Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 7, 1, 67–79(1991)

UN METODO DE INTEGRACION DIRECTA PARA LA RESOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES HIPERBOLICAS DE 2º ORDEN

J.M. FRANCO

Departamento de Matemática Aplicada,
E.T.S.I.I. de Zaragoza,
Universidad de Zaragoza,
Avda. María Zambrano 50,
50015 Zaragoza.

RESUMEN

En este trabajo se obtiene un método de integración directa de dos pasos y cuarto orden para la integración numérica de ecuaciones de evolución semidiscretas de segundo orden. El método se construye basándose en una clase de métodos multipaso para problemas con solución oscilante, suponiendo que se conoce la frecuencia, y se obtiene un método adaptado de cuarto orden y un aproximante racional al $\cos\nu$ para $\nu \geq 0$. En conclusión, se obtiene un método computacionalmente eficiente para la integración numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden que es incondicionalmente estable y P-estable para la elección de un parámetro $\beta \geq 1/4 + \sqrt{1/24}$.

Finalmente, se presentan resultados numéricos para una pareja de problemas test de la forma $MU'' + KU = F(t)$ que surgen de efectuar semidiscretizaciones con el método de elementos finitos a ecuaciones hiperbólicas de segundo orden con condiciones iniciales y de contorno.

SUMMARY

A fourth-order two-step direct integration method for second order semidiscrete evolution equations is derived. The method is based on a class of adaptive multistep methods for problems with oscillatory solutions whose frecuency is known, and is made by using a fourth-order adaptive method and a rational approxamation to $\cos\nu$ for $\nu \geq 0$. Thus, we obtain a computationally efficient method for systems of second order differential equations that is unconditionally stable and P-stable choising a parameter $\beta \geq 1/4 + \sqrt{1/24}$.

Finally, numerical results are shown in two test problems of the form $MU'' + KU = F(t)$ arising in finite element semidiscretization of second order hyperlbolic equations with initial and boundary conditions.

Recibido: Octubre 1989

 ISSN 0213–1315

INTRODUCCION

En este trabajo se presenta un nuevo método para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales de segundo orden que surgen de aplicar métodos de discretización a problemas de valor inicial y de contorno para ecuaciones hiperbólicas de segundo orden de la forma

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0(x)u = f(x,t) \quad \text{en} \quad \Omega \times [0,T], \\ &u(x,t) = g(t) \quad \text{en} \quad \partial\Omega \times [0,T], \\ &u(x,0) = u_0(x) \quad \text{en} \quad \Omega, \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_0'(x) \quad \text{en } \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, los coeficientes son funciones suficientemente diferenciables en $\bar{\Omega}$ y tales que $a_0(x) \geq 0$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ y además se verifica una condición de elipticidad unifome

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

para alguna constante $\alpha > 0$, para todo $x \in \bar{\Omega}$ y todo $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

Habitualmente la resolución numérica de problemas hiperbólicos del tipo (1) se realiza efectuando una semidiscretización en las variables espaciales, utilizando el método de elementos finitos, lo que da lugar a un problema de valor inicial de segundo orden de la forma

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}U''(t) + \mathbf{K}U(t) = F(t), \quad t \in [t_0, T] \\ &U(t_0) = U_0, \quad U'(t_0) = U_0' \end{aligned} \tag{2}$$

donde M y K son conocidas como las matrices de masa y rigidez respectivamente, y $F(t)$ representa el vector de cargas externas. Además, en la práctica, de acuerdo con las propiedades del problema y la tipología del método de discretización, las matrices M y K son simétricas y definidas positivas (es el caso de problemas de propagación de ondas). En estas condiciones, la solución $U(t)$ del problema (2) es estable (Gohberg et al.[5]).

La resolución numérica del problema (2) se realiza mediante métodos de integración directa (Bathe y Wilson[1]), es decir, sin necesidaad de transformar en un sistema de primer orden. Los métodos de integración directa más usuales en la práctica son los Newmark, Wilson, Houbolt y diferencias centrales. Todos estos métodos son de tipo multipaso y tienen orden dos. Cuando se aplican métodos de tipo multipaso al problema (2), éste se transforma en un sistema de ecuaciones en diferencias de la forma

$$P(A)U_{n+1} = \phi(t_{n+1-i}, U_{n-i}), \qquad i = 0, 1, \cdots, k \tag{3}$$

donde $P(x)$ es un polinomio y A es una matriz hueca que viene expresada en función de las matrices de masa y rigidez del sistema (2). Como en general, el producto de matrices huecas da lugar a matrices que no tienen esta propiedad, no es aconsejable el cálculo de la matriz $P(A)$ ya que el coste computacional y de almacenamiento sería excesivo. En la práctica, se descompone el polinomio $P(A)$ en factores simples de la forma $(A - \alpha I)$, y se resuelve el sistema lineal por etapas, aplicando a cada factor $(A - \alpha I)$ la descomposición LU.

