

TOPICOS DEL ANALISIS UNIDIMENSIONAL DE ESTRUCTURAS. PARTE 1. Vigas y arcos

S. MONLEON

*E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos,
Universidad Politécnica de Valencia.*

RESUMEN

En esta serie de dos artículos, se muestra cómo las tradicionales presentaciones en rigidez o transferencia del equilibrio de vigas, arcos, placas o láminas tienen un origen común y único en la adecuada formulación del problema de valores iniciales correspondiente, siempre que éste implique integrar exclusivamente ecuaciones diferenciales en una variable. Ofrece por lo tanto, una metodología unificada para llevar a cabo la resolución de un mismo problema conceptual independientemente del contexto geométrico de aplicación.

SUMMARY

This two papers set shows how the standard stiffness and transfer approach of equilibrium in beams, arches, plates and shells have a unique common origin in the appropriate formulation of the corresponding initial-value problem provided that this implies integrating one variable differential equations only. Therefore, a unified method is offered to carry out the resolution of the same general problem irrespective of the geometrical context to which it is applied.

INTRODUCCION

Si los elementos estructurales que constituyen fundamentalmente la construcciones se clasifican, siguiendo a Vlassov¹, a partir de su extensión en el espacio, tendremos:

- (I) cuerpos macizos,
- (II) placas y laminas,
- (III) piezas alargadas.

La principal característica de los cuerpos de segunda y tercera categoría consiste en que sobre éstos pueden establecerse hipótesis de comportamiento geométrico suplementarias (hipótesis cinemáticas) que permiten asimilar la pieza real a un modelo bidimensional (2D) o unidimensional (1D) respectivamente. Los modelos 2D se materializan mediante una superficie Σ denominada convencionalmente *superficie de referencia*, mientras que los modelos 1D se materializan mediante una curva σ , *directriz de la pieza*. En ambos casos, el dominio geométrico adoptado en la modelización del cuerpo, junto con la hipótesis cinemática, permiten describir un

Recibido: Mayo 1992

comportamiento tridimensional del sólido (precisamente el correspondiente al binomio modelo-hipótesis cinemática) mediante sistemas de ecuaciones diferenciales de las variables que parametrizan la superficie de referencia o la directriz.

En el primer caso, asociado a la modelización 2D de placas y láminas, las ecuaciones diferenciales que rigen el problema dependerán de dos variables, los parámetros Gaussianos de la superficie Σ , mientras que en el segundo caso las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de las piezas alargadas sólo dependerán de una variable, el parámetro de la directriz σ .

Sin embargo, la resolución analítica de problemas de equilibrio de placas y láminas se reduce frecuentemente a la integración de ecuaciones diferenciales en sólo una de las dos variables de superficie. Ello sucede cuando la geometría de Σ presenta determinadas propiedades, como ser de revolución o de traslación, que permiten una formulación armónica del problema. Incluso bajo determinadas solicitaciones y condiciones de contorno, el análisis de placas y láminas puede ser puramente función de una variable, como es el caso de las láminas de revolución con cargas axisimétricas.

Comenzaremos por el análisis de los cuerpos de tercera categoría como estructuras 1D, ordenando su desarrollo en tres partes más unos ejemplos de aplicación. En primer lugar, estableceremos la adecuada *descripción geométrica* de las piezas alargadas, obteniendo a continuación las *ecuaciones de campo* correspondientes a problemas de equilibrio elástico-lineales en la forma apropiada para construir cómodamente una metodología unificada de resolución, aspecto que se aborda en la parte final del trabajo, previa a las aplicaciones.

CONTEXTO GEOMETRICO

Consideremos un cuerpo B inmerso en \mathbb{R}^3 . En un instante t ocupa una región V , o volumen, que supondremos simplemente conexa. Para su estudio, adoptaremos un sistema de coordenadas curvilíneas θ^i ($i = 1, 2, 3$) particular, afín a la geometría espacial del cuerpo B según se especifica a continuación.

Para los cuerpos de tipo III, la coordenada θ^1 se toma igual al parámetro s , longitud de arco de la directriz de la pieza, mientras que las coordenadas (θ^2, θ^3) se denominan (y, z) respectivamente y se definen a partir de la ecuación:

$$\mathbf{p}(s, y, z) = \mathbf{r}(s) + y\mathbf{n}(s) + z\mathbf{b}(s) \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{n}(s) = \frac{1}{\chi} \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{ds}, \quad \mathbf{b}(s) = \frac{1}{\tau} \left[\frac{d\mathbf{n}}{ds} + \chi\boldsymbol{\lambda} \right] \quad (2)$$

donde $\mathbf{r}(s)$ es el vector posición de los puntos materiales de $\sigma(s)$, curva directriz de la pieza alargada, y \mathbf{p} es el vector posición de los puntos materiales de B , mientras que \mathbf{n} y \mathbf{b} son los vectores unitarios normal y binormal del triedro de Frénet-Serret del punto \mathbf{r} de σ , definidos a partir del vector unitario tangente a σ , $\boldsymbol{\lambda}(s)$, según las fórmulas (2). Todos estos vectores se representan en la Figura 1.

En las fórmulas (2), χ es la curvatura de la curva directriz $\sigma(s)$ y τ su torsión. Sea Π_s , el plano definido en cada punto de σ por los vectores \mathbf{n}, \mathbf{b} (plano normal), y sea

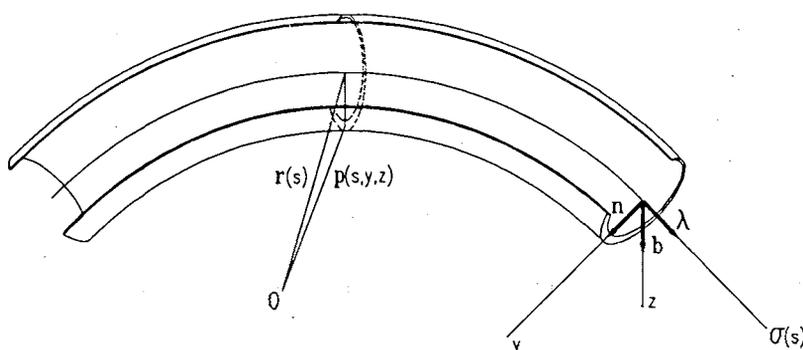


Figura 1. Sistema de referencia de una pieza alargada y definición del tiedro local $\{\lambda, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$.

