

## METODOS DE SEGUIMIENTO DE LA INTERFASE PARA PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES DE FRONTERA MOVIL II

GUILLERMO MARSHALL  
CECILIA REY\*

y  
LANCE SMITH\*\*

\* *Centro de Cálculo Científico, Comisión Nacional  
de Energía Atómica, 1429 Buenos Aires, Argentina*

\*\* *Department of Mathematics, Columbia University,  
New York, NY 10027, USA*

### RESUMEN

En un trabajo previo se introduce un método de seguimiento de un frente móvil para la solución de problemas de Stefan unidimensionales. El método consiste en la formulación del problema de Stefan como un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias de valores iniciales para el seguimiento de la interfase acoplado con una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico para el problema de difusión.

En el marco de este método se presenta un nuevo algoritmo de cálculo de paso constante en el tiempo y en el espacio (salvo en el último nodo que es variable), en el que el problema de valores iniciales se resuelve con un integrador robusto; en el mismo la evaluación funcional se efectúa por una discretización implícita de la ecuación parabólica. Se presentan resultados numéricos para problemas de Stefan unidimensionales de una sola fase y con trayectorias de interfase rectas y curvas. Las principales ventajas del método presentado son: utilización de integradores robustos con ajuste automático de la precisión y la posibilidad de extensión del método a problemas unidimensionales de varias fases.

### SUMMARY

In a previous work, a method to follow a mobil front for Stefan's unidimensional problems solutions is introduced. This method consists in formulating Stefan's problem as an ordinary differential equations problem with inicial values for the following of the interphase coupled with parabolique type equation in parcial derivation for the difusion problem.

In the frame of this method a new calculus algorithm of constant steps in time and space is presented (except in the last node which is variable), in which the inicial values problem is resolved with a strong integrator; in this method also, the funcional evaluation is done by an implicit discretization of the parabolique equation. Numerical results for Stefan's single phase and with curved and straight interphase trayectorias unidimensional problems are presented. The principal advantages of this method are: utilization of strong integrators with automatic ajustment of the precision and the extention possibilities of the method to several phases unidimensional problems.

Recibido: Diciembre 1985

## INTRODUCCION

Un problema de frontera móvil o problema de Stefan es un problema no lineal de valores iniciales y de contorno con una frontera (o frente) móvil cuya posición es desconocida a priori y debe ser determinada como parte de la solución. Las ecuaciones diferenciales de tipo parabólico que gobiernan la difusión del calor con cambio de fase constituyen una clase importante de problemas de Stefan. Una excelente introducción al tema se encuentra, por ejemplo, en el trabajo de Tarzia.<sup>7</sup>

Entre los métodos más utilizados para el estudio del problema de Stefan se encuentran los métodos de diferencias finitas y elementos finitos. Ambos métodos pueden ser clasificados en dos categorías principales: los métodos que siguen la discontinuidad o frente móvil, por lo tanto resuelven el problema diferencial en un dominio no rectangular (variable en el tiempo); y los métodos que utilizan un dominio rectangular (fijo) con la ayuda de una formulación débil o generalizada del problema diferencial.

Los métodos de seguimiento de la interfase que utilizan diferencias finitas, y que de aquí en adelante llamaremos simplemente métodos de seguimiento del frente, pueden ser clasificados como métodos de malla fija y métodos de malla variable. En los primeros el dominio espacio-temporal es subdividido en un número finito de celdas de igual tamaño y la trayectoria del frente no necesariamente coincide con los nodos de la malla. En el método de malla variable el dominio espacio-temporal es subdividido en un número finito de celdas rectangulares con un solo lado de igual tamaño, la subdivisión del otro lado es tal que la trayectoria del frente coincide con los nodos de la malla. En el trabajo de Marshall,<sup>6</sup> que contiene una breve reseña bibliográfica sobre los métodos antes citados, se presenta un nuevo método de seguimiento de un frente consistente en la formulación del problema de Stefan unidimensional como una ecuación diferencial que describe el movimiento del frente acoplada con una ecuación en derivadas parciales que gobierna el proceso de difusión. Esta formulación, que otorga igual peso al avance del frente y al proceso de difusión conduce naturalmente a una aproximación en diferencias consistente con el problema diferencial. Se introduce un procedimiento de paso de tiempo variable en el cual la ecuación para el avance del frente es aproximada con un esquema de paso entero de tipo predictor-corrector de segundo orden y la ecuación de difusión es aproximada con un esquema implícito ponderado en el tiempo. El método resulta ser muy eficaz para algunos problemas, pero presenta una limitación importante; no puede ser utilizado en problemas de Stefan con más de un frente. Esto se debe a que distintos frentes avanzan con velocidades diferentes y hacen imposible la coincidencia de todas las trayectorias con los nodos de una malla espacialmente uniforme. Además en problemas de Stefan de un solo frente con trayectoria parabólica (cóncava hacia arriba) el estado estacionario es difícilmente alcanzable por métodos de malla variable como el mencionado, dado que en algún momento del cálculo la variable independiente cae fuera del dominio de integración y el método numérico diverge.

En este trabajo se propone un nuevo método cuya formulación coincide con la introducida por Marshall<sup>6</sup> y que comparte algunas de las características de los métodos de malla fija y variable, *i.e.*, es un método de malla fija donde para cada paso temporal el paso espacial es fijo salvo el último que es variable, de forma tal que la posición del frente es considerada como el último nodo de la malla. Hemos denominado a esta técnica "método de ajuste local de malla" y tiene cierta analogía con los métodos de seguimiento de discontinuidades de dinámica de gases desarrollada por Glimm et al.<sup>2</sup> El método propuesto posee todas las ventajas del método de Marshall y ninguno de sus inconvenientes, permitiendo además la utilización de un integrador robusto de ecua-

ciones diferenciales ordinarias con ajuste automático de paso temporal, lo que otorga una considerable ventaja de orden práctico.

