

ANÁLISIS DE GRADIENTES EN ELEMENTOS SINGULARES CUADRÁTICOS DE SERENDIPITY Y DE LAGRANGE

LUIS GAVETE,
FRANCISCO MICHAVILA

y
FELIX DIEZ

*Departamento de Cálculo Numérico e Informática
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas
Ríos Rosas, 21. 28003 Madrid
Universidad Politécnica*

RESUMEN

En el presente artículo se considera el tratamiento por el Método de Elementos Finitos de las singularidades que aparecen en la mecánica de la fractura en el caso elástico.

Para ello se realiza un análisis de los gradientes de los desplazamientos para los elementos singulares cuadráticos de Serendipity y de Lagrange, que tienen su nodo en la cuarta parte del lado. De todo ello se deducen las restricciones que deben verificar para que la singularidad quede adecuadamente modelizada.

Sin embargo, el tratamiento de singularidades se realiza también para otros elementos singulares cuadráticos de Serendipity y de Lagrange, y se realiza un estudio de los gradientes de los desplazamientos en el entorno del punto singular, demostrándose que se pueden aplicar en la modelización de grietas en régimen elástico.

Por último se presentan resultados numéricos sobre los elementos antes estudiados para comparar su exactitud.

SUMMARY

In this article we consider the finite element treatment of linear elasticity and particularly of the strain singularities of linear elastic fracture. In order to do this, we analyze first the approximate strain forms for certain singular elements, the so-called quarter point elements of Serendipity and Lagrange type.

For such elements we demonstrate the circumstances under which the approximate strain forms possess the required singular strain behaviour.

The treatment of singularities is not confined to quarter point elements. We made mention of other special singular elements of Serendipity and Lagrange type for treating singularities. The purpose of this paper is to know their strain behaviour and to show that they can be employed for linear elasticity fracture problems.

Numerical results about all these singular elements are presented in order to check their accuracy.

Recibido: Enero 1987

INTRODUCCION

Las ecuaciones propias de la elasticidad, con condiciones de contorno regulares, pueden ser resueltas de modo aproximado por el método de Elementos Finitos sin graves dificultades, siempre que se planteen sobre dominios convexos cuya frontera no presente puntos singulares.

Es en el momento en que aparecen singularidades, bien sea debidas a la continuidad de las condiciones de contorno, bien sea por la forma de la frontera, o por otros motivos, cuando el método de elementos finitos, en su forma clásica no obtiene buenos resultados.

En efecto, es sabido¹, que mientras el error que se comete por aplicación del método a problemas sin singularidades es del orden de h^2 , en el caso de pretender resolver un problema con singularidades las acotaciones del error en los entornos de los puntos singulares son de orden menor^{2, 3}, y en muchos casos la solución obtenida diferirá enormemente de la real.

Para vencer esta dificultad se han propuesto diferentes técnicas de modificación del método clásico. Entre ellas cabe señalar las siguientes:

- Refinamiento local del mallado.
- Aumento del espacio de funciones test (empleo de funciones singulares)⁴.
- Uso de elementos singulares, bien sea elementos isoparamétricos degenerados^{5, 6, 7}, bien sea introducir una modificación en las funciones de base^{8, 9}.

Una visión general del tema puede verse en¹⁰.

La eficiencia y exactitud de los elementos empleados por Akin⁸ varía, pero generalmente estos elementos presentan algunos puntos débiles tales como la incapacidad de modelizar cargas térmicas, debido a la pérdida de los términos de deformación constante; y la programación necesaria, así como el cálculo del factor de intensificación de tensiones, cuando se aplican a problemas de fractura.

Un análisis de la representación del gradiente (o de la deformación en el caso elástico) sobre los elementos degenerados se ha presentado recientemente en^{11, 12}. Un refinamiento de los métodos anteriores, basado en los mismos principios consiste en el uso de elementos finitos de transición rodeando los elementos singulares; en¹³ se hace uso de tales elementos y se presentan resultados sobre su aplicación. En¹⁴ se publican diferentes conclusiones obtenidas empleando elementos de Akin.

Ultimamente Manu¹⁵ desarrolló el elemento cuadrático de Lagrange completo para la modelización de singularidades del tipo $r^{-1/2}$ aunque sin presentar resultados numéricos. Dicho elemento, sin embargo, había sido previamente desechado por Ying¹⁶, como cuadrilátero, en la modelización de un único punto singular, llegándose en el presente artículo a resultados análogos por otro camino.

Por otra parte, siguiendo la técnica desarrollada por Aalto para problemas de flujo en medio poroso¹⁷, se puede emplear el elemento de Lagrange completo de 9 nodos en la modelización de singularidades para cualquier ángulo, $\pi < \alpha \leq 2\pi$, en el contorno (por su interior). La formulación sería análoga a la desarrollada por Aalto, salvo que habría que calcular también el nodo interior del elemento.

Resumiendo, tendríamos de este modo la posibilidad de modelizar solamente singularidades del tipo $r^{-1/2}$ con elementos como el de Manu¹⁵, o bien la posibilidad de modelizar singularidades en dominios no convexos con elementos como el de Aalto¹⁷, todo ello en campos escalares, y con la ventaja que supone, desde el punto de vista computa-

cional el empleo de estos elementos, que no requieren ninguna manipulación de los programas de elementos finitos existentes (a los que sólo se les exige, naturalmente, que tengan implementado el elemento cuadrilateral cuadrático completo o de Lagrange).

En el presente artículo se realiza también la extensión de ambos elementos al estudio del campo vectorial producido por una fractura en régimen elástico y se comparan sus resultados.

FORMULACION DE ELEMENTOS CUADRATICOS SINGULARES INCOMPLETOS O DE SERENDIPITY

Para estos elementos las deformaciones aproximadas son:

$$E_{11} = \frac{\partial U(\lambda, \mu)}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

sustituyendo $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$ y $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ se tiene:

$$E_{11} = \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) / |J| \quad (1)$$

Análogamente:

$$E_{22} = \frac{\partial V(\lambda, \mu)}{\partial y} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} \right) / |J| \quad (2)$$

y

$$E_{12} = \frac{\partial U(\lambda, \mu)}{\partial y} + \frac{\partial V(\lambda, \mu)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial V}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial U}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} \right) / |J| \quad (3)$$

En el caso de que consideremos el elemento cuadrilateral de 8 nodos isoparamétrico, tendremos las transformaciones:

$$\begin{aligned} x(\lambda, \mu) &= \sum_{k=1}^8 N_k(\lambda, \mu) x_k \\ y(\lambda, \mu) &= \sum_{k=1}^8 N_k(\lambda, \mu) y_k \end{aligned} \quad (4)$$

en donde (x_k, y_k) son las coordenadas de los nodos y N_k las funciones de forma.

