

# Empilements concentriques

par David Georges Emmerich

## Abstract

Symmetrical clusters may be constructed by placing regular polyhedra in contact with each other either across faces, along edges or at vertices. These clusters are either compact or «loose». The latter type leave voids which themselves have an interesting symmetrical «sponge» structure.

The search for more compact clusters of polyhedra with 5-fold symmetry has led to the discovery of concentric clusters and their exponential developments called **explosions**. The contacts are sometimes across faces, sometimes along edges. This method of construction cannot be carried out indefinitely; the process becomes blocked after several steps. Envelopes of these completed clusters will have the form of a polyhedron in the family icosi-dodeca, thus certain new composite entities called **hyperpolyhedra**.

La composition d'un empilement est définie par la nature et le nombre des volumes polyédriques assemblés et le mode d'assemblage entre les volumes voisins, qui est possible par faces, arêtes ou sommets. Quand la rencontre entre les volumes s'effectue uniquement par faces, et sur la totalité des faces, l'empilement est **compact**. Tandis que les arrangements où toutes les faces ne sont pas couvertes par un autre polyèdre sont appelés **empilements lâches** ou non-compacts, quand les interstices conventionnellement considérés comme vides ne correspondent pas à des polyèdres appartenant à une classe régulière ou semi-régulière. Dans un empilement lâche, l'angle dièdre des interstices ne correspond donc pas à un angle polyédral connu, ni à la somme de plusieurs de ces angles. Cependant, du point de vue morphologique, l'interstice n'est ni plus ni moins vide que le plein, et inversement, pourvu qu'on se donne la peine de définir sa forme.

En analysant mieux ce vide, on peut y reconnaître des polyèdres plus ou moins réguliers et traiter la configuration globale comme un empilement compact où les volumes interstitiels sont soit des volumes isolés non réguliers, soit des espaces continus «en éponge» formant des polyèdres infinis.

Les volumes isolés sont des polyèdres résiduels en forme de solides composites qui sont étoilés ou au contraire involués. Les uns comme les autres comportent également des angles dièdres concave. Quant aux espaces en éponge, bien que constitués intégralement de polygones réguliers, ils ne peuvent pas être disséqués en volumes élémentaires par des surfaces planes mais seulement par des surfaces minimales

gauches. Ce qui ouvre la perspective d'une nouvelle classe de polyèdres mixtes, composés de polygones réguliers et de surfaces minimales gauches. Par réintroduction de cette idée, certains des précédents volumes isolés, en forme de solides composites, peuvent être réinterprétés comme autant de polyèdres mixtes, notamment ceux qui comportent des sommets trièdres composés de pentagones, et par une autre intrapolation logique, de carrés. Le compte rendu de D. Aubry, développé plus loin, se rapporte à l'étude de cette catégorie de polyèdres mixtes.

Pour revenir aux empilements dits lâches, on peut définir, partant des polyèdres réguliers ou semi-réguliers comme éléments de base, plusieurs lois de composition créant autant de classes de structures. Notamment: distension des empilements compacts, par translation seule ou par translation et rotation. Le premier mode opératoire produit des prismes intercalaires entre certaines faces des polyèdres d'origine, le second produit des volumes intercalaires antiprismatiques, les polyèdres d'origine voisins subissant une rotation relative.

Une autre gamme d'empilements lâches est obtenue par l'association des polyèdres pentasymétriques: icosaèdre, dodécaèdre et leurs dérivés, lesquels ne sont associables en aucun empilement compact suivant les termes classiques. Partant de l'icosaèdre ou du dodécaèdre, seul un entassement non compact peut être obtenu et seulement par l'assemblage des arêtes ou des sommets. L'assemblage partiel par faces de leurs dérivés semi-réguliers en empilements lâches est cependant possible. Dans tous ces arrangements les espaces interstitiels sont des volumes concaves involués,

continus ou discontinus. Quant aux polyèdres d'origine ils gardent une position homothétique dans un ensemble s'étendant dans l'espace par couches planaires successives.

C'est en cherchant les associations plus compactes, c'est-à-dire par faces, de ces corps pentasymétriques qu'on a été amené à découvrir l'existence des empilements concentriques et leurs développements exponentiels appelés les explosions.

Ces agglomérations sont donc composées de polyèdres pentasymétriques mais l'entassement des volumes s'opère autour d'un noyau central par couches concentriques. De ce fait, la position de tous les polyèdres n'est plus homothétique. Les assemblages se réalisent partiellement par des faces et principalement par des arêtes, à condition de considérer les espaces interstitiels, cependant fort simples, comme des vides. Mais, cette méthode d'agglomération radioconcentrique ne peut être poursuivie indéfiniment; le processus de croissance par couches concentriques se bloque après quelques étapes. L'enveloppe globale de ces empilements fermés aura la forme d'un polyèdre de la famille icosi-dodéca. On aboutit ainsi à de nouvelles entités composites, nommées **hyperpolyèdres**.

Ces hyperpolyèdres sont de nouveau empilables par leurs faces ou arêtes, même si le contact entre les articulations hyperpolyédriques reste partiel. Ils entrent donc à leur tour dans un processus de croissance exponentiel, quasi explosif, créant une agglomération hiérarchiquement supérieure: l'hyperempilement, qu'on peut appeler également explosion, le processus étant répétitif par paliers successifs.

Parmi le relativement grand nombre d'empilements concentriques possibles, cinq sont présentés ici à titre d'exemple, ceux dont la composition est basée sur

l'utilisation des deux solides platoniques: l'icosaèdre et le dodécaèdre, les autres dérivés étant considérés comme des corps complémentaires. A base des solides semi-réguliers dérivés, le petit et le grand rhombicosidodécaèdre, par exemple, qui peuvent même être associés par faces, d'autres configurations semblables sont constructibles.

Les empilements élaborés et présentés ici sont répertoriés dans le tableau qui indique outre leur nom, le nombre des séquences de leur composition, le code Schläfli des polyèdres qui le constituent, soit en tant que noyau soit comme corps périphériques, enfin le mode d'assemblage, par face ou arête.