En este trabajo se presenta el método de ajuste local de malla en sus dos variantes: con y sin ajuste automático del paso temporal y su aplicación a problemas de frontera móvil con frentes cuya trayectoria es lineal, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Además se presenta una comparación con los resultados numéricos obtenidos con otros métodos.

### FORMULACION DEL PROBLEMA DE STEFAN

Presentamos la formulación del problema de Stefan siguiendo el trabajo de Marshall<sup>6</sup> y utilizando como modelo el problema presentado en Hoffmann.<sup>3</sup> El problema de Stefan unidimensional de una fase consiste en encontrar la ecuación del frente  $S(t)$  que satisface el problema de valores iniciales:

$$S'(t) = \frac{ds}{dt} = - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x = S(t), \quad t > 0 \quad (2.1)$$

$$S(0) = 0 \quad (2.2)$$

y el valor de la función  $u(x,t)$  en la región  $0 \leq x \leq S(t)$  que satisface la siguiente ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq S(t), \quad t > 0 \quad (2.3)$$

con las condiciones iniciales y de contorno:

$$u = 0, \quad 0 \leq x \leq S(t), \quad t=0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^t, \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (2.5)$$

$$u = 0, \quad x = S(t), \quad t > 0 \quad (2.6)$$

Este problema admite una solución exacta cuya ecuación resulta

$$u(x,t) = e^{t-x} - 1$$

y la trayectoria del frente es una línea recta descrita por

$$S(t) = t$$

La figura 2.1 ilustra la traza exacta del frente en el plano  $x-t$  y la figura 2.4 la solución  $u(x,t)$  en el plano  $x-t$ .

Por medio de una transformación de coordenadas es fácil demostrar que el problema de Stefan planteado es no lineal (ver por ejemplo Cohen y Tadjbakhsh<sup>1</sup> o Marshall<sup>6</sup>).

A continuación presentamos la formulación de los dos problemas de Stefan restantes utilizados en este trabajo. El problema de Stefan de una fase, unidimensional y con frente cóncavo hacia arriba consiste en las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.6) y la condición de borde izquierdo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-e^{1/4}}{2\sqrt{t}}, \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (2.7)$$

cuya solución exacta es:

$$u(x,t) = e^{1/4} [\operatorname{erf}(1/2) - \operatorname{erf}(z)]$$

donde  $z = x/2\sqrt{t}$

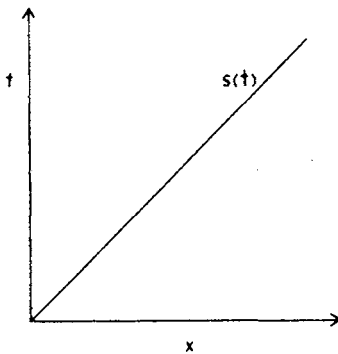


Figura 2.1.— Taza exacta del frente recto en el plano  $x-t$ .

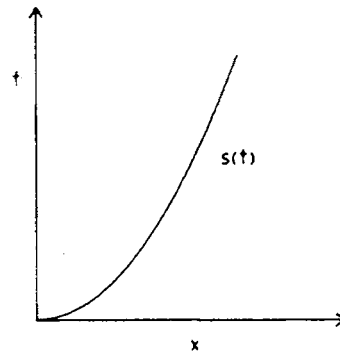


Figura 2.2.— Taza exacta del frente cóncavo hacia arriba en el plano  $x-t$ .

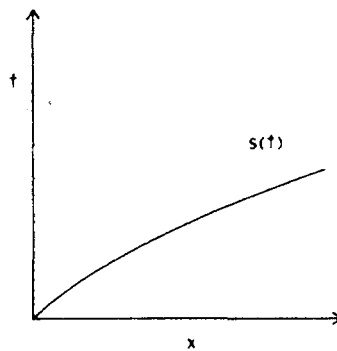


Figura 2.3.— Taza exacta del frente cóncavo hacia abajo en el plano  $x-t$ .

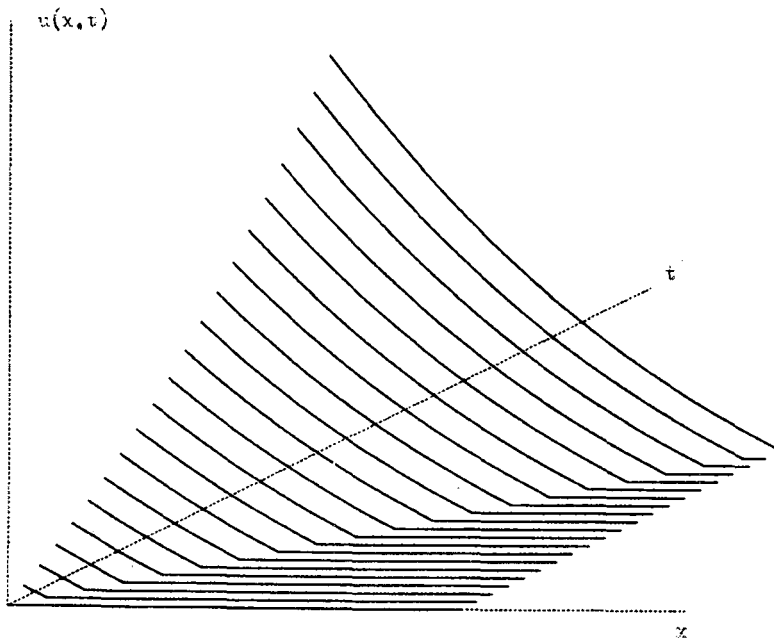


Figura 2.4.— Solución exacta en el plano  $x-t$  del problema de Stefan de frente recto.