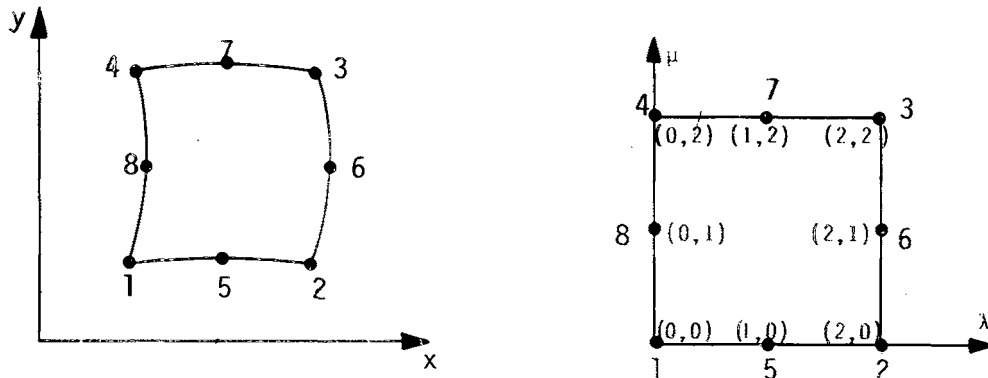


Figura 1. Elemento isoparamétrico cuadrilateral cuadrático (Serendipity).

Los desplazamientos se aproximan mediante las mismas funciones de base (formulación isoparamétrica) y por tanto:

$$U(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^8 N_k(\lambda, \mu) U_k \quad (5)$$

$$V(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^8 N_k(\lambda, \mu) V_k$$

donde U_k, V_k son los desplazamientos en los nodos. Operando, tendremos:

$$\begin{aligned} x(\lambda, \mu) &= \alpha_1 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 \mu + \alpha_4 \lambda^2 + \alpha_5 \mu^2 + \alpha_6 \lambda \mu + \alpha_7 \lambda^2 \mu + \alpha_8 \lambda \mu^2 \\ y(\lambda, \mu) &= \gamma_1 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3 \mu + \gamma_4 \lambda^2 + \gamma_5 \mu^2 + \gamma_6 \lambda \mu + \gamma_7 \lambda^2 \mu + \gamma_8 \lambda \mu^2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$U(\lambda, \mu) = \beta_1 + \beta_2 \lambda + \beta_3 \mu + \beta_4 \lambda^2 + \beta_5 \mu^2 + \beta_6 \lambda \mu + \beta_7 \lambda^2 \mu + \beta_8 \lambda \mu^2$$

$$V(\lambda, \mu) = \delta_1 + \delta_2 \lambda + \delta_3 \mu + \delta_4 \lambda^2 + \delta_5 \mu^2 + \delta_6 \lambda \mu + \delta_7 \lambda^2 \mu + \delta_8 \lambda \mu^2$$

siendo $\alpha_k, \gamma_k, \beta_k$ y δ_k ($k=1, \dots, 8$) función de x_k, y_k, U_k y V_k ($k=1, \dots, 8$)

Mediante las expresiones anteriores se puede estudiar la forma de las deformaciones en el entorno del vértice de la fractura.

Este estudio ha sido llevado a cabo en¹¹ de forma sistemática para los elementos isoparamétricos (degenerados o no, y de transición bi y tridimensionales). Los resultados más importantes obtenidos son:

- Cuadrilátero con nodos a "1/4". En este caso la singularidad que aparece no es del orden $r^{-1/2}$ salvo que los lados del elemento sean rectos y estén sobre los ejes x e y .

Sin embargo, aún en este caso la singularidad en sentido radial entre los ejes "x" e "y" no es del orden de $r^{-1/2}$.

- b) Triángulo con nodos a "1/4", que proviene de haber colapsado un cuadrilátero con nodos a "1/4".
En este caso, la singularidad que aparece para cualquier sentido radial es del orden de $r^{-1/2}$, en el caso en que el lado colapsado coincida con el punto singular.
- c) Triángulo de 6 nodos con nodos a "1/4". En este caso la singularidad conseguida en el punto singular es del orden de $r^{-1/2}$.

FORMULACION DE ELEMENTOS CUADRATICOS SINGULARES COMPLETOS O DE LAGRANGE

El elemento cuadrático completo utiliza una interpolación de segundo grado de Lagrange unidimensional en las direcciones λ y μ .

Considerando el elemento standard cuadrado con $\lambda \in [0,2]$ y $\mu \in [0,2]$ (Figura 2), las funciones de forma correspondientes $N_{ij}(\lambda, \mu)$ serán los productos de las funciones $N_i(\lambda), N_j(\mu)$ ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) correspondientes a la interpolación polinomial de Lagrange sobre el soporte $\{0, 1, 2\}$.

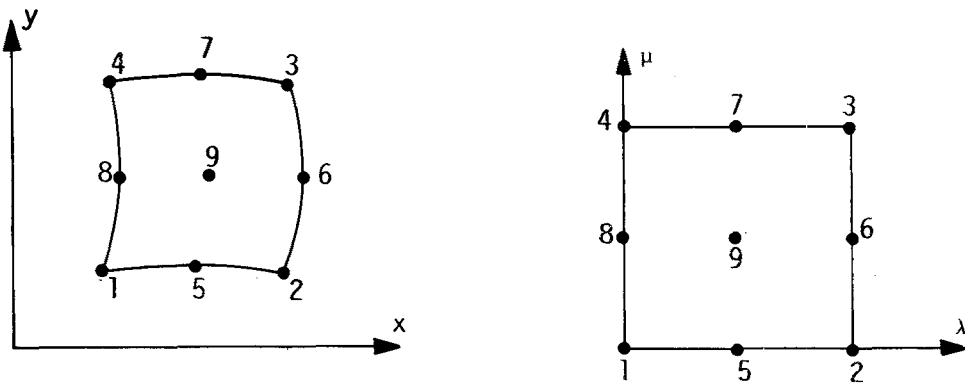


Figura 2. Elemento cuadrático completo (Lagrange)

Este elemento es la imagen del elemento standard bajo la transformación:

$$\begin{aligned} x(\lambda, \mu) &= \sum_{k=1}^9 N_k(\lambda, \mu) x_k \\ y(\lambda, \mu) &= \sum_{k=1}^9 N_k(\lambda, \mu) y_k \end{aligned} \quad (7)$$

donde (x_k, y_k) son las coordenadas de los nodos y N_k las funciones de forma. (Se ha sustituido el doble subíndice i, j por el subíndice único correspondiente a cada uno de los 9 nodos).

