

LORIA, G. (1923 "Da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange. Contributo alla storia della geometria analitica", *Memorie della classe di scienze... Reale Accademia dei Lincei*, [5], XIV, 777-845.

KLINE, M. (1992) *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza Universidad.

LOS MOLINOS Y LAS COMETAS DE MR. EULER LE FILS. Modelos matemáticos para las máquinas hidráulicas en el siglo XVIII

Juan Miguel Suay Belenguer
jm_suay@yahoo.com

1.- Introducción.

La cometa, ese objeto que vuela al final de un hilo, ha atravesado a lo largo de su historia numerosas fronteras geográficas y culturales. Pero quizás uno de las transformaciones más importantes se produce en el seno de la cultura occidental, cuando, en plena Ilustración, este objeto tradicionalmente lúdico y popular se convierte en un instrumento científico. Su ingreso en la cultura científica se produce a raíz de su uso para demostrar la naturaleza eléctrica del rayo, en manos de autores como Benjamín Franklin (1706-1790), en América¹, o por Jacques de Romas (1713-1776), en Francia². Con este experimento, la cometa se integra como parte de la física experimental iniciando así un largo viaje a través de varias disciplinas científicas que la llevaron a lo largo del siglo XVIII y XIX a formar parte del utillaje conceptual y material de las matemáticas, la mecánica, la meteorología y la aeronáutica, entre otras³.

En el año 1758, la Academia Real de Ciencias y Bellas Artes de Berlín publicó el volumen que recogía las memorias escritas en el año 1756. En la sección

¹ Descripción del experimento en FRANKLIN, B. (1753) "A letter of Benjamin Franklin, Esq; to Mr. Peter Collinson, F.R.S. concerning an electrical Kite", *Philosophical Transactions of The Royal Society of London* ILVII, 565-567. También dio la noticia en el *The Pennsylvania Gazette* de 19 de Octubre de 1752, periódico fundado y editado por Franklin.

² Entre los años 1752 y 1753, en la ciudad francesa de Nérac, Jacques de Romas realizó experimentos con cometas eléctricas simultáneamente a los trabajos de Benjamín Franklin en Filadelfia. Ver: ROMAS, J. de (1755) "Mémoire, ou après avoir donné un moyen aisé pour élever fort haut, & à peu de frais, un corps électrisable isolé, ou rapporte des observations frappantes, qui prouvent que plus le corps isolé est élevé au dessus de la terre, plus le feu de l'Électricité est abondant", *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie royale des sciences par divers sçavans, et lus dans ses assemblées, Paris*.

³ Ver: SUAY BELENGUER, J.M. (2007) "El vuelo transcultural de la cometa". En: HERRAN, N.; SIMON, J.; GUILLEM-LLOBAT, X.; LANUZA-NAVARRO, T.; RUIZ CASTELL, P.; NAVARRO, J. (eds.) *Synergia: Jóvenes investigadores en Historia de la Ciencia*, Madrid, CSIC, 283-299.

de matemáticas, Leonhard Euler (1707-1783) publicaba tres memorias, una de ellas dedicada al estudio de los molinos de viento⁴. En ese mismo volumen, su hijo mayor, Johann Albert Euler (1734-1800), que firmaba bajo el nombre *Mr. Euler Le fils*, hacía lo propio con una memoria dedicada al estudio de la mecánica del vuelo de la cometa⁵. El objeto de este trabajo es mostrar cómo la cometa, en manos de Johann Albert Euler, es transformada en un *objeto matemático* cuyo funcionamiento podía ser analizado desde los presupuestos de la mecánica racional, tal y como había hecho su padre y otros autores de su época al tratar el funcionamiento de otras máquinas hidráulicas, como las bombas o los molinos de viento.

2.- Los Euler y el estudio de las máquinas hidráulicas desde la mecánica racional.

A finales del siglo XVII y a lo largo del siglo XVIII existieron diferentes formas de abordar el estudio de lo que se conoce en la actualidad como máquinas hidráulicas⁶. Algunos autores emplearon métodos basados en conocimientos adquiridos por la práctica artesanal o el empleo de modelos experimentales a escala⁷. Otros, como Johann Bernoulli (1667-1748), Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean le Rond d'Alambert (1717-1783), Leonhard Euler

⁴ EULER, L (1758) "Recherches plus exactes sur l'effet des moulins à vent", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, année MDCCLVI*, Berlin, 165-234.

⁵ EULER, J.A. (1758) "Des Cerfs-volans", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, année MDCCLVI*, Berlin, 322-364.

⁶ En la actualidad una máquina hidráulica es aquella que intercambia energía mecánica con el fluido incomprensible (líquido o un gas a bajas velocidades) que la atraviesa, englobando por lo tanto a las bombas, molinos de viento, aerogeneradores, turbinas, ventiladores, hélices, etc. En el siglo XVIII su significado era algo más restringido e impreciso. En el *Dictionnaire D'Architecture Civile et Hydraulique* (1754) de Augustin-Charles D'Aviler (1653-1701) se entiende por *machine hydraulique*, "une Machine qui sert à élever & à conduire les eaux comme une écluse, une pompe, etc". Por su parte, en el tomo V de los *Elementos de Matemática* (Madrid, Joaquín Ibarra Impresor, 1780), Benito Bails indica que "Llamamos indistintamente Máquina Hidráulica toda máquina que sirve para levantar agua á una altura determinada, ó que se mueve mediante el impulso de una corriente".

⁷ Sobre esta forma de abordar el problema ver DERRY, T.K.; WILLIAMS, T.I. (1977) *Historia de la tecnología. Vol. 1, desde la antigüedad hasta 1750*, Madrid, Siglo XXI, 351-73 y RAYNOLD, T.S. (1983) *Stronger than a hundred men. A history of the vertical waterwheel*, Maryland, Jonh Hopkins University Press. Para el caso de España ver: GONZÁLEZ TASCÓN, I. (1992) *Fábricas hidráulicas españolas*, Madrid, Ministerio de Obras Públicas y Transportes (CEHOPU).

o Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) abordaron el estudio de este tipo de máquinas empleando los métodos de la mecánica racional. Estos autores propusieron a lo largo del siglo XVIII diversos modelos matemáticos para fenómenos como el movimiento de un cuerpo en el interior de un fluido, ya sea flotando o sumergido en él (problema de la resistencia), el movimiento de los fluidos por tubos y canales o el vaciado de depósitos a través de orificios (problema de la descarga)⁸. Estos estudios permitieron abordar la solución de problemas prácticos que no habían podido ser resueltos con anterioridad. Entre ellos, el movimiento de proyectiles en medios resistentes⁹, las máquinas hidráulicas de impulsión (ruedas y molinos), las bombas para la elevación de agua o las máquinas de movimiento por reacción o turbinas hidráulicas¹⁰. Los trabajos de Leonhard y Johann Albert Euler se sitúan en este contexto de aplicación de la teoría de la mecánica de fluidos al funcionamiento de las máquinas hidráulicas.

En 1913, el matemático suizo Gustav Eneström (1852-1923) publicó una clasificación cronológica de la obra de Leonhard Euler¹¹. Elaboró una lista de 866 trabajos, incluidos sus libros, memorias, cartas y otros escritos, que desde entonces se identifican con la letra "E", seguida de un número según un orden cronológico. Eneström también clasificó las obras de Johann Albert Euler, nombrándoles con la letra "A", seguida del número de orden cronológico. Siguiendo esta clasificación, podemos distinguir tres grandes grupos dentro de los trabajos de Leonhard Euler sobre las máquinas hidráulicas¹²: las que tratan sobre los sistemas de bombas impulsoras de agua (E203, E206

⁸ Sobre el desarrollo de la mecánica de fluidos en el XVIII ver: SIMÓN CALERO, J. (1996) *La génesis de la mecánica de fluidos*, Madrid, UNED.

