el problema y las provenientes de los procesos de reflexión de las mismas en los bordes físicos del modelo. La consideración de unas condiciones de borde, que resulten apropiadas para evitar esas reflexiones no verdaderas, ha constituido objetivo de muchos investigadores. Como existen dos metodologías para la resolución de un problema dinámico (según traten las ecuaciones del movimiento en dominio de la frecuencia o del tiempo), se dispone actualmente de los denominados bordes absorbentes y transmisores aplicables a ambas metodologías. Sin embargo, el mayor esfuerzo ha sido desarrollado en lo referente al primer dominio, existiendo el denominado borde consistente de Waas<sup>4</sup> que es el más empleado en la actualidad.

En el borde consistente se supone que las acciones mutuas, ejercidas entre las dos partes (Figura 1.b) en que supone dividido el continuo que se representa en la Figura

1.a, pueden expresarse como:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_{ID} &= \mathbf{K}_I(w) \mathbf{u} \\ \mathbf{f}_{DI} &= \mathbf{K}_D(w) \mathbf{u} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

siendo:

$\mathbf{f}_{ID}$  y  $\mathbf{f}_{DI}$  = vectores de las fuerzas complejas que la parte izquierda ejerce sobre la derecha y viceversa, respectivamente.

$\mathbf{K}_I(w)$  y  $\mathbf{K}_D(w)$  = matrices cuadradas formadas por números complejos deducidas por Waas<sup>4</sup> para la frecuencia angular "w" y que representan la acción exacta de la parte izquierda sobre la derecha y viceversa, respectivamente, cuando por el medio material se propaga una onda armónica de la referida frecuencia.

$\mathbf{u}$  vector de desplazamientos de los puntos de la línea AA de la Figura 1.

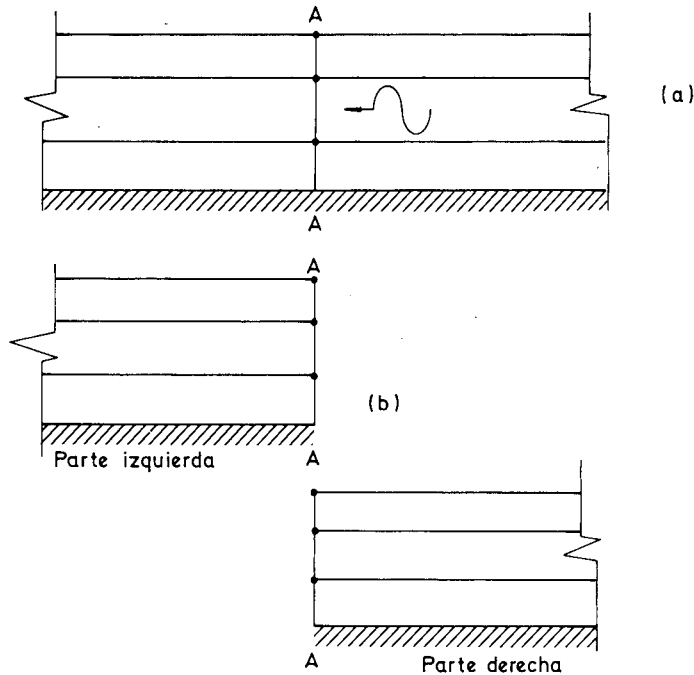


Figura 1. División del continuo en dos partes.

De las condiciones de borde que se desprenden de las ecuaciones anteriores, pueden obtenerse<sup>3</sup> unas condiciones aplicables a problemas dinámicos que se resuelvan en el dominio del tiempo, sin más que considerar unas matrices de rigidez,  $\mathbf{K}$ , y de amortiguamiento,  $\mathbf{C}$ , que interrelacionan entre sí todos los nudos del lado del modelo que se supone conectado al resto del continuo.