$\Gamma(s)$ el segmento de directriz sobre el cual Π_s , intersecta materialmente al cuerpo B , definido por

$$\Gamma(s) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 / s \in [s_1, s_2], y = 0, z = 0\} \tag{3}$$

Denominaremos sección transversal de B al conjunto de puntos materiales $A_s = B \cap \Pi_s$. Estará definida sobre el intervalo $[s_1, s_2]$, siendo $A_1 = B \cap \Pi_{s_1}$ para $s = s_1$ y $A_2 = B \cap \Pi_{s_2}$ para $s = s_2$ las secciones transversales extremas de la pieza alargada.

El sistema coordenado θ^i definido anteriormente será válido para los puntos de \mathbb{R}^3 que cumplan

$$\left. \begin{aligned} h &\ll \chi^{-1} \\ h &\ll L \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

siendo $h = [(y_{max} - y_{min})^2 + (z_{max} - z_{min})^2]^{1/2}$ la máxima dimensión de la sección transversal, y L la longitud de la pieza ($L = s_2 - s_1$).

Utilizando las definiciones anteriores, el contorno del cuerpo, que denominaremos ∂B , puede descomponerse de la siguiente forma

$$\partial B = A_1 \cup \partial \bar{B} \cup A_2, \quad \partial \bar{B} = \Gamma \times \partial A_s \tag{5}$$

donde $\partial A_s = \partial B \cap \Pi_s$, es la curva cerrada que define el contorno de la sección transversal, y $\partial \bar{B}$ aparece como la superficie lateral de la pieza. Denominaremos espacio prismático al conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 definido por

$$\Gamma(s) \times A_s(y, z) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 / s \in \Gamma, (y, z) \in A_s\} \tag{6}$$

Las componentes del tensor métrico g_{ij}^* asociado al sistema coordenado adoptado podrán evaluarse, en virtud de (4), en cada punto de este dominio, resultando:

$$g_{ij}^* = \mathbf{g}_i^* \cdot \mathbf{g}_j^*, \quad \mathbf{g}_i^* = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta^i} \tag{7}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{11}^* &= (1 - \chi y)^2 + \tau^2(y^2 + z^2), & g_{22}^* &= 1, & g_{33}^* &= 1 \\ g_{12}^* &= -\tau z, & g_{13}^* &= \tau y, & g_{23}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Sea g^* el determinante del sistema definido en (8). En lo sucesivo denominaremos μ a su raíz cuadrada positiva, cuyo valor es:

$$\mu = \sqrt{g^*} = 1 - \chi y \quad (9)$$

Según lo expuesto en la introducción, para las piezas alargadas, comúnmente denominadas vigas o arcos en la práctica estructuralista, la hipótesis cinemática que se asocia al modelo 1D puede expresarse mediante la ecuación

$$\mathbf{d}^*(s, y, z) = \mathbf{h}(y, z) \cdot \mathbf{u}(s) \quad (10)$$

donde \mathbf{d}^* es el vector desplazamiento de los puntos de B en las direcciones \mathbf{g}_i^* , \mathbf{h} una matriz independiente de la sollicitación actuante y característica de la hipótesis cinemática adoptada (Navier, Timoshenko, St Venant, Oumanski...) de $3 \times n$ componentes, y \mathbf{u} es el vector de desplazamientos generalizados del modelo, definido en cada punto de Γ y de n componentes. Adoptada una composición para $\mathbf{u}(s)$, los elementos de $\mathbf{h}(y, z)$ se deducen por simples relaciones geométricas. Por ejemplo, para la viga de Timoshenko tendremos (omitiendo el alabeo torsional)

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^* &= \{u^*, v^*, w^*\}^T && \text{definido sobre } B \\ \mathbf{u} &= \{u, v, w, \phi, \beta_y, \beta_z\}^T && \text{definido sobre } \Gamma \end{aligned}$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z - z_G & -(y_G) \\ 0 & 1 & 0 & -(z - z_C) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y - y_C & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $(y_G, z_G), (y_C, z_C)$ definen respectivamente la posición del centro de gravedad y centro de esfuerzos cortantes de A_s , $\{u, v, w\}$ son los desplazamientos de los puntos $\mathbf{r}(s)$ de Γ en las direcciones coordenadas y ϕ, β_y, β_z las rotaciones de A_s respecto a estos mismos ejes.

No es objeto de este artículo discutir la construcción de hipótesis cinemáticas adecuadas para el análisis de piezas alargadas, aunque en las aplicaciones incluidas se emplean algunas de las más usuales, puestas en la forma general (10).

ECUACIONES DE CAMPO

El conjunto de ecuaciones que rige todo problema estático se reduce a las ecuaciones cinemáticas del cuerpo, sus ecuaciones constitutivas (elásticas en nuestro caso) y las ecuaciones de equilibrio y condiciones de contorno. Desarrollaremos un plantemiento intrínsecamente tridimensional para obtener los sistemas de ecuaciones correspondientes a piezas alargadas, recurriendo a una formulación variacional² para generar las ecuaciones de equilibrio y condiciones de contorno propias del modelo 1D.

Ecuaciones cinemáticas

Estas pueden darse, para comportamiento geoméricamente lineal, en la forma

$$e^*(s, y, z) = \mathbb{E} \cdot d^* \tag{11}$$

\mathbb{E} es un operador diferencial lineal de primer orden de dimensión 6×3 . Aplicado a los desplazamientos de B proporciona el vector de deformaciones en el punto considerado, de seis componentes. La forma explícita de esta ecuación se facilita en la Tabla I, para sistemas de coordenadas ortogonales. En general, \mathbb{E} puede descomponerse en la forma

$$\mathbb{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{E}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{E}_3 \frac{\partial}{\partial z} \tag{12}$$

donde $\mathbf{E}_i (i = 0, 3)$ son operadores lineales de 6×3 componentes. Llevando (10) a (11) y recurriendo a (12) se deduce la siguiente expresión del vector de deformaciones:

$$e^*(s, y, z) = \mathbf{B} \cdot v(s) \tag{13}$$

$$v = \left\{ \begin{matrix} u \\ u' \end{matrix} \right\}, \quad u' = \frac{du}{ds} \tag{14.1}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1], \quad \mathbf{B}_0 = \mathbb{E} \cdot h \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{E}_1 \cdot h \tag{14.2}$$

El vector v es de $2n$ componentes e incluye los desplazamientos generalizados y sus derivadas, y \mathbf{B} , de $6 \times 2n$, define la deformación del espacio prismático.

