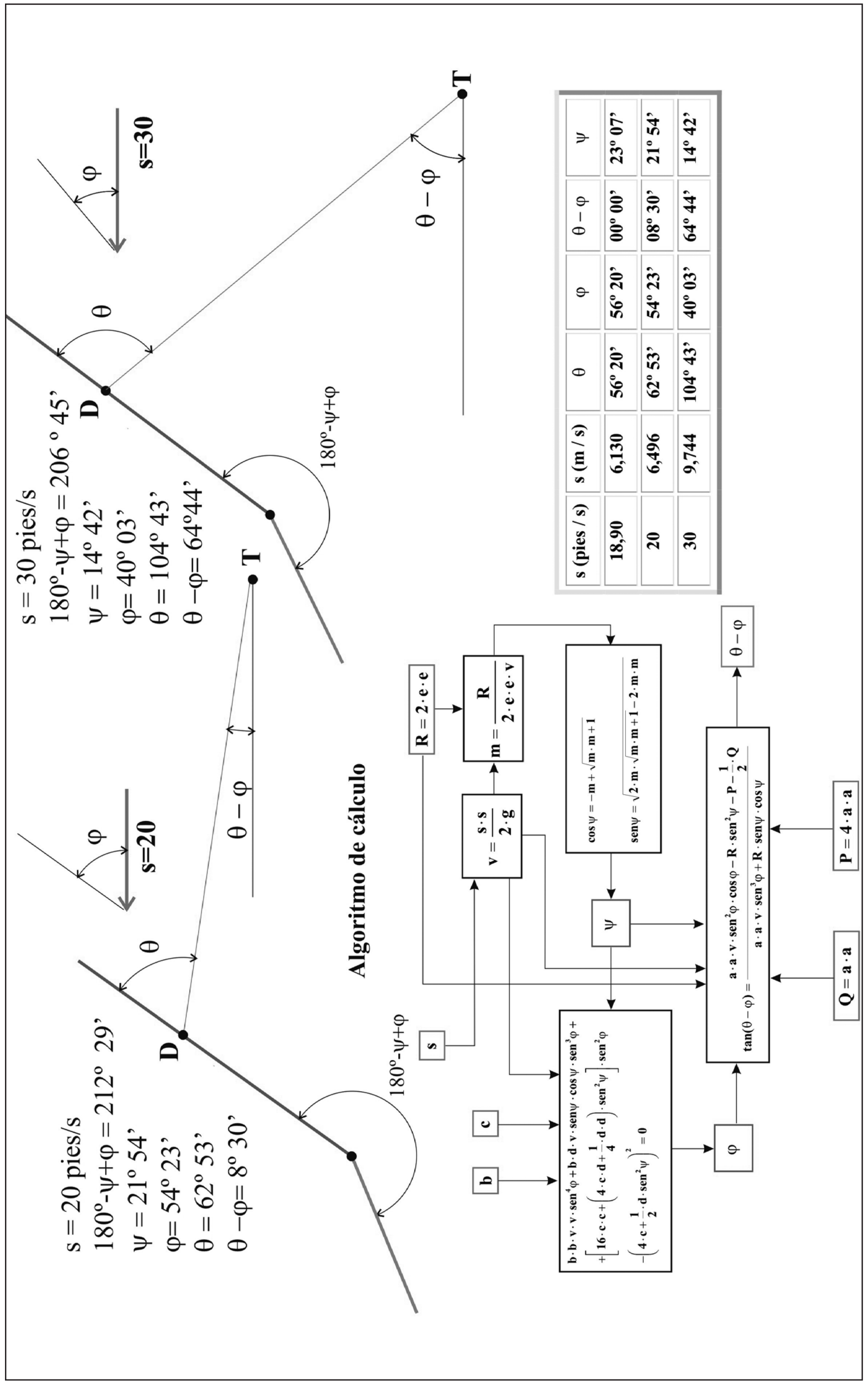


Figura 6. Aplicación práctica del tercer modelo para la cometa.





# EL NÚMERO *E* EN LOS TEXTOS MATEMÁTICOS ESPAÑOLES DEL SIGLO XVIII

*Juan Navarro Loidi*
*jnavarrolo@euskalnet.net*

## 1.- Introducción.

La constante que ahora llamamos *e* (2,7182818...) comenzó a figurar veladamente en los razonamientos matemáticos a comienzos del siglo XVII[1]. El número *e* se puede definir como la base de los logaritmos llamados neperianos[2], que introdujo John Napier (conocido como Neper) (1550-1617) en sus obras *Logarithmorum canonis descriptio* (1614) y *Mirifici logarithmorum* (1618), aunque en la definición de logaritmo que se da en esos libros no se menciona el número *e*:

> *"El logaritmo de un seno dado es el número que aumenta aritméticamente con la misma velocidad a la que el seno ha comenzado a disminuir desde el seno dado proporcionalmente a su longitud"*[3].

Esta definición pone en correspondencia un número *x*, cuyo valor disminuye con una acelaración proporcional a su magnitud ($\frac{d^2x}{dt^2} = kx$), con otro *y*, su logaritmo, que crece uniformemente ($\frac{dy}{dt} = k'$). Esta relación, junto con las condiciones iniciales propuestas por el autor, equivalen a dar para el logaritmo de Neper de un número *x* (NepLogx):

$$NepLog\, x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}$$

1 Sobre la historia del número *e* se puede ampliar en MAOR (2006).
2 Sobre la historia de los logaritmos se puede ampliar en NAUX (1966-1971).
3 "The Logarithme therfore of any sine is a number very neerely expressing the line, which increased equally in the meane time, whiles the line of the whole sine decreased proportionally into that sine, both motions being equal-timed, and the beginning equally swift" (NAPIER, 1616: 4-5)]. La traducción al castellano es mía.

Donde ln indica el logaritmo que tiene por base el número *e*. Se va a utilizar ln para indicar el logaritmo neperiano, aunque en las citas de los autores de la época puedan aparecer otras formas de escribirlo como L o Log. Igualmente el número *e* (2,7181828...) puede aparecer como *c*, *a*, o *n* en algunas citas.

