

RESOLUCION NUMERICA CONJUNTA DE LAS ECUACIONES DE LA ZONA POTENCIAL Y DE LAS CAPAS LIMITES EN FLUJOS CONFINADOS

C.D. PEREZ SEGARRA
A. OLIVA
y
M. COSTA

*Laboratori de Termodinàmica i Energètica,
Departament de Màquines i Motors Tèrmics,
E.T.S. d' Enginyers Industrials de Terrassa,
Universitat Politècnica de Catalunya.*

RESUMEN

En este trabajo se analiza un proceso numérico para la integración conjunta de las ecuaciones de la zona potencial y de las capas límites en flujos internos subsónicos compresibles.

La aplicación numérica del esquema desarrollado se ha efectuado para el caso del flujo a través de una canalización bidimensional; los resultados obtenidos ponen de manifiesto la influencia de la compresibilidad del flujo y de la transferencia de calor entre el fluido y las paredes del conducto. La adaptación del algoritmo a ciertas situaciones de flujo tridimensional ha permitido la contrastación de los resultados que se derivan de la resolución numérica con los obtenidos experimentalmente.

SUMMARY

In this study we have analysed a numerical process for the coupled integration of the potential zone and the boundary layer equations in internal compressible subsonic flows.

The numerical application of the scheme developed has been carried out for the case of the flow through a two-dimensional duct; the results obtained clearly show the influence of the compressibility of the flow and of the heat transfer between the fluid and the walls. The adaptation of the algorithm to certain situations of three-dimensional flow has enabled us to contrast the results that are derived numerically with those obtained experimentally.

INTRODUCCION. ECUACIONES CARACTERISTICAS

El objetivo de este trabajo es la determinación de la distribución de velocidades, presiones y temperaturas en flujos internos subsónicos compresibles en situaciones bidimensionales y en régimen de estabilización. Para ello se ha empleado el concepto de capa límite introducido por Prandtl, el cual se basa en dividir el dominio por el que circula el flujo en dos regiones: a) una región en la que el fluido puede tratarse como

Recibido: Febrero 1989

no viscoso siendo los efectos de la fricción y de la transferencia de calor despreciables, y b) una delgada región próxima a los contornos sólidos en donde los gradientes de velocidad y temperatura son tales que los efectos de la fricción y de la transferencia de calor deben ser considerados. Esta aproximación al comportamiento del flujo permite simplificar notablemente las ecuaciones de conservación; así, para la región no viscosa las ecuaciones gobernantes son las de Euler, mientras que para las zonas próximas a los contornos sólidos las ecuaciones gobernantes son las de la capa límite.

Para la región no viscosa o zona potencial se ha supuesto que el flujo es irrotacional (o potencial) e isoentrópico; las ecuaciones gobernantes escritas en términos de la función de corriente y en coordenadas cartesianas son¹:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (1)$$

$$\rho = \rho_o \left[1 - \frac{(k-1)M_o^2}{2} \left(\frac{v_x^2 + v_y^2}{v_o^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

siendo:

$$v_x = \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\rho_o}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La integración de dichas ecuaciones se efectúa sobre un dominio delimitado por contornos ficticios los cuales se hallan desplazados, respecto a los contornos sólidos, una distancia igual al espesor de desplazamiento de la capa límite en cada punto.

Para las zonas próximas a los contornos sólidos las ecuaciones gobernantes son las de la capa límite; para el caso de superficies planas y en el supuesto de fuerzas másicas despreciables dichas ecuaciones toman la forma²:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v})}{\partial y} = 0$$

$$\bar{\rho}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho} \overline{u'v'} \right) \quad (2)$$

$$\bar{\rho}\bar{u} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - c_p \bar{\rho} \overline{T'v'} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{u} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho} \overline{u'v'} \right) \right]$$

Estas ecuaciones pueden aplicarse al caso de superficies curvas siempre que el espesor de la capa límite sea mucho menor que el radio de curvatura de la superficie³; en estos casos "x" representa la coordenada curvilínea medida a lo largo de la superficie y en la dirección del flujo mientras que "y" representa la coordenada normal, en cada punto, a la superficie en cuestión.

El análisis de los términos que involucran cantidades de fluctuación turbulenta se ha basado en los conceptos de viscosidad turbulenta y conductividad térmica turbulenta introducidos por Boussinesq³:

$$\begin{aligned} -\overline{u'v'} &= \varepsilon_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ -\overline{T'v'} &= \varepsilon_h \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

empleando en su formulación las siguientes expresiones algebraicas de tipo semiempírico^{4,2}:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= (\varepsilon_m)_i = (by)^2 [1 - e^{-y/A}]^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| & 0 \leq y \leq y_c \\ \varepsilon_m &= (\varepsilon_m)_o = 0.0168 \left| \int_0^\infty (\bar{u}_e - \bar{u}) dy \right| \cdot \gamma & y_c \leq y \leq \delta \\ \varepsilon_h &= Pr_t \cdot \varepsilon_m \end{aligned} \quad (4)$$

siendo:

$$\begin{aligned} b &= 0.40 & A &= 26 \frac{\mu}{\rho N} \frac{1}{u_\tau} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_w}} \\ N &= [1 - 11.8 \left(\frac{\mu_w}{\mu_e} \right) \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^2 p^+]^{1/2} & p^+ &= \frac{\mu_e u_e}{\rho_e u_\tau^3} \frac{du_e}{dx} \\ \gamma &= \frac{1}{1 + 5.5(y/\delta)^6} & Pr_t &= 0.90 \end{aligned}$$

La resolución de las ecuaciones del flujo potencial y de las capas límites se realiza en el marco de un algoritmo global. Así, mientras que la resolución de la zona potencial proporciona la distribución de velocidades, presiones y temperaturas en la zona exterior de la capa límite, la resolución de las capas límites proporciona los espesores de desplazamiento que condicionan el dominio de la región del flujo potencial. Debido al carácter de interdependencia existente entre las dos regiones, el proceso de resolución conjunta es de naturaleza iterativa.

La puesta a punto de la metodología comentada se ha concretado al flujo a través de una canalización bidimensional (Figura 1). Para la zona de análisis el flujo no se halla aún completamente desarrollado siendo adecuado, por tanto, el modelo de tipo zonal ensayado.

FLUJO A TRAVES DE UNA CANALIZACION

La situación seleccionada para la puesta a punto y verificación del algoritmo empleado corresponde al flujo de un gas a través de una canalización bidimensional. La geometría es la representada en la Figura 1, en donde la superficie curva del contorno Cs ($He < x < He + Htb$) viene definida por el perfil polinómico $y(x) = Le - 4.93097 \cdot 10^{-3}(x - He)^2 + 2.10725 \cdot 10^{-5}(x - He)^3$ (longitudes en mm).

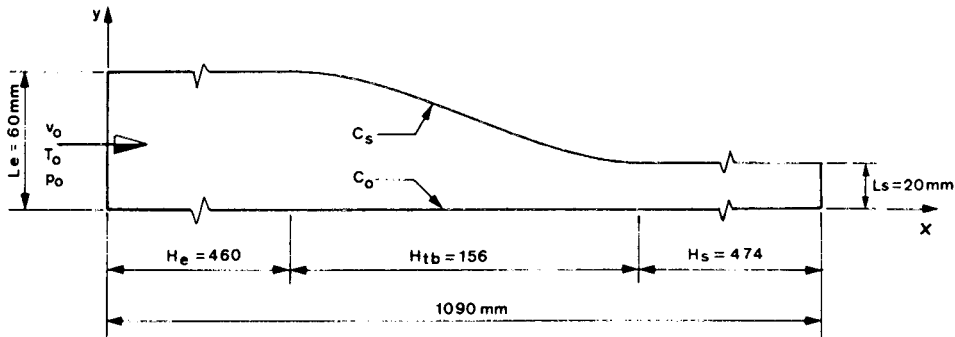


Figura 1. Geometría correspondiente a la canalización de ensayo.