En la siguiente sección se realiza una introducción a los métodos adaptados, las propiedades de orden de consistencia, convergencia y la propiedad de estabilidad incondicional. En otra sección, se presenta un método de integración directa para la resolución numérica del sistema (2) con la particularidad de que es incondicionalmente estable, P-estable y de orden 4, lo que asegura que la solución numérica U_n tendrá un comportamiento asintótico similar al de la solución analítica $U(t)$. Además este algoritmo minimiza el costo computacional y de almacenamiento en el sentido de que en cada paso de integración sólo se necesita resolver un sistema lineal con matriz hueca.

Finalmente, se realizan comparaciones numéricas para una familia de problemas test cuya solución tiene un comportamiento periódico o cuasiperiódico, quedando de manifiesto el mejor comportamiento del método propuesto frente a los métodos clásicos de Newmark, Wilson y Houbolt.

METODOS ADAPTADOS Y ESTABILIDAD INCONDICIONAL

En mecánica aparecen frecuentemente problemas en los que es posible disponer de algún tipo de información a priori (p.e. las frecuencias principales del movimiento), que será aprovechada para su resolución mediante la utilización de métodos adaptados. En un primer paso se considera el siguiente modelo unidimensional

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f(t,y), \quad t \in (0,T], \quad \omega > 0 \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \end{cases} \tag{4}$$

donde ω es la frecuencia principal que se supone conocida o que puede ser estimada con bastante exactitud. En estas condiciones la solución de (4) será de tipo oscilante. Por lo tanto, autores como Gautschi[4], Bettis[2], Neta and Ford[9] y Jain et al.[7] entre otros, proponen la idea de adaptar métodos numéricos para la integración de fenómenos oscilantes de manera que además de polinomios algebraicos integren exactamente funciones trigonométricas. En Franco[3], se proponen métodos adaptados de tipo multipaso considerando todos los coeficientes dependientes de un paramétro $\nu = \omega h$ (h = paso de integración), quedando el método expresado en la forma

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j(\nu) y_{n+j} = h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j(\nu) f(t_{n+j}, y_{n+j}), \quad \nu = \omega h, \tag{5}$$

donde los coeficientes $\alpha_j(\nu)$ y $\beta_j(\nu)$ son funciones acotadas y continuas para todo $\nu \in [0, A]$, con A dado. Estos métodos vienen caracterizados mediante operadores lineales L_h, definidos por

$$L_h[y(t)] = \sum_{j=0}^{k}[\alpha_j(\nu)y(t+jh) - h^2\beta_j(\nu)\{y''(t+jh)+\omega^2 y(t+jh)\}] \tag{6}$$

de forma que anulen a los espacios lineales $\Pi_p(\omega)$ engendrados por las funciones $\phi_i(t,\omega)$, $i = 0, 1, \cdots, p$, donde

$$\phi_0(t,\omega) = \begin{cases} \cos\omega t, \omega \neq 0 \\ 1 \qquad ,\omega = 0 \end{cases}, \qquad \phi_{i+1}(t,\omega) = \int_0^t \phi_i(t,\omega)dt, \quad i \geq 0$$

Se observa inmediatamente que el espacio lineal $\Pi_p(\omega)$ engendrado por las funciones $\phi_i(t,\omega)$ puede expresarse en la forma

$$\Pi_p(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} Span\{1, t, t^2, \cdots t^{p-2}, \cos\omega t, \mathrm{sen}\omega t\}, & \text{si} \quad \omega \neq 0 \\ Span\{1, t, t^2, \cdots t^{p-2}, t^{p-1}, t^p\} & , \text{si} \quad \omega = 0 \end{array} \right\}$$

Por lo tanto, en el caso $\omega = 0$, los métodos adaptados (5) coinciden con los clásicos métodos de coeficientes constantes.

