

ANALISIS Y RESOLUCION NUMERICA DE FLUJOS CAVITACIONALES PIEZOVISCOSOS EN LUBRICACION HIDRODINAMICA

JOSE DURANY
y
CARLOS VAZQUEZ

*Dpto. de Matemática Aplicada,
E.T.S.I. Telecomunicación,
Universidad de Vigo,
36280 Vigo, España.*

RESUMEN

En este trabajo se estudia un modelo matemático de cavitación para fluidos que aparecen en problemas de lubricación hidrodinámica de pares ejes-*cojinetes*. El fenómeno de la cavitación se analiza mediante un modelo del tipo Reynolds para el que se presenta un resultado de existencia de solución utilizando métodos de regularización.

Finalmente, la resolución numérica del modelo continuo se efectúa mediante técnicas de elementos finitos combinadas con algoritmos de transporte-difusión.

SUMMARY

In this work a mathematical model for cavitational piezoviscous flows is studied with particular emphasis in geometries related with hydrodynamic lubrication of journal-bearings. Existence of solution is obtained by using regularization methods when Reynolds type models simulate the cavitational phenomena.

Finally, finite element technics combined with transport-diffusion algorithms are considered for numerical purposes.

INTRODUCCION

En el planteamiento de problemas de contacto hidrodinámico de tipo piezoviscoso, se supone que el lubricante puede estar sometido a presiones suficientemente elevadas de manera que se modifica su viscosidad. A diferencia de los problemas elastohidrodinámicos se prescinde de la posibilidad de que las superficies que entran en contacto se deformen y, en consecuencia, varíen la geometría de la película lubricante. De este modo, la formulación física del proceso se describe simplemente mediante la ecuación de Reynolds y una ley de comportamiento que relaciona la viscosidad con la presión (ver Cameron⁹, Berthe⁸).

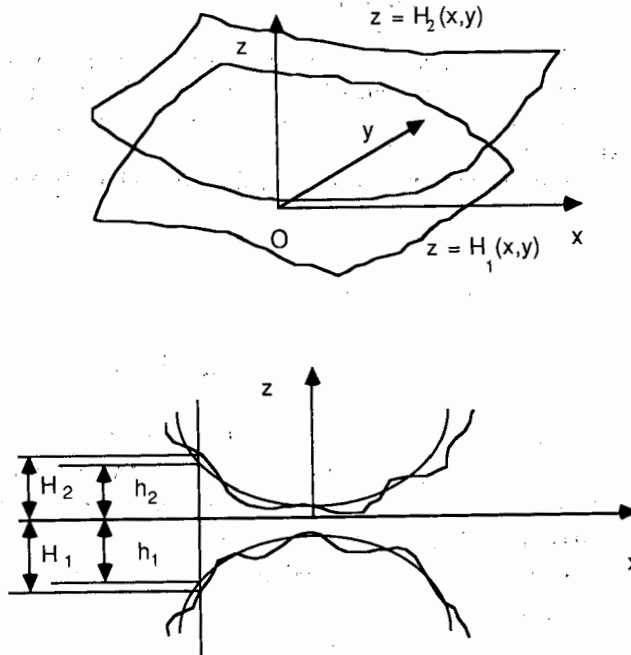
Recibido: Julio 1991

Ecuación de Reynolds

Se consideran dos superficies rugosas separadas por una capa fina de fluido lubricante y moviéndose con velocidades (u_1, v_1, w_1) y (u_2, v_2, w_2) respectivamente. Si se denota por $H_1 = H_1(x, y)$, $H_2 = H_2(x, y)$ las ecuaciones que definen las superficies; $h_1 = h_1(x, y)$, $h_2 = h_2(x, y)$ las ecuaciones que definen las superficies medias y $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x, y)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x, y)$ las desviaciones de la media entonces la ecuación que representa el desplazamiento del fluido lubricante entre las superficies, en ausencia de cavitación y con variables adimensionalizadas, es la ecuación de Reynolds generalizada:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{\eta} (H_2 - H_1)^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho}{\eta} (H_2 - H_1)^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \\ & = 6 \frac{\partial}{\partial x} (\rho(u_1 + u_2)(H_2 - H_1)) - 12\rho u_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} + 12\rho u_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} + \\ & + 6 \frac{\partial}{\partial y} (\rho(v_1 + v_2)(H_2 - H_1)) - 12\rho v_2 \frac{\partial H_2}{\partial y} + 12\rho v_1 \frac{\partial H_1}{\partial y} + \\ & + 12\rho(w_2 - w_1) + 12(H_2 - H_1) \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

donde p es la presión, ρ la densidad, η la viscosidad y t el tiempo. Además, $h = h_2 - h_1$ es el espesor medio de contacto y $H = h + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ el espesor de contacto, como muestra el siguiente esquema:



Esquema Descriptivo.

Ecuación de Reynolds simplificada

Generalmente en el estudio de este tipo de fenómenos se realizan las siguientes simplificaciones:

- a) Orientación del sistema de ejes tal que:

$$v_1 = v_2 = 0 \tag{2}$$

- b) Consideración de la velocidad de cada superficie invariable con el punto:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \quad i = 1, 2 \tag{3}$$

- c) Elección de superficies impermeables:

$$w_1 = u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial t}, \quad w_2 = u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial t} \tag{4}$$

- d) Anulación del término de deslizamiento ("squeeze") en caso de régimen permanente:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(H_2 - H_1)] = 0 \tag{5}$$

- e) Utilización de superficies lisas:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0 \tag{6}$$

y, en consecuencia, $H = h$.

Utilizando (2)–(6) en la expresión (1) se obtiene la ecuación de Reynolds simplificada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{\eta} h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho}{\eta} h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= \\ &= 6(u_1 + u_2) \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) \end{aligned} \tag{7}$$

Ecuaciones de comportamiento del fluido lubricante

Si se considera un régimen isoterma y permanente y se desprecia la variación geométrica de las propiedades físicas entonces la densidad y viscosidad son función exclusiva de la presión y, en el caso particular de un fluido a densidad constante y piezoviscoso, se puede establecer:

$$\rho(p) = \rho, \text{ constante} \tag{8}$$

$$\eta(p) = \eta_0 e^{\alpha p} \text{ ley de Barus,} \tag{9}$$

donde η_0 es la viscosidad a presión atmosférica y α el coeficiente de piezoviscosidad característico de cada fluido lubricante.