La generalización del uso de los logaritmos se debió a su utilidad para agilizar los cálculos en aritmética y trigonometría. Los logaritmos definidos por Neper no eran los mejores para eso, porque con ellos el logaritmo del producto no es la suma de los logaritmos de los factores[4]. Los logaritmos neperianos actuales tampoco son los más adecuados porque sus mantisas no son cíclicas. Es decir, su parte decimal no se repite al multiplicar, o dividir, el número por diez. Si ln 2 = 0,693147, por ejemplo, ln 20 = ln 2 + ln 10 = 0,693147 + 2,302584 = 2,995731. Esos dos inconvenientes no los tienen los logaritmos decimales, desarrollados por Henry Briggs (1561-1630) haciendo corresponder la progresión geométrica de las potencias de 10 con la progresión aritmética de los números naturales. Con ellos si log 2 = 0,301030, por ejemplo, se verifica que log 20 = 1,301030. Es decir al multiplicar o dividir un número por un múltiplo de 10 sólo cambia la característica, o parte entera, del logaritmo, dejando invariable la parte decimal. Por eso, los primeros utilizadores de los logaritmos se fueron decantando por los propuestos por Briggs[5].

Durante el siglo XVII el número *e* también pudo haber aparecido al estudiar la curva logarítmica[6] o la espiral logarítmica[7], o el área comprendida entre una hipérbola y su asíntota[8]. Pero el florecer de los logaritmos neperianos –también llamados hiperbólicos o naturales– y la aparición del número *e* se produjeron al final de ese siglo con el auge del cálculo infinitesimal[9]. El cómputo del logaritmo de un número se facilitó grandemente con el desarrollo en serie del logaritmo que descubrieron Nicolaus Mercator (1620-87) e Isaac Newton (1643-1727)[10] alrededor de 1665:

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$

4 Se cumple que NepLog A·B = NepLogA + NepLogB – Neplog1 = NepLogA + NepLogB – $10^7 \ln 10^7$

5 Por otra parte, no debe extrañar que el primer valor relacionado con el número *e* que se calculó con precisión fuera el ln10, que ya figura en un lugar destacado en 1616, en la traducción inglesa del *Logarithmorum canonis descriptio* (1614) de Neper.

6 Con la notación moderna la función de la curva logarítmica tendría de ecuación x = log y, por lo que se parece más a nuestra exponencial.

7 Curva de ecuación paramétrica $r = a \cdot e^{b\theta}$ . MAOR (2006: 119-30).

8 NAUX (1971: 31-55); MAOR (2006: 69-76).





Los logaritmos que se obtienen con esa serie son los neperianos. Para obtener otros logaritmos hay que multiplicar la suma por una constante, por ejemplo por 0.43429448... para tener el logaritmo decimal. Además los logaritmos y exponenciales adquirieron importancia analítica gracias a los trabajos de Gottfried von Leibniz (1646-1716) y la familia Bernoulli que mostraron que los diferenciales e integrales de logaritmos y exponenciales son más sencillos si tienen de base el número *e*, porque [11]:

$$\int \frac{dy}{y} = lny \text{ ó } d(lnx) = \frac{dx}{x} \text{ ó bien } \int e^x = e^x \text{ ó } d(e^x) = e^x\, dx.$$

Por otra parte, a finales del siglo XVII Jacob Bernoulli (1654-1705) encontró directamente el número *e*, aunque no lo llamó así, al aumentar arbitrariamente el valor *n* en una expresión del tipo $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, buscando resolver, un problema de interés continuo[12].

Después de estos descubrimientos el número *e* comenzó a figurar en muchos campos de las matemáticas, como se va a ver. Si en el siglo XVII el número *e* estaba escondido detrás de los logaritmos neperianos, en el siglo XVIII no fue así y apareció:

a) Como el número que cumple ln $e$ = 1.

b) Como el valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando *n* se hace infinitamente grande.

c) Como la base de la exponencial que cumple que su diferencial es $de^x = e^x dx$ o del logaritmo que se obtiene en la integral $\int \frac{dx}{x} = lnx$.

d) Como resultado de la serie de Newton-Mercator para $x$ = 1.

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+....$$

e) Como valor de algunas fracciones continuas.

f) En la resolución de algunos problemas de probabilidad[13].

g) Como una forma de relacionar las partes reales e imaginarias de un número complejo.

9 NAUX (1971: 56-76).

10 NAUX (1971: 66-76); MAOR (2006: 77-87).

11 MAOR (2006: 105-118). NAUX (1971: 77-114).

12 MAOR (2006: 39-42, 123).

13 Por ejemplo cuando se trata de hallar la probabilidad de que no coincida ninguna carta con su sobre si se tienen *n* cartas y *n* sobres diferentes, problema cuya solución en el límite es 1/*e*.

$$Re^{i\vartheta} = R(cos\vartheta + i\ sen\vartheta)$$

Leonhard Euler[14] fue quien descubrió esas últimas propiedades del número *e* y también quien popularizó el uso de esa letra, *e*, para indicar el número 2,718281828... Antes esa constante se había indicado por *a*, *b*, o *c*. Se dice que el primer texto de Euler en que figura el símbolo *e* para esa cantidad es *Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta* (1727)[15]. Pero ese artículo no se publicó hasta 1862[16] por lo que la popularización de esa notación se debió principalmente a otros libros posteriores de Euler, especialmente a los titulados *Mechanica* (1736) e *Introductio in Analysim infinitorum* (1748)[17].

## 2.- El número *e* en algunos tratados españoles.

La incorporación del número *e* a las matemáticas españolas se realizó más lentamente que en otros países de su entorno. Los logaritmos neperianos no aparecieron en los tratados de matemáticas publicados en España hasta bien entrado el siglo XVIII. En general, los logaritmos llegaron a los dominios del rey de España con cierto retraso[18]. La primera referencia impresa a los logaritmos en un texto publicado en castellano está en la edición de los *Elementos* (Alcalá, 1637) de Euclides que publicó Luis Carduchi[19]. En el prólogo de ese libro Carduchi dice que tenía traducido un libro de logaritmos y que deseaba publicarlo. No llegó a hacerlo. Tampoco consiguió publicar su libro *De los Logaritmos y Aritmética* (c. 1636) el fraile mercedario Fray Diego Rodríguez (1596-1668) profesor de matemáticas y astrología en la Universidad de México[20]. Pero en su caso todavía se conserva el manuscrito.

