

EL METODO DE LAS LINEAS APLICADO AL DESARROLLO TERMOHIDRAULICO EN TUBOS ISOTERMICOS

CARLOS PEREZ
y
ANTONIO CAMPO

*Departamento de Termodinámica
Universidad Simón Bolívar
Caracas, Venezuela*

RESUMEN

Este estudio trata sobre el desarrollo simultáneo de la velocidad y la temperatura de un fluido con propiedades constantes que se desplaza por una tubería circular. La velocidad y la temperatura a la entrada se suponen uniformes y la superficie del tubo se considera isotérmica. El problema así planteado se resuelve por una técnica de naturaleza híbrida, requiriéndose para ello que las derivadas radiales se discreticen en intervalos uniformemente espaciados. Esta vía da origen a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, cuya resolución numérica en términos de velocidades, presión y temperatura concuerda satisfactoriamente con los resultados de rutas de solución totalmente numéricas y más elaboradas. Además, las predicciones de la velocidad máxima y de la caída de presión para el flujo de aire corresponde a la de una gran variedad de resultados experimentales reportados en la literatura. El procedimiento híbrido esbozado en este trabajo está inspirado en el método de las líneas y utiliza 10 líneas solamente. Esta vía tiende a reducir los tiempos de computación notablemente reteniendo a la vez un alto grado de precisión, ventajas éstas de vital importancia en problemas de ingeniería.

SUMMARY

This study treats the simultaneous development of velocity and temperature of a fluid, with constant properties, that moves through a circular tube. The velocity and temperature at the entrance of the tube are supposed to be uniform and the superficie of the tube is considered isothermic. This kind of problem is resolved by a hybrid type technique, which means that the radial derivatives are discretized in uniformly spaced intervals. This leads to a first order ordinary differential equations system, which numerical solution in terms of velocity, pression and temperature, coincides satisfactorily with the guiding results of totally numerical and more elaborated solution. Moreover, the maximum velocity and the dropping of pression predictions for the air flow corresponds to that of a wide variety of experimental results reported in the literature. The hybrid procedure described in this paper comes from the lines method and uses only ten lines. This technique tends to reduce the computation time although retaining a high precision grade, which is of vital importance in engineering problems.

Recibido: Mayo 1987

INTRODUCCION

Se sabe que cuando el número de Prandtl de un fluido es superior a 5, el perfil de velocidad se desarrolla mucho más rápido que el perfil de temperatura, aún cuando ambas cantidades: la velocidad y la temperatura, sean uniformes a la entrada del tubo. Bajo estas circunstancias, la idealización de un perfil de velocidad desarrollado introduce un error pequeño de acuerdo a lo sugerido por Kays y Crawford¹. Sin embargo, para valores de Prandtl inferiores a 5, como ocurre en el caso de los gases, la velocidad y la temperatura suelen desarrollarse a la par cerca de la entrada de un tubo.

El análisis de este tipo de problema termohidráulico en régimen laminar, requiere la resolución conjunta de las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento axial y energía. Esta dificultad ocasiona que las técnicas de solución utilizadas sean forzosamente de naturaleza numérica. Una recopilación de las publicaciones relacionadas a este tema, restringidas al caso de temperatura superficial constante son las Referencias^{2,12}.

La generación numérica del perfil de velocidad es pieza clave en este tipo de problema y de aquí que ocurran desviaciones significativas entre las diversas predicciones de carácter numérico para el desarrollo del perfil de temperatura.

El propósito de este trabajo consiste en examinar el problema termohidráulico antes citado, pero a través de una técnica híbrida con características analíticas y numéricas combinadas. El método a usarse recibe el nombre de Método de las Líneas¹³ y convierte el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y con valores iniciales. Los resultados que aporta este procedimiento con escasamente 10 líneas a lo largo del tubo son altamente satisfactorios, como podrá apreciarse en las secciones subsiguientes. Este enfoque a la vez proporciona un procedimiento muy rápido de cálculo utilizando un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para la integración numérica.

POSTULADO DEL PROBLEMA

La Figura 1 muestra la situación que describe el fenómeno físico del presente trabajo. Aquí, la temperatura superficial del tubo se conserva a un valor uniforme T_w , pero diferente a la temperatura de entrada del fluido T_0 , que es uniforme también. Además, se considera que el fluido entra con una velocidad uniforme a la zona de intercambio térmico y que la variación de las propiedades con la temperatura no es muy marcada.

El propósito de esta investigación está centrado en la adaptación de un procedimiento numérico simple, rápido y preciso para estudiar el desarrollo simultáneo de la velocidad y de la temperatura de un flujo laminar forzado a través de un tubo circular. Para realizar este análisis se dispone de la ecuación de cantidad de movimiento axial, de la ecuación de continuidad, tanto en su forma diferencial como en su forma integral y de la ecuación de la energía.