De este modo, la ecuación (7) se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial x}(h^3 e^{-\alpha p} \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(h^3 e^{-\alpha p} \frac{\partial p}{\partial y}) = 6 \eta_0 (u_1 + u_2) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (10)$$

Definiendo el campo de velocidades

$$\vec{u} = (u, 0), \quad \text{con } u = u_1 + u_2 \quad (11)$$

se puede reescribir (10) en la forma:

$$\nabla \cdot (h^3 e^{-\alpha p} \nabla p - 6\eta_0 \vec{u} h) = 0 \quad (12)$$

que corresponde a una ley de conservación del flujo.

Geometría del problema y condiciones de contorno

Para elegir el dominio de aplicación de las ecuaciones se recurre al caso práctico de un par eje-cojinete de alimentación circunferencial (ver Figura 1).

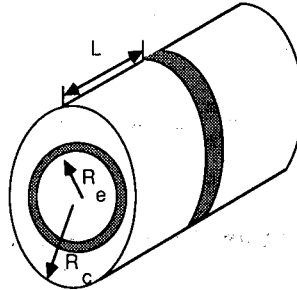


Figura 1. Par eje-cojinete de radios R_e , R_c con ranura de alimentación circunferencial.

Considerando simetrías y extendiendo el dominio de la película lubricante en el plano se obtiene el rectángulo $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, L]$, con $L = 1$ por simplicidad (ver Figura 2).

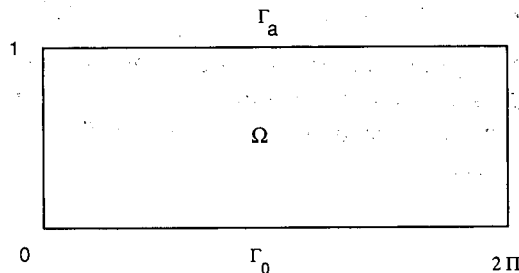


Figura 2. Dominio del problema.

En Ω se establecen las siguientes condiciones de contorno:

$$p = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_0 = \{(x, 0), 0 < x < 2\pi\} \quad (13)$$

$$p = p_a > 0 \quad (\text{presión de alimentación}) \quad \text{en} \quad \Gamma_a = \{(x, 1), 0 < x < 2\pi\} \quad (14)$$

$$p(0, y) = p(2\pi, y), \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (\text{condición de periodicidad}) \quad (15)$$

Utilizando los espacios funcionales

$$V = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma_0} = 0, \quad v|_{\Gamma_a} = p_a, \quad v \text{ } 2\pi - x \text{ periódica} \}$$

$$V_0 = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma_0} = 0, \quad v|_{\Gamma_a} = 0, \quad v \text{ } 2\pi - x \text{ periódica} \}$$

se puede formular variacionalmente el problema en la forma:

Problema (P1): Hallar $p \geq 0, p \in V$ tal que

$$\int_{\Omega} h^3 e^{-\alpha p} \nabla p \nabla z = 6\eta_0 u \int_{\Omega} -\frac{\partial h}{\partial x} z, \quad \forall z \in V_0 \quad (16)$$

donde la función altura h está definida, para esta geometría particular, por la expresión

$$h(x) = C(1 + \beta \cos x), \quad 0 \leq \beta < 1 \quad (17)$$

siendo β el coeficiente de excentricidad del par eje-cojinete y $C = R_c - R_e$ la diferencia de sus radios. En lo que sigue se toma $C = 1$ para simplificar.

Existencia y unicidad de solución

La ecuación variacional (16) y en su conjunto el problema piezoviscoso sin cavitación (P1) se puede transformar en un problema lineal elíptico de segundo orden con el cambio de variable

$$\omega_{\alpha} = \frac{1 - e^{-\alpha p}}{\alpha} \quad (18)$$

que proporciona el modelo isoviscoso:

Problema (P2): Hallar $\omega_{\alpha} \geq 0, \omega_{\alpha} \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla \omega_{\alpha} \nabla z = 6\eta_0 u \int_{\Omega} -\frac{\partial h}{\partial x} z, \quad \forall z \in V_0 \quad (19)$$

$$\omega_{\alpha} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_0 \quad (20)$$

$$\omega_{\alpha} = \frac{1 - e^{-\alpha p_a}}{\alpha} = \omega_a \quad \text{en} \quad \Gamma_a \quad (21)$$

$$\omega_{\alpha}(0, y) = \omega_{\alpha}(2\pi, y), \quad 0 < y < 1 \quad (22)$$

Teorema 1: Si $\omega_a \geq \frac{M}{2}$, siendo $M = \max_{x \in [0, 2\pi]} \frac{h'(x)}{h^3(x)}$,

entonces el problema (P2) tiene solución única. Además, la solución está acotada superiormente por ω_a .

Demostración: El resultado se obtiene como caso particular de un modelo estudiado por Alvarez¹, donde se recoge el fenómeno de la cavitación. La hipótesis $\omega_a > \frac{M}{2}$ garantiza para dicho modelo la existencia y unicidad de solución estrictamente positiva en Ω . Por otra parte, en el modelo con cavitación analizado en [1], la solución está acotada superiormente por una función que sólo depende de y :

$$v(y) = -\frac{M}{2}y^2 + (\omega_a + \frac{M}{2})y, \quad \forall y \in [0, 1] \quad (23)$$

Esta parábola, bajo la hipótesis $\omega_a > \frac{M}{2}$, alcanza su máximo para $y > 1$ lo que permite obtener la acotación:

$$\omega_\alpha(x, y) < v(1) = \omega_a \quad \text{en } \Omega \quad (24)$$

Teorema 2: Si $\omega_a > \frac{M}{2}$ entonces los problemas (P1) y (P2) son equivalentes.

Demostración: La única dificultad estriba en demostrar la validez del cambio de variable:

$$p = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - \alpha\omega_\alpha) \quad (25)$$

Para ello, es suficiente utilizar las acotaciones que proporciona el Teorema 1:

$$0 < \omega_\alpha \leq \omega_a = \frac{1 - e^{-\alpha p a}}{\alpha} \quad (26)$$

y la positividad de α y p_a , obteniéndose

$$0 < \omega_\alpha < \frac{1}{\alpha} \quad (27)$$

MODELO MATEMATICO PARA FLUJOS CAVITACIONALES PIEZOVISCOSOS

Cuando en un dispositivo eje-cojinete se considera un descentramiento de los ejes ($\beta > 0$) se producen zonas de sobrepresión y zonas de bajas presiones en el fluido. La presencia de bajas presiones induce la aparición de burbujas, sobre todo en la parte divergente, que da lugar a los fenómenos de cavitación.