Proceso de resolución conjunta zona potencial-capas límites

En la introducción se presentó las líneas generales del proceso de resolución conjunta de la zona potencial y de las capas límites. A continuación pasaremos a indicar, con más detalle, los pasos seguidos en el algoritmo iterativo de resolución así como los criterios utilizados para la integración numérica de las ecuaciones gobernantes de ambas zonas.

1) Al inicio del proceso iterativo se ha supuesto que en todo el dominio el flujo se comporta como potencial. La resolución numérica se realiza en base a la discretización del dominio mediante la generación de un sistema de coordenadas curvilíneas (ϵ, η) adaptables a los contornos. La malla de discretización generada consta de $N + 1$ líneas $\epsilon = \text{cte}$ y $M + 1$ líneas $\eta = \text{cte}$ (Figura 2); los valores de dichas coordenadas curvilíneas se toman uniformemente distribuidos entre 0 y 1, de esta forma una geometría irregular dada en el plano físico (x, y) es convertida, en el plano transformado (ϵ, η) , en un dominio cuadrado con una malla de discretización rectangular y uniformemente distribuida^{5,6}.

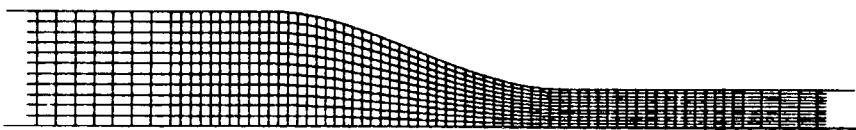


Figura 2. Coordenadas curvilíneas empleadas al inicio del proceso iterativo para la resolución de la región de flujo potencial.

La integración numérica de las ecuaciones (1) del flujo potencial, escritas en las coordenadas curvilíneas (ϵ, η) , se realiza en el plano transformado aproximando numéricamente las derivadas^{5,6}. Las condiciones de contorno son esencialmente de Dirichlet: —en la zona de entrada del flujo al dominio, suponiendo una distribución de velocidad v_0 uniforme, será $\psi(0, \eta) = \psi_s \cdot \eta$ (ψ_s es el caudal volumétrico total por unidad de profundidad de la canalización); —los contornos laterales (coincidentes con C_0 y C_s al inicio del proceso iterativo) representan líneas de corriente del flujo potencial siendo, por tanto, $\psi(\epsilon, 0) = 0$ y $\psi(\epsilon, 1) = \psi_s$; en la zona de salida del flujo se ha supuesto que la componente tangencial de la velocidad al contorno es nula (contorno de Neuman).

2) La integración de las ecuaciones (2) de la capa límite, escritas de forma más conveniente mediante la transformación de Levy-Lees², se efectúa en base a un esquema numérico de tipo implícito propuesto por H.B. Keller^{7,2}. Las condiciones de contorno en la pared ($y = 0$) son de velocidad nula y con distribución conocida de temperaturas $T_w(x)$ y/o de flujos caloríficos $q_w(x)$; en la zona exterior de las capas límites ($y \rightarrow \infty$) las condiciones de contorno [$u_e(x), p_e(x), T_e(x)$] vienen especificadas de la resolución de la región potencial del flujo.

Dada la naturaleza parabólica de estas ecuaciones respecto de la coordenada "x", la integración numérica se realiza avanzando incremento a incremento, y en la dirección del flujo, a lo largo de dicha coordenada. En la dirección transversal al flujo la concentración de puntos de la malla se ha realizado según el criterio²:

$$\zeta_j = \Delta\zeta_1 \frac{K^j - 1}{K - 1} \quad (6)$$

en donde: ζ_j es la coordenada correspondiente al punto j de la malla; $\Delta\zeta_1 = \zeta_1 - \zeta_0$ es el incremento inicial de la malla; K es una constante igual al cociente entre dos incrementos consecutivos cualesquiera de la malla. Este criterio de distribución de los puntos permite, para el caso de capa límite turbulenta, una adecuada densificación de la malla en las zonas próximas a la pared. La coordenada ζ es introducida por la transformación de Levy-Lees, $d\zeta = (\frac{\rho_e u_e}{\mu_e x})^{1/2} \cdot (\frac{\rho}{\rho_e}) \cdot dy$, sustituyendo a la coordenada "y".

Nótese que las coordenadas (x, y) para la superficie curva C_s representan respectivamente la coordenada curvilínea longitudinal medida sobre la superficie y la coordenada curvilínea normal a la misma en cada punto.

3) La resolución de las capas límites proporciona, en cada punto de los contornos C_o y C_s , los espesores de desplazamiento $\delta_{1o}(x)$ y $\delta_{1s}(x)$ correspondientes a la dirección normal a dichos contornos. Estos valores condicionan un nuevo dominio para la región de flujo potencial, cuya resolución numérica se efectúa según los criterios indicados en el punto 1); para la discretización del dominio empleamos el siguiente sistema de coordenadas curvilíneas:

$$\varepsilon = f(x), \quad \eta = \frac{y - \underline{\delta}_{1o}(x)}{y_s(x) - (\underline{\delta}_{1o}(x) + \underline{\delta}_{1s}(x))} \quad (7)$$

en el que $\underline{\delta}_{1o}(x)$ y $\underline{\delta}_{1s}(x)$ indican los espesores de desplazamiento correspondientes a la dirección vertical (coordenada cartesiana y) en los contornos C_o y C_s respectivamente; en el contorno C_o la coordenada normal coincide con la dirección vertical, por lo que $\delta_{1o}(x) = \underline{\delta}_{1o}(x)$. La función representada por $f(x)$ define la distribución de líneas $\varepsilon = \text{cte}$ la cual, una vez fijada inicialmente, se mantiene a lo largo del proceso iterativo conjunto. La malla indicada en la Figura 2 representa un caso particular de la que se obtendría con la expresión (7) para el caso de considerar nulos los espesores de desplazamiento.

4) El proceso iterativo es repetido desde el apartado 2) hasta que se verifique en la iteración k que:

$$\text{máx } |\underline{\delta}_1^k(x) - \underline{\delta}_1^{k-1}(x)| \leq \xi_c \quad (8)$$

siendo ξ_c la precisión exigida para la finalización de las iteraciones. Nótese que en el esquema numérico descrito, los valores de $\delta_1(x)$ [o $\underline{\delta}_1(x)$] tendrán tendencia a aproximarse a los valores "correctos" (i.e., aquellos a los que convergerá el proceso iterativo) oscilando alrededor de los mismos. Así por ejemplo si en la iteración k , y de la resolución de la zona potencial, se han obtenido unos valores $u_e(x)$ inferiores a los correctos, los valores de $\delta_1(x)$ que se obtendrán de la resolución de las capas límites serán superiores a éstos, por lo que en la siguiente iteración $u_e(x)$ aumentará con la consiguiente disminución de $\delta_1(x)$.