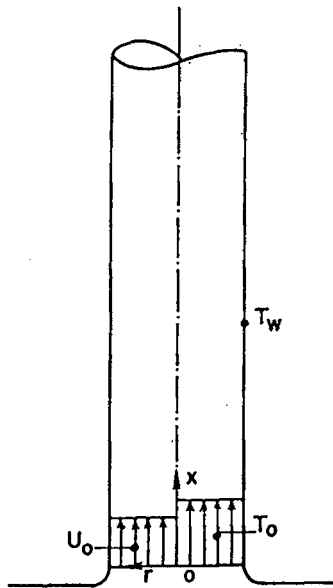


Figura 1. Esquema del sistema físico.

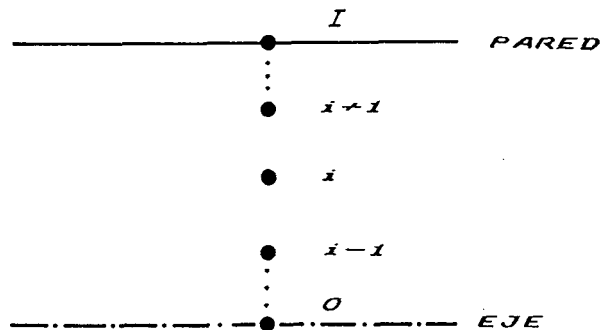


Figura 2. Ubicación de las líneas

La formulación de este problema se simplifica notablemente si se garantiza la condición de que en el flujo $Re \gg 1$ y $Pe \gg 1$, asegurando así que los efectos de la difusión de cantidad de movimiento axial y energía sean insignificantes. Esta limitación genera características netamente parabólicas en el sistema de ecuaciones en derivadas parciales. La validación experimental de tal sistema ha sido ampliamente corroborada en la literatura especializada y su análisis está íntimamente relacionado a la "teoría de la capa límite" recopilada en el tratado de Schlichting¹⁴. Sin embargo, su solución suele ser generalmente compleja y requiere de técnicas numéricas sofisticadas para su integración.

Una vez planteados los criterios para el análisis, se enumeran a continuación las suposiciones que lo limitarán. Estas son:

- a) el fluido es Newtoniano
- b) el flujo es laminar y permanente
- c) existe axisimetría hidrodinámica y térmica
- d) la presión se considera uniforme en la sección del ducto
- e) las propiedades termofísicas del fluido son constantes
- f) la conducción axial no es significativa
- g) no se considera la disipación viscosa

ECUACIONES PARA EL ESTUDIO TERMOHIDRÁULICO DEL FLUIDO

Habiéndose establecido las condiciones particulares referentes al problema en estudio, se procede ahora a formular el modelo matemático que regirá el

comportamiento físico del fluido.

1. ecuación de la cantidad de movimiento axial

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{dp}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1)$$

2. ecuación de continuidad (forma diferencial)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr) = 0 \quad (2)$$

3. ecuación de continuidad (forma integral)

$$\dot{m} = \rho \int_A u dA \quad (3)$$

4. ecuación de la energía

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (4)$$

Conviene señalar que el método numérico que se adoptará en este trabajo es capaz de manejar las variaciones de la viscosidad, de la conductividad térmica y cualquier otra propiedad termofísica. Estas relaciones se ajustarían con datos experimentales para líquidos o gases dependiendo del caso estudiado.

Condiciones de contorno

El conjunto de las condiciones de contorno que imperan en este análisis se clasificará de acuerdo a:

- a) perfil de velocidad axial $u(x, r)$

$$u(0, r) = U_m \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x, 0) = 0 \quad (6)$$

$$u(x, R) = 0 \quad (7)$$

- b) perfil de velocidad radial $v(x, r)$

$$v(0, r) = 0 \quad (8)$$

$$v(x, 0) = 0 \quad (9)$$

$$v(x, R) = 0 \quad (10)$$

c) perfil de presión $p(x)$

$$p(0, r) = p_0 \quad (11)$$

d) perfil de temperatura $T(x, r)$

$$T(0, r) = T_0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(x, 0) = 0 \quad (13)$$

$$T(x, R) = T_w \quad (14)$$

La resolución numérica de las ecuaciones (1)-(14) permitirá obtener los campos hidrodinámico y térmico del fluido que circula en el tubo. Esta información sirve de punto de partida para calcular los parámetros de interés en aplicaciones de ingeniería. Estos son, a saber: la caída de presión o su equivalente el coeficiente de fricción aparente y la temperatura volumétrica media, de la cual se determina el calor total transferido en forma directa.