14 Ver, por ejemplo DUNHAM (2006: 165-176).
15 *Meditación sobre experimentos realizados recientemente sobre el disparo del cañón*.
16 "Scribatur pro numero cujus logarithmus est unitas e, qui est 2,7182817..." En *Euler Opera Postuma* (1862: v. 2, 800). Cita tomada de http://math.dartmouth.edu/~euler/ (14-V-2008).
17 CAJORI (1929: v. II, 13-15).
18 Sobre la introducción de los logaritmos en España ver NAVARRO-LOIDI, J., LLOMBART, J. (2008: 83-101).
19 Nacido en Madrid de una familia de origen italiano, fue ingeniero hidráulico y profesor de fortificación. LOPEZ PIÑERO, J.M.; GLICK, T.; NAVARRO BROTONS, V. y PORTELA MARCO, E. (1983: v. I, 180-181). En adelante, DHCME.
20 El mercedario Diego Rodríguez fue ingeniero, arquitecto, fabricante de relojes de sol y catedrático de matemáticas de la Universidad de México. DHCME: v. II, 244. *De los logaritmos y la aritmética* se encuentra en la Biblioteca Nacional de México sección de manuscritos, signatura: ms 1519.





También se conserva el manuscrito de un curso de aritmética titulado *La Arithmética común y decimal y Álgebra* (c. 1646) escrito por el jesuita escocés Hugh Sempil (1596-1654) profesor del Colegio Imperial y rector del Colegio de Escoceses de Madrid, en el que se utilizan los logaritmos repetidamente[21]. Los primeros libros impresos en castellano que los desarrollan ampliamente son la *Architectura Civil Recta y Obliqua* (Vigevano, 1678) del cisterciense Juan Caramuel (1606-1682)[22] y la *Trigonometria Española* (Mallorca, 1672) del jesuita José Zaragozà (1627-1679)[23]. Este jesuita fue también el primero en imprimir en España unas tablas de logaritmos: *Tabula Logarítmica continens undecim numerorum chiliades cum suis Logarithmis* (Madrid, 1672) y *Canon Trigonometricus Continens Logarithmos, Sinus et Tangentium* (Madrid, 1672). En las décadas finales del siglo XVII y en las iniciales del XVIII no eran raros los libros españoles de matemáticas puras o mixtas en los que se explicaban los logaritmos o se empleaban en los cálculos, suponiéndolos conocidos. Pero en todos esos libros sólo se utilizaban y se ensalzaban los logaritmos por ser unos auxiliares valiosos para el cálculo aritmético y, principalmente, para la trigonometría. Se elogiaba la idea de Neper, reconociéndolo como el descubridor de los logaritmos; pero se criticaba su sistema de logaritmos y no se estudiaban los logaritmos neperianos. En consecuencia el número *e* no aparece directa ni indirectamente en los libros de matemáticas españoles del siglo XVII.

En los textos españoles de la primera mitad del siglo XVIII no cambió la forma de presentar los logaritmos. Se seguían definiendo como los valores de una progresión aritmética emparejada con una geométrica, se enunciaban

21 Escocés de nacimiento se trasladó a España para entrar en la Compañía de Jesús. Fue profesor de matemáticas del Colegio Imperial y rector del Seminario de Escoceses de Madrid. DHCME: v. II, 315-16). El manuscrito está en la Academia de Historia de Madrid, Fondo Jesuitas, col. Cortés nº 677.
22 Juan Caramuel Lobkowitz estudió en la Universidad de Alcalá. Posteriormente entró en el Cister. En 1632, residió en Portugal y después partió hacia Flandes donde permaneció varios años relacionándose con reconocidos científicos. De allí se trasladó al monasterio de Duisburg en Alemania y de allí se fue a Praga donde fue predicador real. En 1657 se cambió a Roma y posteriormente fue obispo de Campaña y de Vigevano en Italia. Fue un autor muy prolífico que tocó todos los campos del saber. DHCME: v. I, 168-171.
23 José Zaragozà o Saragossà estudió en la Universidad de Valencia. Posteriormente entró en la Compañía de Jesús y fue profesor de filosofía y teología en los colegios de Palma de Mallorca y Valencia. Finalmente fue nombrado profesor de matemáticas del Colegio Imperial de Madrid, maestro de matemáticas del rey Carlos II y consejero en cuestiones técnicas de la Corona. Además fue un prestigioso astrónomo. Publicó catorce libros la mayoría con el material que había preparado para impartir sus clases de matemáticas. DHCME: v. II, 448-450.

sus propiedades más elementales y se afirmaba que los logaritmos decimales eran los más útiles. Luego no se utilizaba otro tipo de logaritmos, ni se trataba de la curva logarítmica, ni de la serie de Mercator-Newton. Solamente el oratoriano Tomás Vicente Tosca[24] (1651-1723) incluyó en el tomo tercero de su *Compendio Matemático* (1707-1715, 9 v.), en el apartado dedicado a las cónicas, una proposición de la que se deducía que para obtener las áreas de los recintos finitos comprendidos entre una hipérbola y su asíntota había que utilizar los logaritmos[25].

Un aspecto que cambió en el siglo XVIII y que facilitó que los logaritmos neperianos y el número *e* se fueran conociendo en España fue la intensificación de los contactos científicos con el extranjero. A través de esas relaciones se comenzó a conocer el cálculo infinitesimal, lo que propició el conocimiento del número *e* en la comunidad matemática ibérica. Se suele decir que el texto *Thèses de divers traités de Mathématique* (Toulouse, 1717) escrito por Francisco Torre y Argaiz[26] es la primera obra de un autor español en la que se menciona el cálculo diferencial. En él se alude a los logaritmos hiperbólicos y se comenta que su diferencial es $\frac{dx}{x}$, en el apartado dedicado a "Les infiniment petits" (TORRE, 1717: 11-14). Pero ese escrito es solamente un esquema para una presentación pública en la que Torre y Argaiz iba a tratar desde la aritmética hasta la pirotecnia y desde la geometría hasta la navegación y en él no aparece ninguna referencia al número *e*.

Fue a partir de 1750 cuando comenzaron a publicarse en castellano tratados que desarrollaban el cálculo diferencial e integral y que citaban o calculaban el número *e*. Según CUESTA DUTARI (1985: 120-137) el primer libro en el que se desarrolla dicho cálculo diferencial, siguiendo a Wolf y Mc Laurin, es el tomo cuarto del *Curso militar de mathemáticas* (4 v. 1753-1756) de Pedro Padilla y Arcos[27]. No se ha podido estudiar ese tomo, pero en los restantes volúmenes no aparece el número *e*, aunque en el tomo III se estudia la suma

24 Valenciano, Tosca se ordenó sacerdote y entró en la Congregación de San Felipe Neri. Participó en varios círculos matemáticos de orientación renovadora y llegó a ser vicerrector de la Universidad de Valencia. DHCME: v. II, 368-371.

25 Lo expone en la "Proposición XLII" (TOSCA, 1757: v. 3, 260-261) en el "Libro III De la Hiperbola", dentro del apartado dedicado a las cónicas.

