Les structures polyédriques

par Dominique Dion

Structural Topology #5, 1980

Abstract

His interest in geometric forms having developed during his training in the plastic arts, the author studies not single polyhedra, as closed forms, but rather *families* of polyhedra and their spatial relationships. Some forms are defined starting from the diagonal planes and extended face planes of regular and semiregular polyhedra. New constructions arise by manipulating the symmetries of simpler forms.

Ratios of lengths within a single form suggest juxtapositions of similar polyhedra of different sizes. These juxtapositions take the form of logarithmic spirals (also known as «fractals»), in which the face sizes vary, at least in principal, from the infinitely small to the infinitely large.

A complete English translation starts on page 34.

Introduction

Dans le but de mieux connaître la composition spatiale, mon intérêt pour les formes géométriques s'est progressivement développé au cours de ma formation en arts plastiques. J'ai alors réalisé des modèles représentant des relations entre les structures polyédriques.

Cette recherche réside moins dans la découverte des polyèdres en tant que contenant ou forme close que dans les liaisons que l'on découvre entre eux, aussi

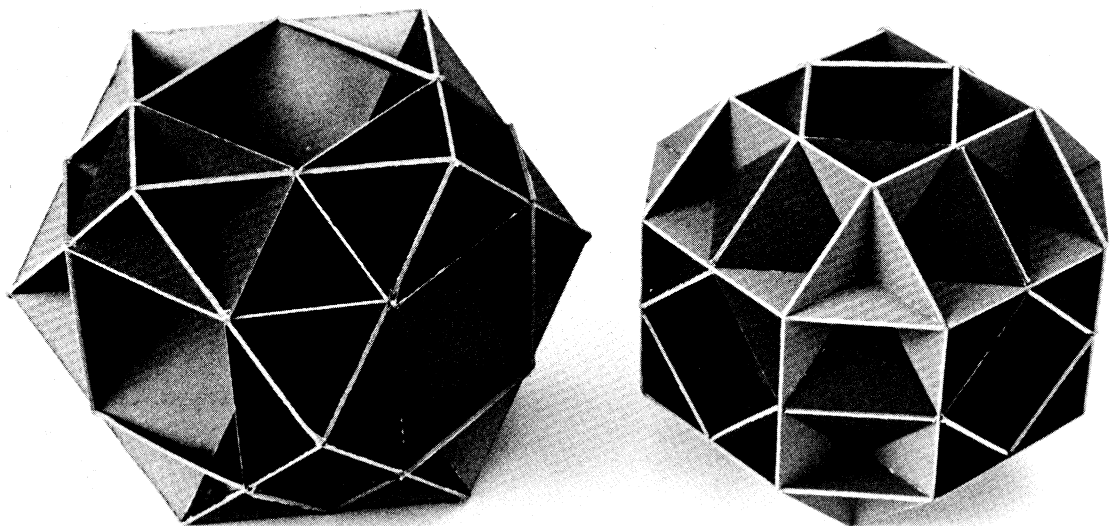

Figure 1

différents qu'ils puissent paraître. Arêtes, sommets, plans et trajectoires constituent leurs éléments de symétrie. Ils établissent par leur assemblage des rapports de continuité dans l'espace avec une échelle de découpage passant de l'infiniment petit à l'infiniment grand.

Réunissant en un tout diverses études sur le sujet, cet article présente en premier lieu un aperçu sur les plans internes des polyèdres et ce qu'ils produisent en se rencontrant dans l'espace. Puis, d'autres modèles montrent des variations créées sur les structures en manipulant leurs éléments de symétrie. Viennent ensuite deux modes d'agglomération concentrique à partir de polyèdres à découpage pentagonal. Enfin, on voit comment certaines formes peuvent composer des juxtapositions.

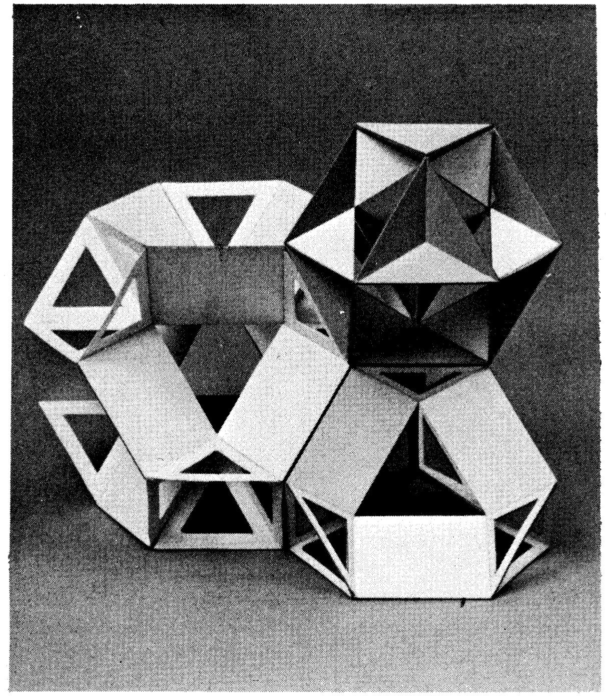

Figure 2

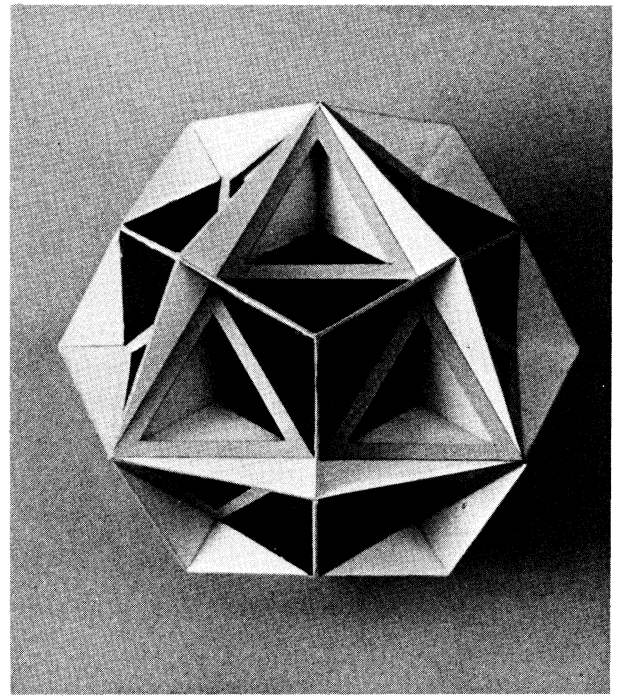

Figure 3

Présentation des études

Les polyèdres étudiés ont une configuration déterminée par des croisements de plans intérieurs qui passent par les diagonales, les sommets et les arêtes de leurs faces. Certains de ces plans rencontrent le *dual* du polyèdre. D'autres situent au centre la *forme fondamentale* à partir de laquelle il est composé par des tronçatures ou par l'extension de certaines faces. Des plans conduisent aussi à l'*interpénétration* des polyèdres. Les **Figures 1, 2, 3 et 4** proposent des exemples de ces applications.