La conexión existente entre los espacios lineales $\Pi_p(w)$, los operadores lineales L_h y el orden del método queda reflejada en los siguientes resultados cuya demostración puede verse en Franco[3].

PROPOSICION 1: El operador lineal L_h asociado al método adaptado (5) anula al espacio $\Pi_p(\omega)$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} D_0 &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(\nu)\phi_0(j,\nu) = 0 \\ D_1 &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(\nu)\phi_1(j,\nu) = 0 \\ D_i &= \sum_{j=0}^{k}[\{\alpha_j(\nu) - \nu^2\beta_j(\nu)\}\phi_i(j,\nu) - \beta_j(\nu)\phi_{i-2}(j,\nu)] = 0, \quad i = 2, 3, \cdots, p \end{aligned} \tag{7}$$

PROPOSICION 2:

i) Todo método adaptado del tipo (5) que anula al espacio lineal $\Pi_p(\omega)$ tiene por lo menos orden $p - 2$.

ii) En las condciones de i) el método adaptado es de orden p, para todo ω real.

iii) Las condiciones $D_i = 0, i = 0, 1, \cdots, p+1$ son suficientes para alcanzar orden p, pero no necesarias, ya que bastaría con exigir

$$D_0 = 0(h^{p+2}), \quad D_1 = 0(h^{p+1}), \cdots, D_{p+1} = 0(h)$$

Estos resultados proporcionan un camino para la obtención de métodos adaptados mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales dado por las condiciones

(7). Además, estas condiciones son suficientes pero no necesarias y, por lo tanto, de acuerdo con la proposición 2, para alcanzar orden p bastará con que los coeficientes $\alpha_j(\nu)$ y $\beta_j(\nu)$ verifiquen las condiciones (7) con una aproximación del orden de $p+1$, es decir, encontrar $a_j(\nu)$ y $b_j(\nu)$ tal que

$$\alpha_j(\nu) = a_j(\nu) + 0(\nu^{p+2}),$$
$$\beta_j(\nu) = b_j(\nu) + 0(\nu^{p+2}),$$

siendo $\alpha_j(\nu)$ y $\beta_j(\nu)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ solución de (7).

En Franco[3] se estudia la convergencia de los métodos adaptados (5) y se comprueba que una condición suficiente para la convergencia de éstos es que sean consistentes de orden 1 y que el polinomio característico $\rho = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(\nu)\xi^j$ verifique la siguiente condición sobre sus raices.

"Si $\xi(\nu)$ es una raiz de $\rho(\xi,\nu)$, entonces existe una constante $C \geq 0$ tal que $|\xi(\nu)| \leq \exp(C\nu)$. Además, si $\xi(\nu)$ es una raiz de $\rho(\xi,\nu)$ con multiplicidad mayor que dos, entonces $|\xi(\nu)| < 1$".

DEFINICION 1: Un método de integración numérica se dice *incondicionalmente estable* (I-estable) si cuando se aplica a la ecuación test $y'' + \omega^2 y = 0$, las raices $\xi_j(\nu)$ del polinomio característico asociado a la ecuación en diferencias resultante verifican

$$|\xi_j(\nu)| \leq 1 \quad \text{para todo} \quad \nu > 0$$

Análogamente, se dice P-estable cuando dichas raices verifican

$$|\xi_j(\nu)| = 1 \quad \text{para todo} \quad \nu > 0$$

En el caso de que las raices verifiquen $|\xi_j(\nu)| \leq 1$ o $|\xi_j(\nu)| = 1$, $0 < \nu^2 \leq \eta_0$, con η_0 dado entonces se dice que el método es *condicionalmente estable* o que tiene *intervalo de periodicidad* $(0, \eta_0)$, respectivamente.

Si se imponen las condiciones (7) hasta orden 4, se obtiene el siguiente método adaptado de dos pasos

$$\begin{gathered} y_{n+1} - 2(\cos\nu)y_n + y_{n-1} = h^2(\beta_0 f_{n+1} + \beta_1 f_n + \beta_0 f_{n-1}) \\ \beta_0 = \frac{\nu^2 - 2(1-\cos\nu)}{\nu^4}, \quad \beta_1 = \frac{-2\nu^2 + (4+2\nu^2)(1-\cos\nu)}{\nu^4} \end{gathered} \tag{8}$$