Formulación adimensional de las ecuaciones

En virtud de las nuevas variables que se definen a continuación

$$z = \frac{x}{R}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad U = \frac{u}{U_m}, \quad V = \frac{v}{U_m}$$

$$P = \frac{p - p_0}{\rho U_m^2}, \quad \theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad Re = \frac{U_m D}{\nu} \quad (15)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Pe = Re.Pr$$

los resultados numéricos pueden reportarse de manera mucho más general acorde con las referencias citadas en la Bibliografía.

Conforme a lo antes expuesto, la reformulación del problema en cuestión resulta:

1. Ecuación adimensional de la cantidad de movimiento axial:

$$U \frac{\partial U}{\partial z} + V \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{dP}{dz} + \frac{2}{Re} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \quad (16)$$

2. Ecuación adimensional de continuidad (forma diferencial):

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta V) = 0 \quad (17a)$$

3. Ecuación adimensional de continuidad (forma integral):

$$\int_0^1 U \eta \, d\eta = \frac{1}{2} \quad (17b)$$

4. Ecuación adimensional de la energía:

$$U \frac{\partial \theta}{\partial z} + V \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{2}{Pe} \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \right] \quad (18)$$

Entretanto, las condiciones de contorno adscritas a las ecuaciones (16)–(18) son ahora las siguientes:

$$U(0, \eta) = 1 \quad (19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}(z, 0) = 0 \quad (20)$$

$$U(z, 1) = 0 \quad (21)$$

$$V(0, \eta) = 0 \quad (22)$$

$$V(z, 0) = 0 \quad (23)$$

$$V(z, 1) = 0 \quad (24)$$

$$P(0, \eta) = 0 \quad (25)$$

$$\theta(0, \eta) = 1 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta}(z, 0) = 0 \quad (27)$$

$$\theta(z, 1) = 0 \quad (28)$$

En virtud de lo anterior, la distribución de la presión en el tubo puede calcularse por intermedio del coeficiente de fricción aparente, dado por

$$f_{ap} = \frac{p - p_0}{\rho U_m^2} \frac{R}{x} \quad (29)$$

Análogamente, el desenvolvimiento de la temperatura a lo largo del tubo suele resumirse en términos de la variación de su temperatura volumétrica media adimensional, o sea

$$\theta_b(z) = 2 \int_0^1 U(z, \eta) \theta(z, \eta) \eta d\eta \quad (30)$$

Esta expresión servirá para determinar directamente el calor adimensional total transferido por o hacia el fluido en toda la zona de intercambio térmico del tubo. Esto equivale a la simple expresión algebraica:

$$\Omega = \frac{Q}{Q_{ideal}} \quad (31a)$$

o sea

$$\Omega = \frac{T_b - T_w}{T_0 - T_w} = 1 - \theta_b \quad (31b)$$

en la cual Ω es una especie de eficiencia térmica. En la ecuación (31a), Q_{ideal} corresponde al calor que transfiere un tubo de largo infinito.

Entretanto, la manera convencional de calcular indirectamente el calor local transferido puede hacerse por intermedio del número de Nusselt local. Esto es

$$Nu(z) = \frac{-2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(z, 1)}{\theta_b(z)} \quad (32a)$$

Alternativamente, empleando un balance energético en la zona de interacción térmica, se obtiene la relación:

$$Nu(z) = -\frac{Pe}{2\theta_b} \frac{d\theta_b}{dz} \quad (32b)$$

Realizando un proceso de integración en la ecuación (32b), se desprende que el número de Nusselt medio puede calcularse de acuerdo a:

$$\overline{Nu}(z) = \frac{Pe}{2z} \ln\left(\frac{1}{\theta_b}\right) \quad (33)$$

METODO DE SOLUCION

La resolución de los problemas parabólicos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales requiere, por lo general, de procesos iterativos que garanticen la convergencia de los sistemas asociados de ecuaciones algebraicas.

Tradicionalmente, en el marco del cálculo de diferencias finitas, las formulaciones de discretización se llevan a cabo con la ayuda de desarrollos en serie de Taylor. Empero, estas formulaciones pueden lograrse también mediante la adopción del método de elementos finitos o también empleando la técnica de los volúmenes de control.

No obstante esta tendencia manifiesta, el sistema de tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que rige el comportamiento termohidráulico de un fluido a la entrada de un tubo ha sido resuelto en este trabajo haciendo uso del Método de las líneas¹³.

Descripción del Método de las líneas

Este método lo describe Liskovets en¹³ como un proceso mediante el cual se discretizan todos los términos diferenciales correspondientes a ciertas variables independientes de una ecuación diferencial en derivadas parciales, dejando los términos diferenciales correspondientes a una sola variable independiente inalterados, o sea continuos. En resumen, el método es de naturaleza híbrida y genera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual dependiendo de su complejidad intrínseca puede resolverse analítica o numéricamente.