y  $erf(z)$  es la función de error definida por

$$erf(z) = \int_0^z e^{-z^2} dz$$

La trayectoria del frente es una curva cóncava hacia arriba descrita por:

$$S(t) = \sqrt{t}$$

Las figuras 2.2 y 2.5 muestran la traza exacta del frente y la solución exacta  $u(x, t)$  en el plano  $x-t$ , respectivamente.

El problema de Stefan unidimensional de una fase y con frente cóncavo hacia abajo (ver Hoffmann<sup>4</sup>) consiste en encontrar  $S(t)$  y  $u(x, t)$  tal que

$$\frac{ds}{dt} = -(2t + 1) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x = S(t), \quad t > 0 \tag{2.8}$$

$$S(0) = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (2t + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq S(t), \quad t > 0 \tag{2.10}$$

$$u = 0, \quad x = S(t), \quad t \geq 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{t(t+1)}, \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (2.12)$$

cuya solución exacta es:

$$u(x,t) = e^{t(t+1)-x} - 1$$

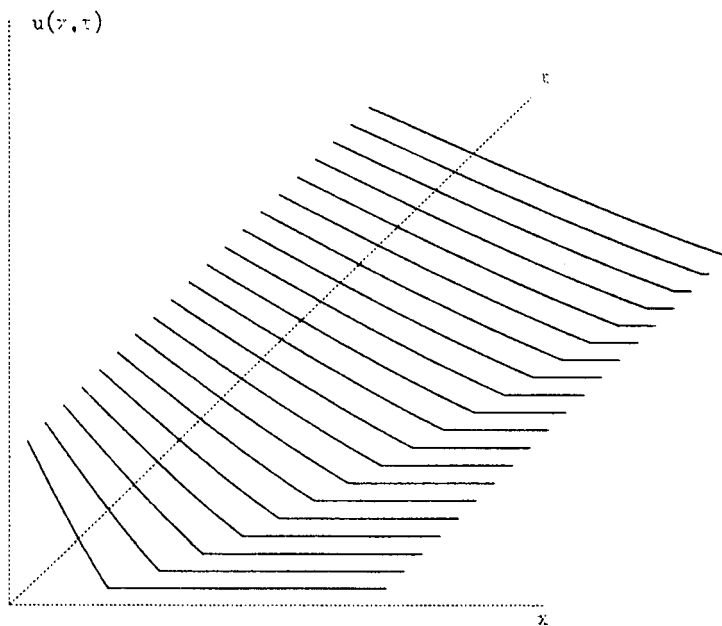


Figura 2.5.— Solución exacta en el plano  $x-t$  del problema de Stefan con frente cóncavo hacia arriba.

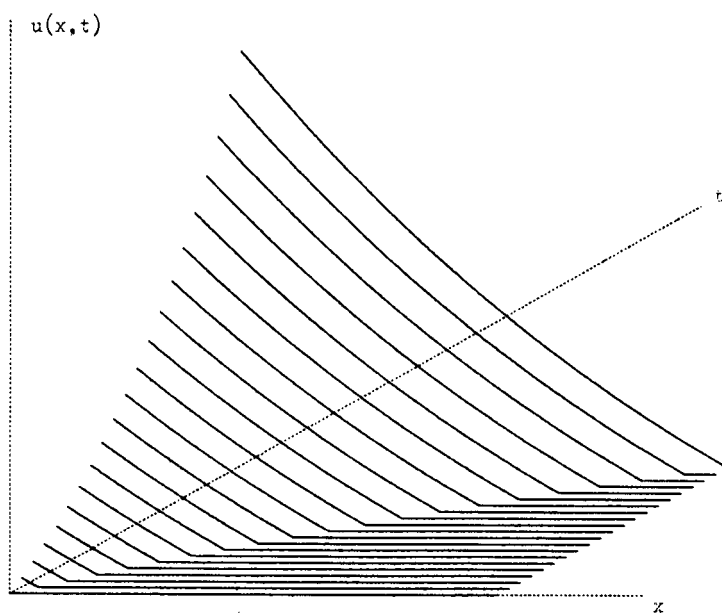


Figura 2.6.— Solución exacta en el plano  $x-t$  del problema de Stefan con frente cóncavo hacia abajo.

La trayectoria del frente es una curva cóncava hacia abajo descrita por

$$S(t) = t(t+1)$$

En la figura 2.3 y 2.6 se presentan la traza exacta del frente y la solución exacta  $u(x,t)$  en el plano  $x-t$ , respectivamente.