En general el proceso iterativo resulta convergente. Se ha observado que cuanto mayores son los espesores de desplazamiento a los que ha de converger la solución, mayor es el número de iteraciones requerido. Para acelerar la convergencia del método podría pensarse en efectuar promedios ponderados entre los valores de $\delta_1(x)$ de una iteración dada con los obtenidos en la iteración anterior. Esta idea nos conduce al empleo de factores de subrelajación f_w para los espesores de desplazamiento:

$$\underline{\delta}_1^k(x) = f_w \cdot \underline{\delta}_1^k(x) + (1 - f_w) \cdot \underline{\delta}_1^{k-1}(x) \quad (9)$$

Un factor de subrelajación adecuado corrige los valores de los espesores de desplazamiento obtenidos de la resolución de las capas límites, procurando una aproximación gradual a los valores de convergencia. De esta forma se consigue la disminución del número de iteraciones requerido así como la convergencia de ciertas situaciones que resultan divergentes con $f_w = 1$.

El proceso iterativo descrito se ha representado esquemáticamente en el organigrama de la página siguiente.

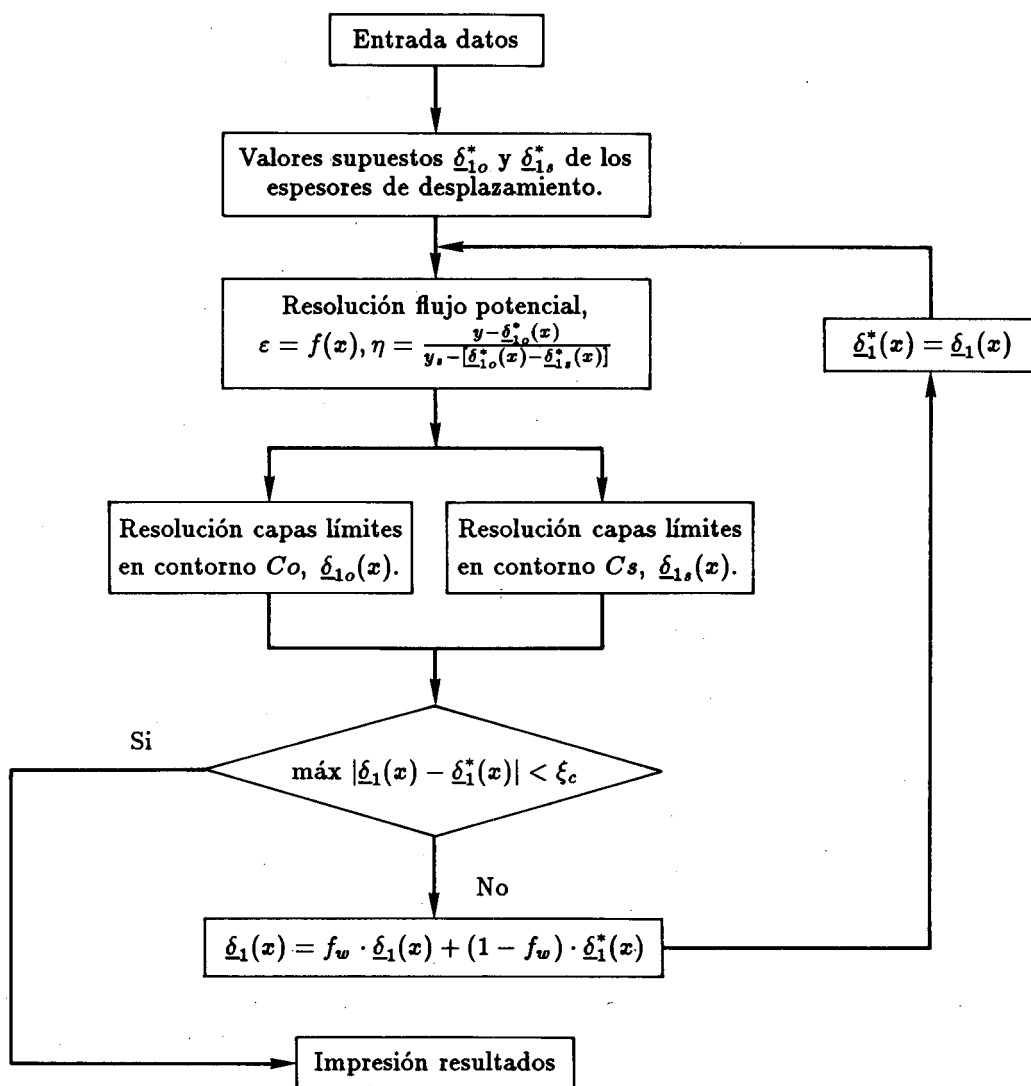
RESULTADOS NUMERICOS. CONTRASTACION EXPERIMENTAL

En este apartado se presentan los resultados que se derivan de aplicar, para la canalización de la Figura 1, el algoritmo numérico descrito. El estudio se ha realizado para dos situaciones distintas:

- 1) **Situación A:** Se supone que la altura de la canalización es lo suficientemente grande como para que el efecto de las tapas sea despreciable, siendo admisible la hipótesis de bidimensionalidad del flujo. Para este caso se han obtenido diferentes resultados con el objeto de poner de manifiesto la influencia de la compresibilidad del flujo y de la transferencia de calor entre el fluido y los contornos de la canalización. Se presentan algunos resultados ilustrativos de la rapidez de convergencia del método en diversos casos.
- 2) **Situación B:** Cuando la altura de la canalización es del mismo orden de magnitud que la anchura del canal debe considerarse la estructura tridimensional del flujo. Para esta situación y con el fin de considerar las capas límites desarrolladas en las tapas, se ha realizado un modelo simplificado basado en el esquema numérico

descrito. Los resultados numéricos así calculados, y supuestos los contornos adiabáticos, son contrastados con los obtenidos experimentalmente.

En ambas situaciones los resultados numéricos presentados se han obtenido para la región del flujo comprendida entre las coordenadas $x = 0$ y $x = 910$ mm. En la zona de entrada del canal se consideran condiciones uniformes para la velocidad, presión y temperatura. Se ha supuesto que las capas límites que se inician en ambos bordes de ataque son turbulentas.



Organigrama del proceso iterativo conjunto.

Los resultados numéricos han sido obtenidos empleando para la región de flujo potencial una malla de discretización de 122 puntos en la dirección ε y 41 puntos en la dirección η . Para los intervalos $x = 0 \div 410$ mm, $x = 410 \div 710$ mm y $x = 710 \div 910$ mm, la separación entre líneas $\varepsilon = \text{cte}$ es de $\Delta x = 10$ mm, $\Delta x = 5$ mm y $\Delta x = 10$ mm respectivamente; en la dirección η las líneas son distribuidas según la expresión indicada en la expresión (7).

Para las capas límites los contornos se han discretizado de forma que la distribución de puntos coincida con la distribución de líneas $\varepsilon = \text{cte}$ del flujo potencial; la densidad de malla en la dirección normal al contorno se ha obtenido según el criterio indicado en la expresión (6), haciendo $\Delta \zeta_1 = 0.005$ y $K = 1.075$.

El fluido que circula a través de la canalización es aire; la densidad y la viscosidad dinámica se han evaluado respectivamente de la ecuación de los gases ideales y de la ecuación de Sutherland³; para el calor específico a presión constante se ha tomado el valor de 1010 J/Kg·K.