⁹ Sobre la relación del problema de la resistencia y el desarrollo de la artillería ver: HIDALGO CÁMARA, E. (1993) "Tendiendo puentes entre la teoría y la práctica científica: El péndulo balístico (Robins, 1742; Hutton, 1775)", *Éndoxa*, 2, 237-281.

¹⁰ Son destacables los trabajos experimentales y teóricos sobre los fluidos realizados por Jean Charles Borda (BORDA, J.C. (1767) "Sur les roues hydrauliques", *Mémoires de l'Académie de Paris*) y estudiados, entre otros, por ROUSE, H.; INCE, S. (1957) *History of hydraulics*, New Cork, Dover Publication Inc., 123-126; SELLES, M. (1999) "Jean Charles Borda (1733-1799): La física exacta en la Francia del siglo XVIII", *Revista Española de Física*, vol. 12-2, 50-55 y RAYNOLD (1983: 237-242).

¹¹ ENESTRÖM, G. (1913) "Die Schriften Eulers chronologisch nach den Jahren geordnet, in denen sie verfasst worden sind. Berlin", *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*

¹² Sobre el contenido de estas memorias ver la introducción al tomo 15 de la *Opera Omnia* (ACKERET, J. (1957) "Vorrede", vol. 15 (2) *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, VII-LX) y la introducción al tomo 16 (BLANC, Ch.; DE HALLER, P (1979) "Preface", vol. 16 (2) *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, VII-XVII).

y E248)¹³, las que lo hacen sobre las fuentes de energía para impulsar las bombas (E207, E208, E229 y E233)¹⁴, y las que abordan el estudio de la turbina según el trabajo del matemático húngaro Johann Andreas Segner¹⁵ (E179, E202, E222, E259 y E833)¹⁶. La mayoría de estas memorias fueron publicadas en la Academia de Berlín entre los años 1752 a 1756, paralelamente a los trabajos teóricos de Euler sobre la mecánica de fluidos¹⁷.

Johann Albert Euler publicó tres trabajos sobre las máquinas hidráulicas. El primero fue la memoria (A2) *Enodatio quaestionis quomodo vis aquae aliisque fluidi...* escrita en 1754, con la que ganó el premio concedido por la Real Sociedad de Göttingen¹⁸. En ella Euler daba una serie de reglas sobre el principio de funcionamiento y la eficiencia de un grupo específico de máquinas hidráulicas,

¹³ (E203) "Recherche sur une nouvelle manière d'élever de l'eau proposée par M. de Mour, par M. Euler", *Mém. Acad. Berlin* (1753), (E206) "Sur le mouvement de l'eau par des tuyaux de conduite, par M. Euler", *Mém. Acad. Berlin* (1754) y (E248) *De cochlea Archimedis* publicada por la Academia de San Petersburgo en 1760. [Ver: www.eulerarchive.com (visitada en octubre de 2007)].

¹⁴ (E207) "Discussion plus particulière de diverses manières d'élever de l'eau par le moyen des pompes avec le plus grand avantage, par M. Euler", *Mém. Acad. Berlin* (1754), (E208) "Maximes pour arranger le plus avantageusement les machines destinées à élever de l'eau par le moyen des pompes. Par M. Euler", *Mém. Acad. Berlin* (1754). (E229) "De constructione aptissima molarum alatarum Auctore L. Eulero", *Novi Comm. Acad. Petrop.* (1758) y (E233) "Recherches plus exactes sur l'effet des moulins à vent. Par M. Euler", *Mém. Acad. Berlin* (1756). [Ver: www.eulerarchive.com (visitada en octubre de 2007)].

¹⁵ Sobre la idea de Segner y la polémica de prioridad con Robert Barker ver: KIRBY, R.S. *et al.* (1990) *Engineering in History*, Nueva York, Dover, 185-187.

¹⁶ (E179) "Recherches sur l'effet d'une machine hydraulique proposée par M. Segner professeur à Göttingue; par M. Euler", *Mém. Acad. Berlin* (1752), (E202) "Application de la machine hydraulique de M. Segner à toutes sortes d'ouvrages et de ses avantages sur les autres machines hydrauliques dont on se sert ordinairement, par M. Euler", *Mém. Acad. Berlin* (1753) y (E222) "Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau. Par M. Euler", *Mém. Acad. Berlin* (1756). La (E259) "De motu et reactione aquae per tubos mobiles transfuentis" es un resumen de lo tratado en las memorias E179 y E222 sobre la turbina de Segner, fue publicada por la Academia de San Petersburgo en 1761 y la memoria (E833) "Détermination de l'effet d'une machine hydraulique inventée par Mr. Segner, Prof. à Göttingue" fue publicada póstumamente en 1862, se encontró en los archivos de la Academia de Berlín. [Ver: www.eulerarchive.com (visitada en octubre de 2007)].

¹⁷ En el año 1757 también se publican en Berlín tres memorias en las que, junto con otra publicada un año anterior pero escrita en 1751, Leonhard Euler desarrolla la construcción teórica que es lo que hoy se conoce como ecuaciones de Euler del movimiento de los fluidos. Estas memorias junto con los trabajos de Johann y Daniel Bernoulli y Jean le Rond d'Alambert representan, para algunos autores, el inicio de la mecánica de los fluidos tal como se entiende hoy en día. Ver: TRUESDELL, C.A. (1954) "Rational fluid mechanics (1787-1765)", introducción editorial al vol. 13 (2) *Leonhardi Euleri Opera Omnia*; y SIMÓN CALERO (1996: 492-610).

¹⁸ EULER, J.A. (1754) *Enodatio quaestionis quomodo vis aquae aliisque fluidi cum maximo lucro ad molas circum agendas aliave opera perficienda impendi possit, auctore Jo. Alberto Euler...* Göttingen.

partiendo de la propuesta de un modelo físico para las mismas: las dos clases de ruedas hidráulicas verticales (la de alimentación inferior y superior), la horizontal y una turbina de impulsión. El segundo, el A4 según la notación de Eneström, versó sobre *Des Cerf-volants* y, como hemos señalado, fue publicado en 1758 en el mismo volumen de las memorias de la Academia de Ciencias de Berlín en el que Euler padre publicó su estudio sobre los molinos de viento (E233). El tercer trabajo es la memoria (A12) *Von der Bewegung ebener Flächen, wenn sie vom Winde getrieben werden*¹⁹, en la que estudia el movimiento de una superficie plana sometido a la acción de un viento horizontal, en la que introducía una simplificación consistente en considerar que el punto de aplicación de la fuerza del viento coincidía con el centro del plano.

La estructura formal de los trabajos de los Euler sobre máquinas hidráulicas es muy similar. Todas ellas empiezan por una *introducción* donde se plantea el problema, para, a continuación, definir el *modelo geométrico* de la máquina estudiada. Después se aplican al objeto las leyes de la mecánica, basadas en un *modelo físico* del fluido²⁰, para pasar a un amplio *desarrollo matemático*, de tipo algebraico²¹ y estructurado en forma de problemas que, tras resolverlos, permite llegar a unas conclusiones, expresadas en forma de corolarios y escolios o mediante ejemplos numéricos que generan tablas de resultados o reglas relacionadas con el diseño de la máquina. Las únicas memorias que no siguen este esquema son las E207, E208 y A2, ya que son conclusiones, en forma de máximas, de resultados de otros trabajos.

3.- El vuelo de la cometa según Johann Albert Euler.

La memoria sobre *Des Cerf-volants* arranca con una introducción en la que Johann Albert Euler justifica el hecho de dedicar un estudio a la mecánica del

¹⁹ EULER, J.A. (1765) "Von der Bewegung ebener Flächen, wenn sie vom Winde getrieben werden", *Abhandlungen der Churbaierischen Akademie der Wissenschaften*, 3, 2. p. 3-45.