En la región cavitada la presión toma el valor de la presión atmosférica, que por simplificación se toma igual a cero, y no es válida la ecuación (12). Por ello, es necesario utilizar otro modelo que tenga en cuenta este hecho. Una amplia descripción de las diferentes opciones para modelizar la cavitación puede verse en Bayada-Chambat³,

donde se destacan los esquemas de Sommerfeld, Gumbel, Reynolds (Swift-Stieber), Floberg y Elrod-Adams.

En nuestro caso, se elige un modelo del tipo Reynolds que se distingue por considerar la continuidad del flujo a través de la frontera libre que separa la zona lubricada de la cavitada.

Sean:

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \Omega, p(x, y) > 0\} \quad \text{zona lubricada} \quad (28)$$

$$\Omega_0 = \{(x, y) \in \Omega, p(x, y) = 0\} \quad \text{zona cavitada} \quad (29)$$

que son desconocidos "a priori", y Σ la curva de separación de las dos zonas. Considerando los espacios funcionales V y V_0 descritos en el epígrafe anterior, se puede plantear una formulación variacional del problema como sigue:

Problema (P3): Hallar $p \in V$ tal que:

$$\nabla \cdot (h^3 e^{-\alpha p} \nabla p) = \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{y} \quad p > 0 \quad \text{en} \quad \Omega_1 \quad (30)$$

$$p = \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma, \quad \text{con} \quad \nu \quad \text{vector} \quad \text{unitario} \quad \text{exterior} \quad \text{a} \quad \Omega_0 \quad (31)$$

$$p = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_0 \quad (32)$$

El tratamiento clásico del Problema (P3) como una inecuación variacional de primera especie tiene el inconveniente de imponer $-\frac{\partial h}{\partial x} \leq 0$ en Ω_0 , lo que condiciona, en nuestro caso, la aparición de zonas de cavitación en la parte del dominio $[0, \pi] \times [0, 1]$.

Con el fin de evitar este inconveniente, se plantea una formulación variacional válida en todo el dominio introduciendo el operador de Heaviside unívoco:

$$H(p) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p > 0 \\ 0 & \text{si} \quad p \leq 0 \end{cases} \quad (33)$$

y se reescribe el modelo (30)-(32):

Problema (P4): Hallar $p \in V$ tal que:

$$\int_{\Omega} h^3 e^{-\alpha p} \nabla p \nabla z = \int_{\Omega} -\frac{\partial h}{\partial x} H(p) z, \quad \forall z \in V_0 \quad (34)$$

Teorema 3: Los problemas (P3) y (P4) son equivalentes.

Demostración: Considerando en (34) funciones $z \in D(\Omega_1)$ y aplicando fórmulas de Green, se tiene

$$-\int_{\Omega_1} \nabla \cdot (h^3 e^{-\alpha p} \nabla p) z = \int_{\Omega_1} -\frac{\partial h}{\partial x} z, \quad \forall z \in D(\Omega_1) \quad (35)$$

y en consecuencia,

$$\nabla \cdot (h^3 e^{-\alpha p} \nabla p) = \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{en } \Omega_1 \quad (36)$$

Integrando por partes (34) y teniendo en cuenta (36) se obtiene

$$\int_{\Sigma} h^3 e^{-\alpha p} \frac{\partial p}{\partial \nu} z = 0, \quad \forall z \in V_0 \quad (37)$$

(obsérvese que $\frac{\partial p}{\partial \nu} = 0$ en las fronteras $x = 0$ y $x = 2\pi$ debido a la periodicidad).

Finalmente de (34), (36) y (37) se consiguen (30) y (32).

La obtención de (34) a partir de (30)-(32) es inmediata sabiendo que p y $H(p)$ son cero en Ω_0 .

EXISTENCIA DE SOLUCION

Para demostrar la existencia de solución del problema (P4), se siguen las mismas ideas que en el caso sin cavitación. Primero, se efectúa el cambio variable (8) para evitar la no-linealidad del término de viscosidad, lo que proporciona el siguiente modelo formulado en ω_α :

Problema (P4, α):

Hallar $\omega_\alpha \in V_\alpha = \{z \in H^1(\Omega) / z|_{\Gamma_0} = 0, z|_{\Gamma_a} = \frac{1-e^{-\alpha p a}}{\alpha} = \omega_\alpha, z \text{ } 2\pi - x \text{ periódica}\}$ tal que

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla \omega_\alpha \nabla z = \int_{\Omega} -\frac{\partial h}{\partial x} H(\omega_\alpha) z \quad \forall z \in V_0 \quad (38)$$

Si este problema tiene solución y, ésta verifica

$$0 \leq \omega_\alpha < \frac{1}{\alpha} \quad (39)$$

entonces

$$\omega_\alpha > 0 \iff p > 0 \quad \text{y} \quad H(\omega_\alpha) = H(p) \quad (40)$$

y, por lo tanto, la función p obtenida a partir de (25) es solución del Problema (P4).

Para la demostración de la existencia de solución del problema no lineal (P4, α) se siguen las técnicas de Bayada² que suponen conocida una zona B de Ω donde ω_α es estrictamente positiva y se modifica la ecuación (38) en el sentido siguiente:

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla \omega_\alpha \nabla z = \int_A -\frac{\partial h}{\partial x} H(\omega_\alpha) z + \int_B -\frac{\partial h}{\partial x} z \quad (41)$$

donde A es el complementario de B con respecto a Ω .

Definiendo ahora el problema más general:

Hallar $\omega_\alpha \in V_\alpha$ y $\gamma \in L^\infty(A)$ con $H(\omega_\alpha) < \gamma < 1$, $\omega_\alpha^- \gamma = 0$ c.p.d. en A y tal que

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla \omega_{\alpha} \nabla z = \int_A -\frac{\partial h}{\partial x} \gamma z + \int_B -\frac{\partial h}{\partial x} z \tag{42}$$

se tienen los siguientes resultados:

Teorema 4: Bajo ciertas hipótesis de regularidad de Ω_0 , los problemas (41) y (42) son equivalentes.