Variable	Definición	Expresión general	Expresión en coordenadas ortogonales
e^*	Vector de deformaciones de los puntos de B , de 6×1	$e^* = \mathbb{E} \cdot d^*$	$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_s^* \\ \epsilon_y^* \\ \epsilon_z^* \\ \gamma_{sy}^* \\ \gamma_{sz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial s} & -\frac{\chi}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\chi}{\mu} & \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial s} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{matrix} \right\}$
\mathbf{B}	Matriz de deformación del espacio prismático, de $6 \times 2n$	$\mathbf{B} = \mathbb{E}h + \mathbf{E}_1 h$	$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tabla I. Definiciones Cinemáticas.

La ecuación (13) resume la cinemática de la pieza alargada con modelización 1D. Nótese que dada una hipótesis cinemática, la matriz \mathbf{B} estará totalmente determinada por (14)₂. La Tabla I contiene los elementos necesarios para su evaluación en coordenadas ortogonales.

Las expresiones facilitadas en la Tabla anterior corresponden a sistemas ortogonales, en los cuales pueden definirse componentes físicas de las variables. Ello exige, según (8), que la directriz sea una curva plana ($\tau = 0$). Para directrices alabeadas, los cálculos deben desarrollarse en componentes tensoriales³.

Ecuaciones constitutivas, de equilibrio y condiciones de contorno

Como ya se anticipó, recurriremos a un planteamiento variacional para las ecuaciones de equilibrio interno y condiciones de contorno de B . En tal caso, debe establecerse el funcional de acción del problema, definido por la energía potencial V del cuerpo para problemas estáticos, cuya expresión⁴ es

$$V = U + \Omega \quad (15)$$

siendo U la energía de deformación y Ω el potencial de las fuerzas actuantes, correspondientes a fuerzas másicas definidas en cada punto B y fuerzas de superficie aplicadas sobre el contorno ∂B del cuerpo. Ambas funciones escalares pueden escribirse como

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{s}^{*T} \cdot \mathbf{e}^* dV \quad (16)$$

$$\Omega = - \left[\int_V \rho^* \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{d}^* dV + \int_{\partial V} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{d}^* dS \right] \quad (17)$$

\mathbf{s}^* es el vector de tensiones, de seis componentes, definido sobre todo B , \mathbf{b} las fuerzas por unidad de masa y ρ^* la densidad de masa por unidad de volumen de B . El vector \mathbf{q} define las fuerzas de superficie aplicadas sobre el contorno del cuerpo ∂B , previamente descrito en (5).

Al admitir que nuestro cuerpo es elástico, la relación constitutiva entre los sistemas \mathbf{s}^* y \mathbf{e}^* es lineal y de la forma

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}^* \quad (18)$$

Obviamente, \mathbf{C} es un operador lineal de 6×6 , función de dos constantes elásticas² G y ν , cuya expresión se proporciona a continuación mediante la escritura en componentes de la ecuación anterior:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_s^* \\ \sigma_y^* \\ \sigma_z^* \\ \tau_{sy}^* \\ \tau_{sz}^* \\ \tau_{yz}^* \end{Bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} 1 + \alpha & \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 + \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 + \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_s^* \\ \epsilon_y^* \\ \epsilon_z^* \\ \gamma_{sy}^* \\ \gamma_{sz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{Bmatrix},$$

$$\alpha = \frac{\nu}{1 - 2\nu}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (19)$$

Operando convenientemente, de las relaciones anteriores se deduce la siguiente expresión de la energía potencial:

$$V = \int_{\Gamma} F(s, \mathbf{u}, \mathbf{u}') ds - (\mathbf{f}_1^T \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{f}_2^T \cdot \mathbf{u}_2) \quad (20)$$

siendo

$$F = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{u}, \quad (21)$$

$$\mathbf{D} = \int_{A_s} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \mu dy dz, \quad (22)$$

$$\mathbf{Q} = \int_{A_s} \rho^* \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{b} \mu dy dz + \int_{\partial A_s} \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{q} \bar{\mu} ds \quad (23)$$

$$\mathbf{f}_1 = \int_{A_1} \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{q}_1 dy dz, \quad \mathbf{f}_2 = \int_{A_2} \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{q}_2 dy dz \quad (24)$$

La ecuación (21) proporciona la forma explícita de la *densidad de energía potencial* de la pieza alargada. Es un funcional de los desplazamientos generalizados y su derivada. La matriz \mathbf{D} , de $2n \times 2n$, es la matriz de rigideces locales de la pieza, su evaluación sólo requiere disponer de \mathbf{B} , luego de una determinada hipótesis cinemática. \mathbf{Q} es el valor de densidad de carga lineal y se obtiene reduciendo a Γ las fuerzas másicas y las fuerzas de superficie sobre el contorno lateral de la pieza (tubo $\partial \bar{B}$). Aunque, en el análisis estructural, es usual postular directamente la distribución de carga \mathbf{Q} , para su correcta evaluación deben calcularse las integrales dadas en (23). En estas $\bar{\mu}$ es la raíz cuadrada positiva del determinante de la métrica de la superficie lateral $\partial B(s, \bar{s})$:

$$\bar{\mu}^2 = (1 - \chi y)^2 + \frac{\tau}{1 + \varphi^2} (y + \varphi z)^2, \quad \varphi = \frac{dz}{dy}, \quad (y, z) \in \partial A_s \quad (25)$$

Los dos últimos sumandos de la expresión de la energía potencial (20) corresponden al trabajo de las fuerzas actuantes en las caras extremas de la pieza e intervienen en la definición de las condiciones de contorno del problema como veremos a continuación. Para su obtención se ha empleado la notación siguiente:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}(s = s_i), \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{u}(s = s_i)$$

Supongamos que la pieza registra unos desplazamientos virtuales a partir de una configuración de equilibrio definida por \mathbf{u}_E . La nueva configuración de la pieza podrá expresarse como

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_E + \varepsilon \hat{\mathbf{u}}(s) \quad (26)$$

donde ε es una constante arbitraria pequeña y $\hat{\mathbf{u}}(s)$ cualquier función vectorial de norma acotada que satisfaga las adecuadas condiciones de continuidad y las condiciones

de contorno cinemáticas (si existen). Para que la pieza esté en equilibrio, la energía potencial ha de ser estacionaria, luego la primera variación de V (suma de los términos de primer orden en la expresión obtenida al sustituir (26) en (20), que son los afectados del factor ε) debe anularse para todo desplazamiento virtual. Esto es:

$$\delta V = \varepsilon \left\{ \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_E} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'_E} \cdot \hat{\mathbf{u}}' \right] ds - (\mathbf{f}_1^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{f}_2^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_2) \right\} = 0 \quad \forall \varepsilon \quad (27)$$

donde $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_E}$ representa $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}$ para $\mathbf{u} = \mathbf{u}_E$, etc.. Integrando por partes se deduce la siguiente ecuación