²⁰ Las ecuaciones diferenciales del movimiento del fluido en el caso de las bombas y turbinas. Para el caso de las ruedas y los molinos se empleaba la teoría de impacto, era la reformulación de la ley enunciada por Newton en el libro II de los *Principia*. Ver: SIMÓN CALERO (1996: 79-267).

²¹ Durante el siglo XVII se empieza interpretar los fenómenos físicos por medio del álgebra, sustituyendo la interpretación geométrica usada hasta el momento. Durante el XVIII, su uso se generalizó en la mecánica, la física y en la ingeniería. Ver: ROCHE, J.J. (1998) *The mathematics of measurement. A critical history*, Londres, The Athlone Press, 86-144.

vuelo de un objeto considerado lúdico. Es una novedad importante, pues este tipo de justificaciones no aparecen en las memorias sobre máquinas hidráulicas vistas más arriba. Este hecho indica claramente que la cuestión no era evidente y que existía una conciencia clara por parte de los protagonistas de estar haciendo atravesar a la cometa una frontera entre dos mundos muy separados. El primer paso en este vuelo transcultural de la cometa lo atribuía Euler a los filósofos naturales que, como “le célèbre Mr. de Romas”, la habían utilizado en sus *Expériences électriques* y habían logrado “ennoblecen” este juguete al introducirlo en la física. El paso que Euler se disponía a franquear con su memoria no era por tanto el de hacer del *Cerf-volant* un objeto científico, que ya lo era, sino de atraer la atención de los “geómetras” hacia él y tratarlo como un objeto digno de ser estudiado desde la mecánica racional.

“Comme les Cerf-volans n’ont servi jusqu’ici que de jouët aux enfans, les recherches que j’entreprends, paraîtront peu dignes de la Géométrie [...] Mais, quand on accorderoit que des jeux d’enfant ne doivent pas arrêter les regards d’un Géomètre, personne cependant à ce que j’espère, ne me reprochera de m’être occupé de celui-ci, depuis que le célèbre Mr. de Romas s’est servi avec tant de succès d’un semblable Cerf-volant dans ses Expériences électriques, & qu’annoblissant ainsi ce jouët il l’a introduit dans la Physique”.

En su reivindicación del estatus científico de la cometa, Euler hijo se adelantaba a las posibles, y previsibles, críticas de quienes pudieran considerar que los estudios sobre este objeto eran “peu dignes de la Géométrie”, argumentando que se trataba de un “sujet qui demande les discussions le plus profondes”, y desafiando a los *geómetras* que habían despreciado las cometas como objeto de estudio preguntando si la razón estribaba más en “les difficultés qui se rencontrent dans la résolution de cette question que en la bassesse apparente du sujet”²².

Para Johann Albert Euler, por tanto, la utilización de la cometa por parte de los filósofos naturales en sus experiencias eléctricas concede a este objeto lúdico una nueva condición que hace de su estudio desde la geometría algo justificable y necesario. El interés de su estudio no es sólo teórico, sino que tiene para Euler un inmediato sentido práctico. La cometa había sido emplea-

²² EULER, J.A. (1758: 322).

da en estas experiencias para demostrar la naturaleza eléctrica del rayo, elevando con ella una barra de hierro a una altura de 600 pies para poder capturar las descargas atmosféricas de manera más eficaz que si estuvieran situadas en un edificio alto²³. Euler hijo pretendía con esta memoria encontrar las condiciones geométricas que debe tener una cometa para que, con un viento dado, alcance la máxima altura posible, factor principal para ser utilizada como instrumento de estudio de la electricidad atmosférica²⁴.

3.1.- La definición geométrica de la cometa.

Desde el primer párrafo de la memoria, la cometa abandona su forma común para convertirse en un modelo geométrico cuyo comportamiento físico es reducible a la acción de un conjunto de fuerzas.

“[§1] J’entens ici par un Cerf-volant [Fig. 1], un plan d’une figure quelconque AEBF, composé de deux parties égales & semblables AEB & AFB, de sorte que la droite ADB soit le diamètre de cette figure. Pour plus de distinction j’appellerai l’extrémité A la tête, & l’autre B la queue du Cerf-volant”.

Sobre este plano, cuya superficie será de $(a \cdot a)$, Euler hijo definía C como el punto donde está aplicada la fuerza del viento, G el centro de gravedad y D es el punto de amarre del hilo a la cometa. Si bien en la representación de Euler la cometa tenía forma de rombo, el texto no atribuía ninguna forma precisa a la cometa geométrica, pudiendo ser cualquiera que cumpliera la condición de ser simétrica respecto a un diámetro.

En los párrafos [§2]-[§5] se definían las fuerzas a las que estaba sometido el plano: la fuerza del viento, el peso (P) y tensión del hilo (T), así como los puntos de aplicación de las mismas sobre el plano. También establecía la posibilidad de restringir el giro sobre los ejes AB y EF por medio de unos hilos.

²³ Equivalente a unos 195 metros (un pie de París es igual a 324,83 mm y el pie inglés es igual a 304,80 mm. Sobre el sistema de unidades empleado en el siglo XVIII, ver: SIMÓN CALERO (1996: 669-671). En una memoria publicada en 1755 por la Academia de París, Romas fija esta altura como la necesaria para elevar un pararrayos por medio de una cometa y además fija un coste máximo de seis francos para la construcción de la misma (ROMAS (1755: 394).

²⁴ Estas conclusiones aparecen en el término *Cerf-volant* editado en el suplemento de *L’Encyclopédie* de Diderot et D’Alembert (1776-77), donde se cita la memoria de J.A. Euler. Ver la edición digital *L’Encyclopedie de Diderot et D’Alembert*, París, Redon, 2000.

No se trata de una brida²⁵, como podría parecer, sino simplemente de una ligadura con la que se pretendía que la cometa no girase sobre el eje AB.

La estructura de la cometa quedaba así reducida a un simple plano expuesto al viento, tal y como ocurría con las aspas de un molino en la memoria (E233) de Leonhard Euler (Fig. 2).

Una vez definido el modelo geométrico del plano expuesto al viento, Euler pasa a definir el modelo geométrico del hilo, la brida y la cola. Para ello, Euler imagina tres modelos posibles (Fig. 3). En el primero considera que la cometa y el hilo, que carece de peso, es un sólido rígido con peso total P. En el segundo, independiza el hilo de la estructura de la cometa, pero sigue considerando éste como un sólido rígido dotándole de un peso Q. En estos dos modelos se aprecian una serie de simplificaciones respecto a una cometa real, siendo lo más destacado el caso del hilo. Éste se ata directamente en un punto del plano, obviando la existencia de la brida. Además considera que es rígido y se comporta como tal en vuelo, cuando realmente adopta la forma de una curva. Todas estas simplificaciones le permiten aplicar un modelo matemático simple y de fácil solución.

El tercer modelo añade a la cometa una cola que, según Euler, se comporta como otra superficie y que la ayuda a elevarse más alto. Este apartado es el más complejo y se estudia en un apéndice de la memoria²⁶. Aquí, el modelo de cometa es el analizado en el segundo caso, pero se le ha añadido una cola idealizada como un plano que puede girar libremente en el extremo inferior. Reconoce que ésta no es la forma habitual de una cola “car il serait difficile de faire entrer dans le calcul une queue pareille à celle dont les enfans se servent”²⁷. Johann Albert Euler considera que la cola es una superficie que generará una fuerza adicional que hará que se eleve más alta²⁸. Así, el caso estudiado en la *Addition* es más bien otra cometa formada por dos superficies unidas mediante una articulación.

²⁵ La brida consiste en varios pequeños cordeles que atados a varios puntos de la estructura de la cometa se unen en un punto donde se amarra la cuerda. Además, para un vuelo estable, este tipo de cometas necesita disponer de una *cola*, la cual se construye con trozos de papel o tela enlazados entre sí y unidos a la parte inferior de la estructura.