La simplicidad del método para el caso de una sola ecuación diferencial en derivadas parciales es inobjetable. Una aplicación del mismo para el problema clásico de Graetz con escasamente cuatro líneas distribuidas desuniformemente ha producido excelentes resultados en¹⁵. Sin embargo, su puesta en ejecución para situaciones más complicadas en donde la velocidad y la temperatura se desarrollan simultáneamente no ha sido realizada aún, según refleja una minuciosa revisión bibliográfica. A tal efecto, se propone en este artículo desarrollar una metodología capaz de acoplar las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento axial y energía que caracterizan la convección forzada. Para lograr este objetivo se pretende utilizar un número de líneas razonable y que a la vez produzca resultados confiables y rápidos.

Discretización de las ecuaciones

Se escogerá la posición axial z como la variable cuyas derivadas permanecerán inalteradas, o sea continuas. Esto obliga a una discretización de todas las derivadas con respecto a la otra variable, o sea la posición radial. El proceso de discretización se hará por intermedio de diferencias finitas tradicionales. Para ello, empleando una variable genérica Ψ e intervalos uniformes de tamaño $\Delta\eta$, se puede escribir:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\Big|_i = \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_{i-1}}{2\Delta\eta} \tag{34}$$

y

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2}\Big|_i = \frac{\Psi_{i+1} - 2\Psi_i + \Psi_{i-1}}{\Delta\eta^2} \tag{35}$$

De antemano, se sabe que para el eje de la tubería se cumple que:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\Big|_0 = \frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\eta^2} \tag{36}$$

conforme a la regla de L'Hopital del Cálculo Diferencial.

ECUACION DE LA ENERGIA

Al introducir las ecuaciones (34) y (35) en la ecuación (18) se obtiene

$$\frac{d\theta}{dz}\Big|_i = \frac{\frac{2}{Pe} \left[\frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta\eta^2} + \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta\eta} \left(\frac{1}{i\Delta\eta} - \frac{PeV_i}{2} \right) \right]}{U_i} \tag{37}$$

válida para las líneas $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

De igual manera, combinando las ecuaciones (36), (37) y (28) se arriba a la ecuación equivalente para el centro de la tubería. Esto es:

$$\frac{d\theta}{dz}\Big|_0 = \frac{4}{Pe} \frac{\theta_1 - \theta_0}{U_0 \Delta\eta^2} \tag{38}$$

Las condiciones de contorno de la entrada del tubo descritas por la ecuación (26) toman la forma

$$\theta_i = 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad \text{en } z = 0 \tag{39}$$

las cuales son compatibles con las ecuaciones (37) y (38) respectivamente.

Ecuación de continuidad (forma diferencial)

La ecuación (16) se expresa con la ayuda de una formulación atrasada para el gradiente radial de la velocidad radial. Esta vía origina una expresión explícita para el cálculo de dicha velocidad, dada por

$$V_i = \frac{V_{i-1} - \left. \frac{dU}{dz} \right|_i (\Delta\eta)_i}{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (40)$$

y

$$V_0 = 0$$

Entretanto, la misma ecuación (16) puede expresarse por intermedio de una formulación central para el gradiente radial de la velocidad radial. Esto da lugar a una expresión implícita de la forma

$$\frac{V_{i+1}}{2} - \frac{V_i}{i} - \frac{V_{i-1}}{2} = \Delta\eta \left. \frac{dU}{dz} \right|_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (41)$$

y

$$V_0 = V_n = 0$$

En resumen, el sistema de ecuaciones lineales que aporta la ecuación (41) puede resolverse fácilmente utilizando el algoritmo de eliminación Gaussiana.

Ecuación de la cantidad de movimiento axial

Antes de proceder a la discretización de esta ecuación, es necesario acoplarla a la ecuación de continuidad en su forma integral, o sea la ecuación (17b). Este proceso se logra utilizando el término del gradiente de presión axial. Para ello, se enumeran a continuación los pasos requeridos en la ecuación (16)

1. Dividir por U
2. Multiplicar cada término de la ecuación por $\eta d\eta$
3. Integrar cada término entre 0 y 1.

Asimismo, se sabe que

$$\int_0^1 \frac{\partial U}{\partial z} \eta d\eta = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 U \eta d\eta = \frac{\partial}{\partial z} (1/2) = 0 \quad (42)$$

Por lo tanto, esto permite despejar el gradiente de presión en la ecuación (16), quedando finalmente

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\int_0^1 \left[\frac{2}{Re} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) - V \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\eta}{U} d\eta \right]}{\int_0^1 \frac{\eta d\eta}{U}} \quad (43)$$

Esta relación aporta la magnitud que debe poseer el gradiente de presión para poder mantener el flujo. Posteriormente, la ecuación (43) se introduce en la ecuación (16), lográndose así el acoplamiento requerido. La integración numérica de la ecuación (43) se realiza utilizando el método de Simpson.