Las matrices citadas pueden obtenerse haciendo:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K} &= \operatorname{Re} [\mathbf{K}(w)] \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{w} \operatorname{Im} [\mathbf{K}(w)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Estas nuevas matrices reales se ensamblan con las correspondientes estructurales globales.

A la vista de lo anterior, cuya validez ha sido demostrada en otro lugar<sup>3</sup>, cabe el pensar que, en condiciones estáticas, podría acortarse la dimensión horizontal de un modelo de elementos finitos sin más que considerar una nueva interrelación, adicional a la propia del sistema estructural, entre todos los nudos de cada lado del mismo, mediante una matriz de rigidez calculada atendiendo a la primera igualdad de la relación (2), pero considerando un valor de "w" próximo a cero. La matriz anterior,  $\mathbf{K}_{est}$ , vendría dada por:

$$\mathbf{K}_{est} = \lim_{w \rightarrow 0} \operatorname{Re} [\mathbf{K}(w)] \quad (3)$$

Debido a problemas computacionales que pueden surgir en el caso de que se considere  $w = 0$ , en este trabajo se ha optado por considerar valores de "w" suficientemente bajos respecto de la frecuencia fundamental del sistema que se analiza.

De esta forma, la matriz de rigidez global,  $\mathbf{K}_g$ , se obtendría ensamblando la propia del modelo de elementos finitos,  $\mathbf{K}_{EF}$ , con las correspondientes,  $\mathbf{K}_D$  y  $\mathbf{K}_I$ , deducidas para el lado derecho e izquierdo, respectivamente, atendiendo a la expresión (3). Es decir:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{K}_{EF} + \mathbf{K}_D + \mathbf{K}_I \quad (4)$$

representando el signo de suma en la igualdad superior a la operación de ensamblaje que sería necesario realizar.

### EJEMPLO DE APLICACION DEL BORDE PROPUESTO

Considérese el problema representado en la Figura 2. En ella se presenta un estrato indefinido en horizontal, a cuyo material se le supone un comportamiento elástico lineal, que descansa sobre una base rígida y al que se somete a la acción de una carga uniforme linealmente distribuida. Sean "x" y "z" unos ejes cartesianos cuyo origen, dirección y sentido se observan en la Figura 2.

Existe una solución numérica<sup>5</sup> al problema planteado anteriormente en la hipótesis de perfecta adherencia en el contacto del estrato con la base rígida. Las tensiones resultantes pueden expresarse como:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{P}{\pi H} I_\sigma \\ \tau_{xz} &= \frac{P}{\pi H} I_\tau \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

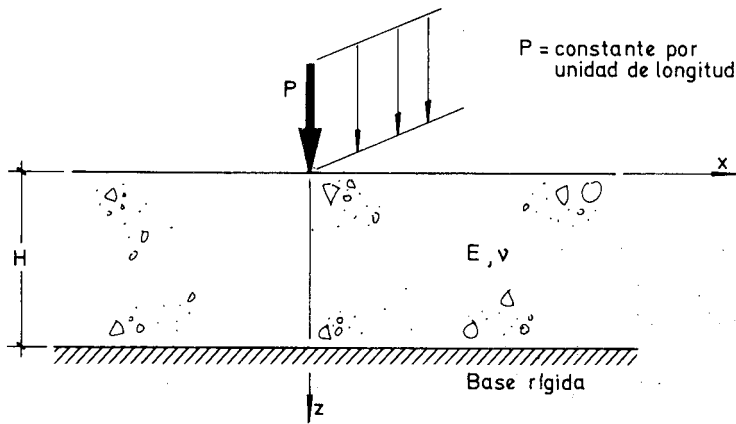


Figura 2. Carga uniforme linealmente distribuida actuando sobre un estrato de espesor constante.