Situación A

La influencia de la compresibilidad del flujo, para el caso de contornos adiabáticos, es puesta de manifiesto en la **Figura 3**. En esta figura se representa, para diferentes valores del número de Mach a la entrada del canal, la distribución de Cp , Cf , δ_1/Le y δ_2/Le en los contornos Cs y Co ; nótese la disminución en los valores de δ_1 , δ_2 y Cf a medida que aumenta M_o . Los cálculos se han realizado para el caso de: $p_o = 110.000$ N/m², $T_o = 300$ K, $h = 0$, $Pr = 0.7$, $k = 1.40$. En la **Tabla I** se indica el número de iteraciones globales requerido, a diferentes M_o y f_w , para la obtención de la precisión exigida.

En la **Figura 4** se pone de manifiesto la influencia de la transferencia de calor entre el fluido y los contornos, supuestos éstos isoterms. En dicha figura se representa, para diferentes valores del parámetro g_w , la distribución de Cp , Nu , St , Cf , δ_2/Le en los contornos Cs y Co . Los cálculos han sido realizados para el caso de: $p_o = 110.000$ N/m², $T_b = 400$ K, $h = 0$, $Pr = 0.7$, $M_o = 0.14$ y $k = 1.40$.

Como quiera que las velocidades no son elevadas, el caso de $g_w = 1.0$ coincide prácticamente con el de pared adiabática; valores de $g_w > 1.0$ indican calentamiento del flujo ($T_w > T_e$) mientras que el caso de $g_w < 1.0$ indica enfriamiento del flujo ($T_w < T_e$). Los resultados obtenidos reflejan unos valores de δ_1 inferiores en el caso de enfriamiento del flujo que para el caso de calentamiento, mientras que para δ_2 , Nu y Cf la tendencia es en sentido contrario; el coeficiente Cf presenta un comportamiento similar a estos últimos a excepción de una zona donde invierte esta característica. En la **Tabla II** se indican el número de iteraciones necesarias, a diferentes valores de g_w y f_w , para obtener la precisión exigida.

Situación B. Contrastación experimental

En este apartado se presenta la contrastación entre los resultados obtenidos experimentalmente en una unidad de soplado y los que resultan de la modelización numérica. Dado que la altura del canal es de 31.10 mm, la influencia de los contornos superior e inferior (tapas) debe considerarse en la modelización efectuada; para ello se han introducido ciertas correcciones en el modelo descrito basadas en las siguientes hipótesis:

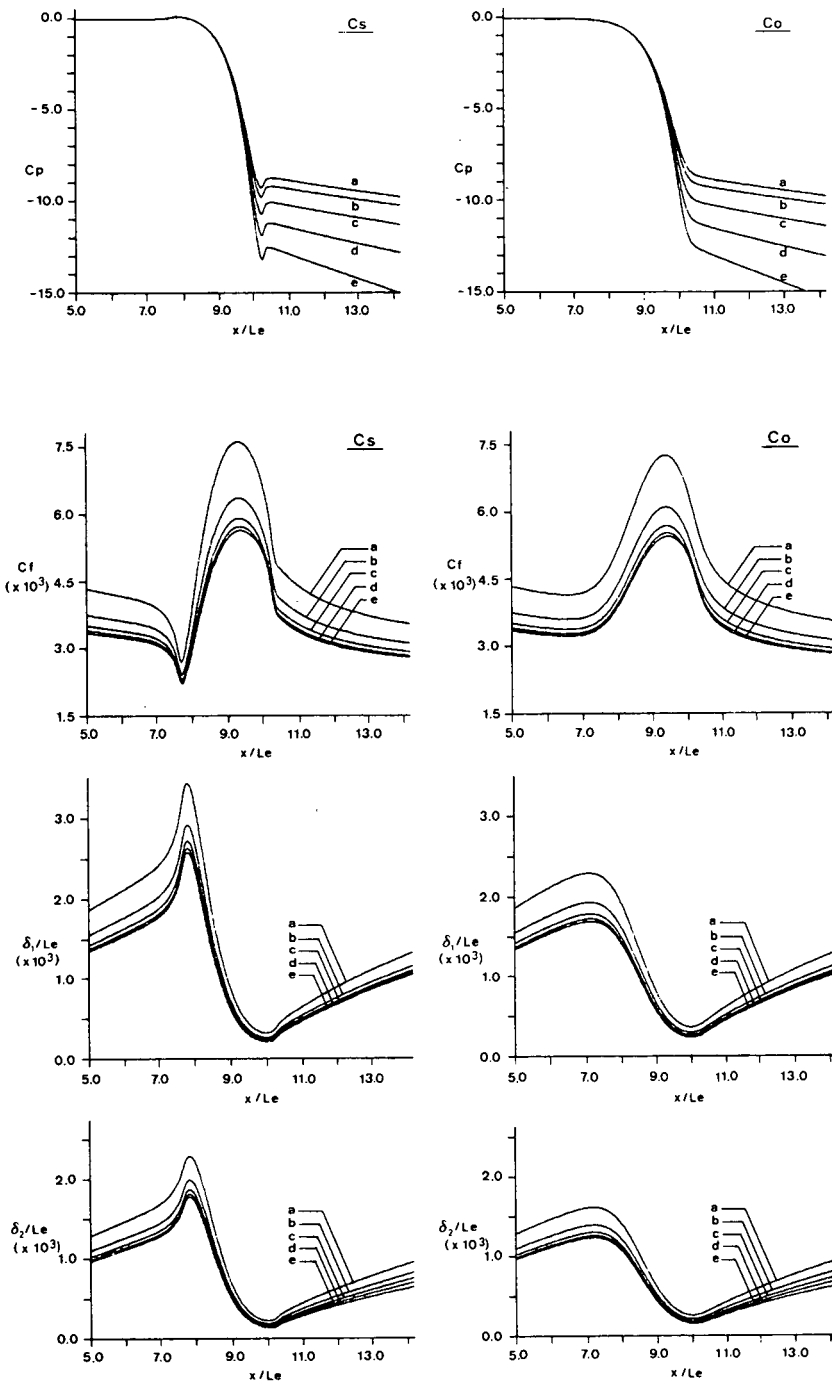


Figura 3. Distribuciones de C_p , C_f , δ_1/Le y δ_2/Le , para el caso de contornos C_s y C_o adiabáticos, a diferentes Mo : (a) $Mo = 0.05$; (b) $Mo = 0.10$; (c) $Mo = 0.14$; (d) $Mo = 0.165$; (e) $Mo = 0.180$.

M_o	f_w					
	1.0	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1
0.05	—	202	22	17	16	33
0.14	14	12	9	12	11	30
0.18	11	11	16	13	12	31

Tabla I. Número de iteraciones globales requerido a diferentes M_o y f_w para el caso de contornos diabáticos; $\xi_c = .000001$.