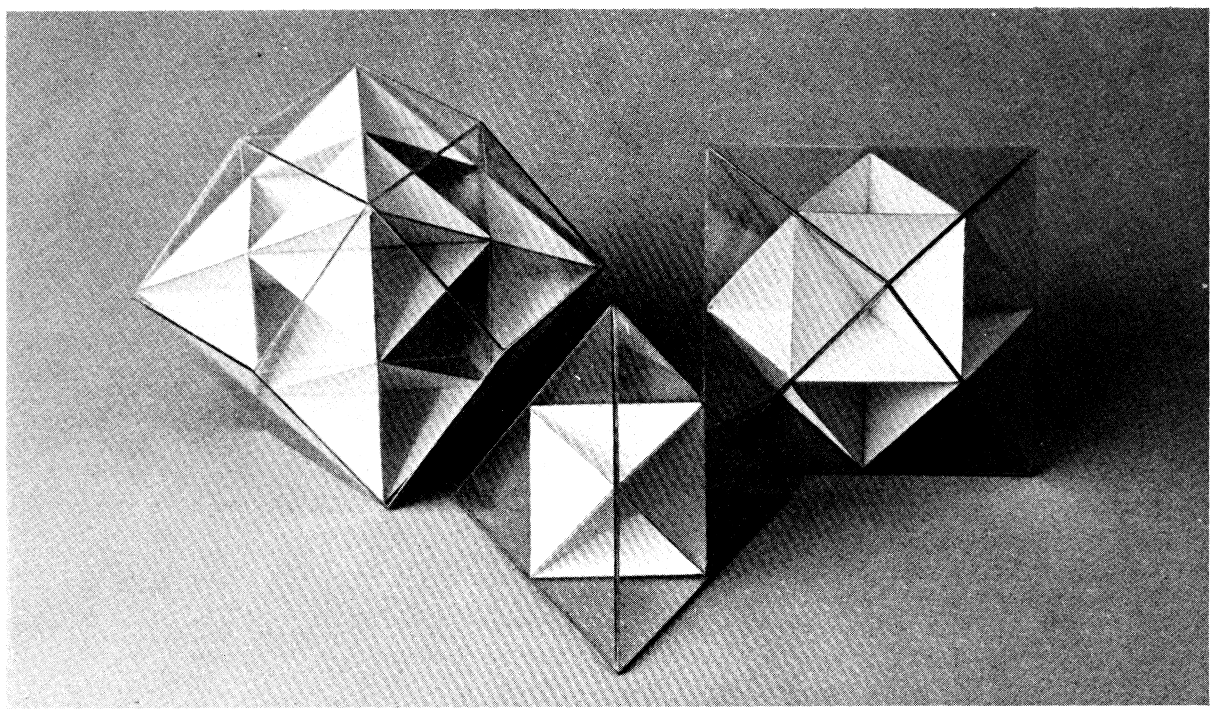

Figure 4

Dans un assemblage contigu de *polyèdres complémentaires,* leurs plans internes créent de nouvelles formes par leurs prolongements; les sommets des uns devenant les centres des autres. La **Figure 6** montre comment des plans de l'octaèdre et du tétraèdre de la **Figure 7** s'organisent en un assemblage de rhombidodécaèdres. Les ouvertures circulaires situent les centres de ces deux polyèdres. Ce jeu peut se poursuivre indéfiniment et de façon générale l'ensemble se compose de couches de tessellations parallèles qui se croisent dans l'espace.