Como el elemento se formula isoparamétricamente, los desplazamientos serán aproximados por:

$$U(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^9 N_k(\lambda, \mu) U_k \quad (8)$$

$$V(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^9 N_k(\lambda, \mu) V_k$$

donde (U_k, V_k) son los desplazamientos nodales horizontal y vertical respectivamente.

De las expresiones (7) y (8), operando se llega a:

$$\begin{aligned} x(\lambda, \mu) &= \alpha_1 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 \mu + \alpha_4 \lambda^2 + \alpha_5 \mu^2 + \alpha_6 \lambda \mu + \alpha_7 \lambda^2 \mu + \alpha_8 \lambda \mu^2 + \alpha_9 \lambda^2 \mu^2 \\ y(\lambda, \mu) &= \gamma_1 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3 \mu + \gamma_4 \lambda^2 + \gamma_5 \mu^2 + \gamma_6 \lambda \mu + \gamma_7 \lambda^2 \mu + \gamma_8 \lambda \mu^2 + \gamma_9 \lambda^2 \mu^2 \\ U(\lambda, \mu) &= \beta_1 + \beta_2 \lambda + \beta_3 \mu + \beta_4 \lambda^2 + \beta_5 \mu^2 + \beta_6 \lambda \mu + \beta_7 \lambda^2 \mu + \beta_8 \lambda \mu^2 + \beta_9 \lambda^2 \mu^2 \\ V(\lambda, \mu) &= \delta_1 + \delta_2 \lambda + \delta_3 \mu + \delta_4 \lambda^2 + \delta_5 \mu^2 + \delta_6 \lambda \mu + \delta_7 \lambda^2 \mu + \delta_8 \lambda \mu^2 + \delta_9 \lambda^2 \mu^2 \end{aligned} \quad (9)$$

donde las constantes son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 \\ \alpha_2 &= -\frac{3}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 + 2x_5 \\ \alpha_3 &= -\frac{3}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_4 + 2x_8 \\ \alpha_4 &= \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - x_5 \\ \alpha_5 &= \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_4 - x_8 \\ \alpha_6 &= \frac{9}{4} x_1 + \frac{3}{4} x_2 + \frac{1}{4} x_3 + \frac{3}{4} x_4 - 3x_5 - x_6 - x_7 - 3x_8 + 4x_9 \\ \alpha_7 &= -\frac{3}{4} x_1 - \frac{3}{4} x_2 - \frac{1}{4} x_3 - \frac{1}{4} x_4 + \frac{3}{2} x_5 + x_6 + \frac{1}{2} x_7 + x_8 - 2x_9 \\ \alpha_8 &= -\frac{3}{4} x_1 - \frac{1}{4} x_2 - \frac{1}{4} x_3 - \frac{3}{4} x_4 + x_5 + \frac{1}{2} x_6 + x_7 + \frac{3}{2} x_8 - 2x_9 \\ \alpha_9 &= \frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_2 + \frac{1}{4} x_3 + \frac{1}{4} x_4 - \frac{1}{2} x_5 - \frac{1}{2} x_6 - \frac{1}{2} x_7 - \frac{1}{2} x_8 + x_9 \end{aligned} \quad (10)$$

con expresiones similares para β_k , γ_k y δ_k , $k=1, 2, \dots, 9$ referentes respectivamente a y_k , U_k y V_k .

Las deformaciones elásticas presentan, como es conocido, una singularidad del tipo $r^{-1/2}$ alrededor de la grieta, y por tanto para obtener soluciones aceptables en las proximidades de la misma, habrá de comprobarse que las deformaciones aproximadas, que representaremos por E_{11} , E_{12} y E_{22} , son de la forma $r^{-1/2}$.

Consideremos sobre el plano (x, y) el elemento de la figura 3. Impongamos sobre él las siguientes restricciones:

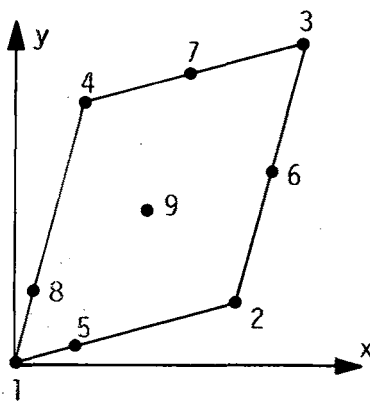


Figura 3. Elemento singular de 9 nodos.

1. Los lados son rectos.
2. $x_1 = y_1 = 0$

De las anteriores se sigue (dado que el elemento es singular con nodos a "1/4") que:

$$\begin{aligned} x_5 &= \frac{1}{4} x_2 & y_5 &= \frac{1}{4} y_2 \\ x_8 &= \frac{1}{4} x_4 & y_8 &= \frac{1}{4} y_4 \\ x_6 &= \frac{x_2 + x_3}{2} & y_6 &= \frac{y_2 + y_3}{2} \\ x_7 &= \frac{x_3 + x_4}{2} & y_7 &= \frac{y_3 + y_4}{2} \end{aligned}$$

3. Supongamos, además, que el nodo interior se sitúa de tal forma que:

$$x_9 = \frac{x_5 + x_7}{2} \quad \text{e} \quad y_9 = \frac{y_6 + y_8}{2}$$

De las restricciones indicadas podemos deducir que en (10) se anulan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Es decir:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_4 \lambda^2 + \alpha_5 \mu^2 + \alpha_6 \lambda \mu + \alpha_7 \lambda^2 \mu + \alpha_8 \lambda \mu^2 + \alpha_9 \lambda^2 \mu^2 \\ y &= \gamma_4 \lambda^2 + \gamma_5 \mu^2 + \gamma_6 \lambda \mu + \gamma_7 \lambda^2 \mu + \gamma_8 \lambda \mu^2 + \gamma_9 \lambda^2 \mu^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Consideraremos separadamente los casos $\lambda=0, \mu=0$ y $\lambda \neq 0$ y $\mu \neq 0$.

a) Caso $\lambda = 0$.