### Les cinq empilements ici illustrés

**N°1 Hypericosaédrique:** Le noyau est un dodécaèdre étoilé involué composé de 60 triangles équilatéraux dont le code Schläfli est (33333, 333333). Dans les alvéoles pyramidales de ce corps se logent 12 icosaèdres, qui sont assemblés entre eux par arête. L'ensemble obtenu s'inscrit dans un plus grand icosaèdre qui peut entrer à son tour dans une agglomération semblable formant alors un empilement hiérarchiquement supérieur.

**N°2 Hypericosadodécaèdre:** Le noyau est un icosidodécaèdre sur les faces pentagonales duquel s'appliquent 12 corps, sortes d'antiprismes, dont l'enveloppe est composée de 15 triangles équilatéraux, d'un pentagone et d'un pentagone étoilé (53333, 5\*3333). L'ensemble, qu'on peut appeler hémicosidodécaèdre, reçoit dans ses alvéoles 20 icosaèdres. L'agglomération obtenue s'inscrit dans un volume dérivé du petit rhombicosidodécaèdre, qui peut être assemblé de nouveau dans un empilement lâche par ses faces rectangulaires.

**N°3 Hyperdodécaicosaèdre:** Le noyau icosidodécaédrique se complète par 20 volumes interstitiels dont chacun est composé de 5 triangles équilatéraux et de 3 pentagones, le code Schläfli étant (3335, 355). La couche extérieure est constituée de 12 dodécaèdres se rencontrant par arête. L'agglomération s'inscrit également dans un autre dérivé du petit rhombicosidodécaèdre.

**N°4 Hyperdodécadodécaèdre:** Le noyau est un dodécaèdre tronqué complété par 20 volumes interstitiels identiques aux précédents (3335, 355). Sur les faces décagonales de ce corps complété s'appliquent 12 calottes hémicosidodécaédrales. Dans les creux de cette agglomération viennent s'insérer 20 dodécaèdres se rencontrant par arête.

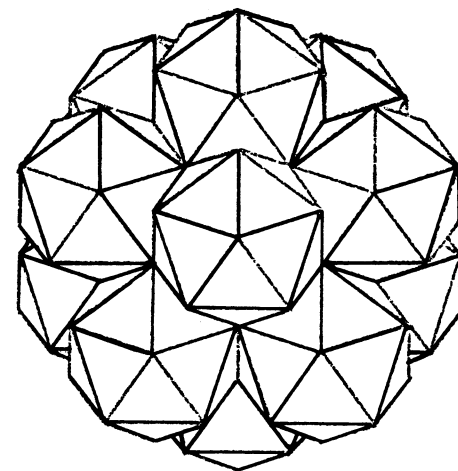
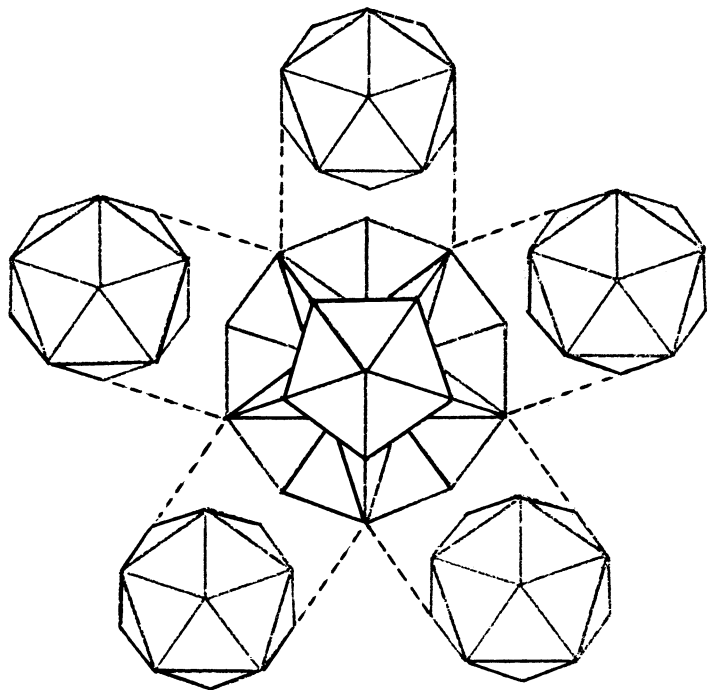
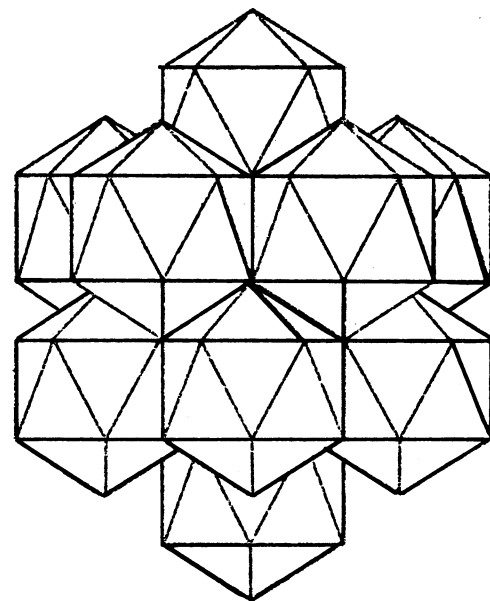
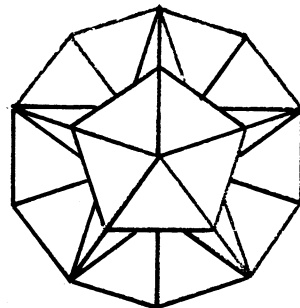
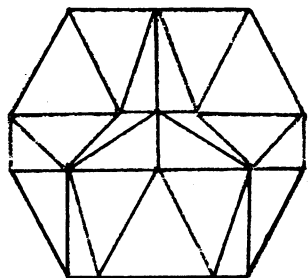
**N°5 Hypericosidodécadodécaèdre:** Le noyau est un petit dodécaèdre étoilé dont les sommets sont tronqués de sorte que les trois petits côtés des faces trapézoïdes restantes soient identiques. Dans les vallées s'insèrent 30 volumes interstitiels composés de deux faces trapézoïdes, de deux pentagones et de deux triangles équilatéraux (345, 355, 445). Autour de ce corps complété, une couche de 20 dodécaèdres forme un groupe inscriptible dans un plus grand dodécaèdre dans les creux duquel se posent encore 12 icosaèdres. Cette agglomération entre à son tour dans un hyper-empilement concentrique composé de 12 corps complétés, lesquels couvrent les 12 icosidodécaèdres, et de 20 autres icosidodécaèdres. Et ainsi de suite...