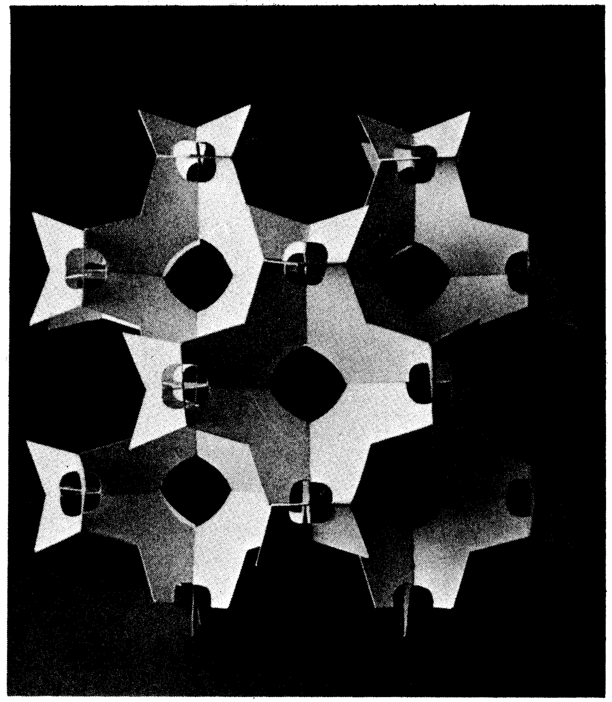

Figure 5

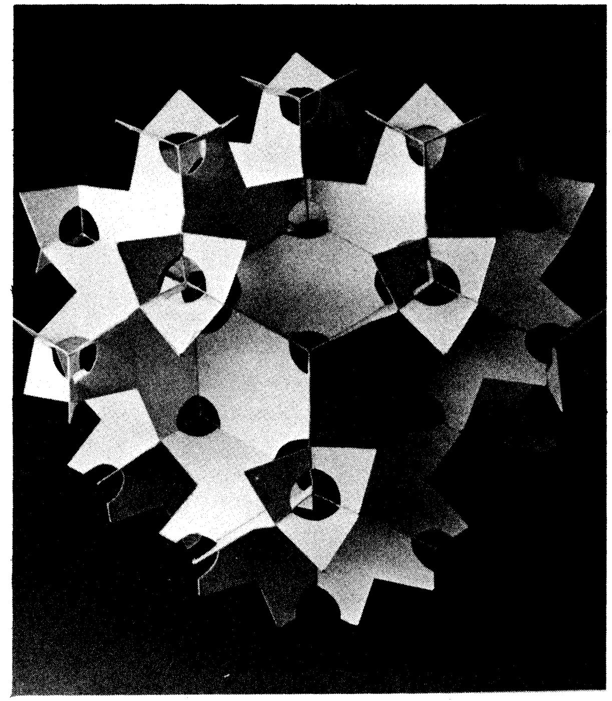

Figure 6

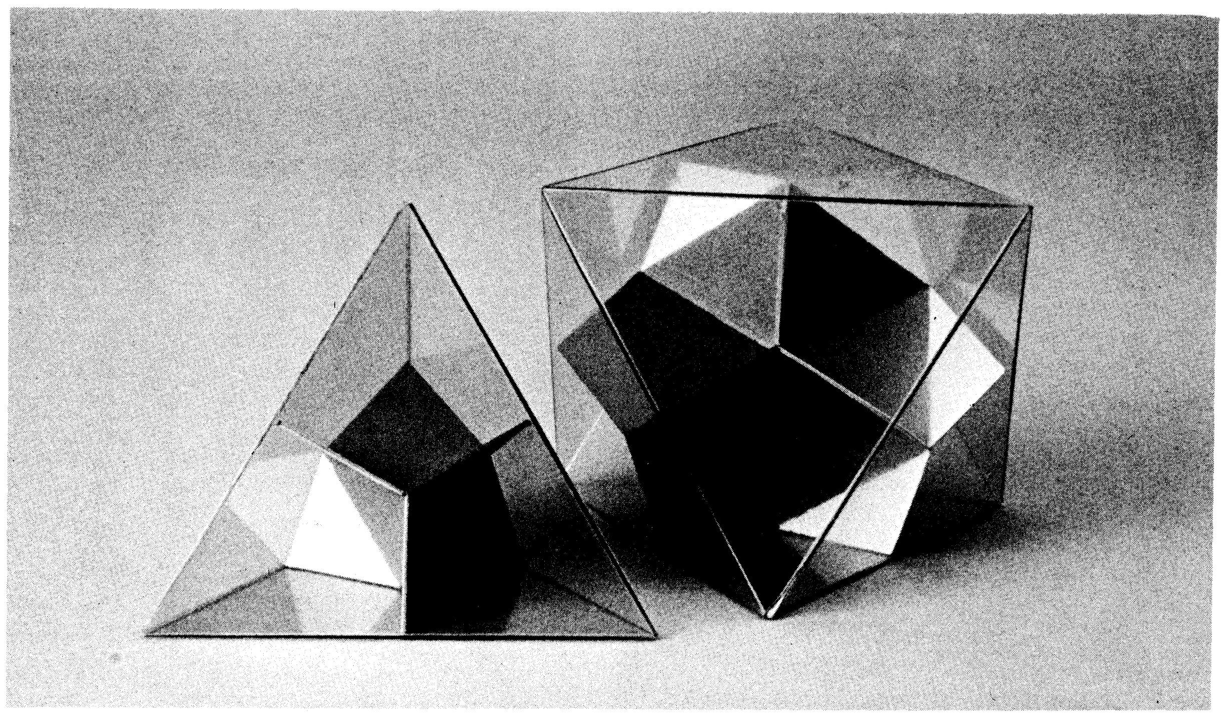

Figure 7

Les directions de ces plans sont changées lorsqu'on effectue une révolution de la moitié d'un polyèdre sur son autre moitié. Cette *transposition* est produite sur un plan perpendiculaire à l'axe qui passe par deux sommets ou deux faces opposées. La **Figure 8** montre le déplacement d'un sixième de circonférence pour le rhombidodécaèdre et le cube.

Une autre expression du mouvement se dessine lorsque des arêtes opposées qui ne sont pas situées dans un même plan de coupe sont reliées par une *forme gauche*. On peut interpréter ce phénomène comme étant le glissement d'une atête vers l'autre ou comme la liaison de leurs points opposés. Ce développement hélicoïdal se poursuit en un ruban, un voile ou crée des espaces clos en opposant plusieurs arêtes à l'intérieur d'un réseau. La **Figure 9** représente la continuité qui existe entre les formes gauches de l'octaèdre et du tétraèdre.