Se trata de estudiar el comportamiento a lo largo del lado 1-8-4. En este caso de (11):

$$x = \alpha_5 \mu^2$$

$$y = \gamma_5 \mu^2$$

$$\text{luego } r = \left(\alpha_5^2 + \gamma_5^2 \right)^{1/2} \mu^2$$

El determinante jacobiano vale:

$$|J| = (\alpha_6 \mu + \alpha_8 \mu^2) 2\mu \gamma_5 - 2\mu \alpha_5 (\gamma_6 \mu + \gamma_8 \mu^2)$$

y el valor de la deformación E_{22} vale, en el caso de que el lado 1-8-4 coincida con el eje y ($\alpha_5 = \alpha_8 = 0$):

$$E_{22} = \frac{(\delta_3 + 2\delta_5) \alpha_6 \mu}{2\alpha_6 \gamma_5 \mu^2}$$

y como $r = \gamma_5 \mu^2$ se tendrá:

$$E_{22} = \frac{\delta_2}{2\gamma_5^{1/2}} \cdot r^{-1/2} + \frac{\delta_5}{\gamma_5} = A_1 + A_2 r^{-1/2} \quad (12)$$

Por otro lado, tendríamos operando de la misma forma:

$$E_{11} = A_3 + A_4 r^{-1/2} + A_5 r^{1/2} \quad (13)$$

y análogamente se deduce:

$$E_{12} = A_6 + A_7 r^{-1/2} + A_8 r^{1/2} \quad (14)$$

En (12), (13) y (14) el término dominante cuando r tiende a cero es $r^{-1/2}$ como se deseaba. (Las ctes. A_1, \dots, A_8 no dependen más que de los valores $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ de (10)). Si no hacemos coincidir el lado 1-8-4 con el eje y , entonces la deformación no es de la forma deseada.

b) Caso $\mu = 0$.

En este caso estudiamos el comportamiento a lo largo de la línea 1-5-2.

Comenzaremos con E_{11} ; es fácil comprobar que como en el caso anterior E_{11} no es de la forma deseada, pero si imponemos la restricción de hacer coincidir el lado 1-5-2 con el eje x entonces se tiene:

$$E_{11} = B_1 + B_2 r^{-1/2} \quad (15)$$

del mismo modo:

$$E_{22} = B_3 + B_4 r^{-1/2} + B_5 r^{1/2} \quad (16)$$

y análogamente:

$$E_{12} = B_6 + B_7 r^{-1/2} + B_8 r^{1/2} \quad (17)$$

c) Caso $\lambda \neq 0$ y $\mu \neq 0$.

No se puede obtener en este caso relaciones sencillas de (11) entre λ, μ y r por lo que la deformación no es de la forma deseada.

Del análisis anterior hay que destacar que la condición que nos da la ubicación del nodo interior en el elemento completo es fundamental para poder obtener las expresiones (12) a (17), y por tanto un elemento con comportamiento singular en los contornos.

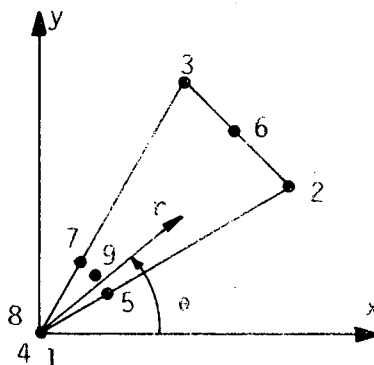


Figura 4. Elemento singular triangular cuadrático completo.

Este elemento se comporta de modo similar por tanto al elemento cuadrilateral de 8 nodos (ver¹¹) y aunque había sido desechado previamente por Ying¹⁶ como cuadrilateral, esto se debe a que no se había impuesto precisamente la restricción adecuada en la posición del nodo interior.

El elemento de 9 nodos de la sección anterior puede degenerarse para convertirlo en un elemento triangular de 7 nodos (Figura 4), si el lado 1-8-4 es colapsado en un punto. Supongamos además que el elemento es singular, es decir, se tiene:

$$1.- \quad x_1 = x_4 = x_8 = y_1 = y_4 = y_8 = 0$$

$$2.- \quad x_5 = \frac{1}{4} x_2 \qquad y_5 = \frac{1}{4} y_2$$

$$x_7 = \frac{1}{4} x_3 \qquad y_7 = \frac{1}{4} y_3$$

$$x_6 = \frac{x_2 + x_3}{2} \qquad y_6 = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

3.—Las coordenadas del punto interior vienen dadas (Manu¹⁵) por:

$$\begin{aligned} x_9 &= \frac{x_2 + x_3}{8} \\ y_9 &= \frac{y_2 + y_3}{8} \end{aligned} \tag{18}$$

En estas condiciones se sigue que:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_4 \lambda^2 + \alpha_7 \mu \lambda^2 = \lambda^2 (\alpha_4 + \alpha_7 \mu) \\ y &= \gamma_4 \lambda^2 + \gamma_7 \mu \lambda^2 = \lambda^2 (\gamma_4 + \gamma_7 \mu) \end{aligned} \tag{19}$$

A lo largo de una línea radial sobre el plano (x-y) debe ser (figura 4):

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta = \text{cte.}$$

y por tanto $\mu = \text{cte.}$ y r es proporcional a λ^2 . El determinante jacobiano es:

$$|J| = 2\lambda(\alpha_4 + \alpha_7 \mu) \lambda^2 \gamma_7 - 2\lambda(\gamma_4 + \gamma_7 \mu) \lambda^2 \alpha_7$$