Es inmediato que el método (8) cumple las condiciones para asegurar la convergencia y además, si se aplica a la ecuación test $y''+\omega^2 y = 0$, la solución numérica viene dada por la ecuación en diferencias

$$y_{n+1} - 2(\cos\nu)y_n + y_{n-1} = 0 \tag{9}$$

Esta ecuación en diferencias tiene como polinomio característico asociado

$$P(\xi,\nu) = \xi^2 - 2(\cos\nu)\xi + 1, \tag{10}$$

de donde es inmediato que las raices son

$$\xi_1(\nu) = e^{i\nu}, \quad \xi_2(\nu) = e^{-i\nu}, \tag{11}$$

verificando $|\xi_j(\nu)| = 1$ para todo $\nu > 0$, $j = 1, 2$. Entonces (8) es P-estable y, por lo tanto, I-estable.

Sea $R(\nu)$ una función racional de variable real tal que $R(\nu) = \cos\nu + 0(\nu^{p+2})$, con $p \geq 4$. Sustituimos en (8) $\cos\nu$ por $R(\nu)$ y el método adaptado resultante seguirá siendo de orden 4 y tendrá por polinomio característico

$$Q(\xi, \nu) = \xi^2 - 2R(\nu)\xi + 1, \tag{12}$$

Si además $R(\nu)$ verifica $|R(\nu)| \leq 1$ para todo $\nu > 0$, entonces, las raices de (12) son

$$r_1(\nu) = R(\nu) + i\sqrt{1 - R^2(\nu)}, \quad r_2(\nu) = \bar{r}_1(\nu), \tag{13}$$

verificando $|r_j(\nu)| = 1$, $j = 1, 2$. Entonces, el nuevo método resultante será P-estable e I-estable de orden 4, con un retardo en fase de orden p.

OBTENCION DEL METODO

En la anterior sección se establecieron las bases para la obtención de métodos I-estables y P-estables tomando como soporte el esquema lineal (8), sin más que considerar un aproximante racional $R(\nu)$ al $\cos\nu$ verificando

$$R(\nu) = \cos\nu + 0(\nu^{p+2}), \quad p \geq 0, \tag{14}$$

$$|R(\nu)| \leq 1 \quad \text{para todo} \quad \nu > 0. \tag{15}$$

Si se considera el aproximante racional

$$R(\nu) = \frac{1 + (\beta - 1/2)\nu^2}{1 + \beta\nu^2}, \qquad \beta \in R,$$

éste verifica las condiciones (14) y (15) para todo $\beta \geq 1/4$, con $p \geq 2$. Sustituyendo en (8) el $\cos\nu$, los coeficientes serán

$$\beta_0(\nu) = \beta, \quad \beta_1(\nu) = \frac{1}{1 + \beta\nu^2} - 2\beta \tag{16}$$

Si aplicamos el método resultante al problema (2) en el caso particular en que $M = I$ (matriz identidad) y se considera $R(\nu)$ como un aproximante matricial con $\nu = hK^{1/2}$, se tiene

$$\begin{aligned}[I + \beta h^2 K]U_{n+1} &= 2[I + (\beta - 1/2)h^2 K]U_n - [I + \beta h^2 K]U_{n-1} + \\ &+ h^2[\beta F_{n+1} + (1 - \beta)F_n + \beta F_{n-1}] + \beta^2 h^4 K \nabla^2 F_{n+1}\end{aligned} \tag{17}$$

con $\nabla^2 F_{n+1} = F_{n+1} - 2F_n + F_{n-1}$, que es, en general, un método de segundo orden de aproximación, I-estable y P-estable para los valores del parámetro $\beta \geq 1/4$. En el caso en que el valor del parámetro $\beta = 1/2$, entonces $p = 4$ y el métodos será condicionalmente estable de orden 4, coincidiendo con el clásico método de Störmer-Numerov[8], salvo por el término $\beta^2 h^4 K \nabla^2 F_{n+1}$ que es de orden 6.