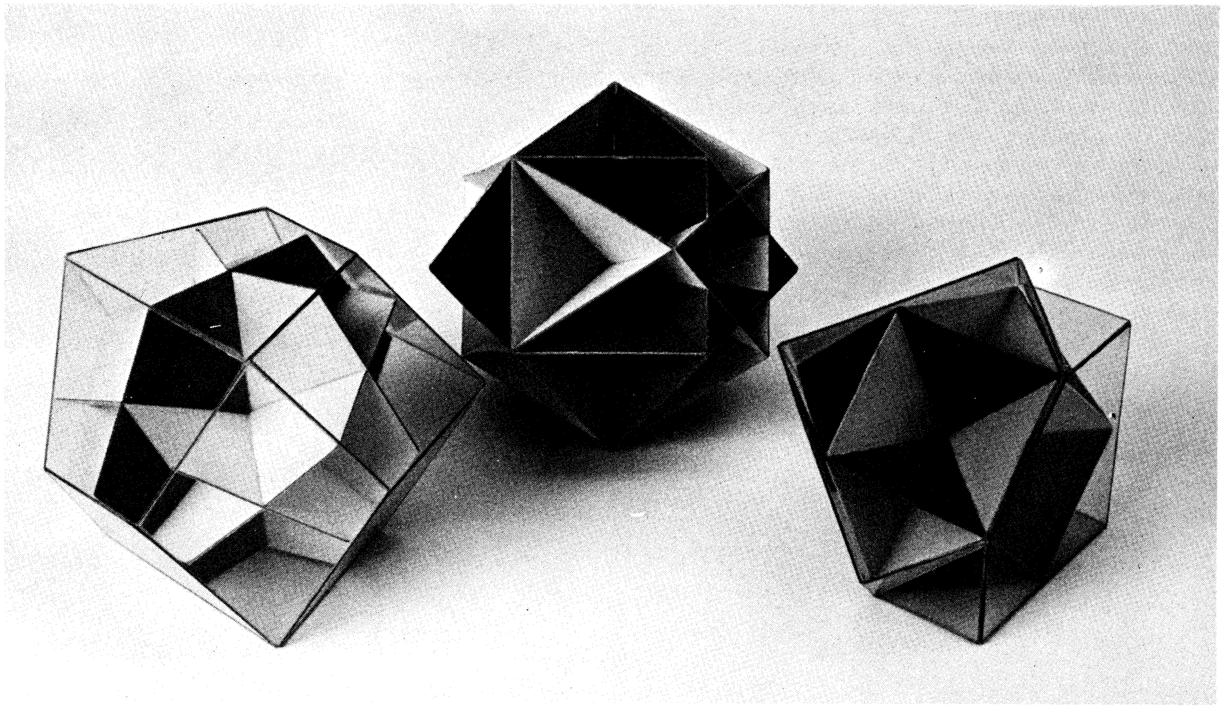

Figure 8

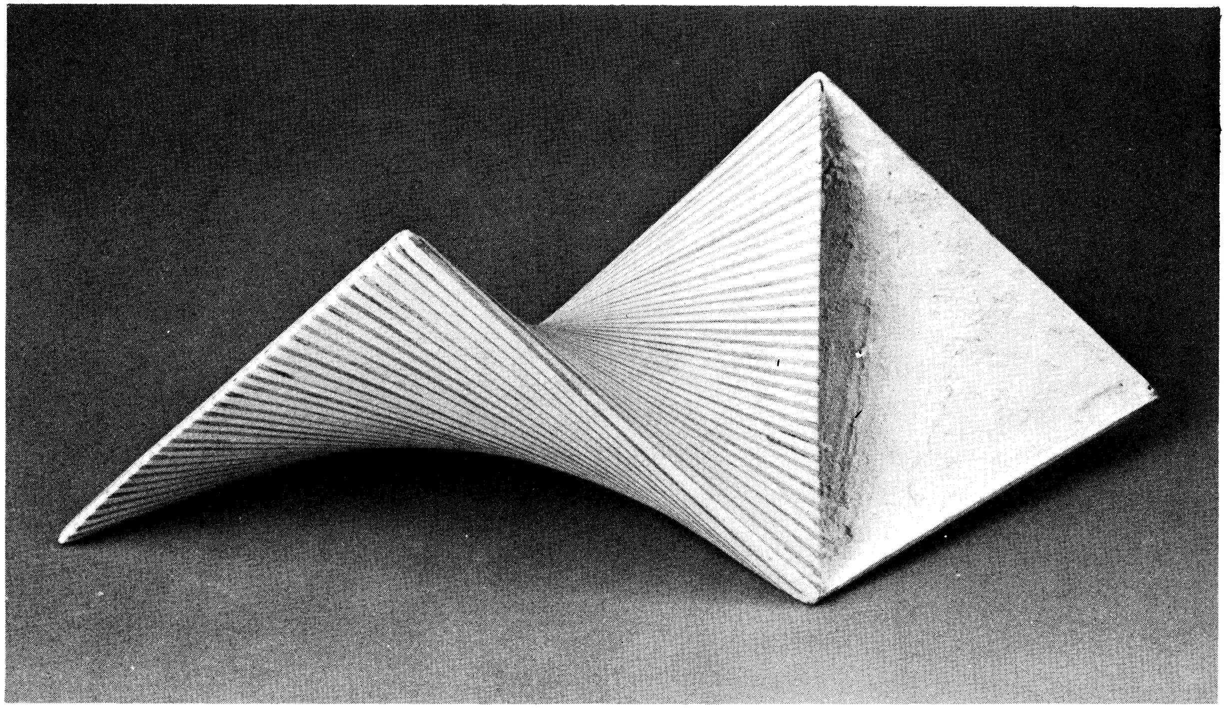

Figure 9

Par des modifications effectuées sur les plans on passe des polyèdres réguliers aux *formes prismatiques.* Dans la **Figure 10**, un octaèdre régulier est déterminé par six sommets situés au centre du prisme hexagonal.

Le dodécaèdre pentagonal régulier et l'icosidodécaèdre s'agglomèrent avec des polyèdres dérivés de la même symétrie en une *structure concentrique* (**Figure 11**). Le centre de cette composition est réductible en un icosaèdre étoilé (appelé aussi grand dodécaèdre étoilé).