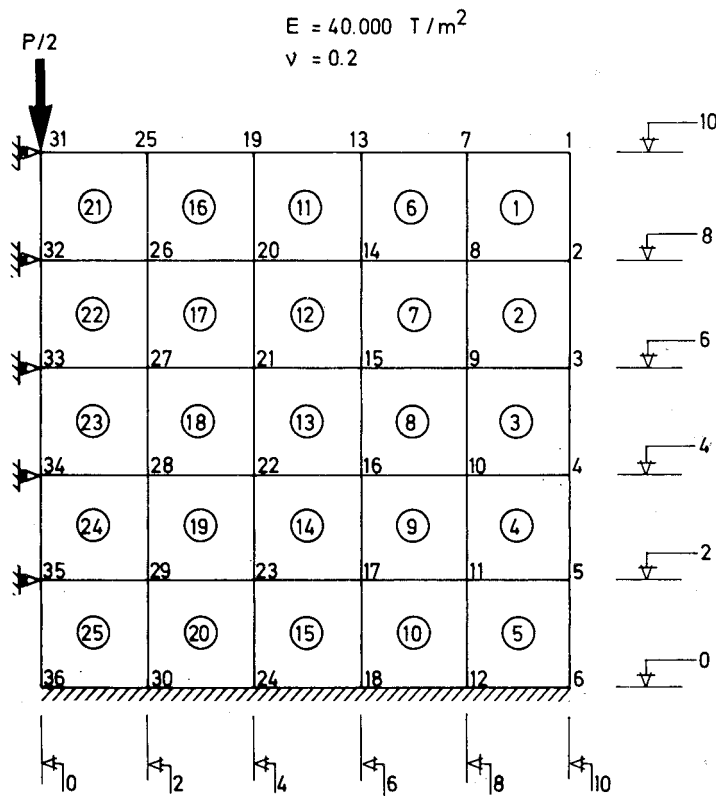


Figura 3. Modelo de elementos finitos.

Y los desplazamientos como:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \frac{P}{\pi E} I_x \\ S_z &= \frac{P}{\pi E} I_z \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

donde  $I_\sigma$ ,  $I_r$ ,  $I_x$  e  $I_z$  son parámetros que dependen del coeficiente de Poisson y de las coordenadas del punto que se considere.

Del problema anterior, se realizó una primera modelización mediante elementos finitos, tal como la recogida en la Figura 3. En dicha figura se observa que se ha atendido a la simetría del problema, y que la dimensión en horizontal es la misma que el espesor del estrato.