Demostración: Es inmediato que una solución de (41) es solución de (42) con sólo definir γ sobre A como

$$\gamma = 1 \quad \text{si } \omega_{\alpha} > 0, \quad \gamma = 0 \quad \text{si } \omega_{\alpha} \leq 0 \tag{43}$$

El recíproco está condicionado a la regularidad de la zona de cavitación Ω_0 . Si Ω_0 es regular y situado localmente de un solo lado de su frontera entonces el interior de $\Omega_0 \cap A$ es un abierto regular y se tiene que para todo $z \in D[\text{Int}(\Omega_0 \cap A)]$

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla \omega_{\alpha} \nabla z = 0 = \int_A -\frac{\partial h}{\partial x} \gamma z \tag{44}$$

de donde $-\frac{\partial h}{\partial x} \gamma z = 0$ c.p.d. en $\Omega_0 \cap A$.

De este modo,

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial h}{\partial x} \gamma z &= \int_{A \cap [\omega_{\alpha} < 0]} \frac{\partial h}{\partial x} \gamma z + \int_{A \cap \Omega_0} \frac{\partial h}{\partial x} \gamma z + \\ &+ \int_{A \cap [\omega_{\alpha} > 0]} \frac{\partial h}{\partial x} \gamma z = \\ \int_{A \cap [\omega_{\alpha} < 0]} \frac{\partial h}{\partial x} \gamma z + \int_{A \cap [\omega_{\alpha} > 0]} \frac{\partial h}{\partial x} \gamma z, \quad \forall z \in V_0 \end{aligned} \tag{45}$$

La condición $\omega_{\alpha}^- \gamma = 0$ c.p.d. en A induce $\gamma = 0$ en $A \cap [\omega_{\alpha} < 0]$, proporcionando finalmente

$$\int_A \frac{\partial h}{\partial x} \gamma z = \int_{A \cap [\omega_{\alpha} > 0]} \frac{\partial h}{\partial x} \gamma z = \int_A \frac{\partial h}{\partial x} H(\omega_{\alpha}) z \tag{46}$$

Teorema 5: El problema (42) tiene al menos una solución.

Demostración: (Ver Bayada² para los detalles).

La demostración se basa en un proceso clásico de regularización de la función $H(\omega_{\alpha})$, definiendo la sucesión $\{g_{\varepsilon}\}$ para $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ por:

$$g_{\varepsilon}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \leq 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \omega & \text{si } 0 \leq \omega \leq \varepsilon \\ 1 & \text{si } \omega \geq \varepsilon \end{cases} \tag{47}$$

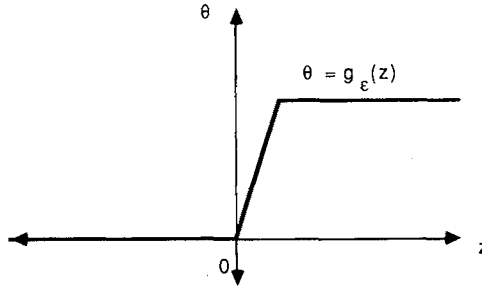


Figura 3. Operador de Heaviside regularizado.

que convergen puntualmente a $H(\omega)$ (ver Figura 3).

Se demuestra la existencia de solución del problema regularizado

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla \omega_{\alpha}^{\epsilon} \nabla z = \int_A -\frac{\partial h}{\partial x} g_{\epsilon}(\omega_{\alpha}^{\epsilon}) z + \int_B -\frac{\partial h}{\partial x} z \tag{48}$$

vía teorema de punto fijo de Schauder y se pasa al límite en ϵ obteniéndose

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_{\alpha}^{\epsilon} && \text{en } V_{\alpha} \text{ débil} \\ \gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_{\epsilon}(\omega_{\alpha}^{\epsilon}) && \text{en } L^{\infty}(\Omega) \text{ débil}^* \end{aligned} \tag{49}$$

Finalmente, de (49) se deduce que $\gamma = 1$ en $\{(x, y), \omega_{\alpha} < 0\}$ y en consecuencia $\omega_{\alpha}^{\epsilon} \gamma = 0$ c.p.d. en A .

Los Teoremas 4 y 5 concluyen la existencia de solución no trivial del Problema (P4, α).

Teorema 6: La solución de (P4, α) es no negativa.

Demostración: Utilizando en (38) funciones test $z = \omega_{\alpha}^{-}$, se tiene

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla \omega_{\alpha} \nabla \omega_{\alpha} \int_{\Omega} h^3 |\nabla \omega_{\alpha}^{-}|^2 = \int_{\Omega} -\frac{\partial h}{\partial x} H(\omega_{\alpha}^{-}) \omega_{\alpha}^{-} = 0 \tag{50}$$

es decir,

$$|\nabla \omega_{\alpha}^{-}| = 0 \tag{51}$$

De ello, se deduce que ω_{α}^{-} es una función constante y, por la condición Dirichlet homogénea en Γ_0 , se concluye

$$\omega_{\alpha}^{-} = 0, \text{ i.e. } \omega_{\alpha} \geq 0 \tag{52}$$

Teorema 7: (Validez del cambio de variable):

Para coeficientes de viscosidad α tales que

$$\frac{\alpha^2 p_a^2}{2M} + \frac{\alpha^2 p_a}{2} + \frac{\alpha M}{8} < 1 \tag{53}$$

donde M está definido en el Teorema 1, se tiene que ω_α solución del problema (P4, α) verifica

$$\omega_\alpha < \frac{1}{\alpha} \tag{54}$$

y, en consecuencia

$$p = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - \alpha\omega_\alpha) \tag{55}$$

es solución del problema (P4).

Demostración: Siguiendo las mismas ideas que Alvarez¹ en su Teorema I.7, se tiene la acotación:

$$\omega_\alpha \leq v(y) \tag{56}$$

con $v(y)$ definida en (23). Esta parábola alcanza su máximo en el punto $y_0 = \frac{\omega_a}{M} + \frac{1}{2}$, tomando el valor

$$v(y_0) = \frac{\omega_a^2}{2M} + \frac{\omega_a}{2} + \frac{M}{8} \tag{57}$$

Sustituyendo ω_α por la expresión (21) y aplicando la hipótesis (53) se obtiene el resultado.