²⁶ Al final de la memoria incluye un apéndice como si fuera otra memoria que denomina *Addition* y consta de los párrafos [§1]-[§65]. En este caso empieza de nuevo la numeración de los mismos.

²⁷ EULER, J.A. (1758: 349).

²⁸ La función de la cola, como se sabe hoy en día, no es la de permitir que la cometa se eleve a mayor altura, sino que permite que su vuelo sea estable.

Contrasta la dificultad que Euler hijo encuentra para definir el modelo geométrico de una cometa –ensaya hasta tres diferentes– con la relativa simplicidad con que esto mismo se hace para otras máquinas hidráulicas aparentemente más complejas como, por ejemplo, el molino de viento estudiado en la memoria (E233) de Euler padre. En ésta, Leonhard Euler analiza un molino con el fin de encontrar la relación existente entre la velocidad del viento y el volumen que es capaz de elevar a una altura determinada durante una hora. Tal y como señala en la introducción “Mr Lulofs²⁹, très célèbre professeur de l’Université de Leyde, & Membre de notre Académie”³⁰, le había comunicado una serie de experiencias realizadas con los molinos de viento de su país, en las que se ponía de manifiesto que la potencia medida en los mismos era el doble de la estimada por Euler en una memoria anterior³¹. En lugar de replantear el modelo geométrico, Euler padre supone que estas deficiencias son consecuencia del modelo físico empleado, la teoría de impacto³², ya que:

“si j’ai employé cette hypothèse défectueuse dans mes recherches sus les moulins á vent, c’est uniquement à elle qu’il faudra attribuer les erreurs que la comparaison du calcul avec les expériences nous donnera à connaître”³³.

Por lo que propone una formulación alternativa que ya había desarrollado en una edición comentada de una obra sobre artillería de Robins³⁴. Su objetivo, con esta acción, no era otro que explicar la diferencia que existe entre un molino real y el teórico. El modelo geométrico se mantiene inalterado y, cuando el tratamiento analítico se complica, lo que se modifica una y otra vez es la formulación del modelo físico empleado, sustituyéndolo por otro más simple, o simplificando mediante aproximaciones de las expresiones algebraicas utilizadas.

²⁹ Se refiere a Johannes Lulofs (1711-1768).

³⁰ EULER, L. (1758: 169).

³¹ En la memoria E208 se daba una serie de reglas o máximas de diseño de las ruedas hidráulicas, molinos, así como el cálculo de la potencia que desarrollan un hombre y un caballo.

³² Se analiza más adelante dicha teoría.

³³ EULER, L. (1758: 165).

³⁴ Euler tradujo en 1745 la obra ROBINS, B. (1742) *New Principles of Gunnery*, Londres, añadiendo notas entre las que propone una teoría alternativa a la de impacto. Ésta consiste en mantener el efecto del impacto de las partículas en una cara del plano, pero considerando la formación de una depresión o estela tras el mismo.

En este caso Leonhard Euler ha modificado la ley física para acercar su modelo a la realidad, mientras que en otras ocasiones ha optado modificar el modelo geométrico de la máquina. Es el caso de sus estudios sobre las velas de los barcos en su obra *Scientia Navalis*, publicada en 1746³⁵. Aquí, asemeja la vela a un hilo flexible, pero, tras múltiples cálculos, dada la complejidad del tema, cuestiona la hipótesis de partida. En lugar de asimilar la vela a un hilo flexible, la asemeja a una placa plana rígida, luego a una superficie flexible que toma la forma del hilo y llega a nuevas ecuaciones sin dar ninguna solución³⁶.

En la memoria de Euler hijo la estrategia es completamente diferente. Aquí cada uno de los tres casos se basa en una aproximación geométrica diferente, con el objetivo de abordar el tratamiento analítico del problema, desde lo más simple hasta lo más complicado.

La cometa ha sido así completamente transformada en una figura geométrica formada por un simple plano de superficie ($a \cdot a$) y un hilo, definido como una línea recta³⁷, que une dos puntos, uno en el plano y el otro en el suelo. En cuanto al uso de la cola, no se considera en los dos primeros casos, y en el tercero se simplifica con un plano unido a la parte inferior de la cometa. En resumen se crea un objeto geométrico donde ya es posible hallar relaciones trigonométricas o aplicar las leyes de la mecánica. Pero, sobre todo, un modelo que permite aproximarse a la solución del problema mediante un desarrollo analítico sencillo.

3.2.- La física de la cometa.

Para el cálculo de la fuerza del viento Euler dio dos posibles valores. En el párrafo [§11] indica que la fuerza del viento es igual al peso de un volumen de aire: $a \cdot a \cdot v \cdot \text{sen}^2 \varphi$. Mientras que en el párrafo [§38] señala que “plusieurs Expériences enseignent qu'on doit la statuer le double plus grande, savoir: $2 \cdot a \cdot a \cdot v \cdot \text{sen}^2 \varphi$ ”.

Estas expresiones representan lo que se conoce como teoría de impacto³⁸, que es la reformulación de una ley enunciada por Newton en el libro II de los

³⁵ EULER, L. (1746) *Scientia Navalis*, San Petersburgo.

³⁶ Ver SIMÓN CALERO (1996: 363-368).

³⁷ Un modelo que dista mucho de la situación real en la que el hilo es deformado por el viento adoptando una forma curva.

³⁸ Ver: SIMÓN CALERO (1996: 79-267).

*Principia*³⁹. Para ello partía de un modelo físico que consideraba a los fluidos formados por pequeñas partículas. Si éstas chocaban contra una superficie –de manera elástica o inelástica⁴⁰– aparecía una fuerza (D) perpendicular a la misma. Newton estudió la resistencia que sufre una esfera de radio R y un cilindro de diámetro 2R que se mueven dentro de un “medium rerum” (fluido) siguiendo una dirección axial llegando a la conclusión que si el choque de las partículas se hace de manera elástica: “la resistencia [D] del globo⁴¹ es razón compuesta del cuadrado de la velocidad normal [$v_n = s \cdot \text{sen}^2 \varphi$], del cuadrado del diámetro [2R] y de la densidad del medio⁴² [ρ]”. Es decir:

$$D = k \cdot \rho \cdot R^2 \cdot s^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi$$

En el caso de que el choque fuera inelástico, la misma proposición decía que la fuerza D se reduciría a la mitad.

Para llegar a este valor de la fuerza de resistencia D, partiendo de la expresión del párrafo [§11] de la memoria, es necesario hacer una consideración sobre el modo de expresar las velocidades y las fuerzas de los fluidos en los tratados del siglo XVIII⁴³. La velocidad se expresaba como la altura v desde la que había que dejar caer un cuerpo para que llegase al suelo con dicha velocidad. En el párrafo [§38] se dice que si el viento recorre en un segundo un

³⁹ Los *Principia* tuvieron tres ediciones en vida de Newton. La primera en 1687, la segunda en 1713 y la tercera en 1726. El libro II sufrió importantes revisiones en algunas proposiciones, sobre todo en el apartado de la resistencia de los cuerpos en líquidos, debido a las críticas recibidas y a los nuevos experimentos realizados. Newton trata la teoría de impacto en la Sección VII del Libro II: “De motu fluidorum et resistentia projectileum”. Ver: NEWTON, I. (1987) *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*. Edición de 1726. Traducción E. Rada, Madrid, Alianza Editorial, 77, 525-72.

⁴⁰ El Escolio a las leyes del movimiento en los *Principia* trata la mecánica de los choques entre partículas, distinguiendo si éstas al chocar lo hacen de manera elástica o inelástica. Se entiende por elástico cuando la velocidad relativa de las partículas tras un choque es igual y de sentido contrario a la que tenían antes del mismo, transfiriendo en este caso la máxima fuerza de reflexión (mayor cesión de cantidad de movimiento). Pero, si al chocar se genera una fuerza de forma que “los cuerpos se separen con velocidad relativa que estarán en una razón dada con la velocidad relativa de choque”, entonces, el choque será inelástico existiendo el extremo que las partículas no son reflejadas, por tanto imprimen la mínima fuerza de reflexión (menor cesión de cantidad de movimiento). Ver: NEWTON (1987: 149).