En suivant ces notes descriptives, on se rend parfaitement compte de la difficulté à reconstituer les opérations même expliquées par des figures analytiques et quasi cinématographiques. Il est vivement recommandé de procéder par **modelage**.

N°	Nom	Séquences	Noyau	Nombre et Nom des Polyèdres						Assemblage		
		n	P <sub>0</sub>	n <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	P <sub>2</sub>	n <sub>3</sub>	P <sub>3</sub>	face	arête	
1	Hypericosaédrique	1	33333,333333	12	33333							●
2	Hypericosadodécaèdre	2	3535	12	53333,5*3333	20	33333				●	●
3	Hyperdodécaicosaèdre	2	3535	20	3335,355	12	555				●	●
4	Hyperdodécadodécaèdre	3	31010	20	3335,355	12	1/2 3535	20	555		●	●
5	Hypericosidodécadodécaèdre	3	555* tronqué	30	345,355,445	20	555	12	3535		●	●

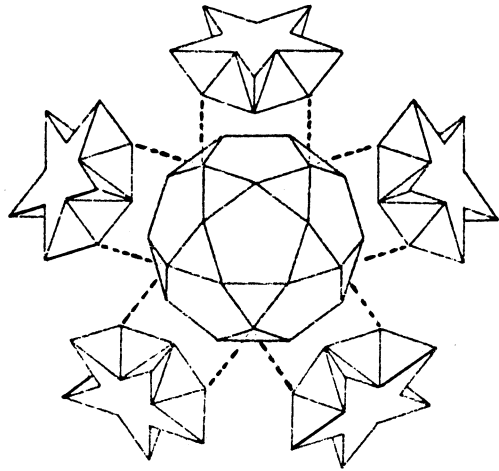
**1**

# HYPERICOSAEDRIQUE

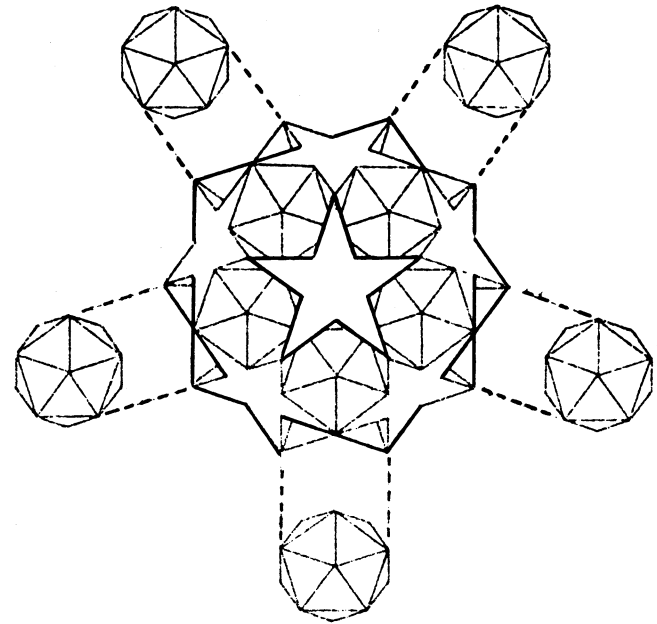


# 2

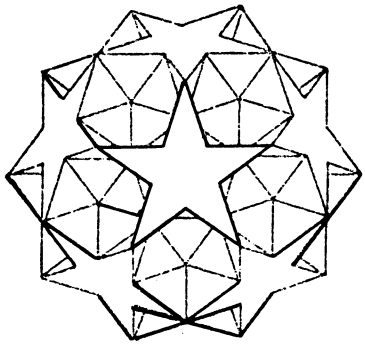
# HYPERICOSADODECAEDRE



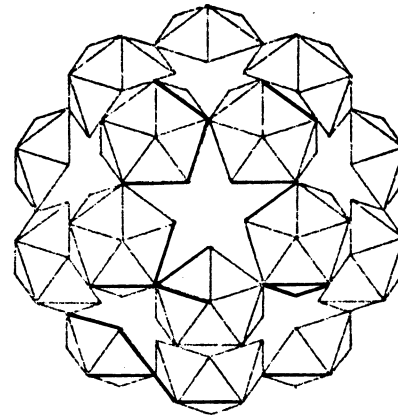
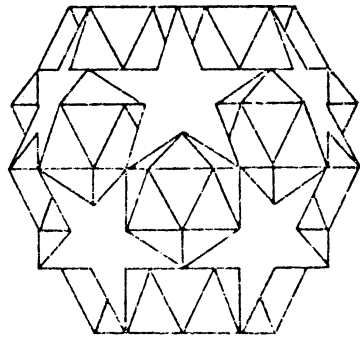
1