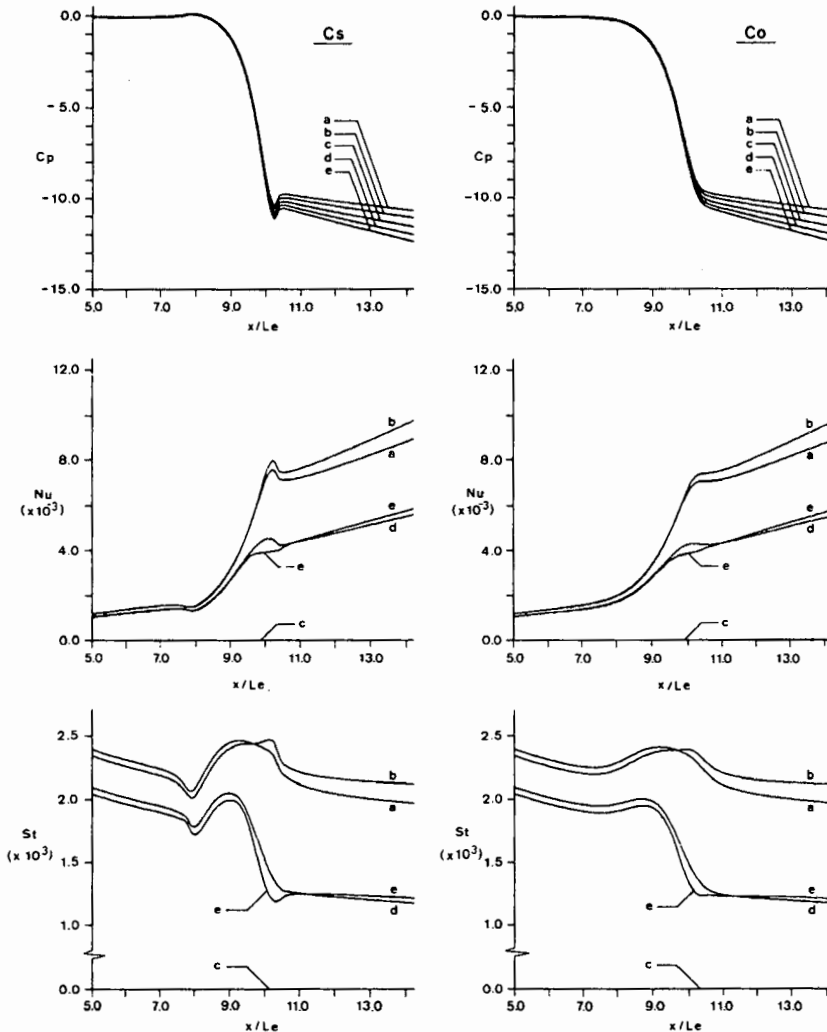


Figura 4. Distribuciones de C_p , Nu , St , δ_1/Le y δ_2/Le , para el caso de contornos C_s y C_o isotermos, con $M_o = 0.140$ y a diferentes g_w : (a) $g_w = 0.65$; (b) $g_w = 0.80$; (c) $g_w = 1.00$; (d) $g_w = 1.20$; (e) $g_w = 1.40$.

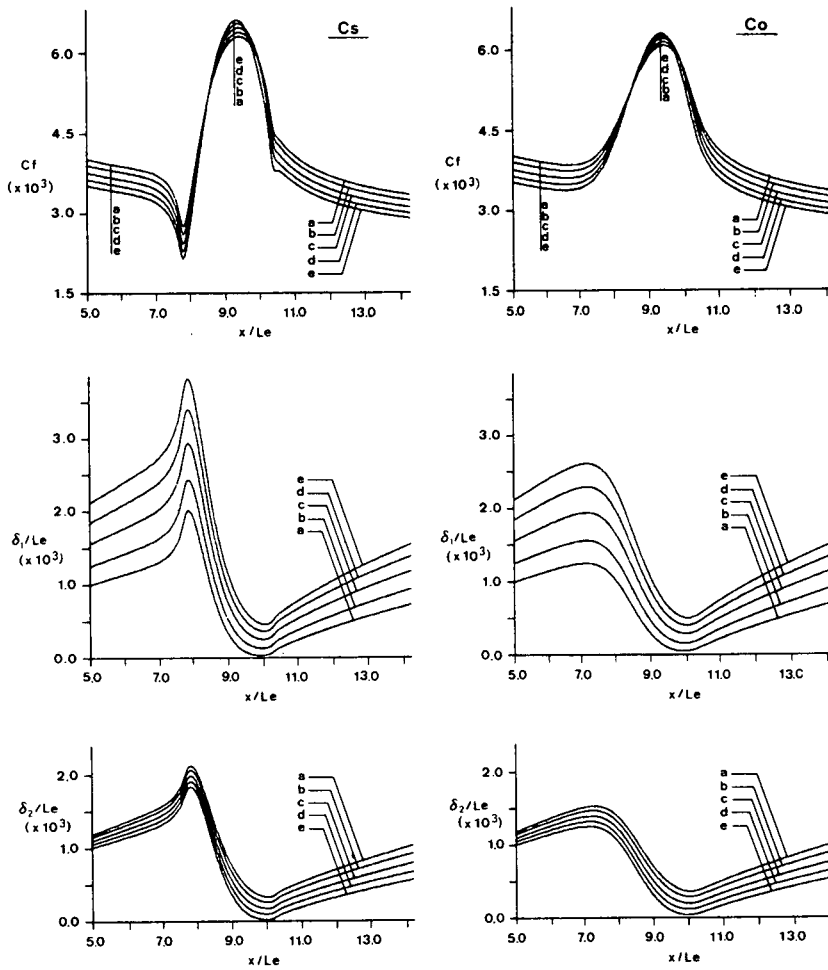


Figura 4. (Cont.) Distribuciones de C_p , Nu , St , C_f , δ_1/Le y δ_2/Le , para el caso de contornos C_s y C_o isotermos, con $Mo' = 0.140$ y a diferentes g_w : (a) $g_w = 0.65$; (b) $g_w = 0.80$; (c) $g_w = 1.00$; (d) $g_w = 1.20$; (e) $g_w = 1.40$.

g_w	f_w					
	1.0	.90	.70	.50	.30	.10
1.50	—	—	22	8	13	29
1.00	—	21	8	8	13	29
0.65	10	10	6	9	12	24

Tabla II. Número de iteraciones globales requerido a diferentes g_w y f_w para el caso de contornos isotermos; $\xi_c = .000001$.

- a) se supone que la variación de la altura de la zona potencial en la dirección del flujo es moderada, siendo admisible el considerar que las variables son funciones únicamente de las coordenadas (x, y) .
- b) para los contornos laterales C_o y C_s y para los contornos superior e inferior, se supone que los espesores de desplazamiento en una sección transversal cualquiera se mantienen uniformes en cada una de las caras del contorno correspondientes a dicha sección transversal.

El proceso de cálculo es exactamente el descrito anteriormente excepto en que las velocidades $v(x, y)$ calculadas en la zona potencial mediante el empleo de la función de corriente son corregidas, en cada iteración, dando una nueva distribución de velocidades $v'(x, y)$; los valores así obtenidos de velocidad, presión y temperatura en los contornos laterales del flujo potencial proporcionan las condiciones de contorno para la resolución de las capas límites.