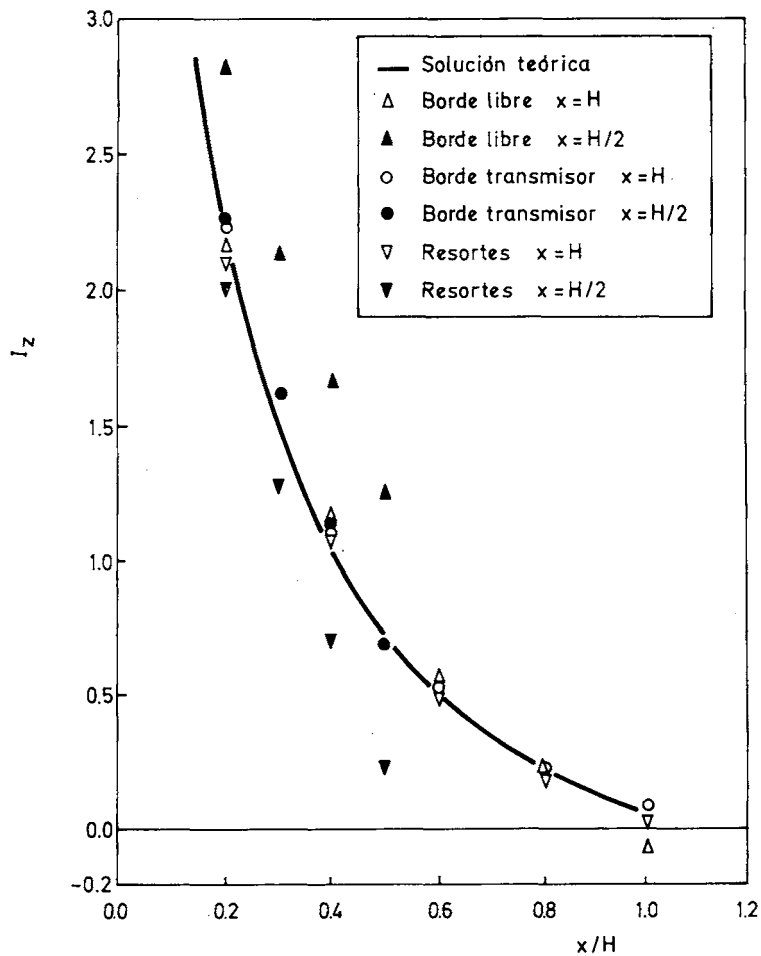


Figura 4.  $I_z$  versus  $x/H$  (superficie libre).

Este modelo fue analizado suponiendo diferentes condiciones de borde para el lado derecho del mismo. En particular se estudió:

- Borde libre. Es decir, ausencia de fuerzas y de restricciones a los desplazamientos en los nudos.
- Interconexión de todos los nudos del lado derecho utilizando la matriz de rigidez recogida en la ecuación (3), para una frecuencia igual a 0,01 rad/s.
- Lo mismo que en el caso anterior, pero considerando una frecuencia igual a 0,001 rad/s.
- Acción, en todos y cada uno de los nudos del lado derecho del modelo, de unos resortes horizontales y verticales cuyas constantes de resorte coinciden, correspondientemente, con los términos de la diagonal principal de la matriz de rigidez de borde calculada en el punto c.

Adicionalmente, y también para las mismas condiciones anteriores, se analizó un segundo modelo de elementos finitos, semejante al recogido en la Figura 3, pero de dimensión horizontal igual a la mitad del espesor del estrato.

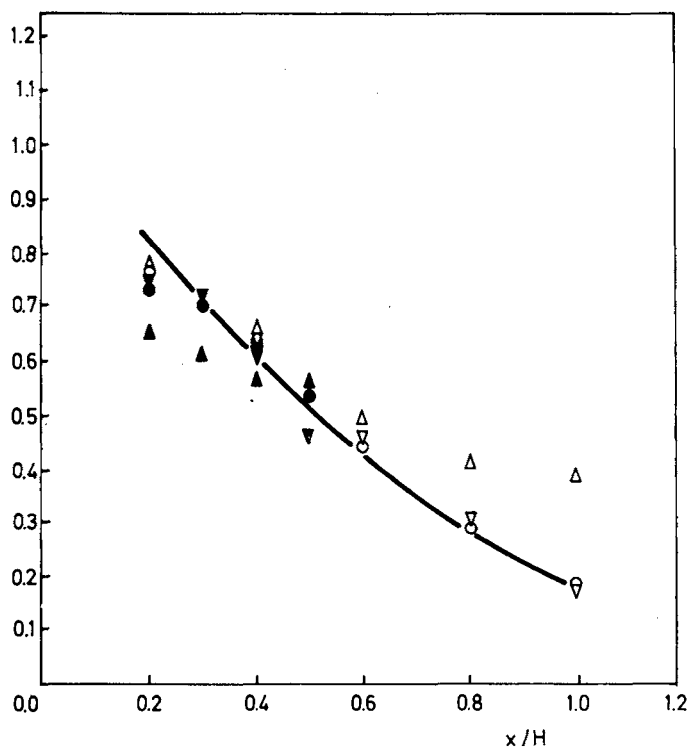


Figura 5.  $I_x$  versus  $x/H$  (superficie libre).

En las Figuras 4, 5, 6 y 7 se recogen los resultados obtenidos así como la solución de Poulos<sup>5</sup>, que se toma de referencia.