En el caso en que la matriz de masas $M \neq I$, el esquema (17) adoptará la forma

$$\begin{aligned}[M + \beta h^2 K]U_{n+1} &= 2[M + (\beta - 1/2)h^2 K]U_n - [M + \beta h^2 K]U_{n-1} + \\ &+ h^2[\beta F_{n+1} + (1 - \beta)F_n + \beta F_{n-1}] + \beta^2 h^4 K M^{-1} \nabla^2 F_{n+1}\end{aligned} \tag{18}$$

Para obtener un método I-estable y P-estable de orden 4 se buscará un aproximante racional de la forma

$$R(\nu) = \frac{a_0 + a_2\nu^2 + a_4\nu^2}{(1 + \beta\nu^2)^2}, \quad \beta \in R, \tag{19}$$

de manera que verifique (14) y (15) y además tenga un único polo real en la variable ν^2 para que sea óptimo desde el punto de vista computacional. Imponiendo (14) con $p \geq 4$, resulta

$$a_0 = 1, \quad a_2 = 2\beta - 1/2, \quad a_4 = \beta^2 - \beta + 1/24 \tag{20}$$

Si además se impone que (19) con los coeficientes (20) verifique (15), resulta

$$\frac{1}{2}\nu^2 + (\beta - \frac{1}{24})\nu^4 \geq 0, \qquad 2 + (4\beta - \frac{1}{2})\nu^2 + (2\beta^2 - \beta + \frac{1}{24})\nu^4 \geq 0, \tag{21}$$

de donde se comprueba fácilmente que (21) es equivalente a $\beta \geq 1/4 + \sqrt{1/24}$.

Siguiendo un proceso análogo al caso anterior, los coeficientes transformados del método (8)

$$\beta_0(\nu) = \frac{1/12 + \beta^2\nu^2}{(1 + \beta\nu^2)^2}, \quad \beta_1(\nu) = \frac{5/6 - (2\beta^2 - 2\beta + 1/12)\nu^2}{(1 + \beta\nu^2)^2} \tag{22}$$

En el caso en que $M = I$, se tiene el siguiente método I-estable y P-estable de orden 4 para $\beta \geq 1/4 + \sqrt{1/24}$, que se denominará método coseno(β)

$$\begin{aligned}Z_{n+1} - 2Z_n + Z_{n-1} &= h^2[\frac{1}{12}(F_{n+1} + 10F_n + F_{n-1}) - KU_n] + \\ &+ h^4 K[(\frac{1}{12} - 2\beta)(KU_n - F_n) + \beta^2(F_{n+1} + 2F_n + F_{n-1})] \\ Z_{n+1} &= (I + \beta h^2 K)^2 U_{n+1}\end{aligned} \tag{23}$$

Se hace notar que el esquema (23) solamente precisa una factorización de la matriz $(I + \beta h^2 K)$, lo que hace que sea óptimo desde el punto de vista computacional. Además, de acuerdo con la proposición 2 de Hairer[6], la constante del error del esquema (23), es decir, el coeficiente más significativo en $|\cos\nu - R(\nu)|$ con $R(\nu)$ dado por (19) y (20) es $C(\beta) = \frac{1}{720}(360\beta^2 - 60\beta + 1)$. En estas condiciones, se tiene que el mínimo valor de $|C(\beta)|$ para el método sea I-estable y P-estable viene dado por $\beta = 1/4 + \sqrt{1/24}$.

Desde otra perspectiva, el esquema (23) es de dos pasos y, por lo tanto, se necesita una aproximación inicial U_1 para $U(t_1)$, que ha de llevarse a cabo mediante un método de un paso. Para ello, se propone un simple desarrollo de Taylor de la solución $U(t_0+h)$, reemplazando las derivadas de la función $F(t)$ por ciertas diferencias finitas, tal que tenga orden 4. Esta aproximación viene dada por

$$\begin{aligned} U_1 = [I - \frac{h^2}{2}K + \frac{h^4}{24}K^2]U_0 + [I - \frac{h^2}{6}K]U_0' + \\ + h^2[7F_0 + 6F_1 - F_2] - \frac{h^4}{24}KF_0 \end{aligned} \tag{24}$$

Análogamente al caso anterior, si la matriz de masas $M \neq I$, el esquema (23) vendrá dado por el siguiente algoritmo

METODO COSENO(β)

INICIACION

1. Calcular la matriz

$$A = M + \beta h^2 K$$

2. Calcular $Z_i, \quad i = 0,1$

$$MW_i = AU_i \quad , \quad i = 0,1$$
$$Z_i = AW_i \quad , \quad i = 0,1$$

EN CADA PASO

3. Calcular R_{n+1}

$$MR_{n+1} = \left(\frac{1}{12} - 2\beta\right)(KU_n - F_n) + \beta^2(F_{n+1} + 2F_n + F_{n-1})$$