La deformación E_{11} vale:

$$\begin{aligned} E_{11} &= ((\beta_2 + 2\beta_4 \lambda + \beta_6 \mu + 2\beta_7 \lambda \mu + \beta_8 \mu^2 + 2\beta_9 \lambda \mu^2) \lambda^2 \gamma_7 - \\ &- (\beta_3 + 2\beta_5 \mu + \beta_6 \lambda + \beta_7 \lambda^2 + 2\beta_8 \mu \lambda + 2\beta_9 \lambda^2 \mu) 2\lambda(\gamma_4 + \gamma_7 \mu)) / |J| = \quad (20) \\ &= C'_1 \lambda^{-2} + C'_2 \lambda^{-1} + C'_3 = C_1 r^{-1} + C_2 r^{-1/2} + C_3 \end{aligned}$$

Análogamente para E_{22} y E_{12} tendremos:

$$E_{22} = C_4 r^{-1} + C_5 r^{-1/2} + C_6 \quad (21)$$

$$E_{12} = C_7 r^{-1} + C_8 r^{-1/2} + C_9 \quad (22)$$

En (20), (21) y (22) los términos dominantes para pequeños valores de r son en r^{-1} . Si obligamos a que los desplazamientos en los nodos 1-4-8 coincidan:

$$u_1 = u_4 = u_8 \quad (23)$$

$$v_1 = v_4 = v_8$$

se obtiene $\beta_3 = \beta_5 = \delta_3 = \delta_5 = 0$, y por tanto, $C_1 = C_4 = C_7 = 0$, con lo que E_{11} , E_{22} y E_{12} son de la forma deseada.

Hay que observar sin embargo que si la condición (23) no se impone el elemento es válido para modelizar fracturas en el caso de plasticidad perfecta¹⁸ donde la singularidad en la deformación es de orden r^{-1} . Señalemos también que el elemento se comporta de forma análoga al triángulo de 6 nodos degenerado¹¹. Por fin es importante reseñar que tanto en este elemento como en el anterior existe un término que representa deformaciones constantes (esencial cuando se trata con cargas térmicas).

Tenemos por tanto y resumiendo un elemento, el cuadrilateral, que presenta el comportamiento deseado en los contornos y otro, el triangular degenerado, que se comporta de la forma adecuada en cualquier dirección radial.

Seguindo con este desarrollo podemos estudiar el empleo de triángulos de 7 nodos con nodos a "1/4" en vez de emplear el triángulo colapsado. El cálculo se efectúa igual

que anteriormente y los resultados obtenidos indican que siempre que el nodo interior se sitúe de acuerdo con la condición dada por Manu¹⁵, la singularidad conseguida en el punto singular es del orden de $r^{-1/2}$.

ELEMENTOS CUADRATICOS DE SERENDIPITY Y DE LAGRANGE QUE INCLUYEN LA SINGULARIDAD

Se puede extender la formulación desarrollada por Aalto¹⁷ al caso del elemento completo de 9 nodos para lo cual tomamos un elemento cuadrilateral con coordenadas λ, μ , ($0 \leq \lambda \leq 2$), ($0 \leq \mu \leq 2$), en las que incluiremos el nodo central correspondiente a los valores $\lambda = 1, \mu = 1$, y establecemos la correspondencia (ver figura 5):

$$r_i = \left[\frac{a^{\pi/\alpha}}{4} \lambda_i^2 + \frac{b^{\pi/\alpha}}{4} \mu_i^2 \right]^{\alpha/\pi} \quad (24)$$

$$\psi_i = \frac{2\alpha}{\pi} \arctan \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{\pi/2\alpha} \frac{\mu_i}{\lambda_i} \right]$$

a partir de las cuales se pueden obtener las coordenadas de cada nodo del elemento finito (figura 7), que como puede verse en¹⁷ contendrá la singularidad que queremos resolver.

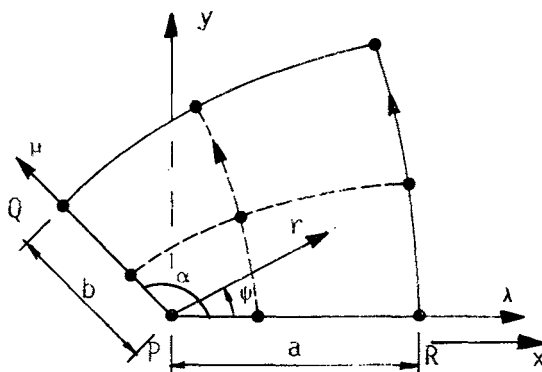


Figura 5. Localización de nodos en el elemento cuadrático completo. Caso general.

Si aplicamos las fórmulas (24) al caso particular de fractura $\alpha = \pi$ tendremos, teniendo en cuenta que $x = r \cos \psi$ e $y = r \sin \psi$, lo siguiente:

$$x_i = \frac{a}{4} \lambda_i^2 - \frac{b}{4} \mu_i^2 \quad (25)$$

$$y_i = \frac{\sqrt{ab}}{2} \lambda_i \mu_i$$

y en el caso en que tomemos $a=b$ obtenemos el elemento de la figura donde podemos ver cómo los nodos más cercanos al punto singular situados sobre el eje x , se sitúan en la cuarta parte del lado. El nodo central que se ha añadido para “completar” el elemento también se sitúa a la cuarta parte, en este caso de la altura del elemento. (Ver figura 6).

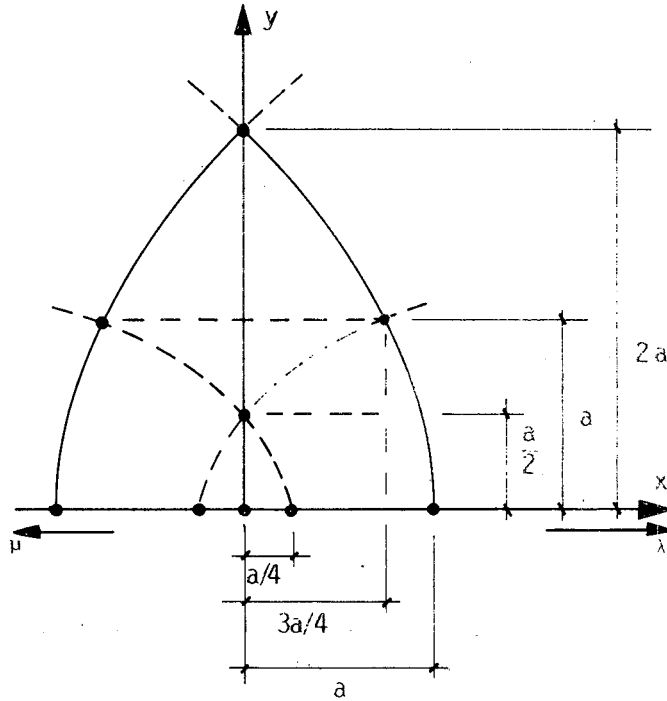


Figura 6. Elemento cuadrático completo. Caso de fractura.