### EL PROBLEMA NUMERICO

En esta sección presentamos la implementación numérica del método del ajuste local de malla utilizado para la solución de los problemas de Stefan de la sección anterior. Discretizamos el dominio no rectangular de integración.

$$G: \{ (x,t) / 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq S(t) \} , T > 0$$

con una malla rectangular igualmente espaciada en la dirección  $x$ . Los pasos de tiempo son indicados con  $h$  y  $k$ , respectivamente. Como es usual  $u(x,t) = u(ih,nk) = u_i^n$  indica el valor de la solución numérica para  $x=ih$  y  $t=nk$  ( $i,n$  enteros positivos). En lo que sigue nos referiremos a los métodos de malla fija, en cuyo caso la trayectoria del frente no necesariamente coincide con un nodo ya que el paso de tiempo es fijo. Queda claro que el problema principal reside en el cálculo de la posición del frente. Asumiendo que la posición del frente y la función  $u(x,t)$  son conocidos en el nivel temporal  $t^n$  y suponiendo en una primera estimación que el frente en  $t^{n+1}$  está ubicado, en una configuración de malla fija, como se ilustra en la figura 3.1, el problema es encontrar la posición correcta del frente  $S(t)$  y la función  $u(x,t)$  en el nivel  $t^{n+1}$ .

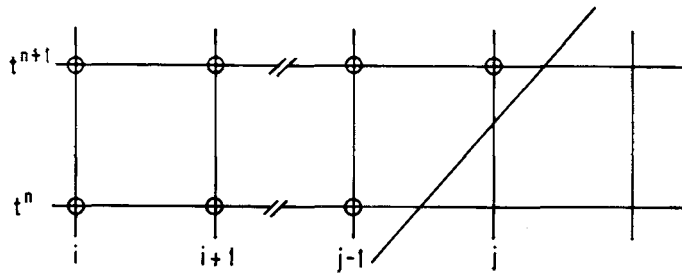


Figura 3.1.— Posición del frente en una configuración de malla fija

A tal fin el problema de valores iniciales (2.1) - (2.2) que describe el movimiento del frente es aproximado con un esquema predictor-corrector de la forma

$$\frac{S^{*n+1} - S^n}{k} = F(S,t)^n \tag{3.1}$$

$$\frac{S^{n+1} - S^n}{k} = \beta F(S^*,t)^{n+1} + (1 - \beta) F(S,t)^n \tag{3.2}$$

donde  $\beta$  es un coeficiente de ponderación comprendido entre los valores 0 y 1 y  $F(S, t)^n$  y  $F(S^*, t)^{n+1}$  representan el término de la derecha en la igualdad (2.1) evaluado en los niveles temporales  $t^n$  y  $t^{n+1}$ , respectivamente. La evaluación de la función  $F(S^*, t)^{n+1}$  es obtenida por medio de la solución aproximada de la ecuación parabólica (2.3) con un esquema implícito de tiempo ponderado de la forma

$$\frac{u_i^{*n+1} - u_i^n}{k} = \theta \delta u^{*n+1} + (1 - \theta) \delta u^n \tag{3.3}$$

donde  $\delta$  indica el operador standard en diferencias finitas centradas de tres puntos y  $\theta$  es un coeficiente de ponderación comprendido entre los valores 0 y 1. Los diferentes valores de  $\theta$  determinan una familia de esquemas implícitos. Entonces, para avanzar la solución de  $t^n$  a  $t^{n+1}$  las ecuaciones (3.1) a (3.3) se resuelven en forma iterativa y se considera que se obtiene convergencia numérica si en dos iteraciones sucesivas cualesquiera los valores de las incógnitas difieren en un valor menor que el de una constante prefijada.

En lo que sigue presentamos la implementación del método de ajuste local de malla. El cálculo de la posición del frente en el nivel temporal  $t^{n+1}$  (discutida más adelante) es realizada de forma tal que se satisfaga la siguiente condición

$$0 \leq S^{n+1} - S^n > h$$

donde  $S^n$  indica la coordenada  $x$  en  $t^n$  de la posición del frente. Esta condición de la máxima distancia que puede avanzar el frente proviene del hecho de que una condición CFL de la forma

$$\frac{k}{h} < \frac{1}{s}$$

debe ser satisfecha y de consideraciones físicas (el frente nunca retrocede porque el flujo en el borde izquierdo se supone que es siempre positivo). Por lo tanto la posición del frente en  $t^{n+1}$  puede caer en cualquier punto entre A y B como se muestra en la figura 3.2.

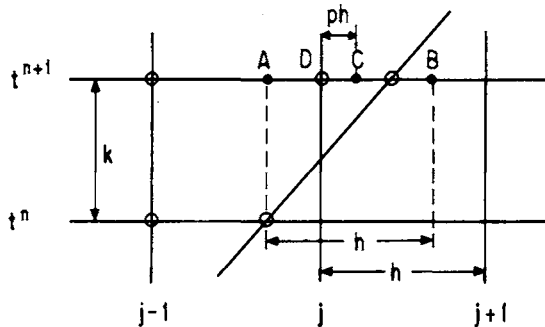


Figura 3.2. Detalle de la posición del frente en una configuración de malla fija.



Para evitar valores muy pequeños de  $p$  se establece un valor mínimo  $p=0.1$  (punto  $C$  en la figura 3.2) y se realiza el siguiente procedimiento:

- I) Si en  $t^{n+1}$  la posición del frente cae a la derecha del punto  $C$ , el punto  $D$  es agregado como un nodo más de la malla (el número total de nodos se incrementa en 1).
- II) Si en  $t^{n+1}$  la posición del frente cae a la izquierda del punto  $C$ , el punto  $D$  no se agrega a la malla (el número total de nodos es el mismo que en  $t^n$ ).

En ambos casos la posición del frente es el último nodo de la malla. En el apéndice se discuten detalles de la implementación del método del ajuste local de malla.

Una alternativa para la solución del problema de valores iniciales (2.1) - (2.2) es la utilización de un integrador robusto de ecuaciones diferenciales ordinarias con ajuste automático del paso temporal. En este trabajo hemos utilizado un reemplazo del esquema predictor-corrector (3.1) - (3.2) un método de Runge-Kutta de orden 6.