4. Calcular Z_{n+1} :

$$Z_{n+1} = 2Z_n - Z_{n-1} + h^2\left[\frac{1}{12}(F_{n+1} + 10F_n + F_{n-1}) - KU_n\right] + h^4KR_{n+1}$$

5. Calcular U_{n+1}

$$AW_{n+1} = Z_{n+1}$$
$$AU_{n+1} = MW_{n+1}$$

$$n = 2, 3, \cdots N = T/h$$

COMPARACIONES NUMERICAS

Para ilustrar el buen comportamiento numérico del método que se ha desarrollado en la sección 3, se ha implementado para una pareja de problemas test correspondientes a problemas de valor inicial para sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden del tipo (2) que pueden surgir de efectuar una semidiscretización en las variables espaciales a ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas de segundo orden.

En las comparaciones numéricas realizadas se ha considerado el método coseno con $\beta = 1/4 + \sqrt{1/24}$ (I-estable y P-estable) y los clásicos métodos de Newmark (I-estable y P-estable), Wilson (I-estable con $\theta = 1.4$) y Houblt(I-estable). La implementación de los métodos se realizó en un Macintosh II siguiendo el esquema dado en la sección anterior para el método coseno y siguiendo los esquemas dados en el capítulo 8 de Bathe y Wilson[1] para los métodos de Newmark, Wilson y Houbolt. La iniciación de los métodos, cuando fue necesaria, se realizó utilizando la solución exacta de los problemas test.

Las Figuras presentadas en esta sección representan la propagación del error a lo largo del intervalo de integración. En el eje horizontal se representa la variable independiente denotada por t y en el eje vertical se representa el logaritmo decimal del máximo del error absoluto en norma obtenido hasta ese instante de la variable independiente, lo que indicará el número de cifras decimales exactas de aproximación conseguidas por cada método. Además, en las figuras aparecen los nombres de los métodos utilizados en cada comparación así como el paso de integración utilizado.

Problema 1: Se considera el problema test dado en el capítulo 8 de Bathe y Wilson[1], que corresponde con un sistema diferencial de segundo orden del tipo

$$\begin{aligned} &MU''(t) + KU(t) = F(t), \quad t \in [0, T] \\ &U(0) = 0, \quad U'(0) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

con

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

cuya solución exacta viene dada por

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 1 + \frac{2}{3}\cos\sqrt{5}t - \cos\sqrt{2}t \\ u_2(t) &= 3 - \frac{4}{3}\cos\sqrt{5}t - \cos\sqrt{2}t \end{aligned} \tag{26}$$

Claramente se trata de un problema del tipo (2) con matrices M y K simétricas y definidas positivas y su solución es de carácter periódico. En las Figuras 1 y 2 se presenta la propagación del error absoluto en norma euclidea de los métodos considerados para pasos de integración $h = 1/10$ y $h = 1/20$.

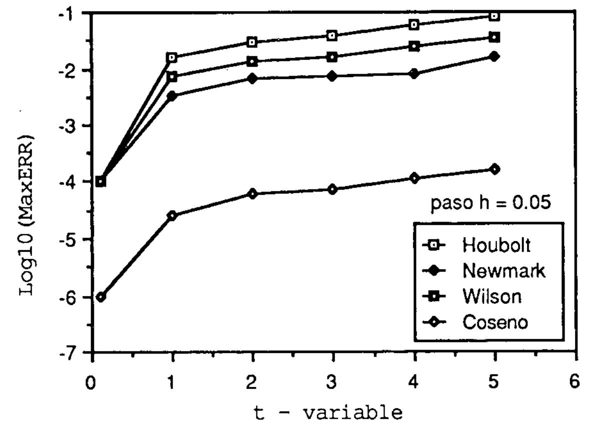

Figura 1.

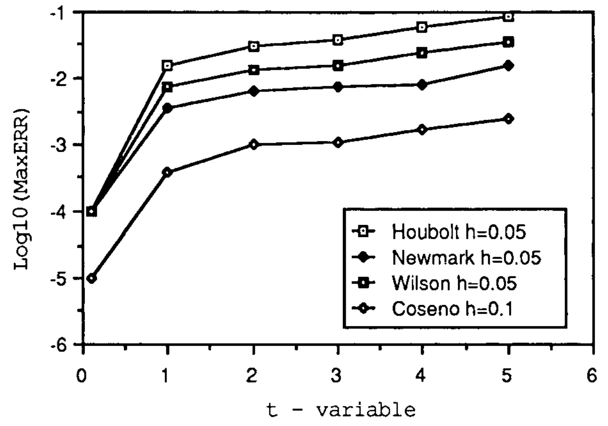

Figura 2.