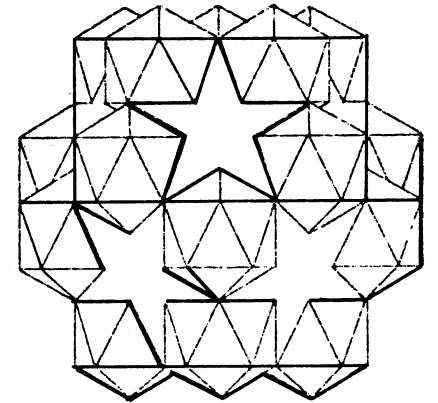
3



2

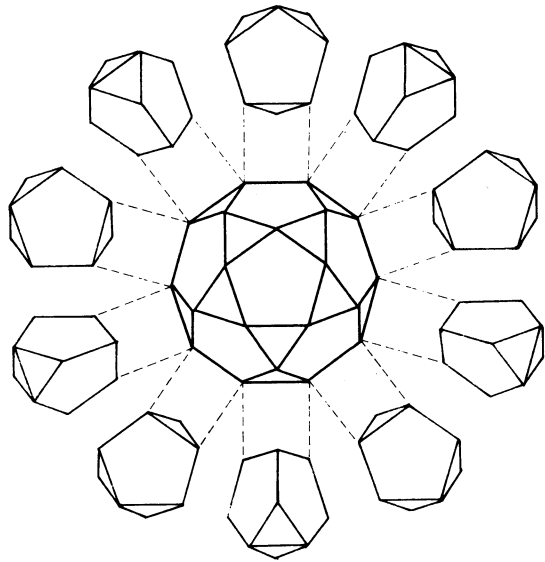


4

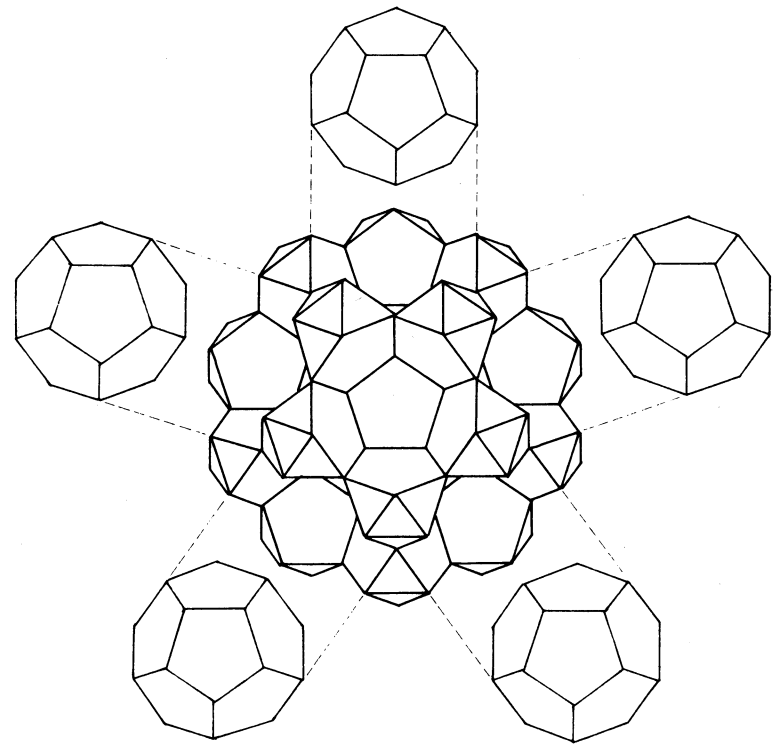




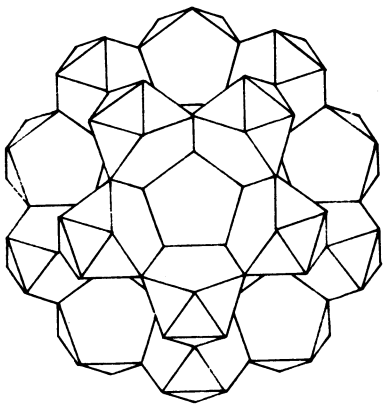
# HYPERDODECAICOSAEDRE



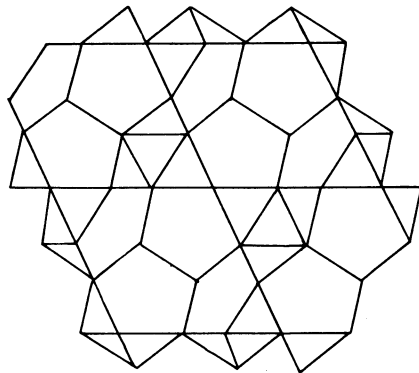