⁴¹ En la proposición anterior había demostrado que la resistencia de la esfera era la mitad del cilindro.

⁴² Corolario V a la proposición XXXV. Problema VII de la Sección VI del libro II de los *Principia* Ver: NEWTON (1987), 537.

⁴³ Ver: SIMÓN CALERO (1996: 93-95) y TRUESDELL, C.A. (1954) “Rational fluid mechanics, 1687-1765”. En: *Euleri Opera Omnia*, II, 12, XLIII-XLIV.

espacio s y un cuerpo en caída libre recorre una distancia g^{44} en un segundo, entonces esta altura vale⁴⁵:

$$v = \frac{s^2}{2 \cdot g}$$

Es decir, si la velocidad del fluido es s , mientras que a v podemos llamarla altura de velocidad. La fuerza D se expresa como el peso de un cilindro de aire de base $a \cdot a$ y altura v , para la expresión del párrafo [§11]:

$$D = (\text{peso específico}) \cdot (\text{volumen}) = \gamma \cdot (a \cdot a \cdot v \cdot \text{sen}^2 \varphi) = \gamma \cdot (a \cdot a \cdot \frac{s^2}{2 \cdot g} \cdot \text{sen}^2 \varphi) = \frac{\rho \cdot g}{2} (A \cdot s^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi) = \frac{\rho}{2} \cdot A \cdot s^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi = \frac{k}{2} \cdot \rho \cdot R^2 \cdot s^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi$$

Que corresponde al caso de un choque inelástico. Si se emplea la fórmula del párrafo [§38] da el doble que la expresión anterior, por lo tanto estamos en el caso de la teoría de impacto en el que se considera que las partículas chocan de manera elástica⁴⁶.

De esta forma Johann Albert Euler asumía, sin ningún tipo de justificación, la teoría de impacto como modelo para la fuerza del viento. En cambio, Leonhard Euler, como hemos visto, no la veía tan clara en la memoria de los molinos (E233), pues se refería a ésta como “Hypothèse commune” justificando su uso por ser la verdadera ley todavía desconocida:

“Non que je croyais que cette Hypothèse était entièrement conforme à la vérité, mais plutôt que la véritable loi de ces forces est encore inconnue⁴⁷”,

si bien en este caso contaba con una prueba experimental del mal funcionamiento de su “molino teórico”.

⁴⁴ No hay que confundir esta g con el actual valor de la aceleración de la gravedad.

⁴⁵ Ya que la g definida es el espacio recorrido por un cuerpo en caída libre en un segundo, cuando la g de la expresión debería ser la aceleración de la gravedad (a_g), ya que la velocidad s con que llega un cuerpo cayendo desde una altura v es $s^2 = 2 \cdot a_g \cdot v$. Si g es la distancia recorrida por el cuerpo en caída libre en un segundo $g = \frac{1}{2} \cdot a_g \cdot t^2$, que para $t = 1$ es igual a $g = \frac{1}{2} \cdot a_g$. Al dar a g un valor de 15 pies, implica que la aceleración de la gravedad es de 30 pies por segundo cuadrado, que es valor que debería aparecer en la expresión.

⁴⁶ Ver SIMÓN CALERO (1996: 139-147).

⁴⁷ EULER, L. (1758: 165).

3.3.- El análisis matemático de la cometa.

Una vez definida la geometría del problema y las leyes físicas que debían aplicarse, se iniciaba un desarrollo matemático que en este caso es puramente algebraico, ya que consideraba la cometa volando en equilibrio estático. El objetivo es hallar expresiones que permitan encontrar la posición de equilibrio de la cometa dadas unas dimensiones del objeto y una velocidad del viento determinada, con el fin de que alcance la mayor altura posible. (Fig. 3).

Entre los párrafos [§9]-[§39] analizaba el primer modelo para la cometa, el que considera el plano y el hilo como un cuerpo rígido. Por lo tanto el ángulo θ es fijo. Luego había que calcular, en la posición de equilibrio, el valor de φ ó $\theta - \varphi$ y la tensión del hilo (T). Para conseguir esto, igualaba los momentos de las fuerzas respecto al punto T , de modo que la cometa no giraba alrededor del mismo. Tras una serie de operaciones llegaba en [§22] a la expresión:

$$P \cdot [f \cdot \cos (\theta - \varphi) + (b + c) \cdot \cos \varphi] = a \cdot a \cdot v \cdot \text{sen}^2 \varphi \cdot (f \cdot \cos \theta + c)$$

Que permitía obtener φ , que junto con θ , se calculaba de manera inmediata la tensión del hilo T [§24]:

$$T = \frac{P \cdot (f \cdot \text{sen} \varphi + b \cdot \text{sen} \theta \cos \varphi + c \cdot \cos \theta \cdot \text{sen} \varphi)}{f \cdot \cos \theta + c}$$

A continuación analizaba una serie de casos particulares. Destacamos el que permitía el cálculo de la velocidad del viento necesaria para que la cometa empezara a despegar, es decir, cuando $\theta = \varphi$. Haciendo la simplificación que la longitud del hilo (f) es mucho mayor que las dimensiones de la cometa, llegó a la siguiente expresión que da la altura de velocidad mínima necesaria para el despegue [§30]:

$$v = \frac{P}{a \cdot a \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot \cos \theta}$$

Ésta será mínima cuando el denominador sea máximo, por lo tanto se deriva el denominador y se iguala a cero, lo que le permitía hallar el ángulo óptimo θ que es igual a $54^\circ 44'$. Por lo que la altura de velocidad queda:

$$v = \frac{3 \cdot P \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot a \cdot a}$$

Para calcular la posición de equilibrio cuando la velocidad del viento es mayor, Euler hijo se servía de un polinomio que lo resolvía por aproximaciones sucesivas. Partía de las ecuaciones anteriores introduciendo simplificaciones y sustituía el valor numérico óptimo de θ , quedando la ecuación mostrada en [§32]:

$$z^4 - 4 \cdot n \cdot z^3 + 6 \cdot n \cdot n \cdot z \cdot z - 4 \cdot n \cdot n = 0$$

$$T = P \cdot \sqrt{3} \cdot \text{sen } \varphi$$

$$n = \frac{P}{a \cdot a \cdot v} ; z = \sqrt{2} \cdot \text{sen } \varphi ; \theta = 54^\circ 44'$$

Haciendo un cambio de variable se ha definido la constante n y la nueva incógnita z . Así, dado n , que depende del peso, de la superficie y de la altura de velocidad del viento se obtiene un polinomio de cuarto grado relativamente fácil de calcular por métodos de aproximación numérica. Con este valor de z obtenido, se divide por la raíz de dos y hallamos el valor de φ . Con este dato se calculará T .