Por todo ello, vemos que el elemento desarrollado por Aalto¹⁷ se puede fácilmente extender al problema de modelización de fracturas en régimen elástico pero sin embargo, conviene comprobar que modeliza adecuadamente la singularidad $r^{-1/2}$. Para ello vamos a calcular deformaciones en el caso del elemento de la figura 6, con y sin el nodo central, es decir, para los elementos de Serendipity o incompleto y de Lagrange o completo. En este caso particular tendremos:

$$x = \frac{a}{4}(\lambda^2 - \mu^2) \quad y = \frac{a}{2}\lambda\mu \quad (26)$$

$$r = \frac{a}{4}(\lambda^2 + \mu^2) \quad (27)$$

y

$$|J| = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = \frac{a^2}{4}(\lambda^2 + \mu^2) \quad (28)$$

Los valores de las deformaciones serán, en el caso del elemento cuadrático de Serendipity:

$$E_{22} = \frac{\delta_3 \lambda + \delta_2 \mu + \delta_6 \lambda^2 + 2(\delta_4 + \delta_5) \lambda \mu + \delta_6 \mu^2 + \delta_7 \lambda^3 + 2 \delta_8 \lambda^2 \mu + 2 \delta_7 \lambda \mu^2 + \delta_8 \mu^3}{\frac{a}{2} (\lambda^2 + \mu^2)} \quad (29)$$

$$E_{11} = \frac{\beta_2 \lambda - \beta_3 \mu + 2 \beta_4 \lambda^2 - 2 \beta_5 \mu^2 + \beta_7 \lambda^2 \mu - \beta_8 \lambda \mu^2}{\frac{a}{2} (\lambda^2 + \mu^2)} \quad (30)$$

$$E_{12} = [(\delta_2 - \lambda_2) \lambda + 2(\delta_4 - \beta_4) \lambda^2 - (\delta_3 + \beta_3) \mu - 2(\delta_5 + \beta_5) \mu^2 - 2 \beta_6 \lambda \mu + (\delta_7 - 3 \beta_7) \lambda^2 \mu - (\delta_8 + 3 \beta_8) \lambda \mu^2] / [a(\lambda^2 + \mu^2)] \quad (31)$$

(En la tabla 1 pueden verse los valores obtenidos a lo largo de los ejes x e y del elemento. Para un mayor detalle de los cálculos puede verse¹⁹).

Tabla 1. Representación de la deformación. Elemento cuadrático. (Serendipity).

	$\lambda = 0$	$\mu = 0$	$\lambda = \alpha \mu$
E_{22}	$A_1 \cdot \frac{1}{\int r} + A_2 + A_3 \int r$	$B_1 \cdot \frac{1}{\int r} + B_2 + B_3 \int r$	$C_1 \cdot \frac{1}{\int r} + C_2 + C_3 \int r$
E_{11}	$D_1 \cdot \frac{1}{\int r} + D_2$	$E_1 \cdot \frac{1}{\int r} + E_2$	$F_1 \cdot \frac{1}{\int r} + F_2 + F_3 \int r$
E_{12}	$G_1 \cdot \frac{1}{\int r} + G_2$	$H_1 \cdot \frac{1}{\int r} + H_2$	$I_1 \cdot \frac{1}{\int r} + I_2 + I_3 \int r$

siendo $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i, I_i$, ($i=1, 2, 3$) función de δ_k, β_k , ($k=1, \dots, 8$) y α una constante.

En el caso del elemento cuadrático de Lagrange, tendremos:

$$E_{11} = (\beta_2 \lambda - \beta_3 \mu + 2\beta_4 \lambda^2 - 2\beta_5 \mu^2 + \beta_7 \lambda^2 \mu - \beta_8 \lambda \mu^2) / \frac{a}{2} (\lambda^2 + \mu^2) \quad (32)$$

$$E_{12} = ((\delta_2 - \beta_2) \lambda + 2(\delta_4 - \beta_4) \lambda^2 - (\delta_3 + \beta_3) \mu - 2(\delta_5 + \beta_5) \mu^2 - 2\beta_6 \lambda \mu + (\delta_3 - 3\beta_7) \lambda^2 \mu - (\delta_8 + 3\beta_8) \lambda \mu^2 - 4\beta_9 \lambda^2 \mu^2) / a (\lambda^2 + \mu^2) \quad (33)$$

$$E_{22} = (\delta_3 \lambda + \delta_2 \mu + \delta_6 \lambda^2 + 2(\delta_4 + \delta_5) \lambda \mu + \delta_6 \mu^2 + \delta_7 \lambda^3 + 2\delta_8 \lambda^2 \mu + 2\delta_7 \lambda \mu^2 + \delta_8 \mu^3 + 2\delta_9 \lambda^3 \mu + 2\delta_9 \lambda \mu^3) / \frac{a}{2} (\lambda^2 + \mu^2) \quad (34)$$

que toman los siguientes valores:

Tabla 2. Representación de la deformación. Elemento cuadrático (Lagrange)

	$\lambda = 0$	$\mu = 0$	$\lambda = \alpha \mu$
E_{22}	$A_1 \frac{1}{\sqrt{r}} + A_2 + A_3 r$	$B_1 \frac{1}{\sqrt{r}} + B_2 + B_3 r$	$C_1 \frac{1}{\sqrt{r}} + C_2 + C_3 \sqrt{r} + C_4 r$
E_{11}	$D_1 \frac{1}{\sqrt{r}} + D_2$	$E_1 \frac{1}{\sqrt{r}} + E_2$	$F_1 \frac{1}{\sqrt{r}} + F_2 + F_3 \sqrt{r}$
E_{12}	$G_1 \frac{1}{\sqrt{r}} + G_2$	$H_1 \frac{1}{\sqrt{r}} + H_2$	$I_1 \frac{1}{\sqrt{r}} + I_2 + I_3 \sqrt{r} + I_4 r$

En donde hemos tenido en cuenta que $r = \frac{a}{4} (\lambda^2 + \mu^2)$ y $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i, I_i$ ($i=1, 2, 3, 4$) son función en general de β_k, δ_k , ($k=1, \dots, 9$). Para un mayor detalle de los cálculos puede verse²⁰. Como vemos en las tablas para valores de r pequeños, el término dominante sería $r^{-1/2}$. Por tanto, vemos que para ambos elementos la singularidad se modeliza de forma correcta.