26 Se conoce poco de la vida de Francisco de la Torre Argaiz. Fue discípulo de los jesuitas y alumno de la Universidad de Toulouse. Probablemente era originario de Navarra, CUESTA DUTARI (1985: 113-119).

27 Padilla y Arcos fue capitán e ingeniero ordinario de los Ejércitos y director de la Real Academia de Guardias de Corps de Madrid.





de algunas series, demostrando, por ejemplo, que la serie harmónica es divergente. Sí se menciona, sin embargo, a Euler al tratar del número π:

"El celebre Eulerio saca que supuesto/el diámetro 1, es la circunferencia en partes décimas = 3,141592..." (PADILLA, 1753: v. 2, 207-208).

## 2.1.- Tomás Cerdá (1719-1791)[28].

Poco después el jesuita Cerdá se aproximó más a la obtención del número *e* en sus *Liciones de Matematica, ó Elementos Generales de Aritmética y Algebra* (1758). En ese libro no se estudia el cálculo infinitesimal, pero en la parte dedicada a la aritmética, en el "CAP. XX. De los Logaritmos hyperbólicos. Su formación" (CERDÁ, 1816:[29] 296), se definen los logaritmos neperianos como una correspondencia entre una progresión geométrica: 1, $1+\varepsilon$, $(1+\varepsilon)^2$, $(1+\varepsilon)^3$, $(1+\varepsilon)^4$ etc. con ε muy pequeño y una progresión aritmética de diferencia ε: 0, ε, 2ε, 3ε ... De esa forma al número $(1+\varepsilon)^n$ le corresponde el logaritmo $L = n{\cdot}\varepsilon$. A partir de esa definición Cerdá se plantea dos problemas: conocido el logaritmo hiperbólico L de un número N, hallar dicho número, y dado un número, hallar su logaritmo natural. Para resolver el primer problema considera que:

$$N = (1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}\varepsilon^3 + \dots$$

desarrollando la potencia de 1 + ε por el binomio de Newton generalizado. Si se acepta que *n* es muy grande se pueden despreciar los sustraendos –1, – 2, etc. de los numeradores y la expresión anterior queda simplificada:

$$N = (1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n^2}{2}\varepsilon^2 + \frac{n^3}{3\cdot 2}\varepsilon^3 + \dots$$

Dado que nε = L, por definición del logaritmo de N, la serie se puede escribir como:

28 Cerdá nació en Tarragona. Entró joven en la Compañía de Jesús. Dio clases de Teología y Filosofía en Zaragoza, Gerona y Cervera. En 1755 fue discípulo de Pézenas en Marsella dedicándose posteriormente a las Matemáticas que enseñó en los colegios de Nobles en Barcelona, e Imperial de Madrid. En 1767 con la expulsión de los jesuitas se trasladó a Italia y dejó de dedicarse activamente a las matemáticas.

29 La primera edición fue en 1758, pero las citas están tomadas de la reedición de 1816.

$$N = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{3 \cdot 2} + \ldots$$

que es el desarrollo en serie de $e^L$.

El segundo problema que se resuelve es dado un número N hallar su logaritmo hiperbólico L. Para ello Cerdá pone que $1+\varepsilon = N^{1/n}$ y define un número $x$ tal que $N = 1+x$. Designando por $m$ al valor $\frac{1}{n}$, y desarrollando $1+\varepsilon = (1+x)^m$ en serie por el binomio de Newton se obtiene:

$$1 + \varepsilon = (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3 \cdot 2}x^3 + \ldots$$

De nuevo, como $n$ es muy grande y $m$ muy pequeño, Cerdá desprecia las $m$ en las restas de los numeradores de la serie, quedando esta simplificada:

$$\varepsilon = m - m\frac{x^2}{2} + m\frac{x^3}{3} - \ldots$$

Como $n\varepsilon = L$, multiplicando los dos miembros por $n$, y teniendo en cuenta que $n \cdot m = 1$, queda la serie:

$$L = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \text{ donde } x = N - 1$$

Esta manera de encontrar el logaritmo y el antilogaritmo es similar a la que propone Euler en *Introductio in analysin infinitorum* (1748: I, 85-93)[30]. Cerdá lo reconoce, pero dando importancia al problema que para su libro era central: la obtención de las tablas de logaritmos neperianos o hiperbólicos:

> *"Fundado en estas series y reglas que hasta aquí hemos dado, calculó Eulero en su introducción al Analisi cap. 7 los logaritmos hiperbólicos desde 1 hasta 10, y fundado en las mismas Mr. John Turner sacó una tabla breve de los mismos, [...] que por ser breve, de suma utilidad y que no se suele encontrar en lo común de las Tablas Logarítmicas pondré aquí para los aficionados al cálculo integral o al metodo inverso de las fluxiones"* (CERDÁ, 1816: 303-304).

30 En el "Caput VII De quantitatum exponentialium ac Logarithmorum per Series explicatione".





Estas tablas que figuran en el libro de Cerdá son las primeras tablas de logaritmos neperianos editadas en España.

Como, según Cerdá, los logaritmos naturales son útiles para el cálculo integral, no para la aritmética, no profundiza en este tema en el libro, ni menciona el número *e*[31]. Sí halla, sin embargo, $ln\ 10 = 2{,}3025281$ que utiliza para explicar cómo se halla a partir del logaritmo neperiano de un número el de otro que es diez veces el primero.

### 2.2.- Benito Bails (1730-1797)[32].

Para encontrar en esta época unos textos en español en los que se introduzca el número *e*, se mencionen sus propiedades y se indique su valor, hay que acudir a los escritos de Bails. Este matemático publicó dos tratados de matemáticas bastante extensos: *Elementos de Matemáticas* (Madrid, 1772-1783) en 10 volúmenes y *Principios de matemáticas* (Madrid, 1776) en 3 volúmenes.

En los *Elementos* se menciona el número *e*, al menos, en los volúmenes II, III y X. El segundo tomo está dedicado al álgebra y dentro de ella se estudian las series. Para encontrar la serie del $log\ (1+x)$ Bails utiliza un método diferente al empleado por Cerdá. Parte de una propiedad de los logaritmos que dice que, si $(1+z) = (1+x)^n$, se verifica que $log\ (1+z) = log\ (1+x)^n = n \cdot log\ (1+x)$. Supone que la serie de un logaritmo es en general:

$$Log\ (1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$

Donde $A$, $B$, $C$ son unos coeficientes indeterminados que se necesitan hallar para conocer la serie. Esa igualdad también debería valer para $log\ (1+z)$, y por la propiedad anterior:

$$log(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots = log\ (1+x)^n = n \cdot log\ (1+x) = \\ = n \cdot ( Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots)$$

31 Sí debió de tratar del número *e* en otros cursos. Por los manuscritos de Cerdá que se conservan en la Academia de Historia se puede asegurar que dio clases de cálculo diferencial, o de fluxiones, pero no llegó a publicar sus escritos sobre esas materias.