RESOLUCION NUMERICA: METODO DE LAS CARACTERISTICAS

Con el objetivo de resolver numéricamente el problema no lineal (P4, α) se adaptan las ideas desarrolladas en Bermúdez-Durany⁴, relativas al método de las características en problemas de transporte-difusión. Para ello, se considera la función

$$\gamma \in H(\omega_\alpha), \quad \text{con } H \text{ operador de Heaviside multívoco.} \tag{58}$$

y se sustituye en (38) utilizando convenientemente fórmulas de Green:

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla \omega_\alpha \nabla z = \int_{\Omega} h \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \int_{\Omega} h \frac{\partial \gamma}{\partial x} z, \quad \forall z \in V_0 \tag{59}$$

Para aplicar métodos de transporte en un problema estacionario, se transforma (59) en un falso problema evolutivo definiendo

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_\alpha(x, y, t) &= \omega_\alpha(x, y) \\ \tilde{\gamma}(x, y, t) &= \gamma(x, y) \\ \tilde{z}(x, y, t) &= z_\alpha(x, y) \end{aligned} \tag{60}$$

y se utiliza el concepto de derivada total de una función:

$$\frac{D\tilde{z}}{Dt} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{z},$$

donde \tilde{u} es un campo de velocidades.

En el caso particular de elegir

$$\tilde{u}(x, y, t) = (-1, 0) \quad (61)$$

se tiene

$$\frac{D\tilde{z}}{Dt} = -\frac{\partial z}{\partial x} \quad (62)$$

y la ecuación (59) se puede escribir

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla \omega_{\alpha} \nabla z + \int_{\Omega} h \gamma \frac{Dz}{Dt} = \int_{\Omega} h \frac{\partial \gamma}{\partial x} z, \quad \forall z \in V_0 \quad (63)$$

donde se ha suprimido la notación “ \sim ” por simplificación.

Si $X(x, y, t; \tau)$ denota la trayectoria de una partícula que está en (x, y) en el instante t y, por tanto, es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{d\tau} = \tilde{u}(X); \quad X(x, y, t; t) = x \quad (64)$$

entonces, notando por $X^k(x, y)$ el punto $X(x, y, t; t-k)$ se puede discretizar la derivada total mediante el esquema (ver Pironneau¹¹, Bermúdez-Durany-Pose-Vázquez⁶ por ejemplo):

$$\frac{Dz}{Dt}(x, y) = \frac{z(x, y) - (zoX^k)(x, y)}{k} \quad (65)$$

en donde k es un parámetro real suficientemente pequeño que representa un paso de tiempo artificial.

Teniendo en cuenta (62) y sustituyendo (65) en (63) se obtiene el problema aproximado:

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla \omega_{\alpha} \nabla z + \int_{\Omega} h \gamma \frac{z - zoX^k}{k} + \int_{\Omega} h \frac{\gamma - \gamma oX^k}{k} z = 0, \quad \forall z \in V_0 \quad (66)$$

$$\gamma \in H(\omega_{\alpha}) \quad (67)$$

Observación 1: En el caso de problemas lineales, en Pironneau¹¹, y Bermúdez-Durany⁴ se demuestra la convergencia de los esquemas aproximados por características al problema continuo cuando k tiende a cero.

La periodicidad de las funciones de V_0 permite deducir

$$z \in V_0 \Rightarrow zoX^k \in V_0 \quad (68)$$

y la divergencia nula del campo de velocidades proporciona

$$|z|_{L^2} = |zoX^k|_{L^2} , \forall z \in V_0. \tag{69}$$

Ambas propiedades garantizan el siguiente resultado.

Teorema 8: El problema (66)-(67) tiene solución única.

Demostración: Se define el conjunto $B = \{v \in L^2(\Omega): |v(x, y)| < 1 \text{ c.p.d. en } \Omega\}$ y la aplicación T de B en sí mismo dada por

$$T(\tilde{\gamma}) = \gamma , \text{ tal que} \tag{70}$$

(ω_α, γ) es la solución del problema no lineal elíptico

$$(A\omega_\alpha, z) + \frac{2}{k}(h\gamma, z) = \frac{1}{k}(h\tilde{\gamma}oX^k, z) + \frac{1}{k}(h\tilde{\gamma}, zoX^k) \tag{71}$$

$$\gamma \in H(\omega_\alpha) \tag{72}$$

con

$$(A\omega_\alpha, z) = \int_{\Omega} h^3 \nabla \omega_\alpha \nabla z \tag{73}$$

y $(,)$ el producto escalar usual en $L^2(\Omega)$.

La existencia y unicidad de solución de (71)-(72) se sigue de resultados clásicos para inecuaciones variacionales (ver Lions¹⁰, por ejemplo).

Finalmente, siguiendo las mismas ideas que en Bermúdez-Durany⁵ es fácil demostrar que T tiene un punto fijo (ver Vázquez¹² para los detalles).

APROXIMACION POR ELEMENTOS FINITOS

La discretización espacial de las ecuaciones (66)-(67) se realiza mediante la introducción del espacio de elementos finitos bidimensionales de Lagrange P_1 (polinomios de grado menor o igual que uno) para una triangulación E_μ del dominio. Concretamente, sea

$$V_\mu = \{v_\mu \in C^0 / v_{\mu|E} \in P_1 , \forall E \in E_\mu\} \tag{74}$$

$$K_\mu = \{v_\mu \in V_\mu / v_{\mu|_{\Gamma_0}} = 0 , v_{\mu|_{\Gamma_1}} = \omega_a , v_\mu \text{ } 2\pi\text{-periódica}\} \tag{75}$$

$$K_{0\mu} = \{v_\mu \in V_\mu / v_{\mu|_{\Gamma_0}} = 0 , v_{\mu|_{\Gamma_1}} = 0 , v_\mu \text{ } 2\pi\text{-periódica}\} \tag{76}$$

donde μ es el parámetro de la discretización.

Teorema 9: El problema discretizado: hallar $(\omega_\mu, \gamma_\mu) \in K_\mu \times V_\mu$ tal que

$$(A\omega_\mu, z_\mu) + (h\gamma_\mu, \frac{z_\mu - z_\mu o X^h}{k}) + (h\frac{\gamma_\mu - \gamma_\mu o X^k}{k}, z_\mu) = 0, \quad \forall z_\mu \in K_0 \quad (77)$$

$$\gamma_\mu(b) \in H(\omega_\mu(b)) \quad \forall b \text{ nodo de } E_\mu \quad (78)$$

tiene solución única.

Demostración: Es análoga a la del Teorema 8.