A la luz del desarrollo anterior, la ecuación discretizada que corresponde a la ecuación de cantidad de movimiento axial puede expresarse por

$$\left. \frac{dU}{dz} \right|_i = \frac{-\frac{dP}{dz} + \frac{2}{Re} \left[\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{\Delta\eta^2} + \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta\eta} \left(\frac{1}{i\Delta\eta} - \frac{V_i Re}{2} \right) \right]}{U_i} \quad (44)$$

Con el objeto de particularizar la ecuación precedente al centro de la tubería, se emplean las ecuaciones (20) y (36). Esta combinación da como resultado

$$\left. \frac{dU}{dz} \right|_0 = \frac{-\frac{dP}{dz} + \frac{4}{Re} \left(\frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta\eta^2} \right)}{U_0} \quad (45)$$

Finalmente, la condición de contorno asociada a la velocidad axial; o sea, la ecuación (19) se convierte en

$$U_i = 1, \quad z = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (46)$$

PROCEDIMIENTO DE SOLUCION

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias queda conformado por la ecuación de la energía (37) y (38), la ecuación de cantidad de movimiento (44) y (45) y las versiones explícita o implícita para la velocidad radial (40) o (41). Este grupo de ecuaciones, en unión de las condiciones de contorno respectivas, provee la formulación matemática que caracteriza al sistema físico de convección forzada del presente trabajo. Dicho sistema se resuelve numéricamente empleando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con las siguientes características computacionales:

1. 10 líneas uniformemente distribuidas en $0 < \eta < 1$
2. un paso axial ajustable
3. un tiempo de CPU promedio de un minuto en un Computador PDP-10

RESULTADOS Y DISCUSION

Los resultados numéricos que arroja el procedimiento expuesto anteriormente se enumeran a continuación:

Desarrollo hidrodinámico

$z/2Re$	fap. Re Este Trabajo	fap. Re Ref. (4)	% Error
0.001	353.21	344.13	+2.64
0.0005	151.10	154.42	-2.15
0.001	107.56	109.82	-2.06
0.005	51.08	51.82	-1.43
0.01	38.11	38.55	-1.14
0.05	22.09	21.72	+1.70
∞	16.00	16.00	0.00

TABLA I. Distribución del coeficiente de fricción aparente.

Shapiro et al.² realizaron una exhaustiva investigación experimental sobre el desarrollo hidrodinámico laminar en un tubo circular. Adicionalmente, Bender³ y Shah⁴ emplearon estos datos y los de otros investigadores y correlacionaron el coeficiente de fricción aparente en toda la extensión del tubo. La Tabla 1 recoge una comparación entre la correlación y los resultados numéricos aportados por el método de las líneas. La longitud de entrada hidrodinámica, vía el método de las líneas, es $z/2Re = 0.056$; mientras que el número incremental de presión desarrollado es $K_{\infty} = 1.23$. Ambos valores están en perfecta concordancia con los valores reportados por Shah y London¹².

Adicionalmente, la Figura 3 ilustra el desarrollo de la velocidad axial y adimensional en el centro del tubo. Asimismo, aparecen los valores numéricos calculados por Liu⁵ y Hornbeck⁹. La Figura 4 presenta una comparación con una colección de resultados numéricos y experimentales tomada de la referencia¹⁶. Por otro lado, la distribución de presión en función de la posición axial se dibuja en la Figura 5 y se compara con algunas referencias tomadas de¹⁶. Se observa claramente que la concordancia es satisfactoria en todos los casos probados.