De los análisis realizados se pueden extraer las siguientes conclusiones particulares:

- La consideración de las frecuencias de 0,01 y 0,001 rad/s, para la obtención de matriz de borde, no condujo a resultados diferentes.

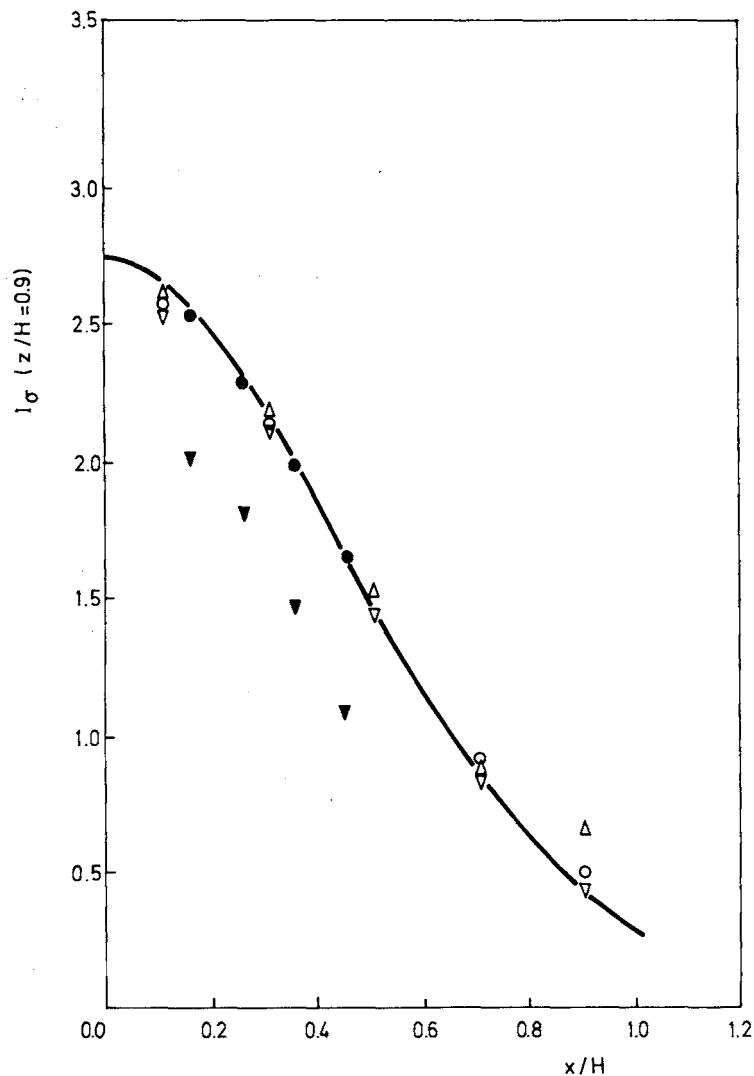


Figura 6.  $I_\sigma$  versus  $x/H$  ( $z/H = 0.9$ ).

- b) La consideración de borde libre distorsiona los resultados, siendo este efecto más importante cuanto más cerca se suponga actuando dicho borde de la línea de actuación de la carga.
- c) El empleo de la condición de borde definida en el presente trabajo conduce a resultados muy próximos a los calculados por Poulos<sup>5</sup> y, son prácticamente independientes de la distancia a la línea de actuación de la carga.
- d) El empleo de resortes concentrados en los nudos, obtenidos como se indicó anteriormente, conduce a buenos resultados siempre y cuando se impongan, como mínimo, a una distancia de la línea de actuación de la carga igual al espesor del estrato.