Entre los párrafos [§48]-[§88] analizaba el segundo caso. Aquí el hilo podía girar libremente alrededor del punto D , es decir, que el ángulo θ no es fijo. Además, el hilo se consideraba que tenía un peso (Q). En este caso la posición de equilibrio se hallaba igualando los momentos de las fuerzas respecto a los puntos T y D . Tras una serie de operaciones calculaba para un viento dado los ángulos θ y φ que alcanzaría la cometa en equilibrio, así como la tensión T . [§48]-[§63]

$$\cos \varphi = -n + \sqrt{n \cdot n + 1}$$

$$\tan \theta = \frac{(P \cdot b - \frac{1}{2} \cdot Q \cdot c) \cdot \cos \varphi}{(P + \frac{1}{2} \cdot Q) \cdot c \cdot \text{sen } \varphi}$$

$$\text{sen } \varphi = \sqrt{2 \cdot n \cdot \sqrt{n \cdot n + 1} - 2 \cdot n \cdot n}$$

$$\tan(\theta - \varphi) = \frac{\cos \varphi}{\text{sen } \varphi} - \frac{(P + \frac{1}{2} \cdot Q) \cdot c}{P \cdot (b + c) \cdot \text{sen } \varphi \cdot \cos \varphi} \quad n = \frac{P \cdot (b + c)}{2 \cdot a \cdot a \cdot c \cdot v}$$

$$T = \frac{P \cdot (b + c) \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } \theta}{c} - (P + Q) \cdot \text{sen } (\theta - \varphi)$$

Para que la cometa alcance la máxima altura, Euler hallaba que valores de las distancias b y c que hacen máximo el ángulo $\theta - \varphi$. Tras una serie de desarrollos llegaba a la expresión [§67]:

$$CD = \frac{2 \cdot P}{4 \cdot P + 3 \cdot Q} \cdot CG$$

que fijaba la posición del punto de amarre de la cometa D , que hace que la cometa alcance la máxima altura. Para esta disposición $\theta - \varphi$ y la tensión del hilo valían:

$$\tan(\theta - \varphi) = \frac{6 \cdot n \cdot n + 2 - 6 \cdot n \cdot \sqrt{n \cdot n + 1}}{3 \cdot (-n + \sqrt{n \cdot n + 1})^2 \cdot \sqrt{2 \cdot n}}$$

$$T = (2 \cdot P + \frac{1}{2} \cdot Q) \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } \theta + (P + Q) \cdot \text{sen } \varphi \cdot \cos \theta$$

Donde:

$$n = \frac{3 \cdot (P + \frac{1}{2} \cdot Q)}{2 \cdot a \cdot a \cdot v}$$

Cuando $\theta - \varphi$ era igual a cero, se empezaba a elevar la cometa que alcanzará la máxima altura, por lo que tras los cálculos pertinentes obtenía el siguiente valor de la altura de velocidad, para que esto se produjera:

$$v = \frac{3 \cdot (P + \frac{1}{2} \cdot Q) \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot a \cdot a} = \frac{3 \cdot (2 \cdot P + Q) \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot a \cdot a}$$

Para alturas de velocidad superiores, la cometa se elevaría alcanzando la máxima altura posible para esas condiciones de viento y de construcción de la cometa.

Entre los párrafos [§7]-[§32] de la *Addition* se iniciaba el desarrollo analítico, que esta vez es más complejo, ya que tenía que hallar tres ángulos de equi-

librio ($\theta - \varphi$), θ y ($180^\circ - \psi + \varphi$) y la tensión del hilo T. Hallando los momentos de las fuerzas respecto a los puntos de giro y tras laboriosas operaciones, Euler llegaba a las siguientes expresiones:

$$\cos \psi = -m + \sqrt{1 + m \cdot m}$$

$$\text{sen} \psi = \sqrt{-2 \cdot m \cdot m + 2 \cdot m \cdot \sqrt{1 + m \cdot m}}$$

Donde:

$$\frac{R}{e \cdot e \cdot v} = 2 \cdot m$$

$$a \cdot a \cdot v \cdot b \cdot \text{sen}^2 \varphi = P \cdot c \cdot \cos \varphi + R \cdot d \cdot \text{sen} \psi \cdot \text{sen}(\psi - \varphi)$$

$$\tan(\theta - \varphi) = \frac{a \cdot a \cdot v \cdot \text{sen}^2 \varphi \cdot \cos \varphi - R \cdot \text{sen}^2 \psi - (P + \frac{1}{2} \cdot Q)}{a \cdot a \cdot v \cdot \text{sen}^3 \varphi + R \cdot \text{sen} \psi \cdot \cos \psi}$$

$$T = a \cdot a \cdot v \cdot \text{sen}^2 \varphi \cdot \text{sen} \theta - (P + Q) \cdot \text{sen}(\theta - \varphi) + R \cdot \text{sen} \psi \cdot \cos(\theta + \psi - \varphi)$$

Ahora se buscaban las condiciones para obtener el máximo de altura [§32]-[§45], que es la que hace máximo el ángulo ($\theta - \varphi$) para lo cual era necesario hallar una relación entre las distancias DB, DG y CD [§43] en la que fijadas dos distancias sale la tercera. Así construida la cometa, alcanzaba la máxima altura para unas condiciones de viento fijas, pero dice que no es suficiente, ya que la cometa debería estar estable en su vuelo, por lo que tenía que hallar unas condiciones adicionales. Éstas las fijaba estudiando si la cometa se recuperaría ante una alteración diferencial de los tres ángulos de equilibrio. Demostró que la existencia de un momento recuperador está condicionada a que [§56] la cola sea larga y las distancias de los puntos B y G al punto D sean lo más grandes posible y la cuerda muy larga. Pero, tras operar, llegaba a unas expresiones que, dada la complejidad que llevaría realizar un cálculo general, analizaba este caso por medio de ejemplos.

Las expresiones deducidas, incluso para el modelo geométrico más sencillo, implican la necesidad de resolver ecuaciones algebraicas no lineales. La

razón se encuentra en que en la expresión de la fuerza del viento aparece el seno cuadrado de un ángulo. Esta complejidad es común en las memorias sobre máquinas que funcionan mediante el choque de un fluido, como el caso de los molinos o las ruedas hidráulicas de impulso. Es inherente a la aplicación de la teoría de impacto. A pesar de todo, se aborda el problema aunque haya que hacer una serie de aproximaciones, despreciando algún parámetro en comparación con otro, o cambiando el modelo geométrico de la máquina.

3.4.- Aplicaciones prácticas.

Para cada uno de los tres modelos de cometa, se hacía una aplicación práctica. El primer caso se aplicaba entre los párrafos [§39]-[§47]. Consideraba una cometa de peso (P) igual al que tendría un cilindro de aire con base $a \cdot a$ y altura un pie⁴⁸. Si el ángulo θ es igual a $54^\circ 44'$, n valía:

$$n = \frac{P}{a \cdot a \cdot v} = \frac{1}{v}$$

La altura de velocidad v , correspondiente a una velocidad s , para que empiece a elevarse sobre el horizonte, será:

$$v = \frac{3 \cdot P \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot a \cdot a} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx \frac{21}{8} \text{ pies} \Rightarrow s = \sqrt{2 \cdot g \cdot v} = \sqrt{2 \cdot 15 \cdot \frac{21}{8}} \approx 9 \text{ pies / s}$$

Luego, la cometa así construida empezará a volar con un viento superior a 9 pies por segundo (equivalente a 2,920 m/s). A continuación calculaba los valores para 10, 15 y 20 pies por segundo, siguiendo el algoritmo mostrado en la (Fig. 4).