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_E} - \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'_E} \right] \cdot \hat{\mathbf{u}} ds + \left[\left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'_E} \right]_{s=s_2} - \mathbf{f}_2^T \right] \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 - \left[\left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'_E} \right]_{s=s_1} + \mathbf{f}_1^T \right] \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = 0 \quad (28)$$

La ecuación (28) debe satisfacerse, en configuraciones de equilibrio, para cualquier variación de los desplazamientos. Por lo tanto deberán anularse tanto la integral sobre Γ como el término independiente:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} = \mathbf{0} \quad (29)$$

$$\left[\left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} \right]_{s=s_2} - \mathbf{f}_2^T \right] \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 - \left[\left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} \right]_{s=s_1} + \mathbf{f}_1^T \right] \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = 0 \quad (30)$$

La ecuación (29) proporciona un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden en las n componentes de los desplazamientos generalizados, define las *ecuaciones de equilibrio de la pieza alargada* y corresponde a la derivada variacional del funcional F , o ecuación de Euler del cálculo de variaciones^{4,5}. En cuanto a la ecuación (30), define las condiciones de contorno que debe verificar la solución, pero para su adecuada interpretación, conviene realizar previamente unas sencillas operaciones.

Inspirándonos en las definiciones (24), podemos introducir un *vector de esfuerzos generalizados* asociado a cada sección A_s de la pieza:

$$\mathbf{f}(s) = \int_{A_s} \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{t} \, dydz \quad (31)$$

siendo \mathbf{t} el vector tensión actuante en cada punto de la sección transversal. Se comprueba fácilmente a partir de la Tabla I que

$$\mathbf{t} = \sigma_s^* \boldsymbol{\lambda} + \tau_{sy}^* \mathbf{n} + \tau_{sz}^* \mathbf{b} = \mu \mathbf{E}_1^T \cdot \mathbf{s}^* \quad (32)$$

por lo tanto, haciendo uso de (18), (13) y (14) se deduce

$$\mathbf{f}(s) = \left[\int_{A_s} \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \, \mu dydz \right] \cdot \mathbf{v}(s) \quad (33)$$

Volviendo a la definición (22), la matriz de deformación \mathbf{B} admite una descomposición en bloques (14)₂ que permite reescribir la matriz de rigideces \mathbf{D} como

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{00} & \mathbf{D}_{01} \\ \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{ab} = \int_{A_s} \mathbf{B}_a^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_b \mu dy dz, a = 0, 1 \text{ y } b = 0, 1. \quad (34)$$

y por lo tanto, a partir de (21) es sencillo deducir

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} = \mathbf{D}_{10} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{u}' = \mathbf{f} \quad (35)$$

Esta relación permite una correcta interpretación de las condiciones de contorno. Efectivamente, en ambos extremos de la pieza podremos imponer

- (1) condiciones de contorno cinemáticas (o de desplazamiento impuesto)
- (2) condiciones de contorno estáticas (o de tensión impuesta)

Las primeras implicarán nulidad en algunas componentes de $\hat{\mathbf{u}}(s = s_1, s_2)$, las segundas proporcionarán el valor de las restantes componentes del vector de esfuerzos generalizados $\mathbf{f}(s = s_1, s_2)$. En cualquier caso dispondremos de $2n$ condiciones de contorno para determinar nuestra solución a (29).

PRESENTACION UNIFICADA DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS ELASTICOS EN PIEZAS ALARGADAS

Utilizando la definición de los esfuerzos generalizados dada en (35), las ecuaciones (29) y (30) que gobiernan este tipo de problemas se reducen a:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{f}' = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}'} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (36)$$

$$[\mathbf{f}(s = s_2) - \mathbf{f}_2]^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 - [\mathbf{f}(s = s_1) + \mathbf{f}_1]^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = 0 \quad (37)$$

Recurriendo a la definición del funcional F dada en (21) y empleando la descomposición en bloques del operador constitutivo (34), las ecuaciones diferenciales (36) pueden escribirse alternativamente como sigue:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}' + \mathbf{Q} &= \mathbf{D}_{00} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{01} \mathbf{u}' \\ \mathbf{f} &= \mathbf{D}_{10} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{u}' \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

La ecuación (38) constituye un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en las n componentes de \mathbf{u} y n componentes de \mathbf{f} . Las $2n$ condiciones de contorno correspondientes son las expresadas en (37). Supongamos que la solución general del problema homogéneo asociado puede darse en la forma

$$\mathbf{E}_H(s) = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}_H(s) \\ \mathbf{f}_H(s) \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}(s) & \mathbf{M}(s) \\ \mathbf{N}(s) & \mathbf{P}(s) \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{m} \end{matrix} \right\} \equiv \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{k} \quad (39)$$

$\mathbf{T}(s)$ es una matriz de $2n \times 2n$ componentes que agrupa las $2n$ soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo asociado a la ecuación (38).

\mathbf{l} y \mathbf{m} son vectores constantes de n componentes, a determinar en función de las condiciones de contorno. Sobre la propia resolución del sistema, es decir sobre la

obtención de las $2n$ soluciones básicas con las que se forma la matriz \mathbf{T} , realizaremos unos comentarios posteriormente. Por ahora, nos basaremos en la ecuación (39) para desarrollar una presentación unificada de la resolución del problema de equilibrio planteado. En virtud de (35) tendremos

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}(s) &= \mathbf{D}_{10}\mathbf{L} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{L}' \\ \mathbf{P}(s) &= \mathbf{D}_{10}\mathbf{M} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{M}' \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Entonces, la solución general de nuestro problema será ⁶

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{k} - \tilde{\mathbf{E}}(s) \quad (41)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(s) = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(s) \\ \tilde{\mathbf{f}}(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}(s) & \mathbf{M}(s) \\ \mathbf{N}(s) & \mathbf{P}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{C}(s) \\ \mathcal{F}(s) \end{Bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathcal{C}(s) = \int_{s_1}^s \bar{\mathbf{N}}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) dt, \quad \mathcal{F}(s) = \int_{s_1}^s \bar{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) dt \quad (43)$$

Las matrices $\bar{\mathbf{N}}$ y $\bar{\mathbf{P}}$ se definen en la Tabla II. Según comentamos en la sección anterior, las $2n$ condiciones de contorno pueden ser de tensión o de desplazamiento impuesto, o bien darse en forma combinada. Cada una de estas alternativas proporciona una presentación particular del problema de valores iniciales asociado, entre las cuales tienen particular interés la presentación mixta y la presentación en desplazamientos, que conducen a *formulaciones en transferencia o formulaciones en rigidez* del problema de equilibrio de la pieza alargada.