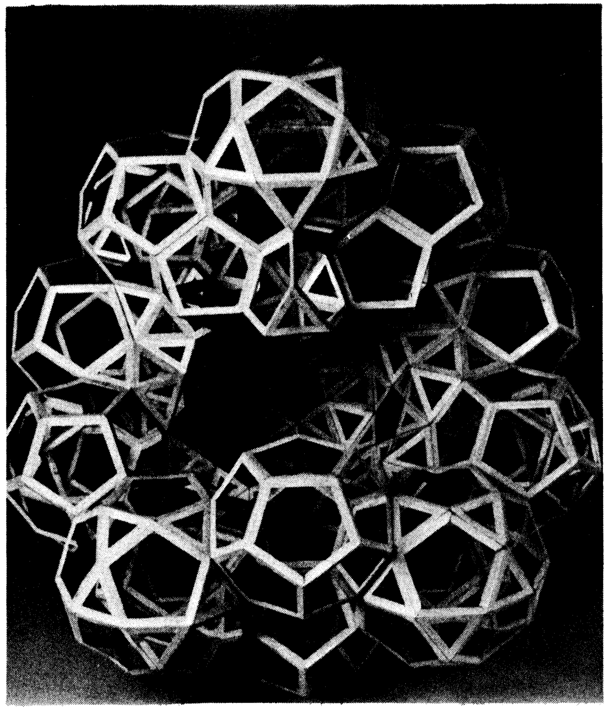

Figure 11

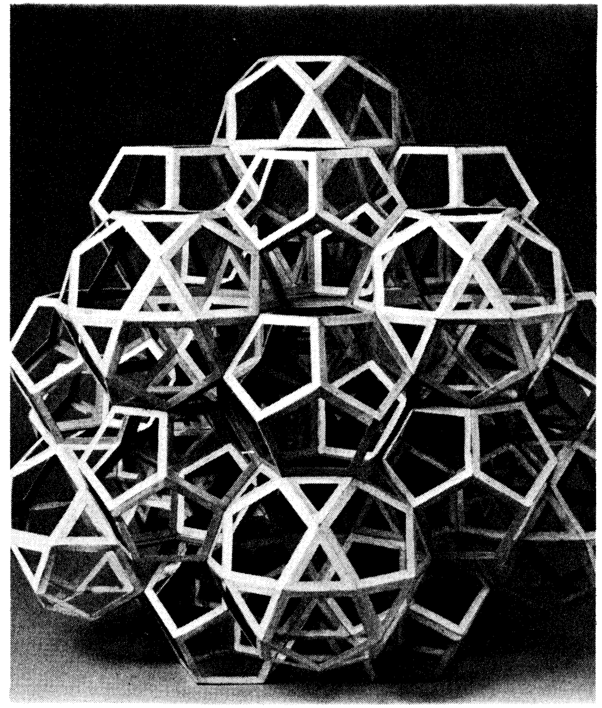

Figure 12

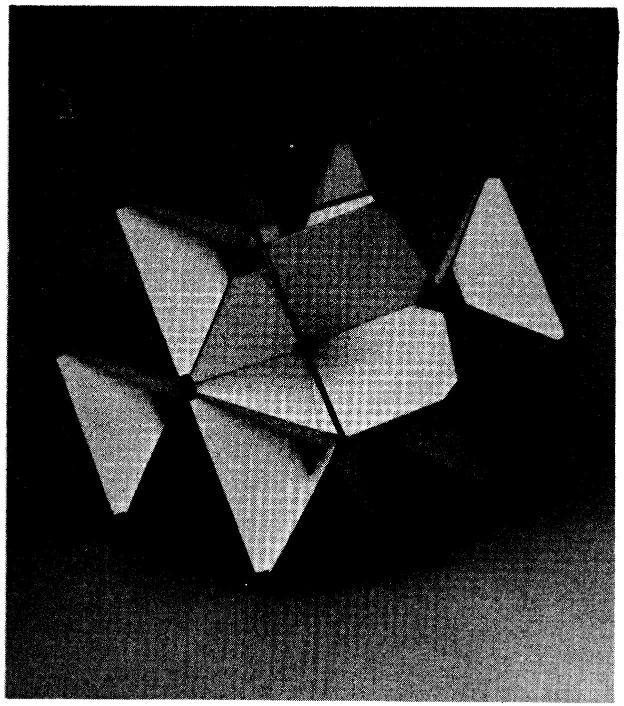

Figure 10

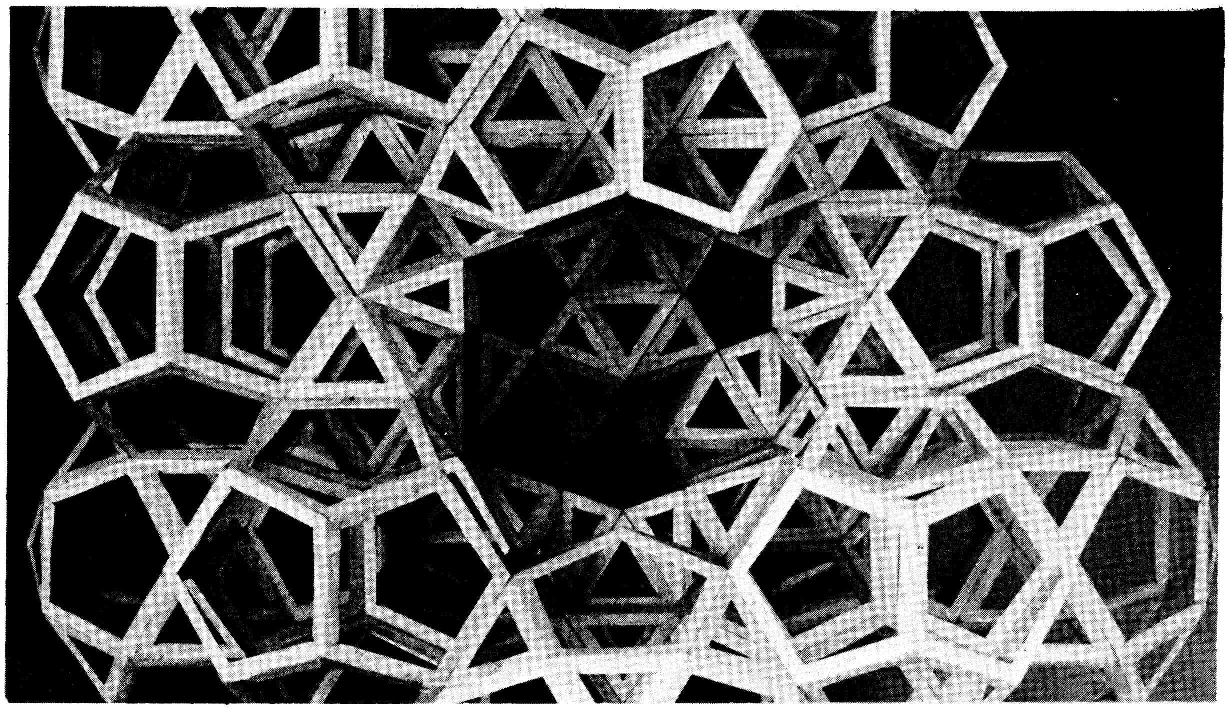

Figure 13

L'icosaèdre étoilé engendre une autre structure concentrique mais qui progresse en de multiples *spirales logarithmiques*. Il s'agit qu'à partir du centre les autres icosaèdres soient accolés par leurs pointes et décroissent vers l'extérieur suivant la proportion du nombre d'or (**Figure 14**). La **Figure 15** montre le fragment d'une couche qui résulterait en fendant un tel assemblage. Théoriquement, les spirales vont vers l'infiniment petit.