1



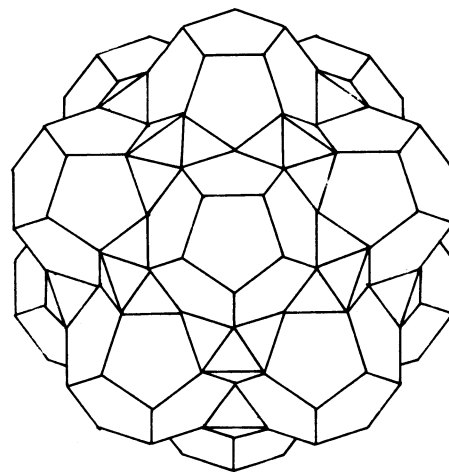
3



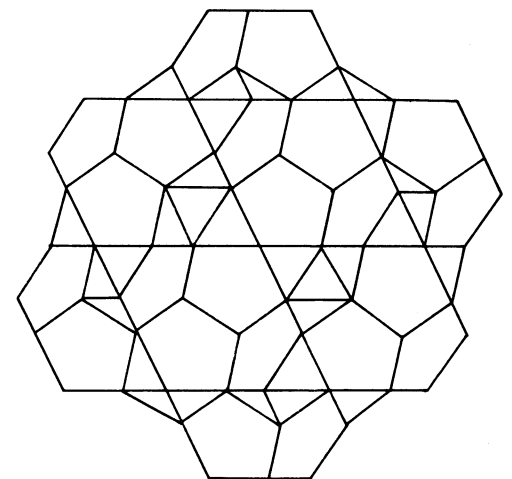
9

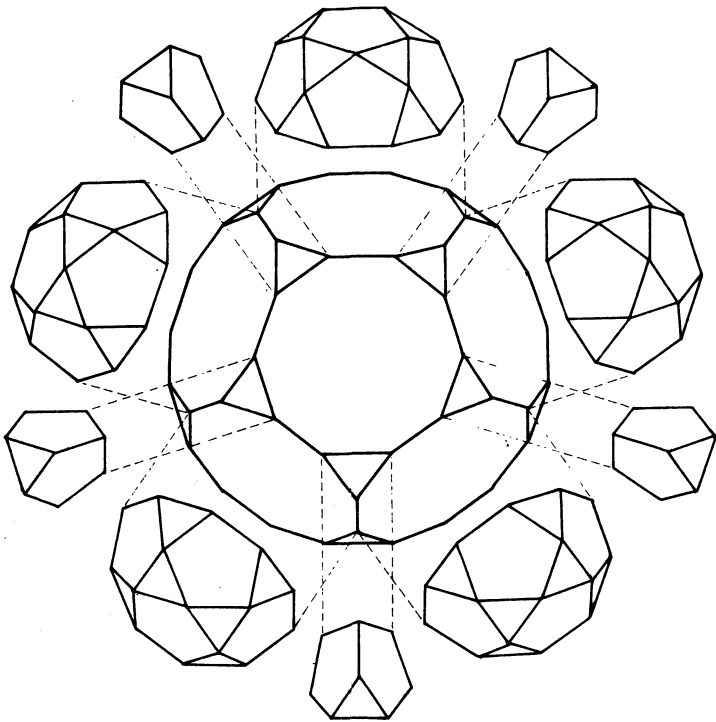


2

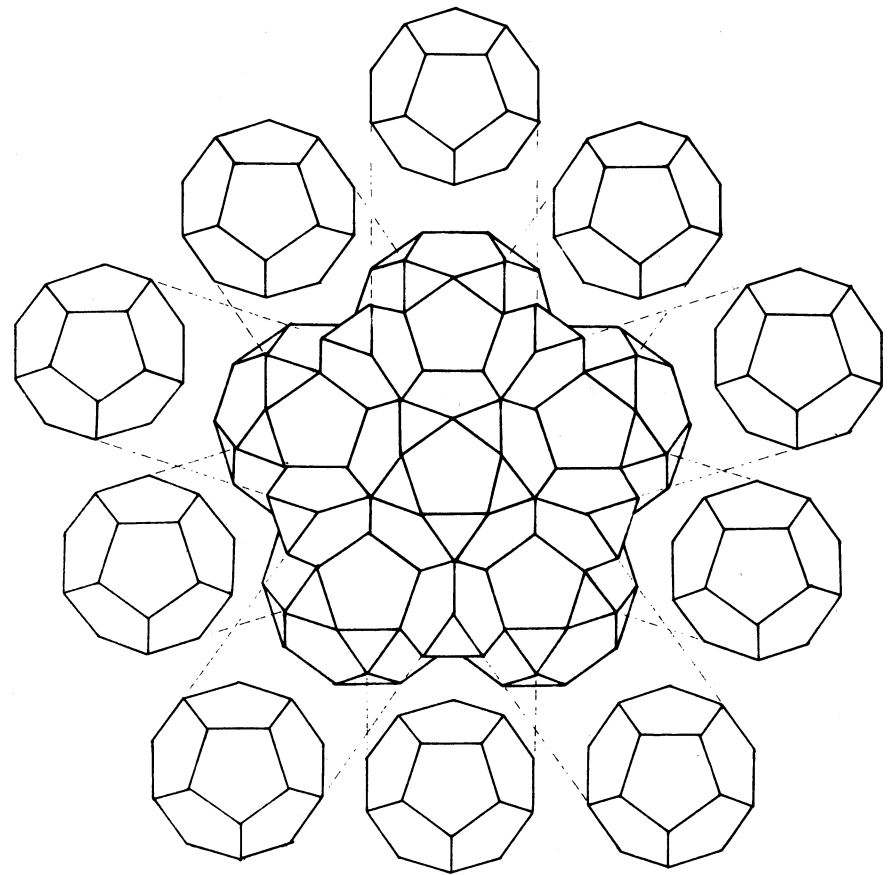


4