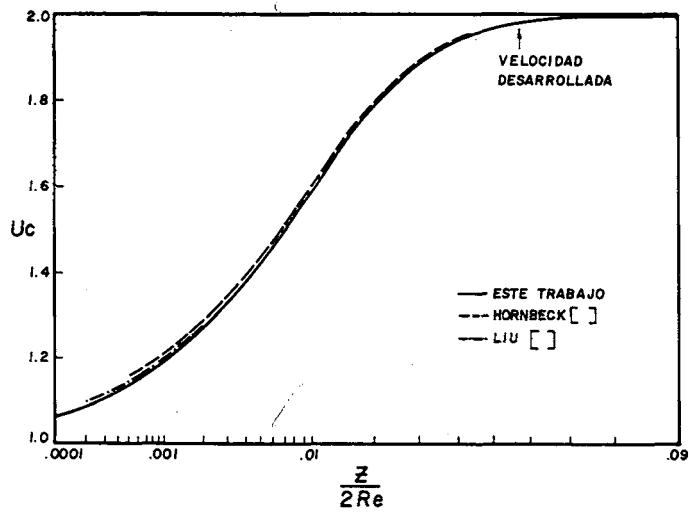


Figura 3. Desarrollo de la velocidad en el centro del tubo

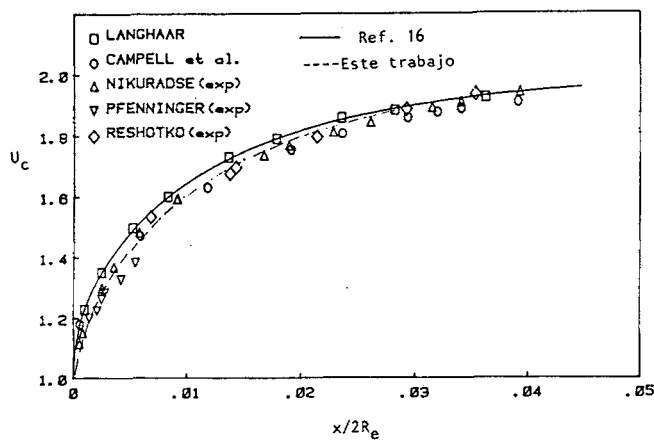


Figura 4. Comparación de la velocidad en el centro del tubo con datos experimentales.

Desarrollo simultáneo de la velocidad y de la temperatura

Históricamente, el primero en investigar este problema fue Kays⁷ en 1955. Sus resultados numéricos fueron calculados para $Pr = 0.7$ con el perfil de velocidad axial propuesto por Langhaar⁸ y sin tomar en cuenta la variación de la velocidad radial. Sus resultados subestiman considerablemente la temperatura volumétrica media a lo largo del tubo. Este efecto adverso puede apreciarse en la Figura 6 y es debido a la fuerte influencia que ejerce la velocidad radial sobre la temperatura en la región de entrada térmica. Hornbeck⁹ refinó la formulación original de Kays resolviendo por diferencias finitas el sistema parabólico de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales; o sea, las ecuaciones (16)–(20). El utilizó la ecuación (16) linealizada en una estación $z = z_1$ en base a una velocidad obtenida previamente en

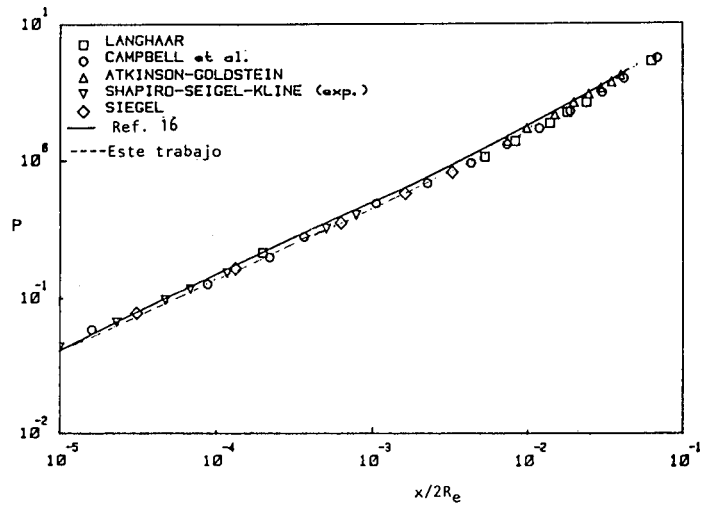


Figura 5. Comparación de la presión con datos experimentales.

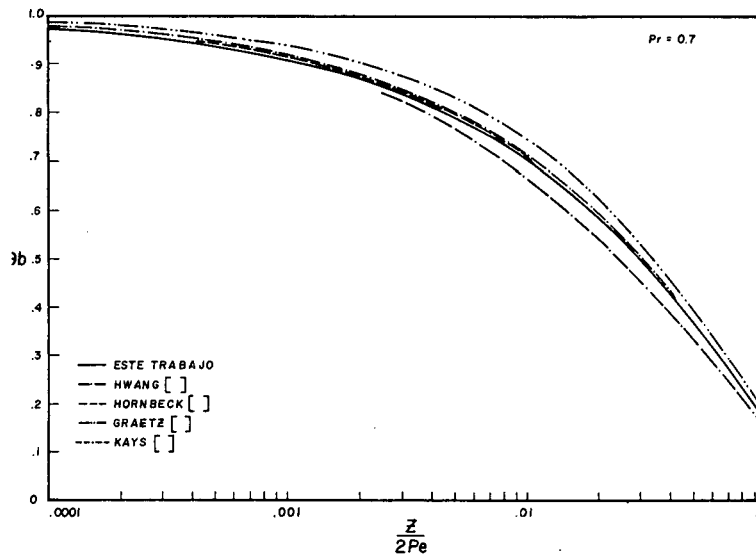


Figura 6. Distribución de la temperatura volumétrica media para $Pr = 0.7$.