La fórmula general del método de Runge-Kutta de orden 6 para resolver el problema de valores iniciales (2.1) - (2.2) es:

$$t^{n+1} = t^n + \gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2 + \dots + \gamma_6 K_6 \tag{3.4}$$

donde

$$\begin{aligned} K_1 &= hF(S^n, t^n) \\ K_2 &= hF(S^n + \alpha_2 h, t^n + \lambda_{21} K_1) \\ &\vdots \\ K_6 &= hF(S^n + \alpha_6 h, t^n + \lambda_{61} K_1 + \dots + \lambda_{65} K_5) \end{aligned} \tag{3.5}$$

y  $F(x, t) = -u_x(x, t)$

$\gamma_i, \alpha_i, \gamma_{ij}$  ctes.

La evaluación de la función  $F(x, t)$  implica:

- a) Calcular el valor de  $u(x, t)$  en el nivel  $t^{n+1}$
- b) A partir de a) calcular una aproximación de  $-u_x$ .  
Para esto usamos la aproximación de segundo orden

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{2h} \tag{3.6}$$

## RESULTADOS NUMERICOS

Presentamos los resultados numéricos obtenidos con el método del ajuste local de malla en sus dos variantes: la primera variante utiliza un esquema predictor-corrector de segundo orden para el avance del frente, mientras que la segunda utiliza un integrador robusto con ajuste automático del paso de tiempo. Con la segunda variante se pretende obtener una mayor precisión con la ventaja del ajuste automático del paso de tiempo. Se utilizan 3 ejemplos constituidos por un frente recto, un frente cóncavo hacia arriba y un frente cóncavo hacia abajo que determinan situaciones típicas que se pueden presentar en la práctica. Con estos ejemplos estudiamos la eficiencia y el rango de validez del método propuesto. Los resultados numéricos fueron obtenidos con un sistema IBM 370 con CUP BASF 7/68. Los programas fueron escritos en lenguaje FORTRAN VS y ejecutados bajo VMCMS. El plan de esta sección es el siguiente: para cada uno de los tres problemas test elegidos se presentan 2 series de experimentos, la primera serie corresponde al método del ajuste local la malla con el predictor-corrector, la segunda serie utiliza la variante del integrador robusto. Finalmente y con fines comparativos se presenta una nueva serie de experimentos en donde se muestran los resultados obtenidos para los tres tipos de frentes utilizando el método de malla variable de Marshall<sup>6</sup>.

En la tabla IA se presentan para el problema de Stefan con frente recto los resultados obtenidos con el método de ajuste local de malla en la variante predictor-corrector (MALM-PC). La tabla muestra el error calculado como la diferencia entre la solución exacta y la numérica para distintos tamaños de malla junto con los tiempos de cómputo empleados y el número promedio de iteraciones internas. En la tabla IB se presentan para el mismo problema de Stefan con frente recto los resultados obtenidos con el método de ajuste local de malla en la variante integrador robusto con ajuste automático de paso de tiempo utilizando la rutina DVERK de IMSL<sup>5</sup> (MALM-DVERK).

En las tablas IIA y IIB se presentan para el problema de Stefan con frente cóncavo hacia arriba los resultados numéricos obtenidos con ambas variantes, respectivamente. En las tablas IIIA y IIIB se muestran los resultados para el problema de Stefan con frente cóncavo hacia abajo. En todos los ensayos numéricos se fijó una precisión de  $10^{-5}$ .

Las tablas IA y B, IIA y B, IIIA y IIIB muestran que el método de ajuste local de malla en sus dos versiones funciona correctamente para los tres tipos de frentes. El error es del mismo orden a pesar de que la segunda variante utiliza un método de Runge-Kutta de sexto orden. Esto es así dado que el error global depende de la malla espacial que es la misma para ambos métodos. El tiempo de cómputo resulta ser netamente favorable a la variante predictor-corrector. Aparentemente esta última variante sería mucho más ventajosa que la utilización de la rutina DVERK, sin embargo la variante predictor-corrector ha requerido un trabajo previo de optimización difícil de contabilizar (hay un juego 2 parámetros) mientras que la variante que usa la subrutina DVERK presenta la ventaja de tener que optimizar solamente un parámetro. Esto es muy importante cuando el problema de Stefan es más complejo y donde el "tunning" es más arduo.

En las tablas IVA, IVB y IVC se presenta la serie de experimentos que muestran los resultados numéricos obtenidos con el método de malla variable con predictor-corrector (MMV-PC) de Marshall<sup>6</sup> para los tres tipos de frentes; recto, cóncavo hacia arriba y cóncavo hacia abajo. Esta serie fue utilizada con el objeto de analizar la eficiencia computacional de los métodos involucrados. Es conveniente destacar que tanto para este último método como para el método del ajuste local de malla en la variante

predictor-corrector es necesario realizar una serie de ensayos previos con diferentes parámetros numéricos ( $\beta$  y  $\theta$ ) a los efectos de obtener los valores óptimos que minimizan el error y el tiempo de cómputo, y que estos parámetros varían con el tamaño de la malla. De la comparación de los resultados numéricos de esta última serie con los correspondientes al método MALM-PC y MALM-DVERK se observa que estos últimos son más precisos (en algunos casos la diferencia es de un orden de magnitud). Además, en el caso del frente cóncavo hacia arriba el nuevo método en sus dos variantes funciona correctamente mientras que el método de MMV-PC diverge.