Entre los párrafos [§89]-[§102] se abordaba un ejemplo del segundo caso. Se consideraba una cometa construida para alcanzar la máxima altura, condición que se cumplía si se fijaba el punto de amarre D según la expresión [§67]:

⁴⁸ El peso de la cometa, que supone conocido, se expresa como el peso de un prisma de aire de base $a \cdot a$ y altura h . Considera que un pie cúbico de aire pesa 8/100 libras, en [§ 97] se deduce que toma como unidad el pie de París, este patrón fija el pie = 324, 8 mm. y la libra = 0,4895 kg. Así el valor de la densidad del aire $\rho_e = 1,14 \text{ kg/m}^3$ (Valor actual a 15° C : $1,225 \text{ kg/m}^3$). Sobre el sistema de unidades empleado en el siglo XVIII, ver: SIMÓN CALERO (1996: 669-671).

$$CD = \frac{2 \cdot P}{4 \cdot P + 3 \cdot Q} \cdot CG$$

Para simplificar los cálculos suponía que $2 \cdot P + Q$ tiene el peso de un cilindro de aire de base $a \cdot a$ y altura H , con los siguientes valores:

$$H = 9 \text{ pies } P = 4 \cdot a \cdot a \text{ } Q = 1 \cdot a \cdot a$$

Para esta geometría la velocidad del viento para que la cometa empezara a volar sería:

$$v = \frac{3 \cdot (2 \cdot P + Q) \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot a \cdot a} = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot H}{4} \Rightarrow s = \sqrt{2 \cdot g \cdot v} = \sqrt{15 \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot H}{2}} = 6,24 \cdot \sqrt{H}$$

Que para H igual a 9 pies, la velocidad del viento debía ser de 18,72 pies/s (6,080 m/s) y el ángulo al iniciar el despegue es $\varphi = \theta = 54^\circ 44'$, significa que la cometa se elevaría para velocidades del viento superiores variando los ángulos φ y θ hasta encontrar la posición de equilibrio. A continuación calculaba los valores para 20, 25 y 30 pies por segundo, siguiendo el algoritmo mostrado en la (Fig. 5).

Entre el párrafo [§57] y [§61] de la *Addition* estudiaba una aplicación de la cometa con cola, con los valores numéricos dados a la cometa definida la cometa iniciaría su vuelo con una velocidad del viento de 18,90 pies/s (6,13 m/s). A continuación, calculaba los valores para 20 y 30 pies por segundo, siguiendo el algoritmo mostrado en la (Fig. 6).

En [§64] y [§65] concluía que la cometa estudiada en la *Addition* es la misma construida en el análisis del segundo caso a la que se ha añadido una "queue" de la mitad de peso de la misma, destacando que para un viento de 20 pies/s la cometa sin cola se eleva $4^\circ 57'$, mientras con la misma sube $8^\circ 30'$, y con 30 pies/s $64^\circ 44'$ y sin cola no más allá de 32° . Con lo que quedaba demostrado que, con la cola, una cometa se puede elevar más alto que sin ella⁴⁹.

Este es el cuadro resumen de los resultados de las tres aplicaciones:

	s (pies/s)	s (m/s)	θ	φ	$\theta - \varphi$	ψ
1º caso	9	2,920	54° 44'	54° 44'	00° 00'	-
	10	3,248	54° 44'	45° 46'	08° 58'	-
	15	4,872	54° 44'	26° 57'	27° 47'	-
	20	6,496	54° 44'	18° 55'	35° 49'	-
2º caso	18,72	6,080	54° 44'	54° 44'	00° 00'	-
	20	6,496	57° 10'	52° 13'	04° 57'	-
	25	8,120	64° 39'	43° 27'	21° 12'	-
	30	9,744	69° 21'	36° 52'	32° 34'	-
Adición	18,90	6,130	56° 20'	56° 20'	00° 00'	23° 07'
	20	6,496	62° 53'	54° 23'	08° 30'	21° 54'
	30	9,744	104° 43'	40° 03'	64° 44'	41° 42'

Los valores hallados de 18,72 pies/s (6,080 m/s) y 18,90 pies/s (6,130 m/s) corresponden a un viento de Fuerza 4 en la Escala de Beaufort⁵⁰ cuando la experiencia dice que una cometa como la descrita es suficiente un viento de Fuerza 1 (entre 0,3 y 1,5 m/s). Estos resultados numéricos calculados en las aplicaciones prácticas carecen de un análisis de orden de magnitud o de viabilidad. Johann Albert Euler no se plantea si las velocidades del viento halladas son coherentes con el acto de elevar una cometa. Es como si una vez que se ha fijado el modelo geométrico y físico, las expresiones deducidas por razonamientos matemáticos ya tienen para el *geómetra* una validez suficiente, y si algo falla es consecuencia del modelo geométrico o el físico, es decir el grado de aproximación a la realidad, no del análisis empleado. Ésta es también la explicación que daba Benito Bails (1730-1797) en la introducción al tomo V de sus *Elementos de Matemática*.

“No siendo la Matemática Mixta otra cosa que la aplicación de la Geometría y el Álgebra á la Física, pueden y deben salir erradas sus consecuencias siempre que supongamos en los cuerpos que consideramos una naturaleza, ó propiedades que no sean las verdaderas, ó no tengamos bastante exploradas. Las reglas de calcular son muy seguras, ciertísimas las

⁴⁹ Hoy se sabe que el fin de la cola en una cometa es impedir su giro respecto a un eje perpendicular al plano, no aumentar la sustentación. El resultado obtenido por Euler es consecuencia del modelo geométrico adoptado.

⁵⁰ Escala de 0 a 12 grados, para medir la fuerza del viento, propuesta el año 1806 por el marino irlandés al servicio de Francia Francis Beaufort. Ver: GIL OLCINA, A.; OLCINA CANTOS, J. (1999) *Climatología básica*, Barcelona, Editorial Ariel, 117.

proposiciones de la Geometría, pero los resultados de su aplicación han de ser forzosamente distintos según los diferentes supuestos sobre que va fundada⁵¹".

4.- Conclusiones.

La memoria de Johann Albert Euler supone un paso trascendental en el viaje transcultural de la cometa. Tras su ingreso en la cultura científica a través de la filosofía natural como instrumento científico en el contexto de las experiencias sobre la electricidad atmosférica, Euler lleva este objeto al terreno de la geometría. En este tránsito, la cometa adquiere una nueva forma. En primer lugar, se convierte en un objeto geométrico, mediante una serie de simplificaciones que lo alejan de su referente físico. En segundo lugar, su funcionamiento es reducido a una serie de proposiciones matemáticas, basadas en la aplicación de un modelo físico.

La cometa recibe de Euler hijo un tratamiento similar al de otras máquinas hidráulicas estudiadas con métodos similares por los principales geómetras del siglo XVIII, entre ellos su propio padre. La propia estructura de la memoria, así como los modelos físicos y geométricos aplicados, son una buena muestra de la influencia de esta tradición de estudios. Sin embargo, la memoria sobre los *Cerfs-volants* presenta algunas diferencias dignas de ser destacadas. En primer lugar, la complejidad del objeto, derivada en gran medida del problema del hilo y la cola, obliga a Euler hijo a ensayar tres modelos, que suponen tres grados de aproximación, según un orden de complejidad creciente. También cabe destacar que, a la hora de aplicar los principios de la mecánica para explicar su vuelo, se asuma la teoría del impacto, sin más crítica ni justificación. Todo ello, a pesar de que el desarrollo matemático consiguiente lleve a expresiones cuya resolución numérica no es una simple sustitución de valores y, más grave aún, que la aplicación práctica por medio de una resolución numérica de cada uno de los casos da como resultado unos valores muy alejados de los que la práctica experimental ofrece de manera inmediata.

⁵¹ BAILS, B. (1780) *Elementos de Matemática*. Tomo V: "Hydrodinámica", Madrid, XXXVIII-XXXIX.

5.- Bibliografía.