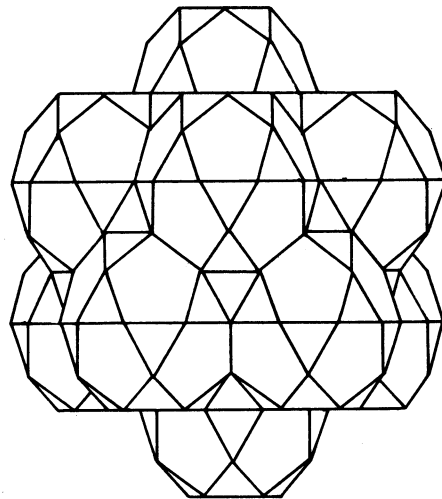




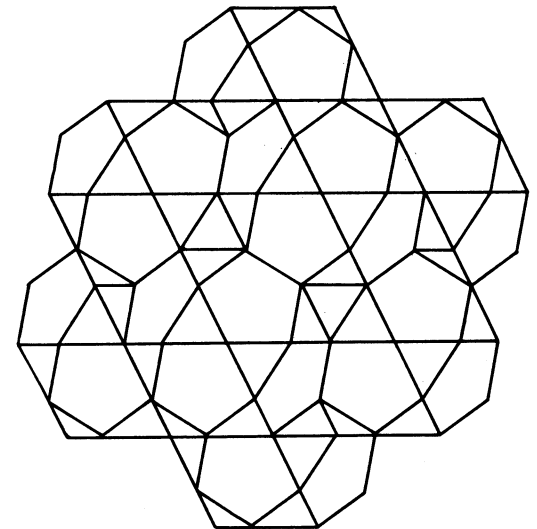
1



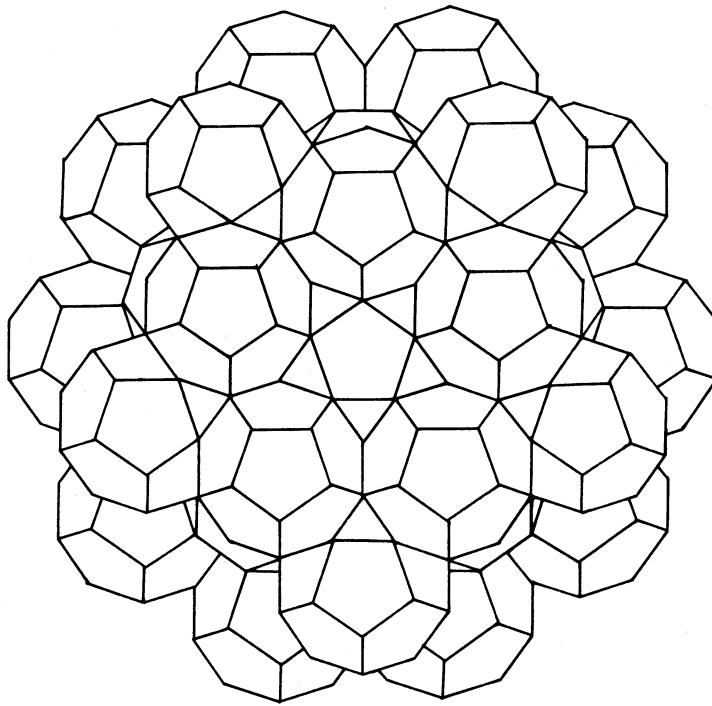
3



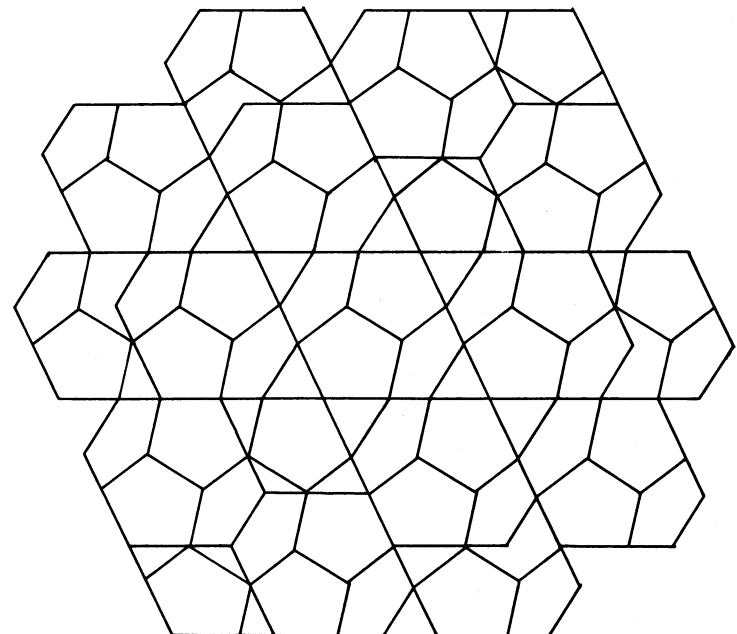
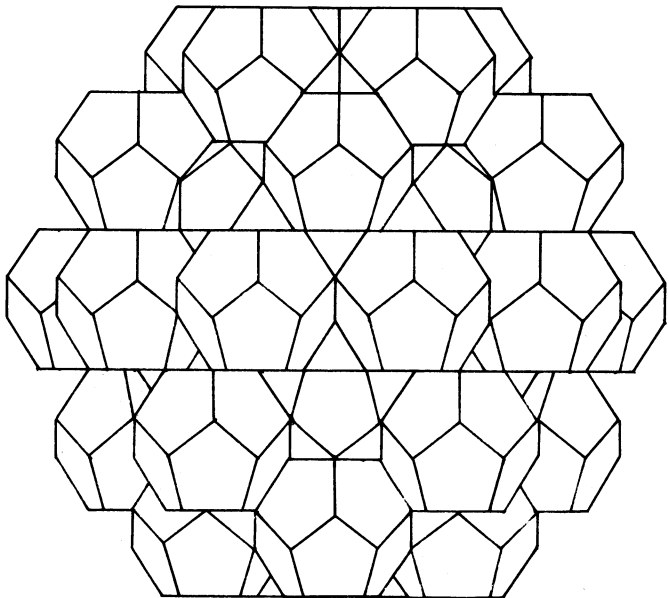
2