### CONCLUSIONES

Se ha presentado una nueva técnica de seguimiento de un frente móvil para problemas de Stefan unidimensionales denominado método de "ajuste local de malla". Esto permite su extensión a problemas de Stefan con más de un frente y posibilita la utilización de integradores robustos con ajuste automático del paso de tiempo para el cálculo del frente. El método funciona perfectamente para distintos tipos de trayectorias del frente, en particular para problemas con estado estacionario. De los resultados numéricos y de su comparación con los obtenidos por otras técnicas se desprende las ventajas del método aquí propuesto.

### REFERENCIAS

1. H. Cohen and I. Tadjbakhsh, Stefan Problems in Superconductivity and Soldering, *Society of Engineering Science Meeting, Michigan State University*, East Lansing, Michigan, Nov. 2-4, (1964).
2. J. Glimm, E. Isaacson, D. Marchesin and O. Mc Bryan, Front Tracking for Hyperbolic Systems, *Adv. Appl. Math.*, Vol. 2, (1981).
3. K.H. Hoffmann, *Fachbereich Mathematik*, Vol. I-III, Berlin Freie Universitat, (1977).
4. K.H. Hoffmann, Monotonie bei nichtlinearen Stefan Problemen, *Freie Randwertprobleme III*, p. 99, Berlin, (1977).
5. IMSL, Inc., *Scientific Subroutine Package*, (1979).
6. G. Marshall, A Front Tracking Method for One-Dimensional Moving Boundary Problems, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 7, n.º 1, January, (1986).
7. D.A. Tarzia, Introducción al seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones, *Cuadernos del Instituto de Matemática Beppo Levi*, n.º 11, Universidad Nacional de Rosario, Rosario, (1984).

TABLA IA FRENTE RECTO (MALM-PC)

t	h=0.1	h=0.025	h=0.01
	ERROR	ERROR	ERROR
0.2	0.0000	-0.0000	-0.0000
0.4	-0.0002	-0.0000	-0.0000
0.6	-0.0002	-0.0000	-0.0000
0.8	-0.0003	-0.0000	-0.0000
1.0	-0.0004	-0.0001	-0.0000
1.2	-0.0005	-0.0001	-0.0000
1.4	-0.0006	-0.0001	-0.0000
1.6	-0.0007	-0.0001	0.0000
1.8	-0.0008	-0.0001	0.0000
2.0	-0.0010	-0.0001	0.0000
Tiempo de cómputo (seg)	0.05	0.16	0.91
Prom. itera.	4	1	1

TABLA IIA FRENTE CONCAVO HACIA ARRIBA (MALM-PC)

t	h=0.1	h=0.025	h=0.01
	ERROR	ERROR	ERROR
0.0781	-0.0010	0.0773	-0.0007
0.2090	-0.0024	0.1908	-0.0004
0.4112	-0.0020	0.4096	-0.0001
0.6966	-0.0015	0.6974	0.0001
1.0365	-0.0009	1.0127	0.0003
1.7024	0.0000	1.6815	0.0006
2.2405	0.0006	2.2412	0.0008
2.8550	0.0011	2.8689	0.0010
3.5459	0.0016	3.5746	0.0013
4.3136	0.0021	4.0553	0.0014
Tiempo de cómputo(seg)	0.07	0.48	1.92
Prom itera.	5	4	2.5

TABLA IIIA FRENTE CONCAVO HACIA ABAJO (MALM-PC)

t	h=0.1	h=0.025	h=0.01
	ERROR	ERROR	ERROR
0.2449	0.0032	0.2432	0.0034
0.5773	0.0167	0.5710	0.0054
0.8249	0.0174	0.8287	0.0053
1.0319	0.0147	1.0358	0.0044
1.2137	0.0106	1.2180	0.0034
1.3777	0.0059	1.3761	0.0023
1.5285	0.0008	1.5279	0.0010
1.6680	-0.0045	1.6691	-0.0003
1.8005	-0.0098	1.8017	-0.0017
1.9251	-0.0151	1.9211	-0.0028
2.0047	-0.0186	2.0022	-0.0035
Tiempo de cómputo (seg)	0.11	1.35	7.97
Prom. itera.	2	1	1

TABLA IVA FRENTE RECTO (MHV-PC [4])

x	h=0.1	h=0.025	h=0.01
	ERROR	ERROR	ERROR
0.2	0.0000	0.0006	0.0002
0.4	0.0019	0.0010	0.0004
0.6	0.0032	0.0012	0.0004
0.8	0.0035	0.0012	0.0004
1.0	0.0032	0.0011	0.0003
1.2	0.0023	0.0008	0.0002
1.4	0.0011	0.0004	0.0001
1.6	-0.0005	-0.0000	-0.0001
1.8	-0.0024	-0.0005	-0.0002
2.0	-0.0044	-0.0010	-0.0004
Tiempo de cómputo (seg)	0.02	0.18	1.06
Prom. itera.	1	1	1

TABLA IVC FRENTE CONCAVO HACIA ABAJO (MHV-PC [4])

x	h=0.1	h=0.025	h=0.01
	ERROR	ERROR	ERROR
0.3	0.0006	0.0002	0.0001
0.9	0.0040	0.0008	0.0004
1.5	0.0045	0.0009	0.0006
2.1	0.0038	0.0008	0.0004
2.7	0.0027	0.0006	0.0002
3.3	0.0014	0.0004	0.0000
3.9	-0.0000	0.0001	-0.0001
4.5	-0.0016	-0.0002	-0.0002
5.1	-0.0028	-0.0006	-0.0002
5.7	-0.0041	-0.0009	-0.0003
6.0	-0.0047	-0.0011	-0.0003
Tiempo de cómputo (seg)	0.56	3.04	10.05
Prom. itera.	6	2.5	1.5