una estación anterior, o sea en $z = z_1 - \Delta z$. Entretanto, Manohar¹⁰, al igual que Hwang y Shen¹¹ resolvieron numéricamente y sin linealizar el sistema parabólico de ecuaciones (16)–(18). Una inspección de los resultados de estos autores dibujados en la Figura 7 refleja que las curvas de Hornbeck⁹ y las de Hwang y Shen¹¹ son prácticamente inconfundibles con la curva correspondiente al método de las líneas. Como complemento adicional aparece dibujada la curva de la solución de Graetz para el caso de velocidad plenamente desarrollada. En efecto, esta curva constituye la cota superior que puede alcanzar la distribución de temperatura volumétrica media.

Tornando la discusión a las curvas que predicen el número de Nusselt local en la Figura 7 se observa una perfecta concordancia entre los valores aportados por MOL

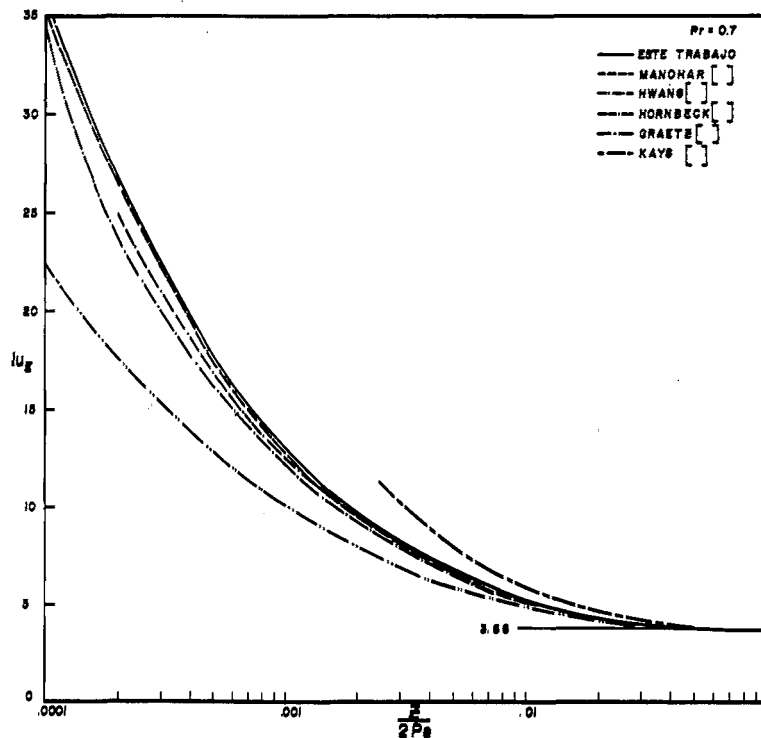


Figura 7. Distribución del número de Nusselt local para $Pr = 0.7$.

y los calculados por Manohar¹⁰ en toda la región de desarrollo térmico. A partir de la posición axial $z/zPe = 0.001$ se detecta una tendencia hacia la uniformidad de los resultados de los diversos autores. Sin embargo, debe aclararse que la desviación de la curva de Kays está causada por las consideraciones de la velocidad axial antes señalada. Cabe señalar que aunque las discrepancias visibles en la región $0.0001 < z/2Pe < 0.001$ pueden lucir significativas para fines de comparación, en realidad no lo son. Como se aprecia en la Figura 6 las separaciones de las curvas de la temperatura volumétrica media son ínfimas en esta región. Esta es la cantidad de mayor importancia, ya que permite calcular el calor transferido directamente usando la ecuación (31b). La Tabla 2 agrupa los valores numéricos de θ_b y Nu_z para $Pr = 0.7$ obtenidos en este trabajo. De aquí se desprende que el tamaño de la longitud de entrada térmica equivalga a $z/2Pe = 0.036$ usando el criterio convencional.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha adoptado exitosamente el método de las líneas (MOL) a la solución del problema que trata del desarrollo termohidráulico en tubos circulares. La presión que brinda la combinación del citado método empleando tan sólo 10 líneas espaciadas uniformemente entre el centro y la superficie del tubo y la integración numérica por Runge- Kutta es manifiesta. Los patrones estrictos

$z/2Pe$	θ_b	Nu_z
0.0001	0.969	36.32
0.0005	0.936	17.94
0.001	0.909	13.16
0.005	0.794	6.76
0.01	0.708	5.28
0.05	0.368	3.75
0.1	0.176	3.66
∞	0.000	3.66

TABLA II. Distribuciones de la temperatura volumétrica media y del número de Nusselt local para $Pr = 0.7$.

de comparación que se han empleado descansan sobre los resultados analíticos, numéricos y experimentales. A manera de comentario final se puede agregar que la incorporación de las propiedades termofísicas variables es muy sencilla siendo éste tema de un futuro trabajo.