RESULTADOS NUMERICOS

Vamos a resolver $\Delta u = 0$ en Ω , siendo $\Omega = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.5\}$, y con las condiciones de contorno mixtas siguientes:

$$u = 1 \quad \text{en } x = 0, 0 \leq y \leq 0.5 ; \quad u = 0 \quad \text{en } y = 0, 0.5 \leq x \leq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0.5, 0 \leq x \leq 1 ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 1, 0 \leq y \leq 0.5$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0, 0 \leq x \leq 0.5$$

En este problema existe una singularidad del tipo $r^{-1/2}$ en $x=0.5, y=0$ y ha sido resuelto utilizando elementos isoparamétricos degenerados y elementos cuadráticos de Aalto completos e incompletos.

El modelo realizado junto con un detalle de la zona singular "A" puede verse en las figuras siguientes:

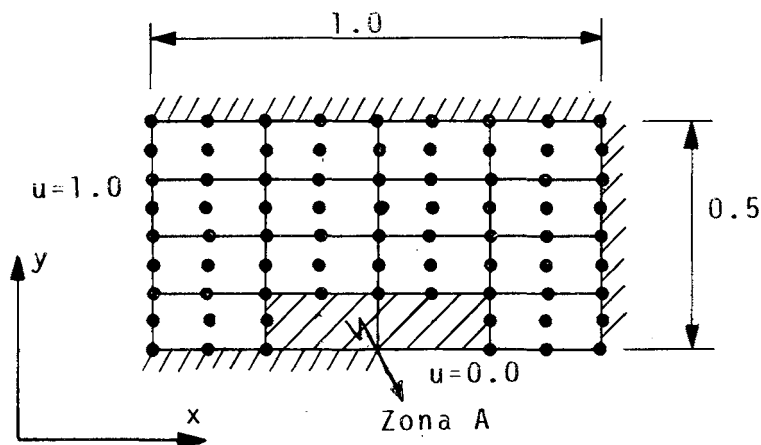


Figura 7. Ejemplo estudiado.

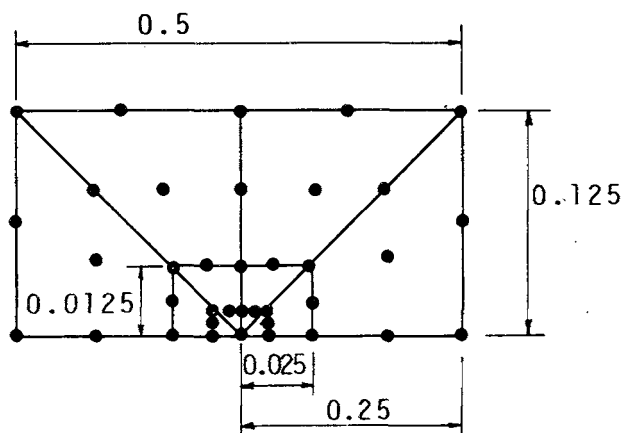


Figura 8. Detalle modelo D1. Zona A.

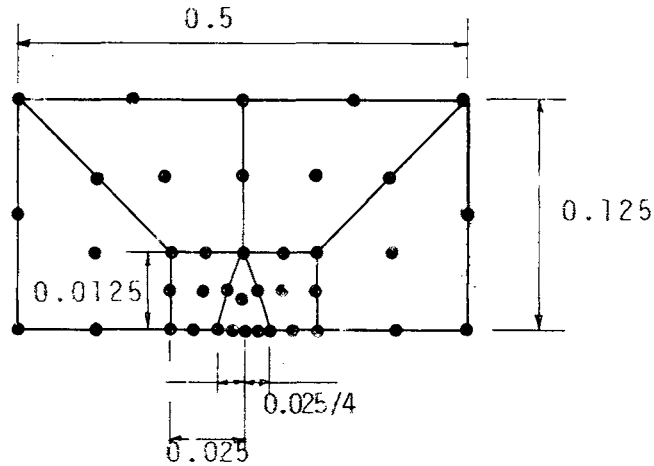


Figura 9. Detalle modelo F1. Zona A.

En las curvas que siguen (figuras 10 y 11), se ha representado la curva correspondiente a $(\frac{\partial u}{\partial y})_{x=0.5}$ utilizando diferencias finitas centrales. Como vemos los resultados obtenidos para ambos modelos son muy parecidos. El modelo *D1* corresponde al elemento utilizado por Manu y el modelo *F1* corresponde al de Aalto; en ambos casos se ha utilizado el mismo orden de integración.

La comparación de ambos elementos con el elemento de Serendipity con nodos a "1/4" refleja que los resultados obtenidos son similares. El modelo *F1* tiene un elemento menos que el denominado *D1* y además hay que tener en cuenta que sólo se utiliza un elemento singular frente a 4 elementos singulares del modelo *D1*.

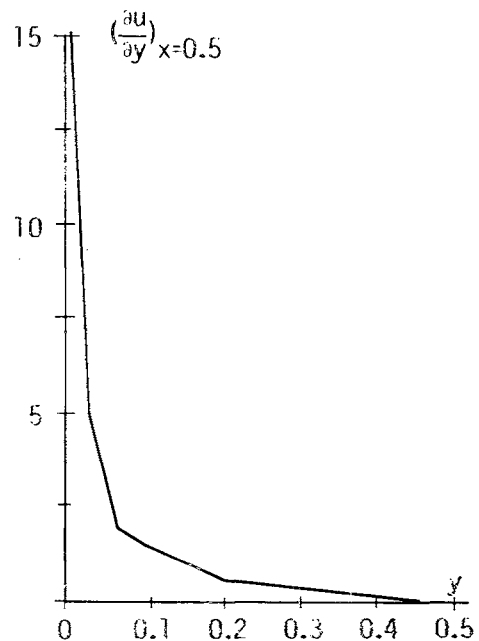
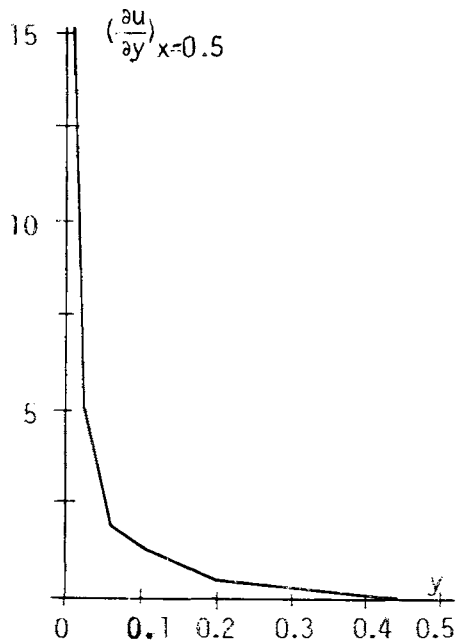