TABLA IB FRENTE RECTO (MALM-DVERK)

t	h=0.1	h=0.025	h=0.01
	ERROR	ERROR	ERROR
0.2	0.0000	0.0001	0.0000
0.4	0.0013	0.0002	0.0000
0.6	0.0020	0.0002	0.0000
0.8	0.0023	0.0002	0.0000
1.0	0.0022	0.0002	0.0000
1.2	0.0019	0.0002	0.0000
1.4	0.0013	0.0002	0.0000
1.6	0.0007	0.0001	0.0000
1.8	-0.0001	0.0001	0.0000
2.0	-0.0010	0.0000	0.0000
Tiempo de cómputo (seg)	0.11	1.24	7.24

TABLA IIB FRENTE CONCAVO HACIA ARRIBA (MALM-DVERK)

t	h=0.1	h=0.025	h=0.01
	ERROR	ERROR	ERROR
0.0781	-0.0027	0.0778	-0.0010
0.2135	-0.0015	0.2221	-0.0005
0.4151	-0.0010	0.4113	-0.0001
0.6911	-0.0005	0.6998	0.0002
1.0415	0.0008	1.0557	0.0005
1.7077	0.0008	1.6956	0.0009
2.2456	0.0012	2.2461	0.0011
2.8594	0.0016	2.8745	0.0014
3.5497	0.0020	3.5810	0.0016
4.3165	0.0023	4.0622	0.0018
Tiempo de cómputo(seg)	0.26	1.32	7.49

TABLA IIIB FRENTE CONCAVO HACIA ABAJO (MALM-DVERK)

t	h=0.1	h=0.025	h=0.01
	ERROR	ERROR	ERROR
0.2449	0.0015	0.2427	0.0004
0.5811	0.0083	0.5843	0.0012
0.8300	0.0109	0.8311	0.0014
1.0372	0.0110	1.0385	0.0012
1.2187	0.0094	1.2137	0.0007
1.3823	0.0067	1.3856	0.0000
1.5324	0.0033	1.5310	-0.0006
1.6721	-0.0007	1.6722	-0.0014
1.8031	-0.0049	1.8047	-0.0022
1.9271	-0.0094	1.9249	-0.0031
2.0063	-0.0125	2.0002	-0.0038
Tiempo de cómputo (seg)	0.77	10.41	130

TABLA IVB FRENTE CONCAVO HACIA ARRIBA (MHV-PC [4])

x	h=0.1	h=0.025	h=0.01
	ERROR	ERROR	ERROR
0.4	-0.0021	0.0004	0.0005
0.6	-0.0020	0.0010	0.0010
0.8	-0.0008	0.0016	0.0014
1.0	0.0007	0.0023	0.0015
1.2	0.0024	0.0031	0.0011
1.4	0.0043	0.0040	0.0003
1.6	0.0064	0.0050	-0.0005
1.8	0.0085	0.0058	-0.0015
2.0	0.0108	0.0068	-0.0000
5.4	*	*	*
Tiempo de cómputo (seg)	0.05	0.37	2.13
Prom. itera.	4	2	2

\* El método diverge

APENDICE

Aquí discutimos en detalle la implementación del método del “ajuste local de malla” (MALM).

La aproximación en diferencias finitas implícita de tiempo ponderado (3.3) puede ser escrita (eliminando el supraíndice \*):

$$\begin{aligned}
 -r\theta u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r\theta) u_i^{n+1} - r\theta u_{i+1}^{n+1} = \\
 r(1 - \theta) u_{i-1}^n + (1 - 2r(1-\theta)) u_i^n + r(1 - \theta) u_{i+1}^n
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

donde  $r = k/h^2$   $0 \leq \theta \leq 1$

Teniendo en cuenta la figura A.1 esta ecuación es válida para los nodos  $i = 2, \dots, j-2$ .

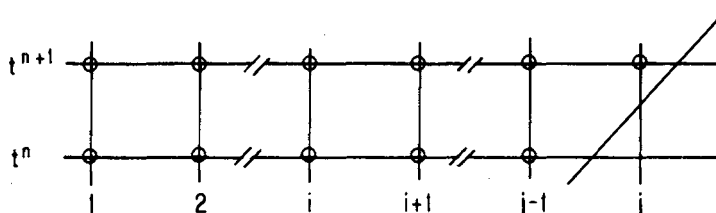


Figura A.1. Posición frente en dos niveles de tiempo consecutivos

Para  $i=1$  la ecuación (A.1) es modificada incorporando la condición de borde izquierdo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(t) , \quad x = 0 \quad t > 0
 \tag{A.2}$$

Aproximando la parte izquierda de la ecuación (A.2) por diferencias centradas

$$\frac{u_2^n - u_0^n}{2h} = f(t^n) = f^n
 \tag{A.3}$$

$$\frac{u_2^{n+1} - u_0^{n+1}}{2h} = f(t^{n+1}) = f^{n+1}
 \tag{A.4}$$

obtenemos la ecuación

$$(1 + 2r\beta) u_1^{n+1} + 2r\beta u_2^{n+1} =$$

$$(1 - 2r(1-\beta)) u_1^n + 2r(1-\beta) u_2^n$$

$$-2rh(\beta f^{n+1} + ((1-\beta) f^n))$$
(A.5)

Ahora vamos a incorporar la condición de borde derecho en la ecuación (A.1) para los casos I y II vistos en la sección 3. La figura A.2 ilustra una configuración típica para el caso I.