Expresión general	Posible expresión de cálculo
sea $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}(s) & \mathbf{M}(s) \\ \mathbf{N}(s) & \mathbf{P}(s) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}(s) & \bar{\mathbf{N}}(s) \\ \bar{\mathbf{M}}(s) & \bar{\mathbf{P}}(s) \end{bmatrix}$	$\bar{\mathbf{L}}(s) = [\mathbf{L} - \mathbf{M}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}]^{-1}$ $\bar{\mathbf{N}}(s) = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}\bar{\mathbf{P}}$ $\bar{\mathbf{M}}(s) = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}\bar{\mathbf{L}}$ $\bar{\mathbf{P}}(s) = [\mathbf{P} - \mathbf{N}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}]^{-1}$
$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}$	$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_1 & \bar{\mathbf{L}}_2 \\ \bar{\mathbf{M}}_1 & \bar{\mathbf{M}}_2 \end{bmatrix}$ $\bar{\mathbf{L}}_1 = [\mathbf{L}_1 - \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{L}_2]^{-1}$ $\bar{\mathbf{L}}_2 = -\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{M}_1\bar{\mathbf{M}}_2$ $\bar{\mathbf{M}}_1 = -\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{L}_2\bar{\mathbf{L}}_1$ $\bar{\mathbf{M}}_2 = [\mathbf{M}_2 - \mathbf{L}_2\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{M}_1]^{-1}$

Tabla II.

Las *condiciones de contorno mixtas* exigirán que se cumpla simultáneamente en un extremo de la pieza condiciones de desplazamiento y de tensión impuestas, $\mathbf{u}(s = s_1) = \mathbf{u}_1$ y $\mathbf{f}(s = s_1) = -\mathbf{f}_1$, según (37). Por lo tanto la ecuación (41) particularizada en $s = s_1$ proporcionará las constantes de integración \mathbf{l} , \mathbf{m} resultando finalmente:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(s) \\ \mathbf{f}(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}\bar{\mathbf{L}}_1 + \mathbf{M}\bar{\mathbf{M}}_1 & -(\mathbf{L}\bar{\mathbf{N}}_1 + \mathbf{M}\bar{\mathbf{P}}_1) \\ \mathbf{N}\bar{\mathbf{L}}_1 + \mathbf{P}\bar{\mathbf{M}}_1 & -(\mathbf{N}\bar{\mathbf{N}}_1 + \mathbf{P}\bar{\mathbf{P}}_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{f}_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(s) \\ \tilde{\mathbf{f}}(s) \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Las matrices \bar{L} y \bar{M} se definen nuevamente en la Tabla II, $\bar{L}_1 = \bar{L}(s = s_1)$, etc.. La ecuación de transferencia de la pieza alargada se genera por simple particularización de (44) al extremo $s = s_2$:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{f}_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \tilde{\mathbf{f}}_2 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_{11} &= \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{L}}_1 + \mathbf{M}_2 \bar{\mathbf{M}}_1, & \mathbf{G}_{12} &= -(\mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{N}}_1 + \mathbf{M}_2 \bar{\mathbf{P}}_1), & \tilde{\mathbf{u}}_2 &= \tilde{\mathbf{u}}(s = s_2) \\ \mathbf{G}_{21} &= \mathbf{N}_2 \bar{\mathbf{L}}_1 + \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{M}}_1, & \mathbf{G}_{22} &= -(\mathbf{N}_2 \bar{\mathbf{N}}_1 + \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{P}}_1), & \tilde{\mathbf{f}}_2 &= \tilde{\mathbf{f}}(s = s_2) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Las condiciones de contorno en desplazamientos exigirán que se satisfagan exclusivamente condiciones de desplazamientos impuestos en ambos extremos de la pieza, $\mathbf{u}(s = s_1) = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}(s = s_2) = \mathbf{u}_2$. Llevando a (41) se obtienen las correspondientes constantes de integración con las cuales resulta

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(s) \\ \mathbf{f}(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}\hat{\mathbf{L}}_1 + \mathbf{M}\hat{\mathbf{M}}_1 & \mathbf{L}\hat{\mathbf{L}}_2 + \mathbf{M}\hat{\mathbf{M}}_2 \\ \mathbf{N}\hat{\mathbf{L}}_1 + \mathbf{P}\hat{\mathbf{M}}_1 & \mathbf{N}\hat{\mathbf{L}}_2 + \mathbf{P}\hat{\mathbf{M}}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{L}\hat{\mathbf{L}}_2 + \mathbf{M}\hat{\mathbf{M}}_2)\tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \tilde{\mathbf{f}} - (\mathbf{N}\hat{\mathbf{L}}_2 + \mathbf{P}\hat{\mathbf{M}}_2)\tilde{\mathbf{u}}_2 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Las matrices $\hat{\mathbf{L}}_i, \hat{\mathbf{M}}_i$ ($i = 1, 2$) se incluyen en la tabla II. La *ecuación de rigidez de la pieza alargada* se obtiene evaluando $\mathbf{f}(s)$ en ambos extremos de la directriz a partir de (47) resultando:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_1 \\ \hat{\mathbf{f}}_2 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= -(\mathbf{N}_1 \hat{\mathbf{L}}_1 + \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{M}}_1), & \mathbf{K}_{12} &= -(\mathbf{N}_1 \hat{\mathbf{L}}_2 + \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{M}}_2), & \hat{\mathbf{f}}_1 &= -\mathbf{K}_{12} \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \mathbf{K}_{21} &= \mathbf{N}_2 \hat{\mathbf{L}}_1 + \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{M}}_1, & \mathbf{K}_{22} &= \mathbf{N}_2 \hat{\mathbf{L}}_2 + \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{M}}_2, & \hat{\mathbf{f}}_2 &= \tilde{\mathbf{f}}_2 - \mathbf{K}_{22} \tilde{\mathbf{u}}_2 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Las ecuaciones (45) y (48) usualmente empleadas en el análisis de estructuras compuestas por elementos prismáticos, han sido obtenidas de forma análoga a partir de la resolución del problema de valores iniciales asociado a cada caso. Otras condiciones de contorno se analizarían idénticamente sobre la base de la ecuación (41), fundamental en la formulación presentada.