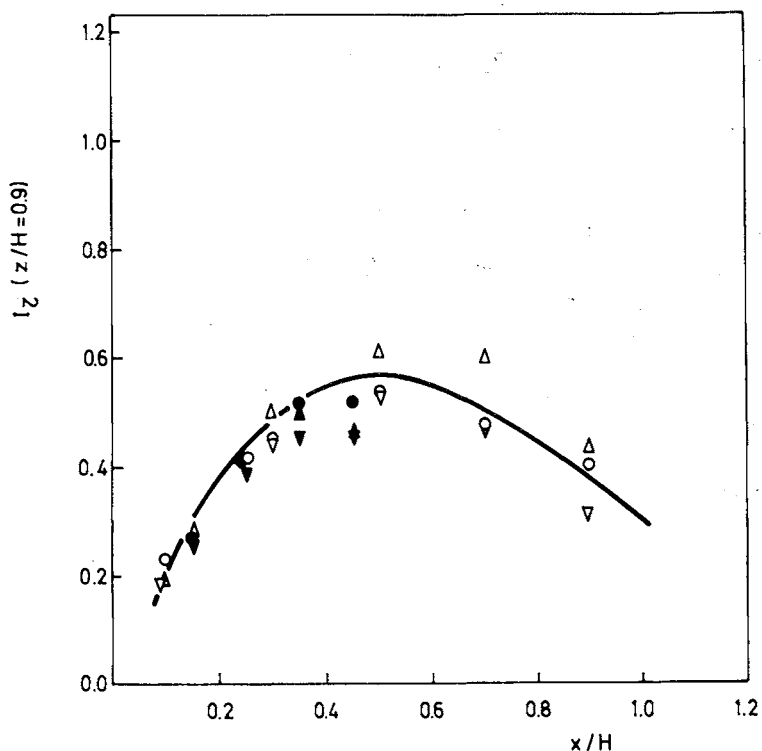


Figura 7.  $I_r$  versus  $x/H$  ( $z/H = 0.9$ ).

### CONCLUSIONES

Del presente trabajo pueden desprenderse las siguientes conclusiones generales:

- Las condiciones de borde impuestas a un modelo de elementos finitos para el análisis de un problema estático, pueden alterar considerablemente los resultados obtenidos.
- La aplicabilidad de la condición de borde propuesta en este trabajo, a problemas geotécnicos estáticos, ha quedado demostrada. Dicho borde se ha obtenido del consistente de Waas<sup>4</sup> para una frecuencia muy baja y permite drásticas reducciones del tamaño del modelo que se considere.
- La inicial desventaja que supone, frente al empleo de elementos infinitos en los lados del modelo, el aumento del ancho de banda a que conduce la condición de borde propuesta en este trabajo, se ve compensada por el menor esfuerzo computacional que es necesario desarrollar para los cálculos de las matrices de rigidez.
- De la condición de borde anterior puede extraerse otra más sencilla y que consiste en la aplicación de unos resortes a los nudos del lado que se considere. Los valores de las constantes de resorte correspondiente se deducen de los términos de la diagonal principal de la matriz de rigidez de borde propuesta.

## REFERENCIAS

1. O.C. Zienkiewicz, C. Emson y P. Bettess, "A Novel Infinite Element", *Numerical Methods in Engineering*, Vol. **19**. pp. 393-404, (1983).
2. P. Bettess y J.A. Bettess, "Infinite Element for Static Problems", *Engineering Computation*, Vol. **1**, no. 1, (1984).
3. C. Navarro y A. Samartín, "A Transmitting Boundary in Time Domain for Soil-Structure Interaction Problems", *Proceedings of the International Conference on Numerical Methods: Theory and Applications*, NUMETA'87, Vol. **2**, Martinus Nijhoff Publishers, T13/1-T13/8, (1987).
4. G. Waas, "Linear Two-dimensional Analysis of Soil-Dynamics Problems in Semi-infinite Layer Media", *Ph.D. Thesis*, University of California, Berkeley, (1972).
5. H.G. Poulos, "Stresses and Displacements in a Elastic Layer Underlain by a Rough Rigid Base", *Civil Engineering Research Report*, No. R63, University of Sydney, Australia, (1966).