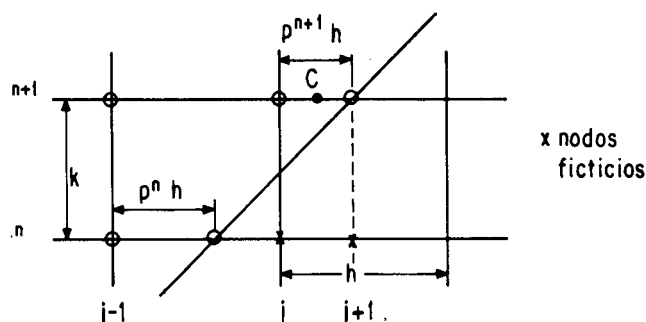


Figura A.2. Configuración para el caso I

Se introducen 2 nodos ficticios en el nivel \$t^n\$ como se indica en la figura A.2 (\$u\_j^n\$ y \$u\_{j+1}^n\$). Los valores de \$u\_j^n\$ y \$u\_{j+1}^n\$ son extrapolados cuadráticamente usando los nodos \$u\_{j-2}^n\$, \$u\_{j-1}^n\$ y \$u\_F^n\$ (\$u\$ en el frente):

$$u_j^n = \frac{(1 - p^n)}{(1 + p^n)} u_{j-2}^n + 2 \frac{(p^n - 1)}{p^n} u_{j-1}^n$$
(A.6)

$$u_{j+1}^n = \frac{(1 + p^{n+1} - p^n) (1 + p^{n+1})}{(1 + p^n)} u_{j-2}^n$$

$$+ \frac{(p^n - p^{n+1} - 1) (2 + p^{n+1})}{p^n} u_{j-1}^n$$
(A.7)

Para aproximar \$u\_{xx}\$ usamos el siguiente esquema descentrado (Ver figura A.2)

$$(u_{xx})_j = \frac{2}{h^2} \left[ \frac{1}{p+1} u_{j-1} - \frac{1}{p} u_j + \frac{1}{p(1+p)} u_{j+1} \right]$$
(A.8)

Teniendo en cuenta las fórmulas (A.6), (A.7) y (A.8) la fórmula (A.1) para  $i=j-1$  nos queda

$$\begin{aligned}
 -r\theta u_{j-2}^{n+1} + (1 + 2r\theta) u_{j-1}^{n+1} - r\theta u_j^{n+1} = \\
 \frac{2r(1-\theta)}{1+p^n} u_{j-2}^n + \left(1 + \frac{2r\theta}{p^n}\right) u_{j-1}^n
 \end{aligned}
 \tag{A.9}$$

y para  $i = j$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{-2r\theta}{1+p^{n+1}} u_{j-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{2r\theta}{p^{n+1}}\right) u_j^{n+1} = \\
 \frac{1-p^n+2r(1-\theta)}{1+p^n} u_{j-2}^n - \frac{2(1-p^n+r(1-\theta))}{p^n} u_{j-1}^n
 \end{aligned}
 \tag{A.10}$$

Las fórmulas (A.1) (para  $i=2, \dots, j-2$ ), (A.5), (A.9) y (A.10) determinan un sistema de ecuaciones lineales algebraicas de forma tridiagonal cuyas incógnitas son  $u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_j^{n+1}$

Ahora vamos a incorporar la condición de borde derecho para el caso II. La figura A.3 muestra una configuración para este caso:

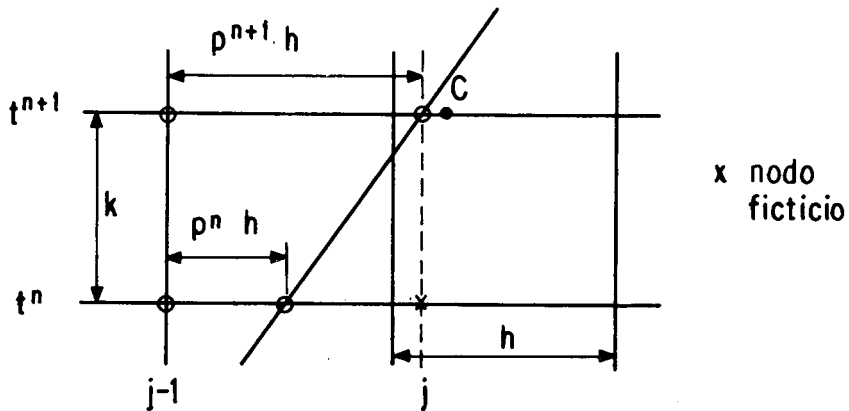


Figura A.3. Configuración para el caso II.

Estimando  $u_j^n$  de la misma forma que en el caso I la fórmula (A.1) para el nodo  $i=j-1$  es:

$$\frac{-2r\beta}{1+p^{n+1}} u_{j-2}^{n+1} + \left(1 + \frac{2r\beta}{p^{n+1}}\right) u_{j-1}^{n+1} =$$

(A.11)

$$\frac{2r(1-\beta)}{1+p^n} u_{j-2}^n + \left(1 - \frac{-2r(1-\beta)}{p^n}\right) u_{j-1}^n$$

Recordamos que el esquema en diferencias finitas (A.1) es incondicionalmente estable para  $\theta \geq 1/2$  y para  $0 \leq \theta < 1/2$  la condición de estabilidad es

$$k \leq \frac{h^2}{2(1-2\theta)}$$