Volvamos sobre la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales que rigen el problema. Partiendo para ello de su forma mixta (38), podemos poner para el sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{01} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_H \\ \mathbf{f}'_H \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{10} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_H \\ \mathbf{f}_H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

y, siempre que exista la inversa de \mathbf{D}_{11} :

$$\mathbf{E}'_H = \mathbf{W} \cdot \mathbf{E}_H \quad (51)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11}^{-1} \\ \mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{01}\mathbf{D}_{11}^{-1} \end{bmatrix} \quad (52)$$

La naturaleza del operador \mathbf{W} depende exclusivamente de las rigideces locales de la pieza, luego tan sólo puede discutirse con más profundidad el caso en que éstas son constantes sobre toda la longitud del elemento, resultando para (51) un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con coeficientes constantes, cuya resolución puede sistematizarse. Nótese que con ello, quedarían cubiertos los casos de piezas con curvatura y sección constante únicamente.

Sea p el orden de multiplicidad del autovalor $\lambda = 0$ de la matriz \mathbf{W} , cuyos autovalores están definidos por la ecuación escalar

$$|\mathbf{W} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \quad (53)$$

Ello supone que

$$|\mathbf{W} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^p \cdot f(\lambda) \quad (54)$$

siendo $f(\lambda)$ un polinomio de grado $2n - p$ en λ , con raíces no nulas. Denominando m a la dimensión del núcleo de la aplicación $W : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definida por la matriz de coeficientes constantes \mathbf{W} , se plantea la siguiente discusión:

- (I) $m = 0$: entonces $p = 0$, resultando que todos los autovalores de \mathbf{W} son no-nulos. Sea λ_i uno de estos autovalores, con orden de multiplicidad r , y \mathbf{E}_i el autovector asociado. Entonces

$$e^{\lambda_i s} \mathbf{E}_i, s e^{\lambda_i s} \mathbf{E}_i, \dots, s^{r-1} e^{\lambda_i s} \mathbf{E}_i$$

serán soluciones linealmente independientes del problema⁷.

- (II) $m > 0$: si $p = m$, los m vectores base del núcleo de \mathbf{W} definirán soluciones linealmente independientes, determinando las $2n - p$ soluciones restantes por la técnica esbozada en I.
- (III) $m > 0$: si $p > m$, dispondremos de m soluciones correspondientes a los vectores base del núcleo de \mathbf{W} , y $2n - p$ soluciones determinadas según (I), pero al suponer que m es inferior a p , $(2n - p) + m$ será menor que $2n$, quedando $p - m$ soluciones básicas por determinar, asociadas al autovalor $\lambda = 0$. Estos casos suelen resolverse de forma directa por simple inspección del sistema de ecuaciones diferenciales (51).

Finalmente, nótese que p nunca puede ser menor que m , puesto que cualquier vector base del núcleo satisface la ecuación de definición de los autovectores asociados a $\lambda = 0$.

APLICACIONES

En esta última sección, estudiaremos algunos problemas standard de estática de piezas alargadas mediante la metodología expuesta en las anteriores líneas. Comenzaremos por un arco de directriz plana ($\tau = 0$), cargado en su plano de simetría ($z = 0$). Adoptando una cinemática de Timoshenko, tendremos:

$$\mathbf{d}^*(s, y, z) = \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \beta \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{h} \cdot \mathbf{u} \tag{55}$$

$\{u, v, \beta\}$ las componentes del vector \mathbf{u} de desplazamientos generalizados (β es la rotación de la sección transversal respecto al eje z), la ecuación (55) supone implícitamente que la directriz de la pieza coincide con el lugar geométrico del centro de gravedad de la sección transversal. Las deformaciones de la pieza serán, en virtud de (11) a (14):

$$\mathbf{e}^* = \begin{Bmatrix} \epsilon_s^* \\ \epsilon_y^* \\ \gamma_{sy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{-\chi}{\mu} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\chi}{\mu} & \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \end{Bmatrix} = \mathbb{E} \cdot \mathbf{d}^*$$

obteniendo

$$\mathbf{B}_0 = \mathbb{E} \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 0 & -\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \chi & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación constitutiva (18) será ahora

$$\mathbf{s}^* = \begin{Bmatrix} \sigma_s^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{sy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^* & \nu^* \mathbf{E}^* & 0 \\ \nu^* \mathbf{E}^* & \mathbf{E}^* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_s^* \\ \epsilon_y^* \\ \gamma_{sy}^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}^*, \quad E^* = 2G(1 + \alpha) \text{ y } \nu^* E^* = 2G\alpha$$

Las submatrices que forman el operador \mathbf{D} serán, según (34)

$$\mathbf{D}_{00} = \int_{A_s} \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 \mu dy dz = \begin{bmatrix} GA\chi^2 & 0 & -GA\chi \\ 0 & E^* A \chi^2 & 0 \\ -GA\chi & 0 & GA \end{bmatrix}, \quad A = \int_{A_s} \frac{dy dz}{\mu}$$

$$\mathbf{D}_{01} = \int_{A_s} \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mu dy dz = \begin{bmatrix} 0 & GA\chi & 0 \\ -E^* A \chi & 0 & 0 \\ 0 & -GA & 0 \end{bmatrix} \text{ puesto que } \int_{A_s} y \frac{dy dz}{\mu} \simeq 0$$

$$\mathbf{D}_{11} = \int \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mu dy dz = \begin{bmatrix} E^* A & 0 & 0 \\ 0 & GA & 0 \\ 0 & 0 & E^* I \end{bmatrix}, \quad I = \int_{A_s} y^2 \frac{dy dz}{\mu}$$

y el operador \mathbf{W} definido en (52) valdrá:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & \chi & 0 & 1/E^*A & 0 & 0 \\ -\chi & 0 & 1 & 0 & 1/GA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/E^*I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Nótese que, por su propia estructura, permite integrar directamente los esfuerzos generalizados \mathbf{f} consistentes con las deformaciones \mathbf{u}' , cualquiera que sea la ley de curvaturas de la pieza. Según (31) estos serán:

$$\mathbf{f} = \int_{A_s} \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{t} \, dydz = \int_{A_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -y & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_s^* \\ \tau_{sy}^* \end{Bmatrix} dydz = \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix}$$

$$N = \int_{A_s} \sigma_s^* \, dydz, \quad Q = \int_{A_s} \tau_{sy}^* \, dydz, \quad M = \int_{A_s} -y\sigma_s^* \, dydz$$