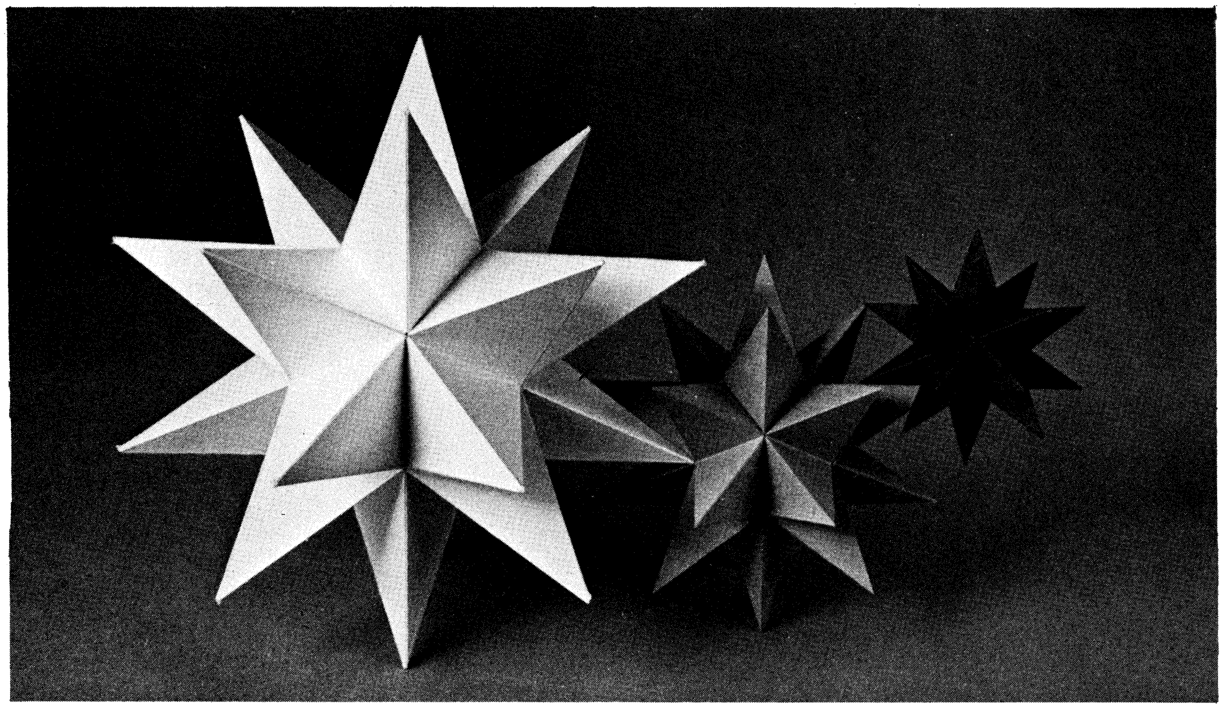

Figure 14

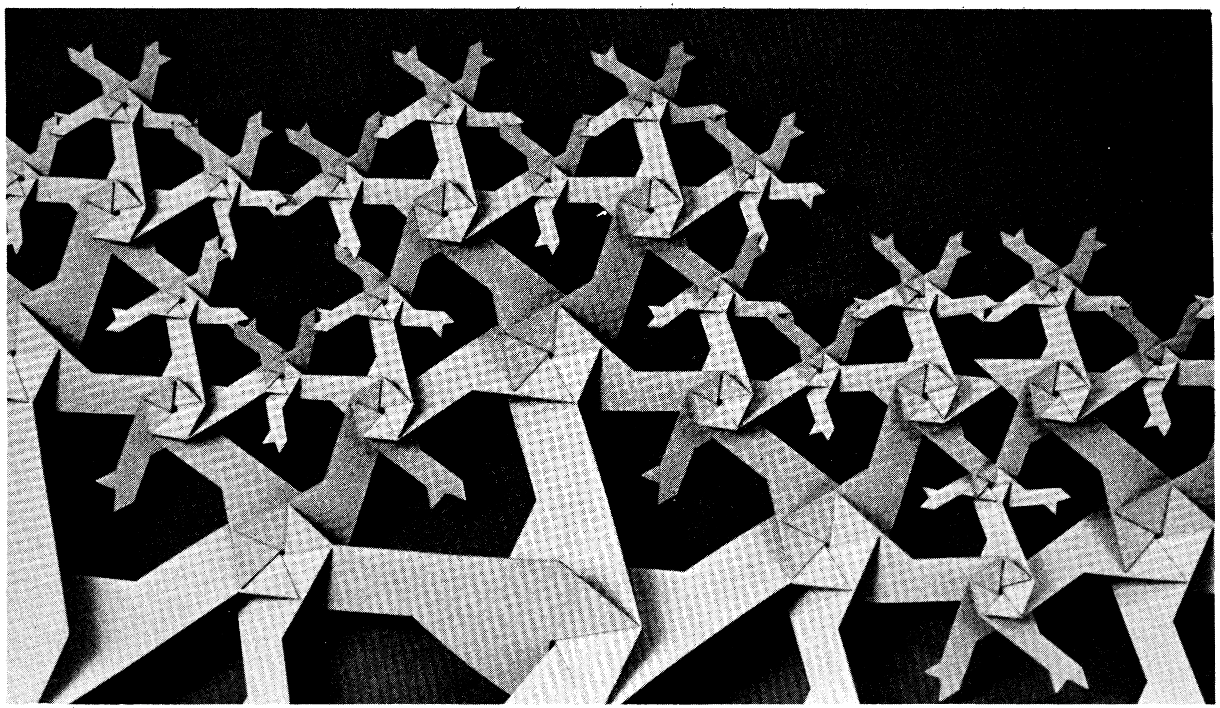

Figure 15

Il existe un icosaèdre et un dodécaèdre pentagonal différents des deux qui sont réguliers. Ils ont toutefois des propriétés symétriques. Ils proviennent de la modification des arêtes et des sommets du cube par une seule face. L'interpénétration régulière de deux icosaèdres s'inscrit dans les limites d'un octaèdre tronqué (**Figure 17**). Deux dodécaèdres composent un tétrahexaèdre étoilé. Dans la **Figure 18**, la forme située à gauche montre cette interpénétration et par la forme de droite on voit la relation entre l'icosaèdre et le dodécaèdre. Les nouveaux polyèdres concaves nés de ces interpénétrations s'assemblent par *juxtaposition*, les vides étant comblés avec d'autres étoiles. Le même phénomène s'applique pour l'icosaèdre et le dodécaèdre réguliers.