PROBLEMA DISCRETIZADO NO LINEAL: ALGORITMO DE DUALIDAD

Los esquemas desarrollados en los apartados anteriores sugieren la utilización del siguiente algoritmo iterativo para resolver (77)-(78):

Se toma γ^0 arbitrario y se calcula $(\omega^{n+1}, \gamma^{n+1})$ a partir de (ω^n, γ^n) resolviendo el problema no lineal:

$$\left(\int_\Omega h^3 \nabla \omega^{n+1} \nabla z + \frac{1}{k} \int_\Omega h \gamma^{n+1} z = \frac{1}{k} \int_\Omega h \gamma^n z o X^k - \frac{1}{k} \int_\Omega h (\gamma^n - \gamma^n o X^k) z \right. \quad (79)$$

$$\left. \gamma^{n+1} \in H(\omega^{n+1}) \right) \quad (80)$$

donde se ha suprimido el índice μ por simplificación.

El cálculo de la solución del sistema de ecuaciones no lineales (79)-(80) puede efectuarse con un algoritmo de dualidad introducido por Bermúdez-Moreno⁷, que consiste en definir multiplicadores de Lagrange q^{n+1} de la forma:

$$q^{n+1} \in H(\omega^{n+1}) - \delta \omega^{n+1} \quad \text{en } \Omega \quad (81)$$

donde δ es un parámetro real positivo.

Las ecuaciones (79)-(81) pueden ahora reescribirse de manera equivalente

$$\int_\Omega h^3 \nabla \omega^{n+1} \nabla z + \frac{\delta}{k} \int_\Omega h \omega^{n+1} z = \frac{1}{k} \int_\Omega h \gamma^n z o X^k - \frac{1}{k} \int_\Omega h (\gamma^n - \gamma^n o X^k) z - \frac{1}{k} \int_\Omega h q^{n+1} z \quad (82)$$

$$q^{n+1} = H_\lambda^\delta(\omega^{n+1} + \lambda q^{n+1}) \quad (83)$$

siendo H_λ^δ la aproximación Yosida de $(H - \delta I)$, con I el operador identidad (ver [7] para los detalles).

Este algoritmo proporciona el esquema siguiente:

A cada paso de n (algoritmo de características),

- Se inicializa el multiplicador q^n
- Se calcula la solución del problema lineal (82)
- Se actualiza el multiplicador mediante (83)
- Se efectúa un test de convergencia.

Observación 2: En la práctica solamente se realiza una iteración de este algoritmo. Esto es, se actualiza el multiplicador q^n una sola vez para cada iteración de (79).

Observación 3: La convergencia fuerte de los multiplicadores de Lagrange en $L^2(\Omega)$ y de las soluciones de (82) en $H^1(\Omega)$ está garantizada en [7]. La velocidad de cálculo es muy grande debido a que las matrices del sistema (82) no dependen de las iteraciones por lo que se calculan y factorizan una sola vez. Similarmente $X^k(x, y)$ no depende de n y se computa una vez al principio del proceso.

Observación 4: Las condiciones de periodicidad se tienen en cuenta considerando grados de libertad en una sola de las dos fronteras laterales.

EJEMPLOS NUMERICOS

El método numérico descrito previamente se ha aplicado a la resolución del problema (P3) utilizando la geometría rectangular $\Omega = (0, 2\pi) \times (0., 1.6)$ con una discretización regular en 800 triángulos y 459 grados de libertad. Los parámetros de discretización en x e y son 0.1256 cm. y 0.2 cm. respectivamente, y las condiciones de contorno

$$p(x, 0) = 0 \quad , \quad p(x, 1.6) = 0.04 \quad Dy/cm^2. \quad (84)$$

En este caso, se ha considerado $L = 1.6$ cm. para destacar las zonas de cavitación.

Las Figuras 4 y 5 muestran las presiones y líneas isobáricas para coeficientes de excentricidad $\beta = 0.25$ y 0.75 , respectivamente, y parámetro físico de viscosidad $\alpha = 0.02 (Dy/cm^2)^{-1}$.

En la Tabla I se representa el número de iteraciones que realiza el algoritmo para $\beta = 0.75$ y diferentes valores de δ considerando $\lambda = 0.5/\delta$ y un test de parada en el algoritmo (82)-(83) del tipo $\max |\omega^{n+1}(b_i) - \omega^n(b_i)| < 5 \cdot 10^{-4}$, con b_i nodo de la malla.

La evolución de $\|\omega^{n+1} - \omega^n\|$ a través de las iteraciones se puede comprobar en la Figura 6 con los datos $\beta = 0.75$, $\delta = 1$. y $\lambda = 0.5$, donde

$$\|\omega\| = \sum_i (\omega(b_i)^2)^{1/2} \quad (85)$$

Las Figuras 7 y 8 muestran las líneas isobáricas y la frontera libre ($p = 0$) para coeficientes de excentricidad $\beta = 0.5$ y 0.9 , respectivamente, utilizando el modelo de Reynolds descrito anteriormente y un modelo de Elrod-Adams estudiando en Bermúdez-Durany⁵ al que se le ha aplicado el mismo método numérico. Este modelo de tipo Elrod-Adams se distingue por utilizar la condición de frontera libre

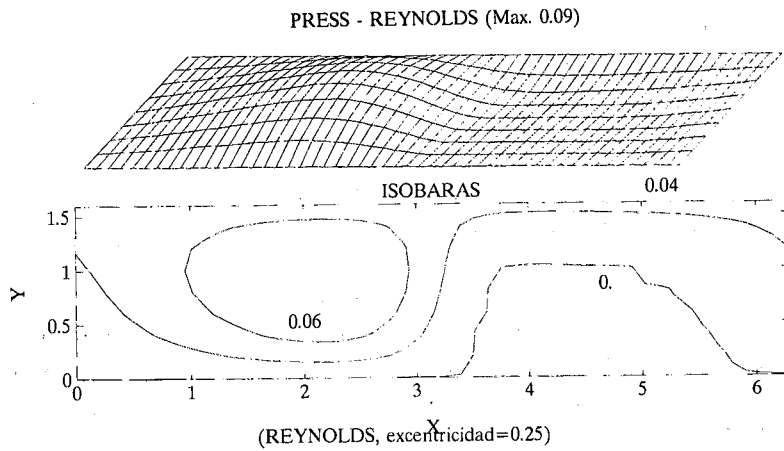


Figura 4. Presiones. $\beta = 0.25$.