Figura 10. Modelo F1 orden de integración 2 x 2. Figura 11. Modelo D1 orden de integración 2 x 2.

CONCLUSIONES

Los elementos que tienen sus nodos en la cuarta parte del lado, deben emplearse con cuidado ya que los elementos cuadrilaterales, sean de Serendipity o de Lagrange, sólo modelizan la singularidad a lo largo de sus lados en el caso de que estén dirigidos según los ejes y además no modelizan la singularidad en sentido radial.

Se ha demostrado que los elementos cuadráticos isoparamétricos completos que incorporan la solución analítica conocida de la singularidad en un medio infinito, se pueden utilizar en el estudio de la mecánica de fractura en régimen elástico; el método es aplicable igualmente a los elementos incompletos. Dichos elementos son de tipo cuadrilateral y representan en las direcciones radiales que parten del punto singular, una función de orden $r^{-1/2}$ en el caso de fractura.

En el caso de emplear los elementos triangulares de Lagrange isoparamétricos completos con nodos a "1/4" y situando el nodo central tal como se indica en este artículo, la singularidad obtenida es del orden $r^{-1/2}$ pero contiene también el término r^{-1} que sirve para modelizar la fractura en régimen perfectamente plástico. Lo mismo puede decirse respecto del elemento triangular cuadrático sin nodo central.

En todos los casos, los resultados obtenidos han sido similares lo cual dice mucho a favor de los elementos que incorporan la solución analítica, dada su mayor versatilidad para aproximar singularidades que se producen en el contorno de dominios no convexos acudiendo a una simple relocalización de algunos de los nodos del elemento singular.

REFERENCIAS

1. Ph. G. Ciarlet, P. A. Raviart, "General Lagrange and Hermite Interpolation in R^n with applications to finite elements," *Arch. Rat. Mech. Anal.* Vol. **46**, pp. 177-199, (1972).
2. F. Michavila, L. Gavete, "Aproximación de un problema elíptico singular mediante elementos finitos isoparamétricos degenerados," *Rev. Real Academia de las Ciencias*. Tomo LXXVIII, cuaderno 4.º, pág. 559-570, (1984).
3. E. Stephan, J. R. Whiteman, "Singularities of the Laplacian at corners and edges of three-dimensional domains and their treatment with finite element methods," *Tech. Rep., Bicom 81/1*, Int. of Compt. Math. Brunel V, (1981).
4. G. Fix, "Higher-Order Rayleigh-Ritz approximations," *J. Math. Mech.*, Vol. **18**, pp. 645-657, (1969).
5. R. S. Barsoum, "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **10**, pp. 25-37, (1976).
6. R. D. Henshell, K. G. Shaw, "Crack tip finite element are unnecessary," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **9**, pp. 495-507, (1975).
7. P. P. Lyn, A. R. Ingraffea, "Transition elements to be used with quarter-point crack tip elements," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **12**, pp. 1031-1036, (1978).
8. J. E. Akin, "The generation of elements with singularities," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **10**, pp. 1249-1259, (1976).
9. J. E. Akin, "Elements for the analysis of line singularities," *MAFELAP-1978*, Ed. Academic Press, pp. 65-75, (1979).
10. C. Conde, L. Gavete, F. Michavila, "Sobre ciertos métodos numéricos para el tratamiento de singularidades en problemas de elasticidad," *II Encuentro del Grupo Español de Fractura. Anales de Mecánica de la Fractura n.º 2*, pp. 95-105, (1985).
11. G. M. Thompson, J. R. Whiteman, "Analysis of strain representation in linear elasticity by both singular and nonsingular finite elements," *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. **2**, pp. 85-104, (1985).
12. F. Michavila, "On different numerical methods to solve singular boundary problems," *S.I.A.N.* (1985) (a aparecer).

13. F. Michavila, L. Gavete, "On the use of quadratic transition element." *Proceedings of Third Int. Conf. Num. Meth. Fract. Mech.* pp. 95-111. Pineridge Press. Swansea, (1984).
14. F. Michavila y L. Gavete, "Some results in two and three dimensional singular finite elements with applications to fracture mechanics." *Fourth International Symposium on Numerical Methods in Engineering.* Innovative Numerical Methods in Engineering. pp. 411-417. Atlanta (Georgia), (1986).
15. C. Manu, "Complete quadratic isoparametric finite elements in fracture mechanics analysis." *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. **21**, pp. 1547-1553, (1985).
16. Lung-an Ying. "A note on the singularity and the strain energy of singular elements." *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. **18**, pp. 31-39, (1982).
17. J. Aalto, "Singularity elements for seepage problems." *Int. J. Num. Anal. Meth. Geom.* Vol. **9**, pp. 185-196, (1985).
18. R. S. Barsoum, "Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements." *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. **11**, pp. 85-98, (1977).
19. F. Díez, L. Gavete y F. Michavila, "Nuevas técnicas de tratamiento de singularidades en campos escalares y vectoriales." *III Encuentro del Grupo Español de Fractura. Anales de Mecánica de la Fractura* n.º **3**, pp. 61-73, (1986).
20. L. Gavete, F. Michavila y F. Díez, "Elementos cuadráticos completos para modelización de singularidades." *II Simposium sobre Aplicación del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería.* Tomo **3**. pp. A-71-A88. Barcelona, (1986).