Au terme de cet article, je me dois de mentionner qu'au cours de ma recherche, débutée en 1971, j'ai pu profiter des connaissances et de l'expérience que possède en ce domaine l'architecte Raymond Lévesque, professeur à l'Ecole d'Architecture de l'Université Laval à Québec. Je remercie également les professeurs Henry Crapo et Janos Baracs pour m'avoir invité à participer aux travaux du groupe de recherche en Topologie Structurale.

Photographies par Roger Thibault.

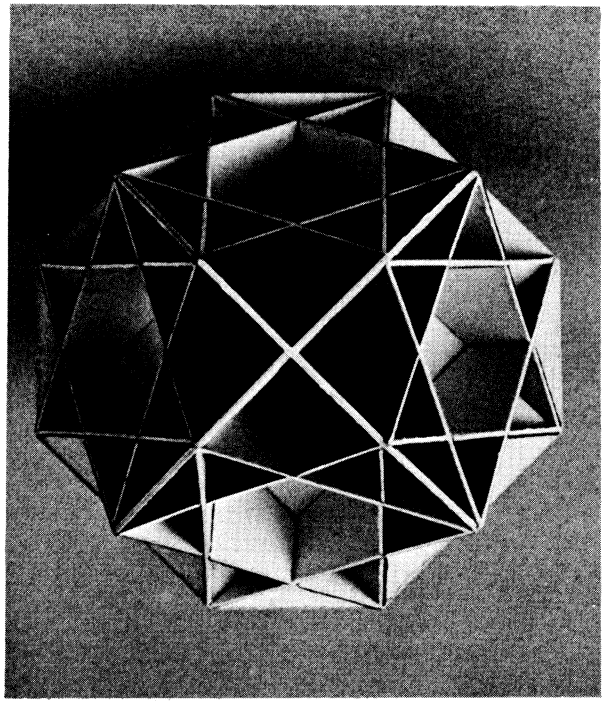
Figure 16

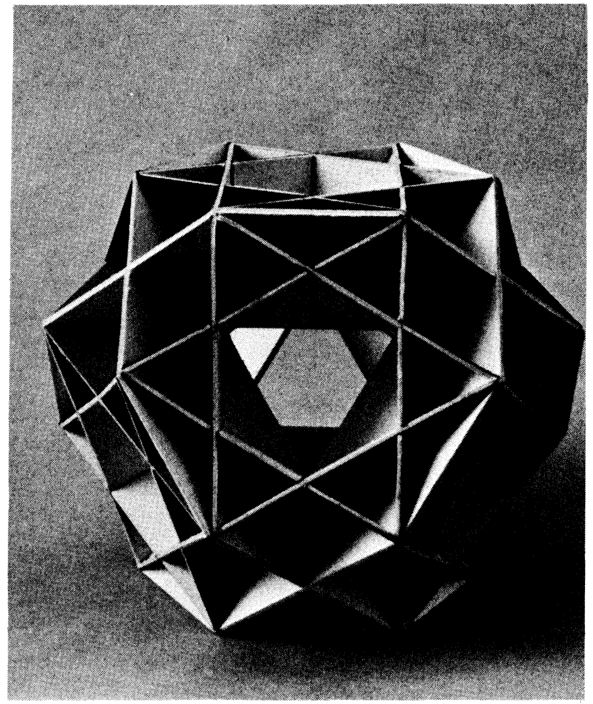
Figure 17

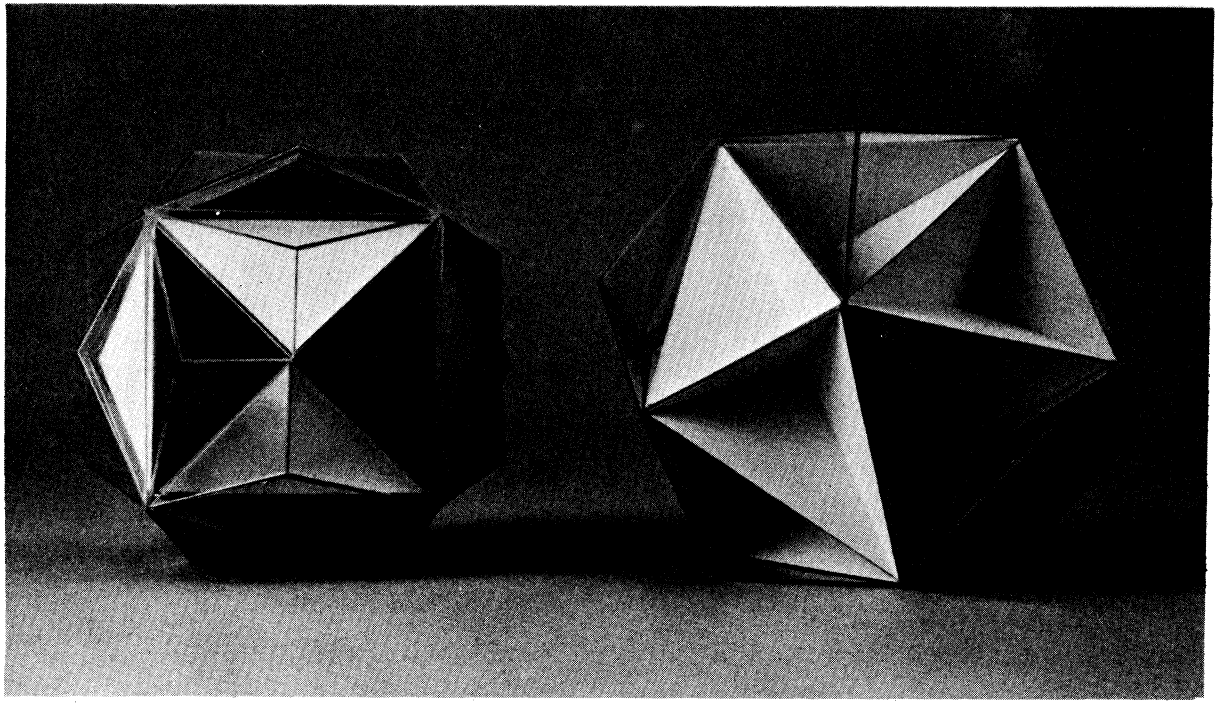
Figure 18

English translation of the article «Structures polyédriques»

by Dominique Dion

Introduction

In order to better understand spatial composition, I progressively developed my interest in geometric forms during my training in the plastic arts. I then built models to illustrate relations between polyhedral structures.