El criterio empleado para la corrección de la velocidad potencial consiste en determinar la distribución de velocidades $v(x, y)$, correspondientes a la región de flujo potencial, sin considerar la influencia de las capas límites desarrolladas en las tapas. En estas condiciones la altura de la región potencial sería uniforme en todo el dominio, con un valor Lz correspondiente a la altura de la canalización. Si en una determinada sección transversal disminuimos la altura de esta región potencial hasta un valor Lz' , y suponemos que al efectuar este proceso la distribución del flujo másico y la dirección del vector velocidad no varían, se verificará para la nueva distribución de velocidades $v'(x, y)$ que:

$$\rho v Lz = \rho' v' Lz' \quad (10)$$

en donde el valor de ρ' se obtiene de suponer que dicho proceso es isoentrópico:

$$\rho' = \rho_o \left[1 - \frac{(k-1)M_o^2}{2} \left(\frac{v'^2}{v_o^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (11)$$

mientras que el valor de Lz' se obtiene de suponer que, en cada sección transversal del flujo, el espesor de desplazamiento en las tapas es uniforme (i.e. sólo varía con x) e igual al valor promedio de los espesores de desplazamiento calculados en los contornos laterales C_o y C_s , esto es:

$$Lz'(x) = Lz - [\delta_{1_o}(x) + \delta_{1_s}(x)] \quad (12)$$

De las pruebas experimentales realizadas se han seleccionado dos situaciones características: 1) la primera, que denominaremos **Prueba P1**, corresponde a un flujo con velocidades relativamente bajas; las condiciones del flujo a la entrada de la canalización son: $p_o = 10712 \text{ Kp/m}^2$, $T_o = 289 \text{ K}$, $m_o = 0.06460 \text{ Kg/s}$, $h_o = 0.00669 \text{ Kg vapor agua/Kg aire seco}$, $v_o = 27.48 \text{ m/s}$, $M_o = 0.0818$ (a la salida de la canalización $M = 0.2880$) y $k = 1.40$; 2) la segunda, que denominaremos **Prueba P2**, corresponde al máximo caudal obtenible en la instalación de soplado empleada; las condiciones del flujo a la entrada de la canalización son: $p_o = 11787 \text{ Kp/m}^2$, $T_o = 297 \text{ K}$,

Cont	Pto <i>j</i>	Coord <i>x</i> (m)	Δp_j exp. (Kp/m ²)	Δp_j (Kp/m ²) según los modelos numéricos:		
				C-3	C-2	C-1
<i>C_s</i>	1	.3597	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	.4468	2.0	1.7 (0.3)	2.3 (0.2)	1.5 (0.5)
	3	.4690	6.5	8.1 (1.6)	6.7 (0.2)	6.6 (0.1)
	4	.4928	1.5	0.3 (1.2)	0.3 (1.2)	0.0 (1.5)
	5	.5253	-30.0	-32.4 (2.4)	-32.8 (2.8)	-33.0 (3.0)
	6	.5414	-65.0	-65.6 (0.6)	-66.7 (1.7)	-67.0 (2.0)
	7	.5573	-119.5	-118.2 (1.3)	-120.6 (1.1)	-121.1 (1.6)
	8	.5530	-201.0	-198.6 (2.4)	-202.9 (1.9)	-204.2 (3.2)
	9	.5892	-322.0	-313.4 (8.6)	-321.0 (1.0)	-324.0 (2.0)
	10	.6049	-438.5	-423.6 (15.)	-435.6 (2.9)	-441.1 (2.6)
	11	.6109	-462.5	-444.8 (18.)	-457.8 (4.7)	-463.0 (0.5)
	12	.6170	-459.5	-428.3 (31.)	-445.8 (14.)	-455.5 (4.0)
	13	.6302	-437.0	-409.5 (28.)	-431.2 (5.8)	-441.1 (4.1)
	14	.7217	-480.5	-407.8 (73.)	-452.9 (28.)	-477.0 (3.5)
	15	.7966	-509.0	-407.8 (101)	-469.6 (39.)	-503.9 (5.1)
<i>C_o</i>	1	.3593	.0	-0.0 (.02)	-0.0 (.06)	-0.1 (0.1)
	2	.4648	-7.0	-3.2 (3.8)	-5.9 (1.1)	-9.7 (2.7)
	3	.5105	-30.0	-29.2 (0.8)	-31.2 (1.2)	-34.0 (4.0)
	4	.5557	-124.0	-120.6 (3.4)	-123.2 (0.8)	-124.2 (0.2)
	5	.5855	-270.0	-261.9 (8.1)	-268.4 (1.6)	-270.2 (0.2)
	6	.6156	-415.0	-394.7 (20.)	-410.6 (4.4)	-416.7 (1.7)
	7	.6407	-436.0	-407.6 (29.)	-432.4 (3.6)	-444.0 (8.0)
	8	.6511	-446.0	-407.8 (38.)	-435.5 (10.)	-449.0 (3.0)
	9	.6708	-455.0	-407.8 (47.)	-440.8 (14.)	-457.5 (2.5)
	10	.7203	-482.0	-407.8 (74.)	-452.9 (29.)	-477.0 (5.0)
	11	.7943	-511.0	-407.8 (103)	-469.5 (42.)	-503.8 (7.2)

Tabla III. **PRUEBA P1:** Valores de las diferencias de presión $\Delta p_j = p_j - p_{\text{ref}}$, obtenidas experimentalmente (exp) y según los distintos modelos numéricos (num), a lo largo de los contornos *C_s* y *C_o*; p_{ref} es la presión de referencia y corresponde al punto 1 del contorno *C_s*. Entre paréntesis se indican, en valor absoluto, los valores de $(\Delta p_j)_{\text{exp}} - (\Delta p_j)_{\text{num}}$ en Kp/m².

$m_o = 0.10556$ Kg/s, $h_o = 0.00814$ Kg vapor agua/Kg aire seco, $v_o = 41.93$ m/s, $M_o = 0.1227$ (a la salida de la canalización $M = 0.4590$) y $k = 1.40$.

En las **Tablas III y IV** se indican, para la Prueba P1 y para la Prueba P2, los valores de las diferencias de presión obtenidos experimentalmente respecto a un punto de referencia dado y los que se derivan de: a) suponer que toda la región del flujo es potencial (*modelo C-3*); b) considerar, al igual que en la situación A (flujo bidimensional), únicamente las capas límites laterales (*modelo C-2*); c) aplicar la corrección de velocidad potencial indicada anteriormente a fin de considerar (aunque

Cont	Pto <i>j</i>	Coord <i>x</i> (m)	Δp_j exp. (Kp/m ²)	Δp_j (Kp/m ²) según los modelos numéricos:		
				C-3	C-2	C-1
<i>C_s</i>	1	.3597	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	.4468	5.0	4.3 (0.7)	6.2 (1.2)	4.2 (0.8)
	3	.4690	17.0	20.2 (3.2)	18.0 (1.0)	17.1 (0.1)
	4	.4928	4.5	0.7 (3.8)	1.4 (3.1)	-0.3 (4.2)
	5	.5253	-76.5	-81.7 (5.2)	-82.4 (5.9)	-83.0 (6.5)
	6	.5414	-162.5	-166.0 (3.5)	-168.7 (6.2)	-169.2 (6.7)
	7	.5573	-300.0	-301.0 (1.0)	-306.7 (6.7)	-307.8 (7.8)
	8	.5530	-512.0	-510.8 (1.2)	-521.3 (9.3)	-524.3 (12.)
	9	.5892	-832.0	-818.8 (13.)	-837.7 (5.7)	-845.1 (13.)
	10	.6049	-1146.0	-1125. (20.)	-1156. (10.)	-1171. (25.)
	11	.6109	-1216.0	-1186. (30.)	-1221. (5.2)	-1235. (19.)
	12	.6170	-1211.0	-1144. (67.)	-1190. (21.)	-1216. (5.2)
	13	.6302	-1165.0	-1095. (70.)	-1152. (13.)	-1178. (13.)
	14	.7217	-1285.0	-1091. (194)	-1211. (74.)	-1276. (8.5)
	15	.7966	-1365.0	-1091. (274)	-1257. (108)	-1351. (14.)
<i>C_o</i>	1	.3593	0.0	0.0 (.04)	-0.2 (.23)	-0.2 (0.2)
	2	.4648	-16.0	-8.0 (8.0)	-15.8 (0.2)	-23.3 (7.3)
	3	.5105	-78.0	-73.5 (4.5)	-78.6 (0.6)	-84.5 (6.5)
	4	.5557	-313.0	-308.3 (4.7)	-314.2 (1.2)	-316.5 (3.5)
	5	.5855	-694.0	-685.4 (8.6)	-701.3 (7.3)	-706.1 (12.)
	6	.6156	-1100.0	-1057. (43.)	-1098. (2.2)	-1115. (15.)
	7	.6407	-1161.0	-1091. (70.)	-1155. (5.8)	-1187. (26.)
	8	.6511	-1195.0	-1091. (104)	-1164. (31.)	-1201. (5.8)
	9	.6708	-1217.0	-1091. (126)	-1178. (39.)	-1224. (6.8)
	10	.7203	-1289.0	-1091. (198)	-1211. (79.)	-1277. (12.)
	11	.7943	-1367.0	-1091. (276)	-1256. (111)	-1351. (16.)