NOMENCLATURA

- A área transversal del tubo, m^2
 c_p calor específico a presión constante, $J/Kg-C$
 D diámetro del tubo, m
 f_{ap} coeficiente de fricción aparente, ecuación (29)
 h coeficiente de convección, W/m^2-C
 k conductividad térmica, $W/m-C$
 \dot{m} flujo másico, Kg/s
 Nu_z Número de Nusselt local, hD/k
 \overline{Nu} Número de Nusselt medio, ecuación (33)
 P presión total, $(p - p_0)/\rho U_m^2$
 p presión, P_a
 Pr número de Prandtl, ν/α
 Q calor total transferido, W
 q densidad de flujo de calor, W/m^2
 Re número de Reynolds, $U_m D/\nu$
 r coordenada radial, m
 T temperatura, C
 U velocidad axial adimensional, u/U_m

U_m	velocidad media, m/s
u	velocidad axial, m/s
V	velocidad radial adimensional, v/U_m
v	velocidad radial, m/s
x	coordenada axial, m
z	coordenada axial adimensional, x/R

Letras griegas

α	difusividad térmica, m^2/s
η	coordenada radial adimensional, r/R
θ	temperatura adimensional, $(T - T_W)/(T_0 - T_W)$
μ	viscosidad dinámica, Pa - s
ν	viscosidad cinemática, m^2/s
ρ	densidad, Kg/m^3
Ψ	variable dependiente genérica
Ω	calor adimensional total, ecuación (31)

Subíndices

b	volumétrico medio
c	centro del tubo
i	contador
o	entrada
w	pared

REFERENCIAS

1. W.M. Kays y M.E. Crawford, "Convective Heat and Mass Transfer", McGraw-Hill, New York, (1980).
2. A.H. Shapiro, R. Siegel y S.J. Kline, "Friction Factor in the Laminar Entry Region of a Smooth Tube", *Proc. U. S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, New York, pp. 733-741, (1954).
3. E. Bender, "Druckverlust bei Laminarer Stromung in Rohreinlanf", *Chem.-Ing.-Tech.*, Vol. 11, pp. 682-686, (1969).
4. R.K. Shah, "A Correlation for Laminar Hydrodynamic Entry Length Solutions for Circular and Noncircular Ducts", *J. Fluids Engineering*, Vol. 100, pp. 177-179, (1978).
5. J. Liu, "Flow of Bingham Fluid in the Entrance Region of an Annular Tube", *M. S. Thesis*, University of Wisconsin- Milwaukee, (1974).
6. R.W. Hornbeck, "Laminar Flow in the Entrance Region of a Pipe", *Appl. Sci. Res.*, Vol. A13, pp. 224-232, (1964).
7. W.M. Kays, "Numerical Solutions for Laminar-Flow Heat Transfer in Circular Tubes", *Trans. ASME*, Vol. 77, pp. 1265-1274, (1955).
8. H.L. Langhaar, "Steady Flow in the Transition Length of a Straight Tube", *J. Appl. Mech.*, Vol. 9, pp. A55-A59, (1942).

9. R.W. Hornbeck, "An All Numerical Method for Heat Transfer in the Inlet of a Tube", *ASME Paper*, 65-WA/HT-36, (1965).
10. R. Manohar, "Analysis of Laminar-Flow Heat Transfer in the Entrance Region of Circular Tube", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 12, pp. 15-22, (1969).
11. G.J. Hwang y Ja-Pung Sheu, "Effect of Radial Velocity Component on Laminar Forced Convection in Entrance Region of a Circular Tube", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 17, pp. 1236-1239, (1974).
12. R.K. Shah y A.L. London, "*Laminar Flow Forced Convections in Ducts*", Academic Press, New York, (1978).
13. O.A. Liskovets, "The Method of Lines (Review)", *Differential Equations*, Vol. 1, pp. 1308-1323, (1965).
14. H. Schlichting, "*Boundary Layer Theory*", McGraw-Hill, New York, (1979).
15. A. Campo, U. Lacoa, J.C. Morales y R. Rangel, "Semi-Analytical Computation for Laminar Flow in the Thermal Entrance Region of Circular Tubes", "*ASEE Annual Conference*", Atlanta, (1985).
16. R. Lakshminarayanan y A. Haji-Sheikh, "An Aproximate Solution to Entrance Flow Problems", *In. Integral Methods in Science and Engineering*, Ed. F. R. Payne et al. Hemisphere, N. Y. (1986).