This research involves not so much the discovery of polyhedra as containers or closed forms, but rather the discovery of relationships between polyhedra, even between polyhedra apparently quite dissimilar. Edges, vertices, planes and trajectories constitute their elements of symmetry. When assembled, they establish relations, continuously variable in space, passing from the infinitely small to the infinitely large.

Gathering into a whole several different studies on the subject, this article presents first of all a view of the internal symmetry planes of polyhedra and those which they produce when meeting in space. Then, other models show some possible variations of structures, obtained by manipulating their elements of symmetry. Then come two methods of concentric clustering starting from polyhedra constructed using pentagonal cuts. Finally, we see how certain forms may be used in juxtapositions.

Presentation of the studies

The polyhedra here studied have a configuration determined by the crossing of interior planes through the diagonals, the vertices and edges of their faces. Some of these planes meet the *dual* of the polyhedron. Others locate at the centre the *fundamental form*, starting from which the polyhedron is constructed by truncation and by the extension of certain faces. Some planes lead also to the *interpenetration* of polyhedra. **Figures 1, 2, 3 and 4** offer examples of these applications.

In the adjacency of *complementary polyhedra*, their extended internal planes create new forms, the vertices of some become the centres of others. **Figure 6** shows how the planes of the octahedron and tetrahedron of **Figure 7** organize themselves into an assembly of rhombidodecahedra. The circular openings locate the centres of these two polyhedra. This trick can be carried on indefinitely, and, generally speaking, the assembly is composed of layers of parallel tessellations which cross one another in space.

The directions of these planes are changed when one rotates one half of the polyhedron with respect to the other half. This *transposition* is produced on a plane perpendicular to the axis which passes through two vertices or two opposite faces. **Figure 8** shows the displacement by one sixth of the circumference, for the rhombidodecahedron and the cube.

Another expression of movement appears when opposite edges which are not situated on a single cutting plane are joined by a *skew form*. We can interpret this phenomenon as the sliding of one edge toward another, or as the joining of their opposite points. This helicoidal development unfolds into a ribbon, a sheet, or creates closed spaces by opposing several edges in the interior of a network. **Figure 9** shows the continuity which exists between the skew forms of the octahedron and the tetrahedron.

By modifications carried out on their planes, we pass from regular polyhedra to *prismatic forms*. In **Figure 10,** a regular octahedron is determined by six vertices situated at the centre of an hexagonal prism.

The regular pentagonal dodecahedron and the icosidodecahedron cluster with derived polyhedra of the same symmetry in a *concentric structure* **(Figure 11).** The centre of this composition is reducible to a star-icosahedron (also called the great stellated dodecahedron).

The star-icosahedron engenders another concentric structure, one which builds in multiple logarithmic spirals. It suffices that in starting from the centre, the other icosahedra be attached edge to edge along the points of the stars, decreasing toward the outside in proportion with the golden ratio (**Figure 14**). **Figure 15** shows the fragment of a layer which results from the slicing of such a configuration. Theoretically, the spirals approach the indefinitely small.

There exist an icosahedron and a dodecahedron which are different from the two regular polyhedra. They have, nevertheless, some properties of symmetry. They arise from the truncation of edges or of vertices of the cube. The regular interpenetration of two icosahedra can be inscribed in a truncated octahedron (**Figure 17**). Two dodecahedra make up a stellated tetrahexahedron. In **Figure 18** the form at the left shows this interpenetration, and that at the right shows the relation between the icosahedron and the dodecahedron. The new concave polyhedra born from these interpenetrations are assembled by *juxtaposition*, the voids being filled with other stars. The same phenomenon applies to the regular icosahedron and dodecahedron.

I take the opportunity to mention that in the course of my research, begun in 1971, I have benefitted from the knowledge and experience in this domain possessed by the architect Raymond Levesque, professor at the School of Architecture at Laval University. I likewise thank professors Henry Crapo and Janos Baracs for inviting me to participate in the work of the Structural Topology research group.

Bibliographie

Le code dans la première partie de chaque donnée bibliographique consiste en trois parties, séparées par des tirets. La première lettre indique si le texte est un

L ivre,
A rticle,
P ré-impression, ou
N otes de cours.

La deuxième partie indique si le texte a été rédigé pour des lecteurs qui ont une formation de

M athématicien,
A rchitecte, ou
I ngénieur.

La partie finale du code indique si le texte touche un ou plus d'un des thèmes principaux de la topologie structurale:

G éométrie (en général),
P olyèdres,
J uxtaposition, ou
R igidité.

Les mots-clés ou autres annotations dans la colonne finale montreront l'intérêt du texte pour la recherche en topologie structurale, et ne reflètent pas toujours ni l'ensemble de son contenu ni l'intention de l'auteur.

Beudant 1851 F.-S. Beudant L—MAI—PJ	**Minéralogie** Langlois et Leclercq, Paris, 1851.	Modifications et groupements des polyèdres, loi de symétrie.
Bouasse 1929 H. Bouasse L—MAI—PJ	**Cristallographie géométrique** Delagrave, Paris, 1929.	Réseaux, méthode des troncatures des polyèdres.
Cundy 1961 H. Martyn Cundy and A. P. Rollett L—MAI—P	**Mathematical Models** Oxford University Press, London 1961.	Chapter III: Polyhedra and their duals.
Flint 1968 E. Flint L—MAI—PJ	**Principes de cristallographie** Editions Mir, Moscou, 1968.	Projections, symétrie, formes de croissance, réseaux, groupements.
Steinhaus 1964 Hugo Steinhaus L—MAI—PJ	**Mathématique en instantanés** Flammarion, Paris, 1964.	Mosaîques, polyèdres, duals, juxtapositions.
Thompson 1961 D'Arcy W. Thompson L—MAI—G	**On Growth and Form** Cambridge University Press, England, 1961.	Chapter VI: Equiangular spiral and gnomons.