Tabla IV. **PRUEBA P2:** Valores de las diferencias de presión $\Delta p_j = p_j - p_{\text{ref}}$, obtenidas experimentalmente (exp) y según los distintos modelos numéricos (num), a lo largo de los contornos *C_s* y *C_o*; p_{ref} es la presión de referencia y corresponde al punto 1 del contorno *C_s*. Entre paréntesis se indican, en valor absoluto, los valores de $(\Delta p_j)_{\text{exp}} - (\Delta p_j)_{\text{num}}$ en Kp/m².

de forma simplificada) las capas límites desarrolladas en las tapas (*modelo C-1*).

En la **Figura 5** se representa, para las Pruebas P1 y P2, la distribución del coeficiente de presión, en los contornos *C_o* y *C_s*, correspondientes al esquema numérico C-1 y a los valores obtenidos experimentalmente; en la **Figura 6** se representan, para ambas pruebas y según el modelo C-1, los valores de *C_f*, δ_1/Le y δ_2/Le correspondientes a los contornos *C_o* y *C_s*.

En las Tablas III y IV queda reflejada la superioridad de los modelos que consideran las capas límites (modelos C-1/C-2) respecto de aquél que supone un comportamiento

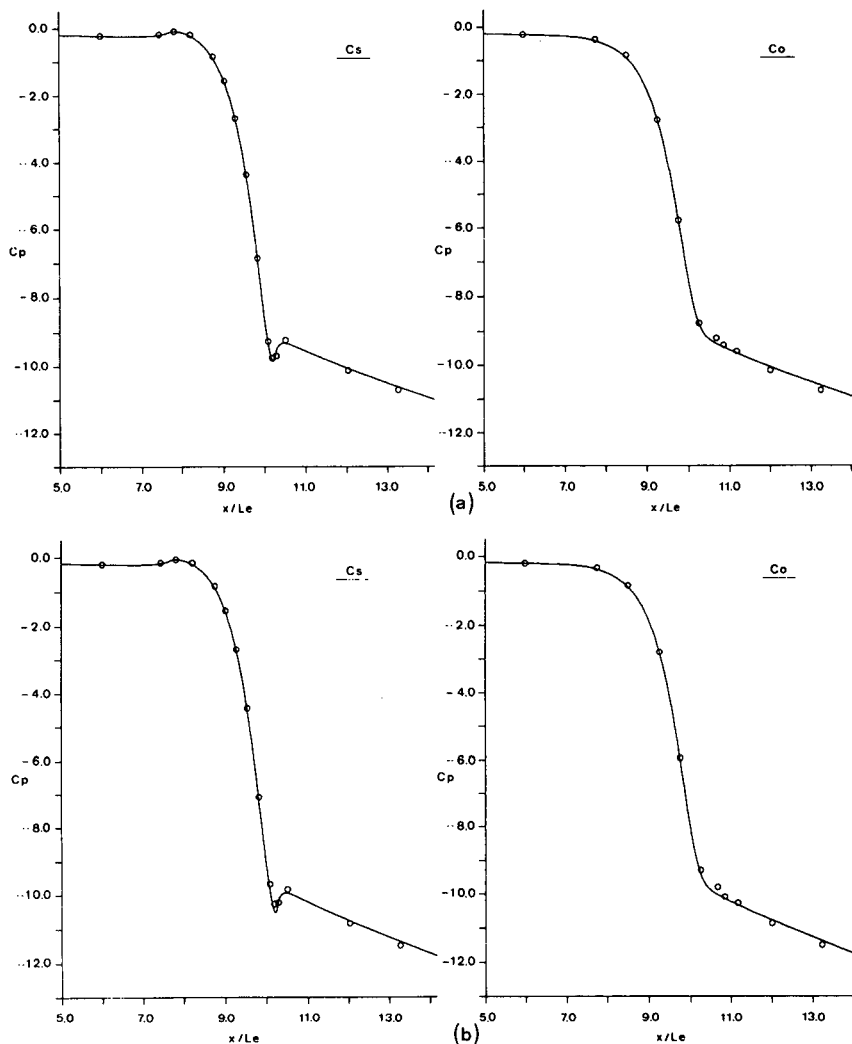


Figura 5. Distribución del coeficiente de presión C_p , en los contornos C_s y C_o , para las condiciones de flujo de la Prueba P1 y de la Prueba P2. Los puntos corresponden a los valores experimentales, mientras que la línea continua corresponde al modelo C-1.

potencial del flujo en todo el dominio (modelo C-3); las diferencias de presiones en la zona recta de salida ($x > He + Htb$) son más satisfactoriamente interpretadas por el modelo C-1 que considera (aunque de forma simplificada) el desarrollo de las capas límites en las tapas, que por el modelo C-2 que considera únicamente las capas límites laterales.

El grado de ajuste entre los resultados numéricos y los obtenidos experimentalmente confirman en cierto modo las hipótesis aplicadas. Un mayor grado de correlación exigiría de una modelización realmente tridimensional para la zona potencial (e.g., mediante el empleo de la función potencial de velocidad⁵) y que considerase las capas límites desarrolladas en las esquinas.