32 Benito Bails nació en Sant Adrià del Besós. Estudió matemáticas en Francia. De vuelta en España fue profesor de matemáticas en la Academia de Bellas Artes de San Fernando de Madrid durante muchos años y estuvo muy bien relacionado con los círculos científicos madrileños. DHCME: v. I, 92-94.

Sustituyendo en la primera serie la variable $z$ por su valor en función de $x$:

$$z = (1+x)^n - 1 = nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}x^3 + \ldots$$

e igualando los coeficientes de las mismas potencias de $x$ en el desarrollo del *log (1+x)* por $n$ y en el de *log (1+z)* con la sustitución hecha, se encuentran los valores de $A$, $B$, $C$ etc., quedando:

$$L\ (1+x) = A\cdot( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&\ c.)$$ (BAILS, 1779: v. II, 380)

Luego se afirma que para $A = 1$ se obtienen los logaritmos hiperbólicos. A continuación se halla la serie que sirve para obtener un número a partir de su logaritmo, y se concluye diciendo:

> *"Si quisiéramos hacer uso de esta serie para hallar la base de los logaritmos naturales [...] sería n = 2,71828183. Este número es de muchísimo uso en el ramo más dificultoso del cálculo infinitesimal"* (BAILS, 1779: v. II, 384).

En el tomo tercero de los *Elementos* se estudia la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral y la trigonometría esférica. En él se menciona de nuevo el número *e* en el apartado dedicado al cálculo diferencial, en la sección "De la diferencial de las cantidades exponenciales" (BAILS, 1779: v. III, 256), en la que se dice:

> *"Si hubieramos de diferenciar la exponencial $c^x$ siendo c la cantidad cuyo logaritmo = 1, sería en virtud de lo dicho la diferencial de la expresada cantidad $c^x$ d(L $c^x$ ) que se reduce a $c^x$d(xLc) = $c^x$ dx Lc y como suponemos sea Lc = 1 resulta que d $c^x$ = $c^x$·dx, esto es que la diferencial de esta esponencial particular es igual a / la esponencial misma multiplicada por la diferencial de su esponente"* (BAILS, 1779: v. III, 257-258).

Más adelante, en la parte dedicada al cálculo integral, también se menciona el número *e* en la integración de las expresiones exponenciales: "porque una vez que la diferencial de $c^x$ es $c^x\ dx$, se sigue que[33] $S\ c^x\ dx = c^x$" (BAILS, 1779: v. III, 402).

[33] Bails usa S para indicar la integral.





En este mismo libro, en la sección titulada "De las ecuaciones diferenciales" (BAILS, 1779: v. III, 488) vuelve a aparecer el número *e* al obtener por integración para el seno y el coseno las igualdades:

$$sen\ x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \quad cos\ x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$ (BAILS, 1779: v. II, 491)

De estas fórmulas Bails dice que "esto nos trahe a la memoria un modo de espresar el seno y coseno de un ángulo que puede ser de algún uso" (BAILS, 1779: v. II, 491). No parece que Bails fuera consciente de las consecuencias de esas expresiones, pues en el tomo X de los *Elementos* se declara favorable a tomar como logaritmos de los números negativos los de sus valores absolutos:

> *"Aquí se nos puede preguntar si los logaritmos de las cantidades negativas son reales, o qual es su naturaleza. La respuesta será clara y breve. Las cantidades negativas sólo se diferencian de las positivas en que se toman al revés que éstas: y como los logaritmos no se refieren à la oposición o modo contrario de ser las cantidades unas respecto a otras, si únicamente a lo que ellas son en sí, el logaritmo de toda cantidad negativa ha de ser el mismo que el de la cantidad positiva igual con ella"* (BAILS, 1787: v. X, 127).

En 1712 hubo una discusión entre Leibniz y Johann Bernoulli sobre la existencia y el valor del logaritmo de un número negativo. Leibniz opinaba que no existía, mientras que Bernoulli opinaba que era igual al del valor absoluto de dicho número. Bails se inclina en ese libro por la opinión de Bernoulli. No considera la solución de Euler, aceptando logaritmos multivaluados que se deduce de su conocida fórmula[34].

$$e^{ix} = cosx + i\cdot sen\ x$$

En el tomo X de los *Elementos* de Bails, que está dedicado especialmente a los logaritmos, también aparece varias veces el número *e*. Este volumen contiene, además de varias tablas de logaritmos, una larga introducción teórica.

[34] EULER (1748: 111-112). Sobre la discusión se puede ver NAUX (1971: 150-189), MAOR (2006: 153-160).

En esa parte Bails explica cuatro formas diferentes de definir los logaritmos. La primera haciendo una correspondencia entre una progresión aritmética y una geométrica. La segunda a partir de la curva logarítmica. Para dar esa definición comienza indicando como se puede obtener dicha curva colocando en un eje horizontal una sucesión de puntos equidistantes y sobre ellos unos segmentos cuyas longitudes van en progresión geométrica. Luego por medio de medias aritméticas y geométricas dibuja nuevos segmentos en puntos intermedios hasta que sus extremos formen "un polígono de infinito número de lados, todos infinitamente pequeños [...] Esta curva se llama Logarítmica" (BAILS, 1787: v. X, 89)[35]. Luego, se demuestra que en esa curva la subtangente es una constante y que cuando esa constante vale 1 la curva correspondiente es la del logaritmo neperiano. El tercer método propuesto es el de las áreas comprendidas entre las hipérbolas y sus asíntotas y el cuarto, y último, es el del análisis o de las funciones, en el que se define la base de un logaritmo y se dice que la función exponencial es la inversa de la logarítmica. Dentro de este apartado se trata del desarrollo en serie de la función logarítmica y exponencial, utilizando el mismo método que en el tomo II y se concluye diciendo que, si el número que se busca es el que tiene por logaritmo neperiano 1, se verifica que "n = 2,71828 18284 59645 28536 028 cuyo número es de suma utilidad en el cálculo integral" (BAILS, 1787: v. X, 137). El número que obtiene Bails con veintitrés cifras decimales es el mismo que figura en el *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748: I, 90) de Euler.

Lo que Bails explica en los *Principios* sobre el número *e*, al que llama *n* en ese tratado, es similar, aunque menos extenso, a lo que expone en los *Elementos*.