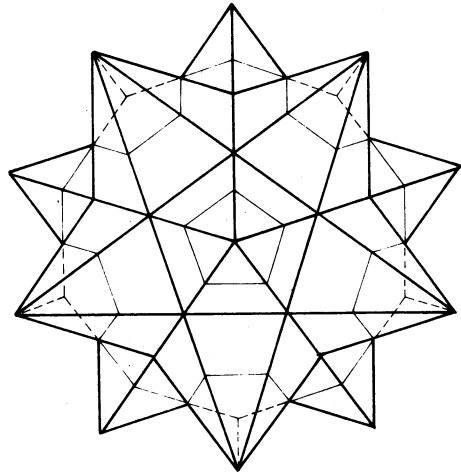


10

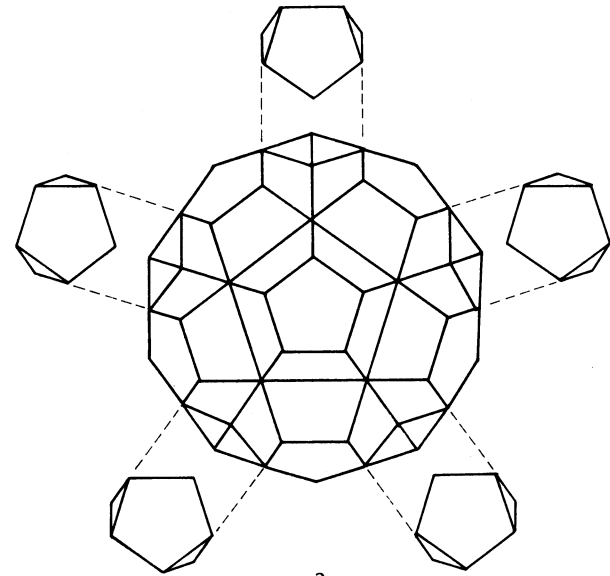


4

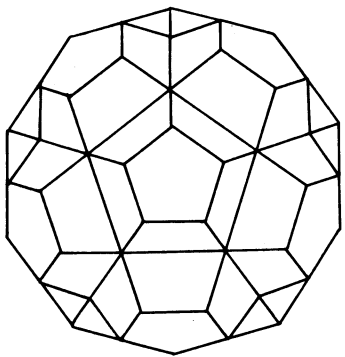




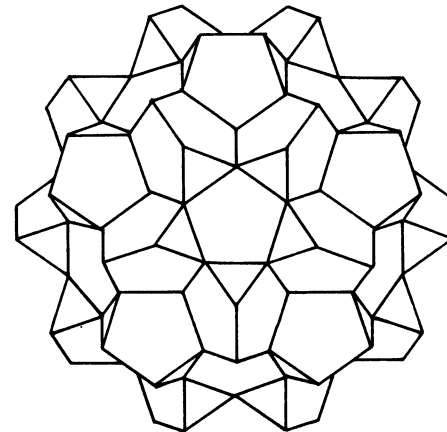
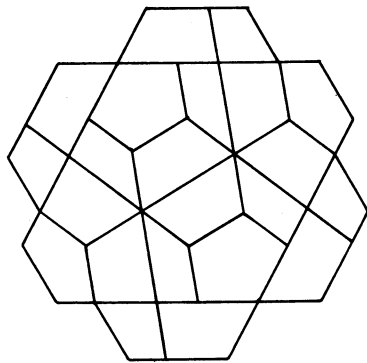
1