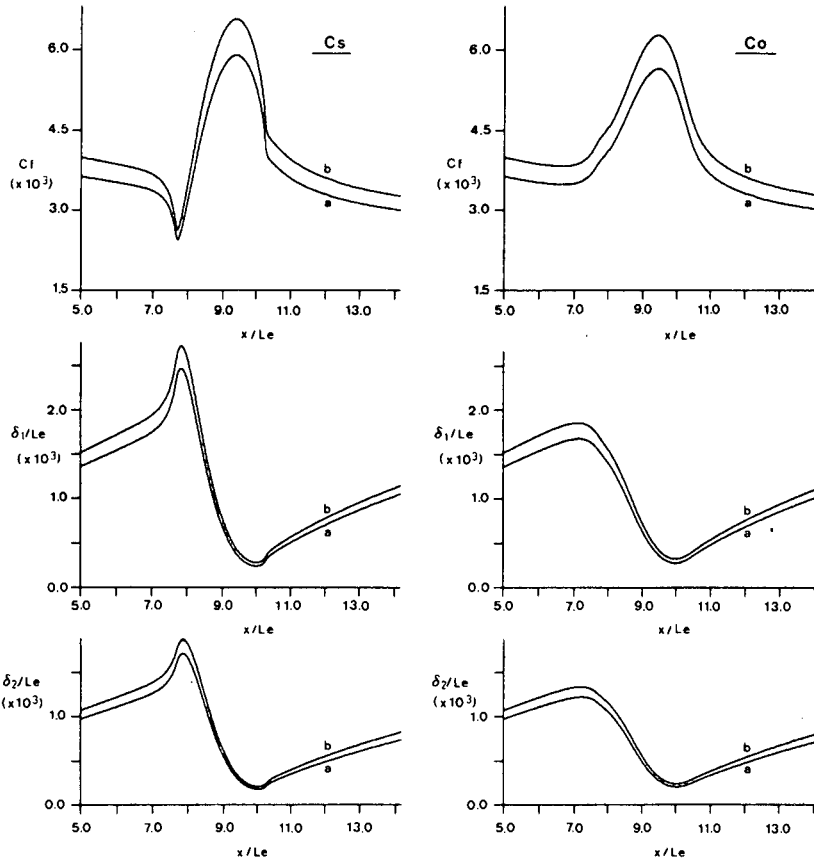


Figura 6. Distribuciones de C_f , δ_1/Le y δ_2/Le en los contornos Co y Cs , correspondientes a las condiciones del flujo para la Prueba P1 (a), y para la Prueba P2 (b).

CONCLUSIONES

El análisis realizado permite la obtención de la distribución de velocidades, presiones y temperaturas en todo el dominio del flujo; ello posibilita la determinación de la fricción y de la transferencia de calor en los contornos sólidos.

La resolución de la región de flujo potencial mediante la generación de coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos confiere gran flexibilidad al esquema numérico; esta característica ha permitido el desarrollo de un software, de carácter general, fácilmente adaptable a diferentes configuraciones de flujos. El sistema de coordenadas curvilíneas empleado en la discretización del dominio es aplicable a la mayoría de las geometrías de flujos que normalmente se presentan, y para las cuales es adecuada una formulación como la indicada; este tipo de coordenadas, además de proporcionar una adecuada discretización del dominio, permiten una fácil y rápida generación de la malla.

Debido al tipo de interacción que se establece entre la zona potencial y las capas límites durante el proceso iterativo de resolución, el empleo de adecuados factores de subrelajación para los espesores de desplazamiento acelera la convergencia del método.

APENDICE: NOMENCLATURA.

- Cf Coeficiente de rozamiento superficial, $Cf = \tau_w / (\rho_e u_e^2 / 2)$.
- c_p Calor específico a presión constante.
- C_p Coeficiente de presión, $C_p = (p - p_o) / (\rho_o v_o^2 / 2)$.
- f_w Factor de subrelajación para los espesores de desplazamiento.
- g_w Relación entre las entalpías específicas totales, $g_w = H_w(x) / H_e(x)$.
- h Humedad en masa (Kg vapor de agua/Kg aire seco); entalpía específica.
- H Entalpía específica total, $H = h + u^2/2$ (siendo h la entalpía específica).
- k Relación entre el calor específico a presión y a volumen constante; número de iteración.
- \dot{m} Flujo másico.
- M Número de Mach.
- Nu Número de Nusselt, $Nu = \lambda_e q_w x / (T_w - T_e)$, (en donde "x" representa la coordenada curvilínea medida a lo largo del contorno y en la dirección del flujo).
- p Presión.
- Pr Número de Prandtl, $Pr = \mu c_p / \lambda$.
- Pr_t Número de Prandtl turbulento, $Pr_t = \epsilon_m / \epsilon_h$.
- q Flujo de calor por unidad de superficie.
- Rx Número de Reynolds, $Rx = \rho_e u_e x / \mu_e$.
- St Número de Staton, $St = Nu / (Rx \cdot Pr)$.
- T Temperatura absoluta.
- u, v Componentes de la velocidad, en las coordenadas (x, y) , del flujo en la capa límite.
- u_τ Velocidad de fricción, $u_\tau = (\tau_w / \rho_w)^{1/2}$.
- v Módulo de la velocidad.
- v_x, v_y Componentes cartesianas de la velocidad.
- x, y Coordenadas cartesianas; para el caso de las capas límites desarrolladas en superficies curvas, "x" representa la coordenada curvilínea medida a lo largo de la superficie y en la dirección del flujo, mientras que "y" representa la coordenada curvilínea normal en cada punto a la superficie en cuestión.
- $y_s(x)$ Función que define el contorno lateral Cs .
- δ Espesor de la capa límite.
- δ_1 Espesor de desplazamiento de la capa límite: $\delta_1 = \int_0^\infty (1 - \rho u / \rho_e u_e) dy$.
- De no indicar expresamente que se trata del contorno Cs (δ_{1s}) o Co (δ_{1o}), entenderemos que se refiere indistintamente a ambos.
- $\underline{\delta}_1$ Espesor de desplazamiento correspondiente a la dirección de la coordenada cartesiana "y".

Al indicar $\delta_1(x)$ o $\underline{\delta}_1(x)$ nos referimos a la variación respecto de la coordenada cartesiana x .

- δ_2 Espesor de la cantidad de movimiento: $\delta_2 = \int_0^{\infty} (\rho u / \rho_e u_e) (1 - u/u_e) dy$.
- ε, η Coordenadas curvilíneas empleadas en la resolución de la región de flujo potencial.
- ε_m Viscosidad turbulenta.
- ε_h Conductividad térmica turbulenta.
- λ Conductividad térmica.
- γ Factor de intermitencia de Klebanoff.
- μ Viscosidad dinámica.
- ρ Densidad.
- τ Tensión cortante.
- ψ Función de corriente.

Nota: – Los subíndices “o”, “e” y “w” indican respectivamente que las variables son las correspondientes a: la entrada de la canalización (e.g., m_o, T_o, M_o, \dots); el contorno exterior de las capas límites (e.g., u_e, T_e, \dots); la pared de la canalización (e.g., T_w, q_w, \dots).

– En las ecuaciones (2) a (4) la raya encima de las variables indica valores promedios temporales, mientras que las primas indican componentes de fluctuación. Por comodidad se ha empleado la notación $\overline{\rho v}$ para indicar $\overline{\rho v} + \overline{\rho'v'}$.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el marco del Proyecto de Investigación no. PB88-0515 subvencionado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica.

REFERENCIAS

1. A.H. Shapiro, “Compressible Fluid Flow”, The Ronald Press Comp., New York, (1953).
2. T. Cebeci y A.M.O. Smith, “Analysis of Turbulent Boundary Layers”, Academic Press, Orlando, (1974).
3. H. Schlichting, “Boundary-Layer Theory”, Mc Graw-Hill, New York, Sixth ed, (1968).
4. T. Cebeci, “Calculation of Compressible Turbulent Boundary Layers with Heat and Mass Transfer”, *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 6, (1971).
5. C.D. Pérez Segarra, “Criterios Numéricos en la Resolución de la Transferencia de Calor en Fenómenos de Convección”, *Tesis Doctoral*, Universitat Politècnica de Catalunya, (1987).
6. C.D. Pérez Segarra, A. Oliva y M. Costa, “Contrastación de diferentes criterios numéricos para la resolución de flujos potenciales en coordenadas curvilíneas. Parte I: Función de corriente”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 6, No. 2, pp. 285-310, (1990).
7. H.B. Keller y T. Cebeci, “Accurate Numerical Methods for Boundary-Layer Flows. II: Two-Dimensional Turbulent Flows”, *AIAA Journal*, Vol. 10, (1972).