Para hacerse una idea más clara de la opinión que tenía Bails sobre la obra de Euler se puede acudir a los prólogos de los diversos tomos de los *Elementos*, en los que se indican los libros y los autores en los que se había inspirado para desarrollar las materias que se estudian en cada volumen. En esos prólogos queda claro que Bails sentía una gran admiración por Euler, al que cita varias veces y dedica algunos comentarios muy elogiosos. Por ejemplo en el tomo tercero al proponer obras sobre el cálculo diferencial e integral aconseja en primer lugar los *Elementos* del P. Gherli y luego añade "después de estudiado el curso del P. Gherli, empiezese a estudiar la introducción al cálculo diferencial y al cálculo integral de Euler (37)".

35 Esa curva hoy en día se llamaría exponencial, no logarítmica.





En la nota 37 se dice:

> *"(37) Institutiones Calculi Integralis Auctore Leonhardo Euler tres tomos en 4 Petersburgo 1768, 68, 69, 70. De los elogios que he dado a las obras de este gran Matemático siempre que se me ha ofrecido hacer mención alguna de ellas, se indicia el sumo aprecio en que las tengo. No conozco otras más apropósito para el que deseare hacer sólidos progresos en el estudio de las Matemáticas; la inventiva de su autor, su extraordinaria destreza en todos los ramos de la Análisis, la multitud de asuntos que ha tratado, y la profundidad con que los desentraña, preocupan a favor de los escritos que no se ha desdeñado de componer para los principiantes, de los quales han sacado no poco, muchas veces callado, los autores de algunas obras que he tenido presente"* (BAILS, 1779: v. III, XXIX).

Como se puede ver, no anda lejos Bails del "Leed a Euler, leed a Euler. Él es el maestro de todos nosotros" de Laplace.

### 2.3.- Francisco Villalpando (1740-1797)[36].

De los autores posteriores, el capuchino Francisco Villalpando estudia el cálculo infinitesimal en el "Appendix De Analysi quantitatum infinitarum" de su *Tractatus Praeliminaris. Mathematicarum disciplinarum elementa in usum Physicae candidatorum* (1778), mencionando el número *e*. En ese texto demuestra que la diferencial del logaritmo hiperbólico de una cantidad es la diferencial de dicha cantidad dividida por ella misma, para lo que desarrolla en serie la diferencia $ln\,(x+dx) - ln\,x$ y desprecia los término en $dx^2$ o de grados superiores. A continuación expone:

> *"Con este método pueden diferenciarse fácilmente las cantidades que se llaman exponenciales. [...] si a es la base logaritmica, cuyo logaritmo es igual a 1, será* $da^x = a^x dx$*"* [37].

36 Fernando de Soto y Abastas nació en Villalpando y tomó ese nombre al entrar en la orden. Estudió en la Universidad de Valladolid, pero la formación matemática y filosófica se la dieron sobre todo en el noviciado de los capuchinos de Salamanca del que fue después profesor. Sobresalió como matemático y como filósofo.

37 Traducción al castellano tomada de COBOS (1990: 115). En ese libro está transcrito también el original en latín.

En el apéndice que se ha estudiado no se han encontrado referencias a Euler, ni a ningún otro autor, pero entre las series que pone como ejemplos hay varias que pueden provenir de sus textos.

### 2.4.- Juan Justo García (1752-1830)[38].

Este catedrático de Salamanca en sus *Elementos de Aritmética Álgebra y Geometría* (1782) expone el cálculo infinitesimal de una forma diferente a las de Bails y Villalpando. Primero encuentra la diferencial del logaritmo, utilizando que la subtangente (ST) es constante en las curvas logarítmicas y obtiene de esa propiedad, por semejanza de triángulos, que: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{ST}$, de donde: $dx = A\frac{dy}{y}$. Afirma que si $A = 1$ se trata de la diferencial del logaritmo neperiano. Continúa con las exponenciales diciendo:

> *"885. Si se hubiere de diferenciar $c^x$ en suposicion de ser c un número cuyo logaritmo es 1, se tendrá $d(c^x) = c^x\, dL(c^x) = c^x\, d(xLc) = c^x\, dx\, Lc$ y como $Lc = 1$, sería $d(c^x) = c^x\, dx$"* (GARCÍA, 1782: 365).

En un apartado posterior dedicado a las series se plantea calcular una tabla de logaritmos naturales: "Propongamos encontrar el logaritmo hiperbólico de un número cualquiera (406)". Para ello parte de que para el logaritmo neperiano es $dL(a+x) = (a+x)^{-1}\, dx$ e integra la serie $(a+x)^{-1}$. Resultando[39]:

"$Sdx(a+x)^{-1} = \frac{x}{a}-\frac{xx}{2aa}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+ \&\ c. + C$" (GARCÍA, 1782: 407).

Luego encuentra la serie que da el valor del número conocido el del logaritmo, utilizando el método de los coeficientes indeterminados como Bails. Termina el párrafo aplicando lo hallado a buscar el "número [que] corresponde al logaritmo hiperbólico 1 [...] que viene a ser aproximando hasta siete decimales 2,7182818" (GARCÍA, 1782: 411).

Aunque sus explicaciones estén menos próximas a las de Euler que las de Bails, Juan Justo García también le apreciaba y citaba su obra. Por ejemplo en la aritmética se dice "Añadiremos por ahora a estos ejemplos los que trahe en su *Introducción al Análisis de los infinitos* el celebre Leonhardo Eulerio lib. 1 c. 6." (1782, 164), y se incluyen cuatro problemas sobre el crecimiento exponencial que están tomados de esa obra de Euler (1748: v. I, 79-85). Por ejemplo, el del Diluvio Universal:

> *"2. Se pregunta en qué razón debió aumentarse el género humano cada año después del diluvio por los tres hijos de Noé, y sus mugeres, para que al final de 200 años hubiese habido un millón de personas"* (GARCÍA, 1782: 164); (EULER, 1748: v. I, 80).

J. J. García manifiesta claramente su admiración por Euler en el "Resumen histórico del origen, progresos y estado actual de las matemáticas puras" que incluyó como prólogo en sus *Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría*. En ese texto le alaba en varias ocasiones, llegando a afirmar:

> *"El ilustre Eulero, ingenio tan original como vasto en todas las ciencias exactas que ha enriquecido con sus excelentes e inmensas obras que se pueden considerar como el cuerpo de doctrina más completo que tenemos en este genero"* (GARCÍA, 1782: s.p.).