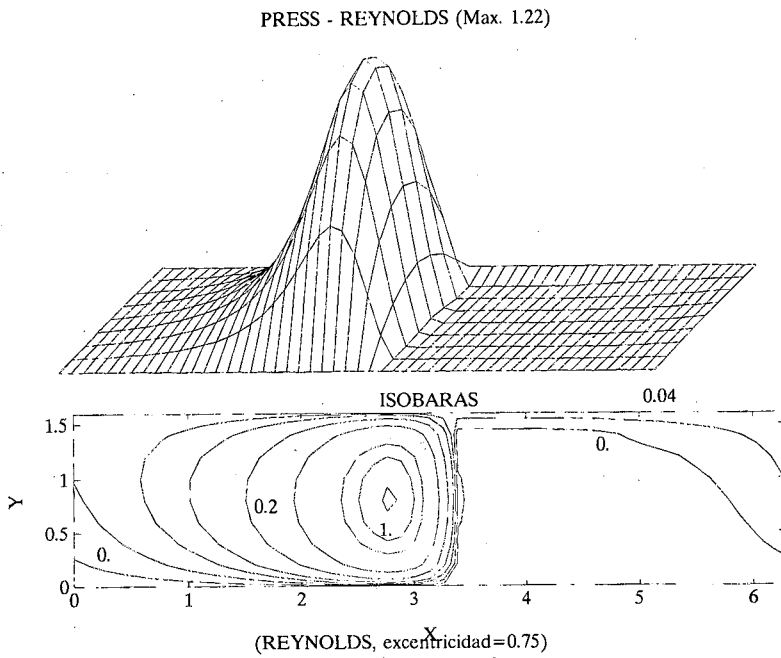


Figura 5. Presiones. $\beta = 0.75$.

δ	0.25	0.5	1.	1.5	2.	4.
Iteraciones	50	40	44	55	69	> 100

Tabla I. Número de iteraciones ($\beta = 0.75$).

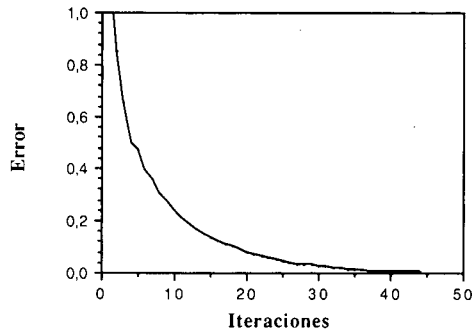


Figura 6. Evolución de $\|\omega^{n+1} - \omega^n\|$ ($\beta = 0.75$).

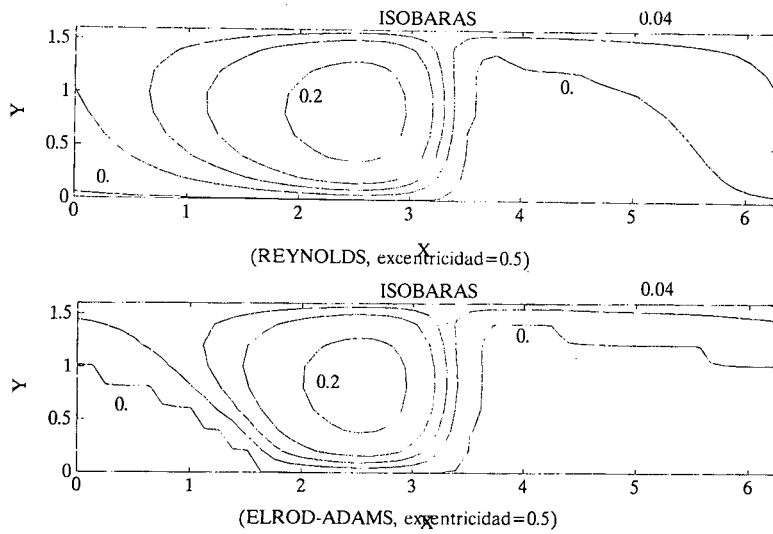


Figura 7. Presiones. $\beta = 0.5$.

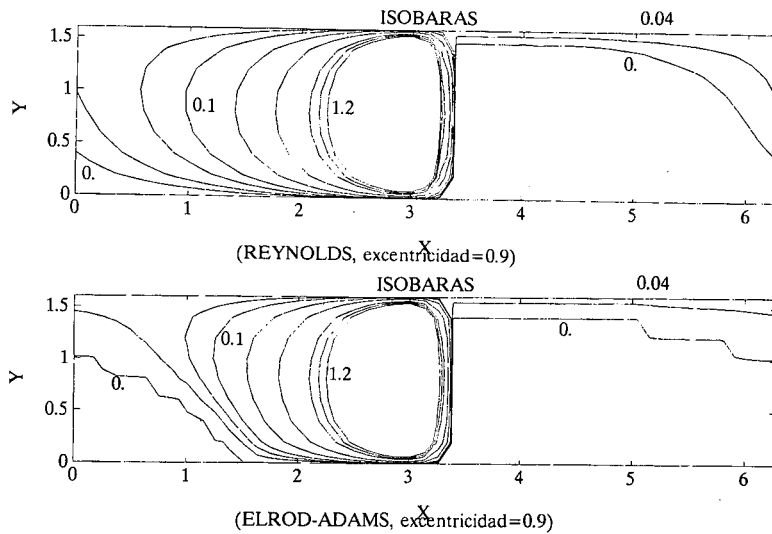


Figura 8. Presiones. $\beta = 0.9$.

$$h^3 e^{-\alpha p} \frac{\partial p}{\partial \nu} = 6 \eta_0 (1 - \gamma) h \vec{u} \cdot \vec{\nu} \quad \text{en } \Sigma \tag{86}$$

en lugar de (31), lo que origina una variación en la ecuación (38) de la forma siguiente

$$\int_{\Omega} h^3 \nabla \omega_{\alpha} \nabla z = \int_{\Omega} h \gamma \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \forall z \in V_0 \tag{87}$$

Es fácilmente observable que la solución de (38) es una sobresolución de (87).

Finalmente, la Figura 9 muestra las líneas isobáricas en el caso $\beta = 0.5$ con una presión de alimentación $p_a = 1. Dy/cm^2$ y para coeficientes de viscosidad $\alpha = 0.01$ y $1.(Dy/cm^2)^{-1}$.