Problema 2: Se considera la ecuación en derivadas parciales de segundo orden con condiciones iniciales y de contorno

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\
&U(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \\
&u(x,0) = \operatorname{sen}\pi x, \quad 0 < x < 1, \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \pi \operatorname{sen}\pi x, \quad 0 < x < 1,
\end{aligned} \tag{27}$$

Para la resolución del problema (27) se raliza una semidiscretización en la variable espacial x de la siguiente forma. Sea $x_j = jk$, donde $(N+1)k = 1$. Entonces, aplicando el método de líneas a la ecuación en derivadas parciales (27) resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t) = \frac{a(x_{j+1/2})[U(x_{j+1}) - U(x_j)] - a(x_{j-1/2})[U(x_j) - U(x_{j-1})]}{k^2} + f(x_j,t),$$
$$1 \leq j \leq N \tag{28}$$

Si denotamos por $U(t)$ el vector que tiene por componentes $u(x_j,t)$, $F(t)$ el vector que tiene por componentes $f(x_j,t)$ y $a_j = a(x_j)$, entonces el problema de valor inicial resultante será de la forma

$$\begin{aligned} &\frac{d^2U(t)}{dt} + KU(t) = F(t), \quad t \in [0,T] \\ &U(0) = U_0, \quad U'(0) = U_0' \end{aligned} \tag{29}$$

con $u_{0j} =$ sen πjk, $u'_{0j} = \pi$ sen πjk, $1 \leq j \leq N$ y la matriz de rigidez K será simétrica y tridiagonal con

$$k_{jj} = \frac{a(x_{j+1/2}) + a(x_{j-1/2})}{k^2}, \qquad k_{j,j+1} = \frac{a(x_{j+1/2})}{k^2}$$

En los experimentos numéricos realizados se eligió $a(x) = 1 + x^2$, resultando la matriz K de (29) definida positiva. Además, como el interés se centra en la resolución del PVI (29), se construye una solución exacta de (29) que tenga componentes

$$u_j(t) = (\cos \pi t + \operatorname{sen} \pi t)\operatorname{sen} \pi jk, \quad 1 \leq j \leq N,$$

que a su vez permitirá construir el término no homogéneo $F(t) = \{f_j(t)\}_{j=1}^N$ y será de utilidad para poder comparar la solución numérica. La solución exacta es claramente de carácter periodico y tiene el significado de una onda plana.

En las Figuras 3, 4 y 5 se presenta la propagación del error en la norma del máximo($ERR = \|U(t_n) - U_n\|_\infty$) para una discretización de 50 puntos ($N = 50$) con pasos de integración $h = 1/10$ y $h = 1/20$.

Se hace notar que aunque se ha utilizado una aproximación en diferencias finitas en la variable espacial para el problema modelo (27), también se podría haber utilizado una semidiscretización de tipo Galerkin, dando lugar a un sistema diferencial implícito (con matriz de masas distinta de la identidad).

De los resultados numéricos que aparecen en las Figura 1–5 se pueden hacer los siguientes comentarios. El método coseno($\beta = 1/4 + \sqrt{1/24}$) que es I-estable y P-estable de orden 4 proporciona resultados apreciablemente mejores que los clásicos métodos de Newmark, Wilson y Houbolt, incluso doblando el paso de integración. De entre los restantes métodos se aprecian mejores resultados para el método de Newmark que es P-estable, frente a los métodos de Wilson y Houbolt que son solamente I-estables. Claramente el método de Houbolt es el que peores resultados proporciona debido a que el valor de las raices de su polinomio de estabildad decrecen a cero (cuando $\nu = \omega h$ aumenta) mucho más rápidamente que en el método de Wilson (ver capítulo 9 Bathe y Wilson[1]).