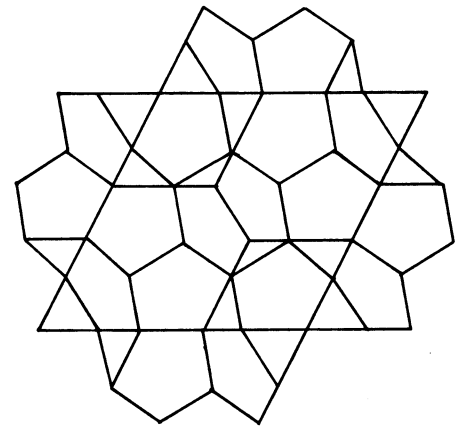
3



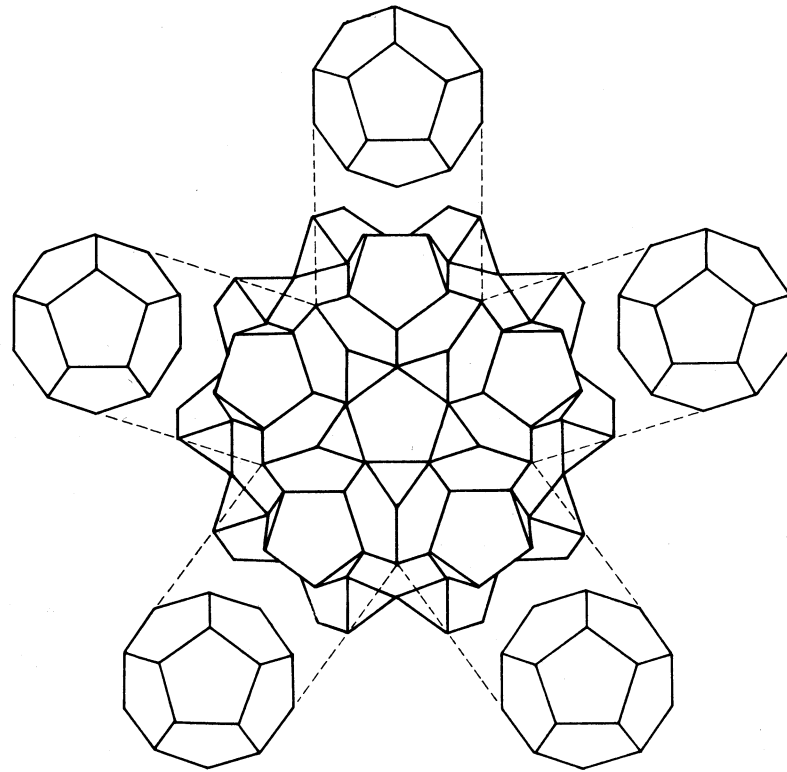
2



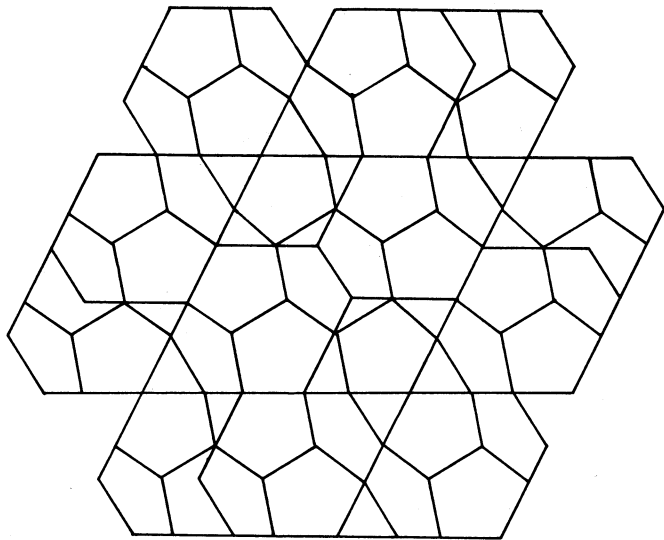
4



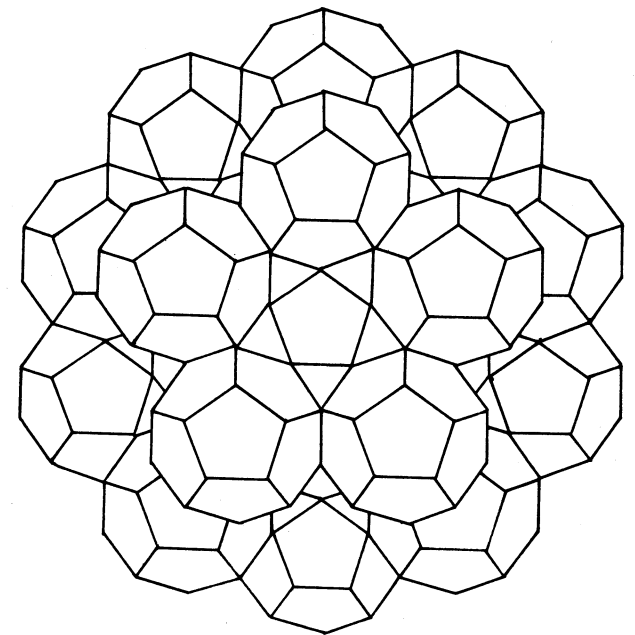




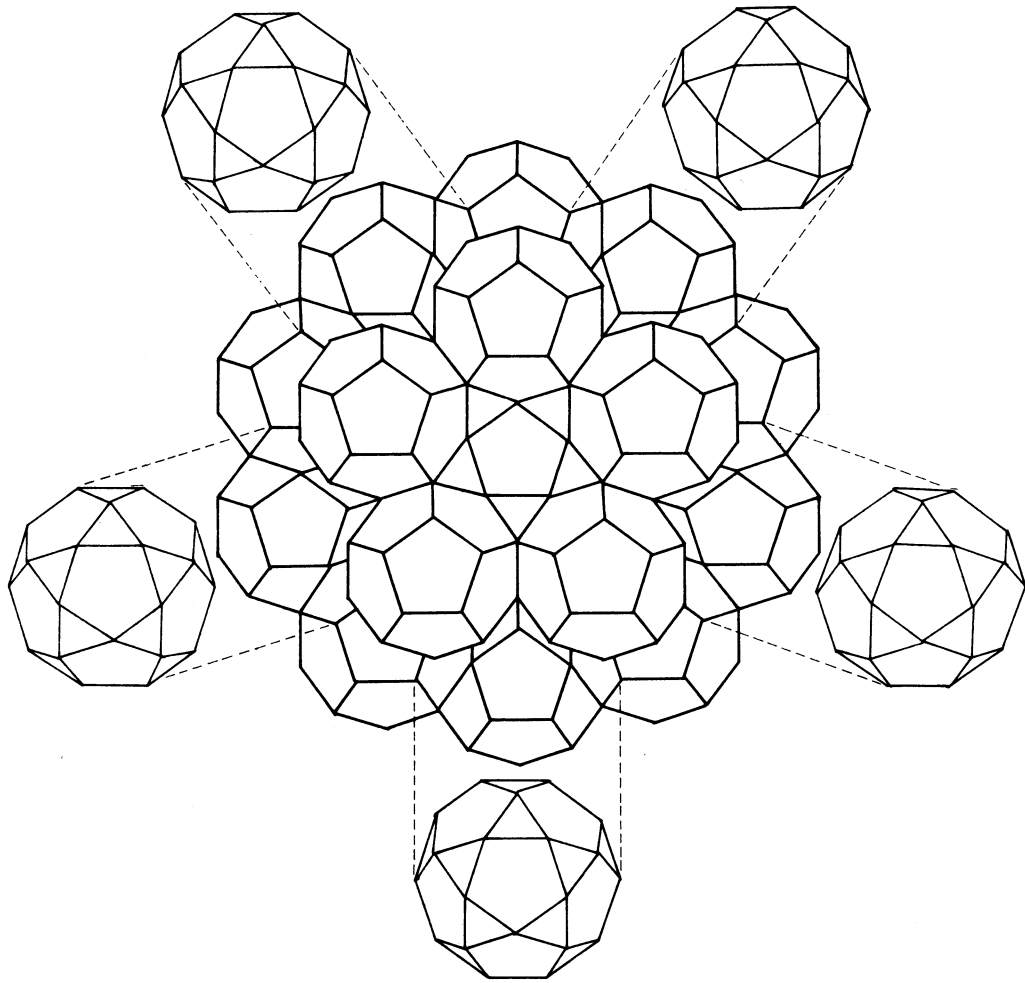
5



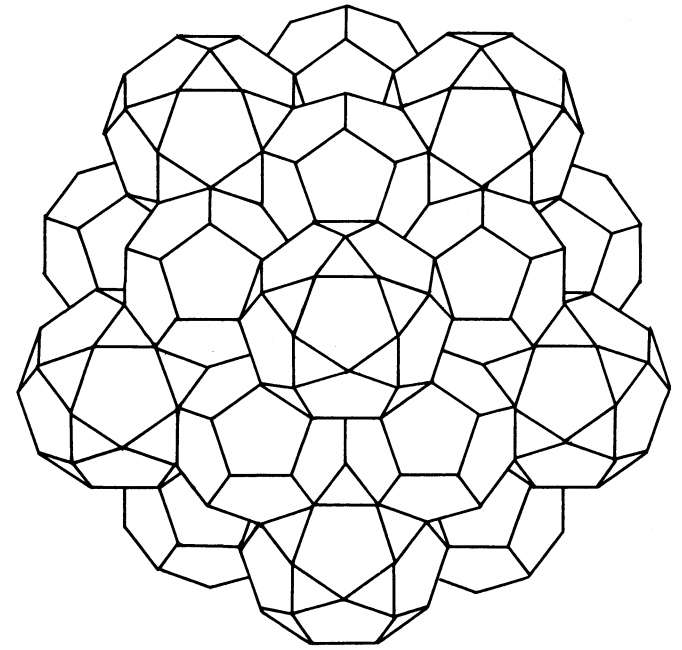
6



6



7



8

# EXPLOSION