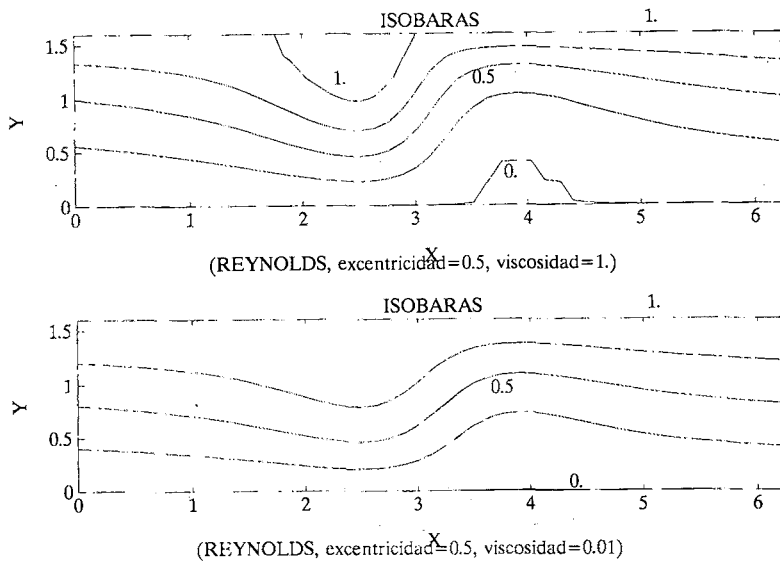


Figura 9. Presiones para $\alpha = 0.01$ y $\alpha = 1$.

En todos los casos mencionados, el parámetro k del método de las características se ha tomado igual a 0.125.

Estos ejemplos pueden corresponder a la lubricación con aceite de un par eje-cojinete con los siguientes datos: $R_c = 4cm.$; $R_e = 3cm.$; $L = 1.6cm.$; $\eta_0 = 2.10^{-2} Dy s/cm^2$; $p = 1.g/cm^3$; $u = 8.33cm/s$.

CONCLUSION

El tratamiento clásico de problemas de lubricación con cavitación utilizando un modelo de Reynolds formulado como una inecuación variacional tiene la ventaja, desde el punto de vista teórico, de garantizar la existencia y unicidad de solución del problema. Sin embargo, cuando se aplica dicho modelo a la geometría de un par eje-cojinete, tiene el inconveniente de impedir la aparición de zonas de cavitación en la parte del dominio $0 < x < \pi$, y este hecho no tiene una motivación física fundamentada.

El modelo que se presenta en este trabajo tiene garantizada la existencia de solución pero no así la unicidad, cuya demostración no siempre está asegurada en este tipo de problemas. Numéricamente, el modelo es adecuado y los ejemplos precedentes ponen de manifiesto la aparición de zonas cavitadas en la parte convergente $0 < x < \pi$ y, además, que dichas zonas son mucho menores que las producidas cuando se utiliza un modelo de Elrod-Adams.

Hay que señalar también la utilidad del cambio de variable a presión reducida en los problemas de fluidos piezoviscosos, lo que permite, en definitiva, trabajar con modelos isoviscosos. Por ello, es importante cuantificar, en función de los datos, la magnitud de los coeficientes de piezoviscosidad que dan validez a dicho cambio de variable. En este sentido, los resultados de acotación de soluciones obtenidos por Alvarez¹ para problemas isoviscosos son esenciales para determinar los coeficientes de piezoviscosidad que permiten esta transformación.

Finalmente, es apreciable el buen comportamiento del método de las características combinado con elementos finitos en la resolución numérica de estos problemas de frontera libre como ya se había comprobado anteriormente en problemas de convección dominante.

NOTACION

- U_i velocidad de la superficie i en la dirección del eje X
- V_i velocidad de la superficie i en la dirección del eje Y
- W_i velocidad de la superficie i en la dirección del eje Z
- x coordenada angular en el par eje-cojinete
- y coordenada longitudinal en el par eje-cojinete
- H_i función que define la superficie i
- h_i función que define la superficie media i
- ε_i desviación de la superficie i respecto de la superficie media i
- ρ densidad del fluido
- η viscosidad cinemática del fluido
- p presión del fluido
- t tiempo
- H espesor de la capa fluida
- h espesor medio de la capa fluida
- η_0 viscosidad a presión atmosférica
- α coeficiente de piezoviscosidad
- u campo de velocidades del fluido bidimensional
- u componente de la velocidad en dirección x en el eje-cojinete
- R_e radio de la sección del eje
- R_c radio de la sección del cojinete
- L mitad de la longitud del par eje-cojinete
- p_a presión de alimentación
- C diferencia entre los radios de cojinete y eje
- β excentricidad del par eje-cojinete
- ω_α presión reducida

REFERENCIAS

1. J. Alvarez, "Problemas de frontera libre en teoría de lubricación", *Tesis*, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid, España, (1986).
2. G. Bayada, "Aspects mathématiques de la modélisation des phénomènes de cavitation et de rugosité en lubrification hydrodynamique", *Tesis*, Univ. Claude-Bernard Lyon, Francia, (1984).
3. G. Bayada y M. Chambat, "Sur quelques modélisations de la zone de cavitation en lubrification hydrodynamique", *J. Theor. and Appl. Mech.*, Vol. 5, no. 5, pp. 703-729, (1986).
4. A. Bermudez y J. Durany, "La méthode des caractéristiques pour les problèmes de convection-diffusion stationnaires", *Math. Model. Numer. Anal.*, Vol. 21, pp. 7-26, (1987).
5. A. Bermudez y J. Durany, "Numerical solution of cavitation problems in lubrication", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 75, pp. 457-466, (1989).
6. A. Bermudez, J. Durany, M. Posse y C. Vazquez, "An upwind method for solving transport-diffusion-reaction systems", *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol. 28, no. 9, pp. 2021-2039, (1989).
7. A. Bermúdez y C. Moreno, "Duality methods for solving variational inequalities", *Comp. Math. with Appl.*, Vol. 7, pp. 43-58, (1981).
8. D. Berthe, "Les effets hydrodynamiques sur la fatigue des surfaces dans les contacts hertziens", *Tesis*, Univ. Claude Bernard Lyon, Francia, (1974).
9. A. Cameron, "Basic lubrication theory", *Hellis Horwood Series in Eng. Science*, (1983).
10. J.L. Lions, "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineaires", Dunod, Paris, (1969).
11. O. Pironneau, "On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations", *Numer. Math.*, Vol. 38, pp. 309-332, (1982).
12. C. Vazquez, "Estudio matemático de fenómenos de cavitación en lubricación elastohidrodinámica", *Tesis*, Universidad de Santiago de Compostela, (1992).