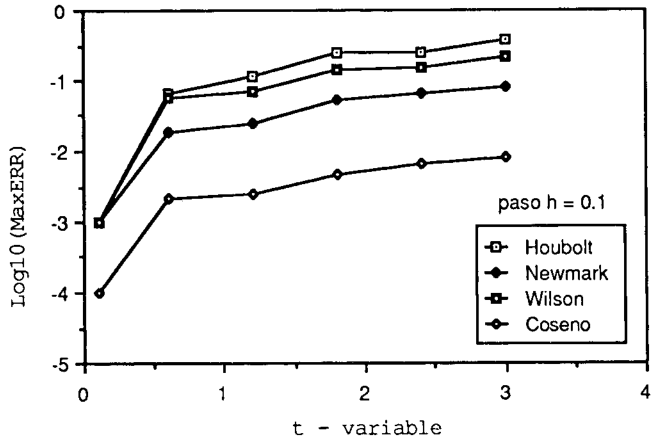

Figura 3.

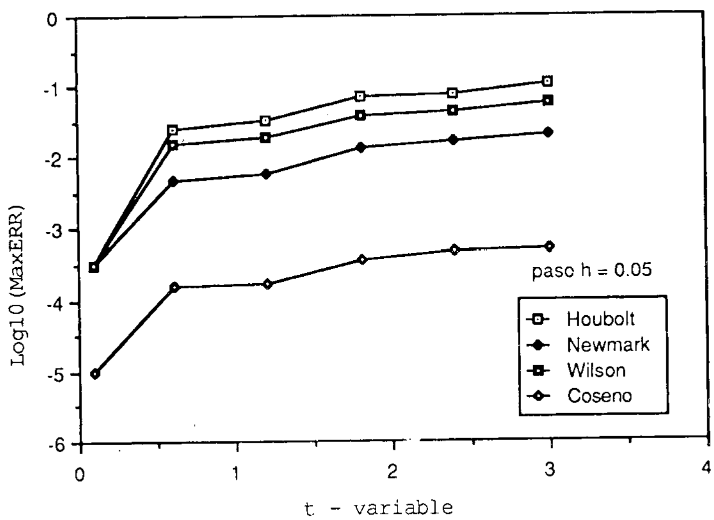

Figura 4.

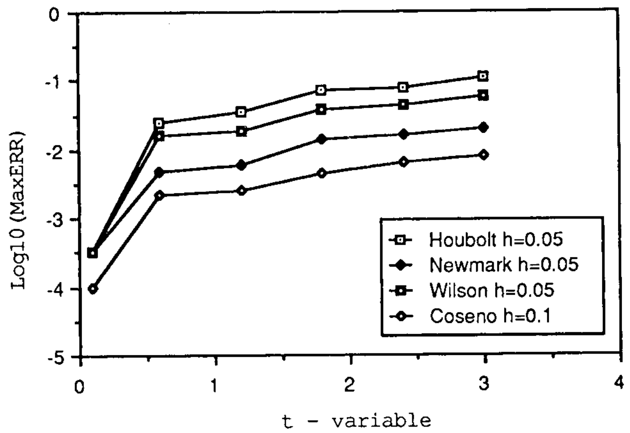

Figura 5.

En conclusión se puede afirmar que P-estabilidad es un requerimiento apropiado para los métodos que integran numéricamente problemas del tipo considerado cuya solución es de cáracter periódico. En el futuro se estudiará la construcción de métodos P-estables de órdenes superiores a 4.

REFERENCIAS

1. H.J. Bathe y E.L. Wilson, "*Numerical methods in finite element analysis*", Prentice-Hall, Englewodd Cliffs, NJ, (1976).
2. D.G. Bettis, "Stabilization of finite difference methods of numerical integration", *Celes; Mech.*, Vol. **2**, pp. 282–295, (1970).
3. J.M. Franco, J.M. Correas y F. Pétriz, "Métodos Adaptados de tipo Störmer Cowell de orden elevado", presentado para publicación en *Rev. Int. Met. Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería.*
4. W. Gautschi, "Numerical integration of O.D.E.'s based on trigonometric polynomials", *Numer Math.*, Vol. **3**, pp. 381–397, (1961).
5. Gohberg, Lancaster y Rodman, "*Matrix Polynomials*", Academic Press, New York, (1982).
6. E. Hairer, "Unconditionally stable methods for second order differential equations", *Numer. Math.*, Vol. **32**, pp. 373–379, (1979).
7. M.K. Jain et al., "P-stable methods for periodic I.V.P. of second order differential equations", *BIT*, Vol. **19**, pp. 347–355, (1979).
8. J.D. Lambert, "*Computational methods in O.D.E.'s*, Wiley, (1972).
9. B. Neta y C.H. Ford, "Families of Methods for ODE' s based on trigonometric polynomials", *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. **10**, pp. 33–38, (1984).