### 2.5.- Pedro Giannini[40].

El profesor de matemáticas de la Academia de Artillería de Segovia Giannini publicó un *Curso Matemático* (1782-1795, 4 v.) complementado con un libro con tablas y ejercicios titulado *Prácticas de Geometría y Trigonometría* (1784). En el tomo II de su *Curso* se plantea hallar la serie que da el logaritmo de un número por medio de coeficientes indeterminados, como Bails o García. También halla la serie de la exponencial y termina:

> *"Exemplo 341. Se pide hallar el número correspondiente al logaritmo hiperbólico 1. En la expresion $1+x=1+q+\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{2\cdot 3}+\frac{q^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\&c.$ sustitúyase 1 en lugar de q y será el número que se busca*

38 Juan Justo García Rodríguez nació en Zafra. Estudió en la Universidad de Salamanca. Fue sacerdote, catedrático de Álgebra de dicha universidad y creador de su Colegio de Filosofía. También fue diputado por Extremadura en las Cortes de 1820–1821, durante el Trienio Liberal.

39 J.J. García utiliza también S para indicar la integración.

40 Giannini fue un sacerdote italiano, tal vez originario de Parma, que fue llamado para ejercer de primer profesor y responsable de las matemáticas en la Academia de Artillería de Segovia. Permaneció en ese cargo desde 1776 hasta 1796.

$1+x=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\&c.$ *= 2,718281823 [error 8] = 2,71828183 próximamente [...] y en el sistema de logaritmos hiperbólicos será 2,71828183 la base"* (GIANNINI, 1782: v. II, 258-259).

En el tomo III se obtiene, desarrollando en serie y por la constancia de la subtangente en las curvas logarítmicas, que:

> *"Corolario I 85. Luego la diferencial del logaritmo de una cantidad variable positiva o negativa es igual al módulo multiplicado por la diferencial de la variable, partido este producto por la misma variable; esto es D.L. ± y = Ady/y . Si es A = 1 en cuyo caso los logaritmos son hiperbolicos"* (GIANNINI, 1795: v. III, 73).

Para la exponencial se dice:

> *"Esto es D. $a^x$ = La · $a^x$ · dx. Si se llama e al numero cuyo logaritmos es igual a la unidad esto es e = 2,71828183 próximamente (II.341) será D. $e^x$ = $e^x$ dx."* (GIANNINI, 1782: v. III, 94).

Giannini menciona a Euler entre los autores recomendados en los prólogos, pero no parece que le siga habitualmente en sus exposiciones.

### 2.6.- Tadeo Lope (1753-1802)[41].

Algunos años más tarde este profesor del Seminario de Nobles también mencionaba varias veces a Euler en el prefacio histórico de su *Curso de matemáticas* (1794-1798, 4 v.). Pero, al no explicar el cálculo diferencial, el número *e* sólo aparece en la parte dedicada a los logaritmos y a la construcción de sus tablas. A los logaritmos les dedica el tomo tercero de su *Curso* que publicó en dos volúmenes: el "Tomo III Parte primera", con la teoría, y el "Tomo III Parte segunda" con las tablas. En el primer volumen se explica el interés que tiene el trabajar con series y se busca "hallar una serie infinita para poder construir con facilidad por medio de ella las Tablas de logaritmos según cualquier sistema" (LOPE, 1798, III, 1ª, 13). La forma de encontrar la serie del logaritmo es parecida a la que propone Euler en *Introductio in Analysin infinitorum* (1748: v. I, 86-89). Luego se halla la serie de una exponencial y para el valor 1 de la variable se añade:

> *"supuesto pues h = 1 es a =* $1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+$ *&c. al infinito = 2,718281828459045236028"* (LOPE, 1798: III, 1ª, 15).

Que es el valor que da Euler para *e* en *Introductio in Analysin infinitorum* (1748: v. I, 90)[42].

### 2.7.- José Mariano Vallejo (1779-1843)[43].

Finalmente en los textos de Vallejo la materia está ya bien establecida. Así, en su *Tratado elemental de matemáticas* (1813: 3 t. en 5 v.), en la parte segunda del tomo II cuando estudia las series obtiene la que da el logaritmo de 1 + x por el método de los coeficientes indeterminados y luego encuentra la serie de $a^x$ concluyendo:

> *"Y llamando e el valor numérico de a cuando A = 1 será:*
> *e =* $1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+$ *&c. =2,7182818284590453536"*
> (VALLEJO, 1813: v. II, 2ª, 66).

41 El madrileño Tadeo Lope fue ingeniero militar, profesor de matemáticas y de dibujo en el Real Seminario de Nobles de Madrid y miembro de la Sociedad Económica Matritense de Amigos de País. DHCME: v. I, 533-534.

42 Otros autores también mencionaban a Euler en esta época. Por ejemplo, Francisco Verdejo González, que fue catedrático de matemáticas de los Reales Estudios de Madrid, en su *Compendio de matemáticas puras y mixtas* (1794-1802, 2 v.), en la parte dedicada al cálculo infinitesimal, tiene una sección titulada "Caso VI Quando la cantidad por diferenciar es un logaritmo" (VERDEJO, 1802: v. II, 125) en la que se obtiene que *d log y = A·dy/y*, donde *A* es la longitud de la subtangente que es constante en una curva logarítmica. Luego se afirma que si *A* = 1 se trata de los logaritmos neperianos, pero no se menciona el número *e*. Lo mismo sucede en la parte dedicada a las exponenciales en la que obtiene "$da^x = a^x dx\ La$". No se ha encontrado citas de Euler en estas secciones; pero, sí en la dedicada a la resolución de las ecuaciones de cuarto grado: "El que quiera imponerse más a fondo en los diversos métodos que se han inventado para resolver las ecuaciones superiores podrá ver Clairaut y Euler" (VERDEJO, 1802: v. II, p. 53).

43 José Mariano Vallejo nació en Granada. Joven todavía fue nombrado catedrático de matemáticas del Seminario de Nobles de Madrid. Después del Trienio Liberal tuvo que exiliarse en Francia. En 1832 represó a España y colaboró en la renovación del sistema educativo. Fue diputado y senador.

Valor de $e$ con 20 cifras, pero errado en las cuatro últimas[44].

Continúa Vallejo con el desarrollo en serie del seno y del coseno. Al final de esa parte, partiendo de:

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\&c.$$

y sustituyendo $x$ por $x\sqrt{-1}$ obtiene:

$e^{x\sqrt{-1}} = 1+\frac{x\sqrt{-1}}{1}-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\&c. = \cos x + \sqrt{-1}\, \mathrm{sen}\, x$ (VALLEJO, 1813: v. II, 2ª, 69).