Particularizando a arcos circulares, tendremos la ecuación de definición de autovalores siguiente:

$$|\mathbf{W} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^4(\lambda^2 + \chi^2), \quad \chi = C^{ste}$$

Una rápida inspección de \mathbf{W} permite obtener la dimensión del núcleo de la aplicación \mathbf{W} , resultando $m = 1$. Como $p = 4$, conviene integrar directamente el sistema de ecuaciones diferenciales de orden 1 asociado a \mathbf{W} :

$$\begin{aligned} u' &= \chi v + N/E^*A & N' &= \chi Q \\ \mu' &= -\chi u + \beta + Q/GA & Q' &= -\chi N \\ \beta' &= M/E^*I & M' &= -Q \end{aligned} \quad (57)$$

El resultado es:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_H \\ \mathbf{f}_H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}\theta & \text{cos}\theta & R & \frac{R\theta f \text{sen}\theta}{k} & \frac{R\theta f \text{cos}\theta}{k} & \frac{\theta}{k} \\ \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta & 0 & \frac{R(\theta f \text{cos}\theta + h \text{sen}\theta)}{k} & -\frac{R(\theta f \text{sen}\theta - h \text{cos}\theta)}{k} & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\text{cos}\theta}{k} & -\frac{\text{sen}\theta}{k} & \frac{\theta}{kR} \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\theta & \text{cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R \text{sen}\theta & -R \text{cos}\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

$$\theta = s/R, \quad R = \chi^{-1}$$

$$k = E^*I/R^2, \quad \eta = E^*I/R^2 E^*A, \quad \alpha = E^*I/R^2 GA$$

$$f = \frac{1}{2}(1 + \eta + \alpha), \quad h = \frac{1}{2}(1 - \eta + \alpha)$$

La ecuación (58) contiene, ordenadas por columnas, las seis soluciones base del sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas (57). Expresada ésta en función de las condiciones de contorno mixtas, obtendremos la fracción homogénea de la ecuación (44). Recurriendo a la Tabla II, resulta:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_H \\ \mathbf{f}_H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & R(1-\cos\theta) & -\frac{R[\theta(1+f\cos\theta)-(1+h)\text{sen}\theta]}{k} & \frac{R(1-\cos\theta-\theta f\text{sen}\theta)}{k} & -\frac{(\theta-\text{sen}\theta)}{k} \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & R\text{sen}\theta & -\frac{R(1-\cos\theta-\theta f\text{sen}\theta)}{k} & \frac{R(h\text{sen}\theta-\theta f\cos\theta)}{k} & -\frac{(1-\cos\theta)}{k} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{(\theta-\text{sen}\theta)}{k} & \frac{(1-\cos\theta)}{k} & -\frac{\theta}{kR} \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R(1-\cos\theta) & R\text{sen}\theta & -1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \beta_1 \\ N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad (59)$$

La evaluación de la solución particular definida en (42) requiere calcular las expresiones (43) para cada ley de carga $\mathbf{Q}(\theta)$ considerada, luego necesitaremos obtener las matrices $\bar{\mathbf{N}}$ y $\bar{\mathbf{P}}$ definidas en la Tabla II:

$$\bar{\mathbf{N}}(\theta) = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} -R[\theta f\text{sen}\theta + (1+h)\cos\theta] & R(\text{sen}\theta - \theta f\cos\theta) & -\cos\theta \\ -R[\theta f\cos\theta - (1+h)\text{sen}\theta] & R(\cos\theta + \theta f\text{sen}\theta) & \text{sen}\theta \\ & -\theta & -\theta/R \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{P}}(\theta) = \begin{bmatrix} \text{sen} & \cos\theta & 0 \\ \cos & -\text{sen}\theta & 0 \\ R & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}(\theta) = \int_0^\theta \bar{\mathbf{N}}(\theta) \cdot \mathbf{Q}(\theta) R d\theta, \quad \mathcal{F}(\theta) = \int_0^\theta \bar{\mathbf{P}}(\theta) \cdot \mathbf{Q}(\theta) R d\theta$$

La ecuación (59) define la matriz de transferencia del arco circular con deformación por cortante. Haciendo ($\alpha = 0$) en los coeficientes f, h se deduce la correspondiente a cinemática de Navier. Además, tomando límites en (59) para $\theta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ y $R\theta = L$, se obtiene la expresión de la matriz de transferencia de la viga recta de sección constante en su forma tradicional⁸.

En el segundo ejemplo incluido, se propone el estudio de una pieza recta solicitada a torsión no-uniforme. Adoptando para ello una cinemática de Oumanski^{9,10}, tendremos:

$$\mathbf{d}^*(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}(y, z) & 0 \\ 0 & -\hat{z} \\ 0 & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ \phi \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{h} \cdot \mathbf{u}, \quad \hat{y} = y - y_c, \quad \hat{z} = z - z_c \quad (60)$$

(y_c, z_c) definen las coordenadas del polo de la rotación ϕ sufrida por la sección transversal respecto a un eje longitudinal. Coincidirá con el *centro de esfuerzos cortantes* en piezas de sección constante. Por su parte, $\phi(x)$ es el desplazamiento generalizado característico del alabeo y $\hat{\omega}$ es la función estática (conocida) *alabeo unitario* del punto (y, z) de la sección transversal.

Las deformaciones no-nulas de la pieza serán ahora:

$$\mathbf{e}^* = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^* \\ \gamma_{xy}^* \\ \gamma_{xz}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}^*$$

y las tensiones consistentes cumplirán la ecuación constitutiva

$$\mathbf{s}^* = \begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \tau_{xy}^* \\ \tau_{xz}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E^* & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^* \\ \gamma_{xy}^* \\ \gamma_{xz}^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}^*$$

Las submatrices de deformación y de rigideces correspondientes resultan ser:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{\omega}_{,y} & 0 \\ \hat{\omega}_{,z} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & 0 \\ 0 & -\hat{z} \\ 0 & \hat{y} \end{bmatrix}, \quad \hat{\omega}_{,y} = \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y} \quad \text{y} \quad \hat{\omega}_{,z} = \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial z}$$

$$\mathbf{D}_{00} = \begin{bmatrix} GI_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & G\bar{R} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} E^* & 0 \\ 0 & GI_C \end{bmatrix}$$

con las constantes estáticas

$$I_0 = \int_A (\hat{\omega}_{,y}^2 + \hat{\omega}_{,z}^2) dA, \quad \bar{R} = \int_A (y\hat{\omega}_{,z} - z\hat{\omega}_{,y}) dA, \quad I_{\hat{\omega}} = \int_A \hat{\omega}^2 dA, \quad I_C = \int_A (\hat{y}^2 + \hat{z}^2) dA$$