De donde Vallejo deduce que: $\mathrm{sen}\, x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ $\cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$

Más tarde plantea la discusión entre Bernoulli y Leibniz sobre los logaritmos de los negativos, explicando que

> *"Por esta causa el gran Euler [...] manifiesta que esto provenía de que en la teoría de logaritmos se supone tácitamente que a un mismo número le corresponde solo un logaritmo quando pueden corresponder infinitos. Este geómetra demuestra esta proposición con exactitud, y luego pasa a determinar los infinitos logaritmos que puede tener un número dado"* (VALLEJO, 1813: v. II, 2ª, 70).

Más adelante se aplica a varios casos particulares, hallando que $\ln 1 = 2\pi\sqrt{-1} = 4\pi\sqrt{-1}$ etc. o que $\ln a = \ln |a| + 2k\pi\sqrt{-1}$ o que el $\ln(-a) = \ln |-a| + (2k + 1)\pi\sqrt{-1}$.

## 3.- Reflexiones finales.

Se puede concluir que durante el siglo XVIII la introducción del número $e$ en los libros españoles se hizo fundamentalmente en el estudio de las series numéricas, que es donde solía calcularse su valor, y en el apartado dedicado a la diferenciación e integración, que era, según los autores estudiados, el campo en el que se encontraban sus principales aplicaciones.

[44] Debería ser 2,7182818284590452360.





La forma de indicar esta constante matemática varió según los autores:

| | |
|---|---|
| Bails | *n, c, e* |
| Villalpando | *a* |
| García | *c* |
| Giannini | *e* |
| Lope | *a* |
| Vallejo | *e* |

En el siglo XIX se generalizó el uso de la letra $e$.

A través de este proceso también se ha podido ver que hubo una influencia significativa de Euler en los cursos de matemáticas publicados en España durante la segunda mitad del siglo XVIII, aunque ningún autor pueda ser considerado su seguidor.

Por otra parte, se observa que el desfase que existía a comienzos de siglo entre las matemáticas que se enseñaban en Francia o Gran Bretaña y las que se explicaban en España disminuyó en la segunda mitad de dicho siglo. Muchos escritos de Euler fueron conocidos y apreciados por los matemáticos más prestigiosos de la Península poco después de publicarse, a diferencia de lo que había sucedido medio siglo antes con los de Leibniz o Newton.

## 4.- Bibliografía.


BAILS, Benito (1779-1804) *Elementos de matemáticas*, Madrid, Ibarra (10 t. en 11 v.).

BAILS, Benito (1805) *Principios de Matemática de la Real Academia de San Fernando,* Madrid, hija de D. Joaquin Ibarra (4ª ed.) (3 v. 1ª edición 1776).

CAJORI, Florian, (1928-1929) *A history of mathematical notations,* La Salle (Illinois,) The Open Court (2 v. Se ha utilizado la reimpresión de Dover 1993).

CERDÁ, Tomás (1816) *Liciones de Matematica, ó Elementos Generales de Aritmética y Algebra,* Barcelona, Agustin Roca (v. I, 1ª edición 1758).

COBOS BUENO, José M.; FERNANDEZ-DAZA ALVAREZ, Carmen (1997) *El*

*Cálculo Infinitesimal en los Ilustrados Españoles Francisco de Villalpando y Juan Justo García,* Badajoz, Universidad de Extremadura.

CUESTA DUTARI Norberto (1985) *Historia de la invención del Análisis Infinitesimal y de su introducción en España*, Salamanca, Universidad de Salamanca.

DUNHAM, William (2006) *Euler: el matemático de todos los matemáticos,* Madrid, Nivola, (2ª edición española. 1ª edición inglesa 1999).

EULER, Leonhardo (1748) *Introductio in Analysin Infinitorum.* Lausana, Marc-Michel Bousquet. (facsímil 2000, Sevilla, ed. SAEM y RSM, con la traducción al castellano *Introducción al Análisis de los Infinitos* de J.L. Arantegui).

GARCIA, Juan Justo (1782) *Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría,* Madrid, Joachim Ibarra.

GIANNINI, Pedro (1784-1795) *Curso Matemático para la enseñanza de los Caballeros Cadetes del Real Colegio Militar de artillería*, Segovia, Antonio Espinosa (4 v.).

LOPE, Tadeo (1794-1798) *Curso de matematicas, para la enseñanza de los caballeros seminaristas del Real Seminario de nobles de Madrid,* Madrid, Imprenta Real (3 t. en 4 v.).

LOPEZ PIÑERO, José M.; GLICK, Thomas F.; NAVARRO BROTONS, Victor; PORTELA MARCO, Eugenio (1983) *Diccionario Histórico de la ciencia moderna en España Vol 1 (A-L), Vol 2 (M-Z)*, Barcelona, Península. Se cita DHCME.

MAOR, Eli (2006) *e: historia de un número,* Mexico, Conaculta (1ª edición en inglés 1994).

NAPIER, John (1616) *A description of the admirable table of logarithms*, London, Nicholas Okes. La traducción al inglés es de Edward Wright.

NAUX, Charles, (1966-1971) *Histoire des logarithmes de Neper a Euler*, Paris, Blanchard (2 vol.).

PADILLA Y ARCOS, Pedro (1753-1756) *Curso militar de Matemáticas, sobre las partes de esta ciencia, pertenecientes al Arte de la Guerra*, Madrid, Antonio Marín (4 v.).

TORRE Y ARGAIZ, Francisco (1717) *Thèses de divers traités de Mathématique*, Toulouse, Jean Guillemette.

TOSCA, T.V. (1757) *Compendio Mathematico en que se contienen todas las materias mas principales de las Ciencias, que tratan de la Cantidad*, Valencia, Imprenta de Joseph Garcia. (9 vols. 1ªedición 1707-1715).

VALLEJO, Josef Mariano (1813) *Tratado elemental de matemáticas: tomo II parte*





*II que contiene las funciones, límites, cálculo de las diferencias y el diferencial é integral,* Mallorca, Felipe Guasp.

VERDEJO GONZÁLEZ, Francisco, (1794-1802) *Compendio de matemáticas puras y mixtas,* Madrid, Vda. de Ibarra (2 v.).

VILLALPANDO F de (1778) *Tractatus Praeliminaris. Mathematicarum disciplinarum elementa in usum Physicae candidatorum,* Madrid Joaquin Ibarra, (Se ha consultado "Apendix De Analysi de quantitate infinitarum" de la reedición de COBOS 1997, 99-164).