El operador \mathbf{W} , que define el sistema de ecuaciones que gobierna el problema, será:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/E^*I_{\hat{\omega}} & 0 \\ -\bar{R}/I_C & 0 & 0 & 1/GI_C \\ GI_0(1-\kappa) & 0 & 0 & \bar{R}/I_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad : \quad \kappa = \frac{\bar{R}^2}{I_0 I_C}$$

Los esfuerzos generalizados \mathbf{f} característicos del problema abordado serán, según (31):

$$\mathbf{f} = \int_A \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{t} dydz = \int_A \begin{bmatrix} \hat{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{z} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \tau_{xy}^* \\ \tau_{xz}^* \end{Bmatrix} dydz = \begin{Bmatrix} B \\ T \end{Bmatrix}$$

$$B = \int_A \hat{\omega} \sigma_x^* dydz, \quad T = \int_A (-\hat{z} \tau_{xy}^* + \hat{y} \tau_{xz}^*) dydz$$

La ecuación característica asociada al operador \mathbf{W} valdrá:

$$|\mathbf{W} - \lambda \mathbf{I}| = \lambda^2(\lambda^2 - K^2), \quad \lambda^2 = GI_0(1-\kappa)/E^*I_{\hat{\omega}}$$

resultando los autovalores $\lambda = 0$, doble, $\lambda = \pm K$. La determinación de los autovectores asociados conduce a la siguiente matriz $\mathbf{T}(x)$:

$$\mathbf{T}(x) \begin{bmatrix} chKx & shKx & -\bar{R}/I_0 & 0 \\ -\bar{R}shKx/KI_c & -\bar{R}chKx/KI_c & x & 1 \\ KE^*I_\omega shKx & KE^*I_\omega chKx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GI_c(1-\kappa) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}(x) & \mathbf{M}(x) \\ \mathbf{N}(x) & \mathbf{P}(x) \end{bmatrix}$$

La determinación de la matriz de rigidez requiere invertir \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{R}/I_0 & 0 \\ 0 & -\bar{R}/KI_c & 0 & 1 \\ chKL & shKL & -\bar{R}/KI_c & 0 \\ -\bar{R}shKL/KI_c & -\bar{R}chKL/KI_c & L & 1 \end{bmatrix}$$

Realizada esta operación, las ecuaciones (49) permiten calcular las cuatro submatrices de rigidez, obteniendo finalmente:

$$\mathbf{K} = \frac{GJ}{2(1-chKL) + \frac{KL}{\kappa}shKL} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{(KLchKL - \kappa shKL)}{K} & \frac{\bar{R}(1-chKL)}{I_0} & \frac{(KL - \kappa shKL)}{K} & \frac{-\bar{R}(1-chKL)}{I_0} \\ \frac{\bar{R}(1-chKL)}{I_0} & \frac{KI_c shKL}{I_0} & \frac{\bar{R}(1-chKL)}{I_0} & \frac{-KI_c shKL}{I_0} \\ \frac{-(KL - \kappa shKL)}{K} & \frac{\bar{R}(1-chKL)}{K} & \frac{(KLchKL - \kappa shKL)}{K} & \frac{-\bar{R}(1-chKL)}{I_0} \\ \frac{-\bar{R}(1-chKL)}{I_0} & \frac{-KI_c shKL}{I_0} & \frac{-\bar{R}(1-chKL)}{I_0} & \frac{KI_c shKL}{I_0} \end{bmatrix}$$

$$GJ = K^2 E^* I_\omega / K \quad , \quad \text{luego } J = I_o(1 - \kappa) / \kappa \quad \text{o bien } \kappa = \frac{1}{1 + \frac{J}{I_o}}$$

Expresiones equivalentes de la matriz de rigidez de la pieza recta de sección constante pueden encontrarse en los textos específicos¹¹. En cuanto a las restantes funciones características de la respuesta de la estructura, como su matriz de transferencia o la solución particular (42), su evaluación se lleva a cabo fácilmente sobre la base de los anteriores resultados. Nótese finalmente que los esfuerzos generalizados $B(x)$ y $T(x)$ coinciden con las definiciones tradicionales de bimomento y momento torsor.

CONCLUSIONES

En las secciones anteriores, se ha mostrado cómo los conceptos de ecuación de rigidez o de transferencia de las piezas alargadas no son más que presentaciones particulares y alternativas del problema de valores iniciales correspondiente al equilibrio del cuerpo con unas condiciones de contorno dadas. El operador W definido en (52) proporciona sistemáticamente el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden a integrar, mientras que las condiciones de contorno están constituidas por la ecuación (37) y se apoyan en la definición de los esfuerzos generalizados (31) asociados a la hipótesis cinemática seleccionada. Por lo tanto, se propone una herramienta conceptualmente única para resolver el problema planteado, independientemente de la caracterización geométrica de la directriz de la pieza, aspecto sumamente interesante bajo una perspectiva práctica y didáctica.

REFERENCIAS

1. B.Z. Vlassov, "*Pièces longues en voiles minces*", Eyrolles Editeurs, 2da. Ed. (1962)
2. K. Washizu, "*Variational methods in Elasticity and Plasticity*", Pergamon Press, (1974).
3. A.E. Green y W. Zerna, "*Theoretical Elasticity*", Oxford University Press, 2da. Ed. (1968).
4. H.L. Langhaar, "*Energy methods in Applied Mechanics*", Wiley, (1962).
5. R. Courant y D. Hilbert, "*Methods in Mathematical Physics*", Vol. 1, Interscience, (1953).
6. P. Fuster, S. Monleón, J.F. Moyá y F. Bonet, "*Tratamiento semi-analítico unificado de problemas elásticos unidimensionales. Aplicación a láminas delgadas con simetría de revolución*", Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería, U.P.C., (1986).
7. D.L. Kreider, R.G. Kuller y D.R. Osteberg, "*Elementary differential equations*", Addison-Wesley, (1968).
8. R.K. Livesley, "*Matrix methods of structural analysis*", 2da. Ed., Pergamon Press, (1975).
9. A.A. Oumanski, "*Torsion et flexion des constructions aeronautiques en voiles minces*", Oboronguiz, (1968).
10. A.A. Oumanski, "*Contraintes normales dans une aile d'avion subissant la torsion*", Techniques des forces de l'air, no 12, (1940).
11. J.M. Saez Benito, "*Cálculo matricial de estructuras formadas por piezas rectas*", F.E.I.N., (1975).