- ACKERET, J. (1957) "Vorrede", vol. 15 (2) *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, VII-LX.
- BLANC, Ch.; DE HALLER, P. (1979) "Preface", vol. 16 (2) *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, VII-XVII.
- DERRY, T.K.; WILLIAMS, T.I. (1977) *Historia de la tecnología. Vol. 1, desde la antigüedad hasta 1750*, Madrid, Siglo XXI.
- ENESTRÖM, G. (1913), "Die Schriften Eulers chronologisch nach den Jahren geordnet, in denen sie verfasst worden sind", *Jahresber. Dtsch. Math.*
- EULER, J.A. (1758) "Des Cerfs-volans", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, année MDCCLVI, 322-364.
- EULER, L. (1758) "Recherches plus exactes sur l'effet des moulins à vent", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, année MDCCLVI, 165-234.
- FRANKLIN, B. (1753) "A letter of Benjamin Franklin, Esq; to Mr. Peter Collinson, F.R.S. concerning an electrical Kite", *Philosophical Transactions of The Royal Society of London*, ILVII, 565-567.
- GONZÁLEZ TASCÓN, I. (1992) *Fábricas hidráulicas españolas*, Madrid, Ministerio de Obras Públicas y Transportes (CEHOPU).
- HIDALGO CÁMARA, E. (1993) "Tendiendo puentes entre la teoría y la práctica científica: El péndulo balístico (Robins, 1742; Hutton, 1775)", *Éndoxa*, 2, 237-281.
- RAYNOLD, T.S. (1983) *Stronger than a hundred men. A history of the vertical waterwheel*, Maryland, Jonh Hopkins University Press.
- ROCHE, J.J. (1998) *The mathematics of measurement. A critical history*, Londres, The Athlone Press.
- ROMAS, J. (1755) "Mémoire, où après avoir donné un moyen aisé pour élever fort haut, & à peu de frais, un corps E'lectrisable isolé, ou rapporte des observations frappantes, qui prouvent que plus le corps isolé est élevé au dessus de la terre, plus le feu de l'E'lectricité est abondant", *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie royale des sciences par divers çavans, et lus dans ses assemblées*, Paris.
- SIMÓN CALERO, J. (1996) *La génesis de la mecánica de fluidos*, Madrid, UNED.
- SUAY BELENGUER, J.M. (2007) "El vuelo transcultural de la cometa". En: HERRAN, N.; SIMON, J.; GUILLEM-LLOBAT, X.; LANUZA-NAVARRO,

T.; RUIZ CASTELL, P.; NAVARRO, J. (eds.) *Synergia: Jóvenes investigadores en Historia de la Ciencia*, Madrid, CSIC, 283-299.

TRUESDELL, C.A. (1954) "Rational fluid mechanics (1787-1765)", introducción editorial al vol. 13 (2) *Leonhardi Euleri Opera Omnia*.

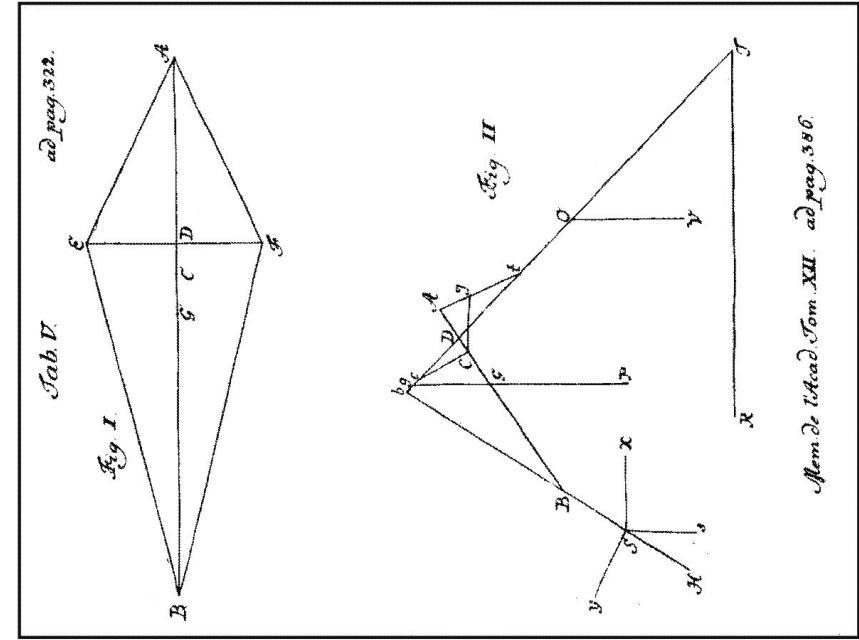


Figura 1. Modelo geométrico de la cometa según J.A. Euler (izquierda) comparado con el grabado de la obra de Jacques de Romas de 1776 *Mémoire, sur les moyens de se garantir de la foudre dans les maisons*.

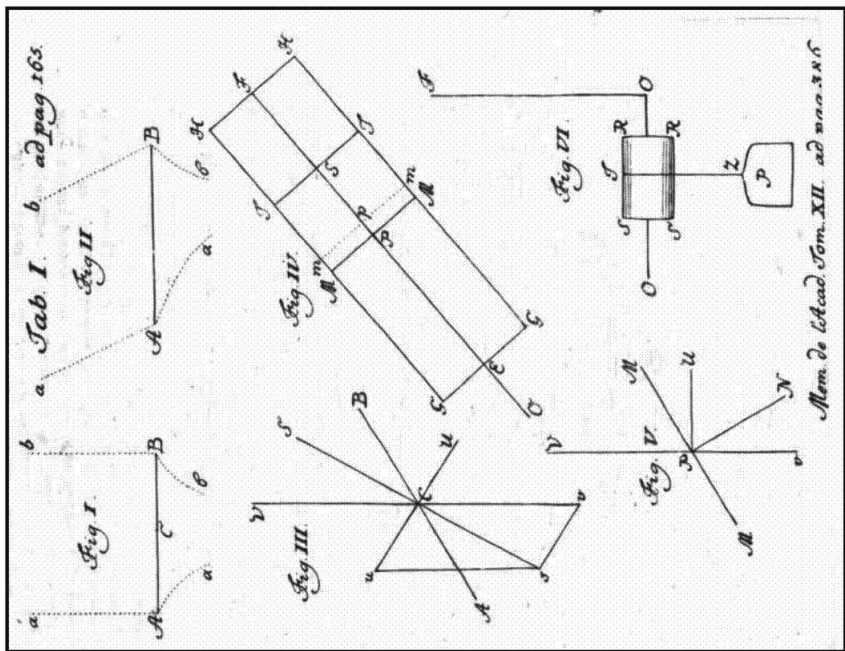
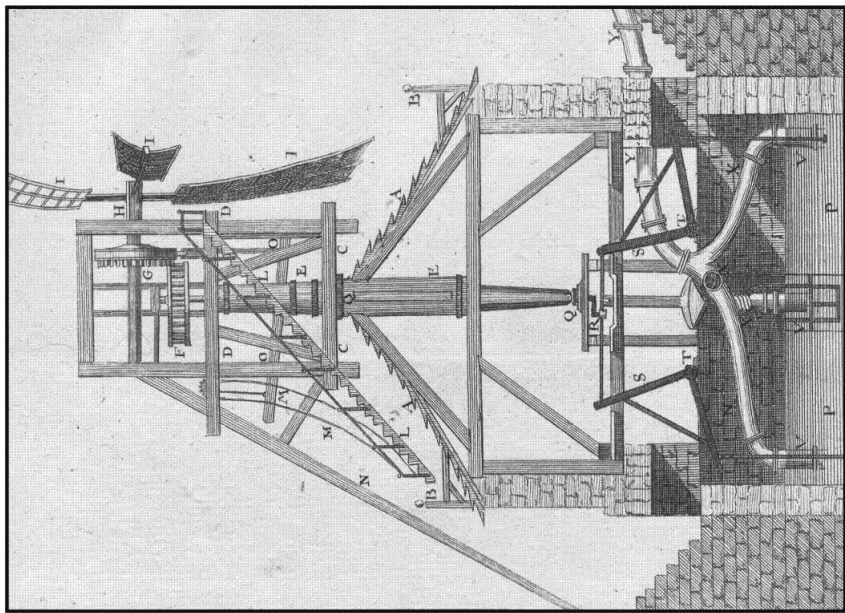


Figura 2. Modelo geométrico de un molino según Leonhard Euler (izquierda), comparado con la representación de la misma máquina en la plancha HYDRAULIQUE Moulins a vent de Meudon en la Enciclopedia de Diderot y D'Alambert (1751-72).

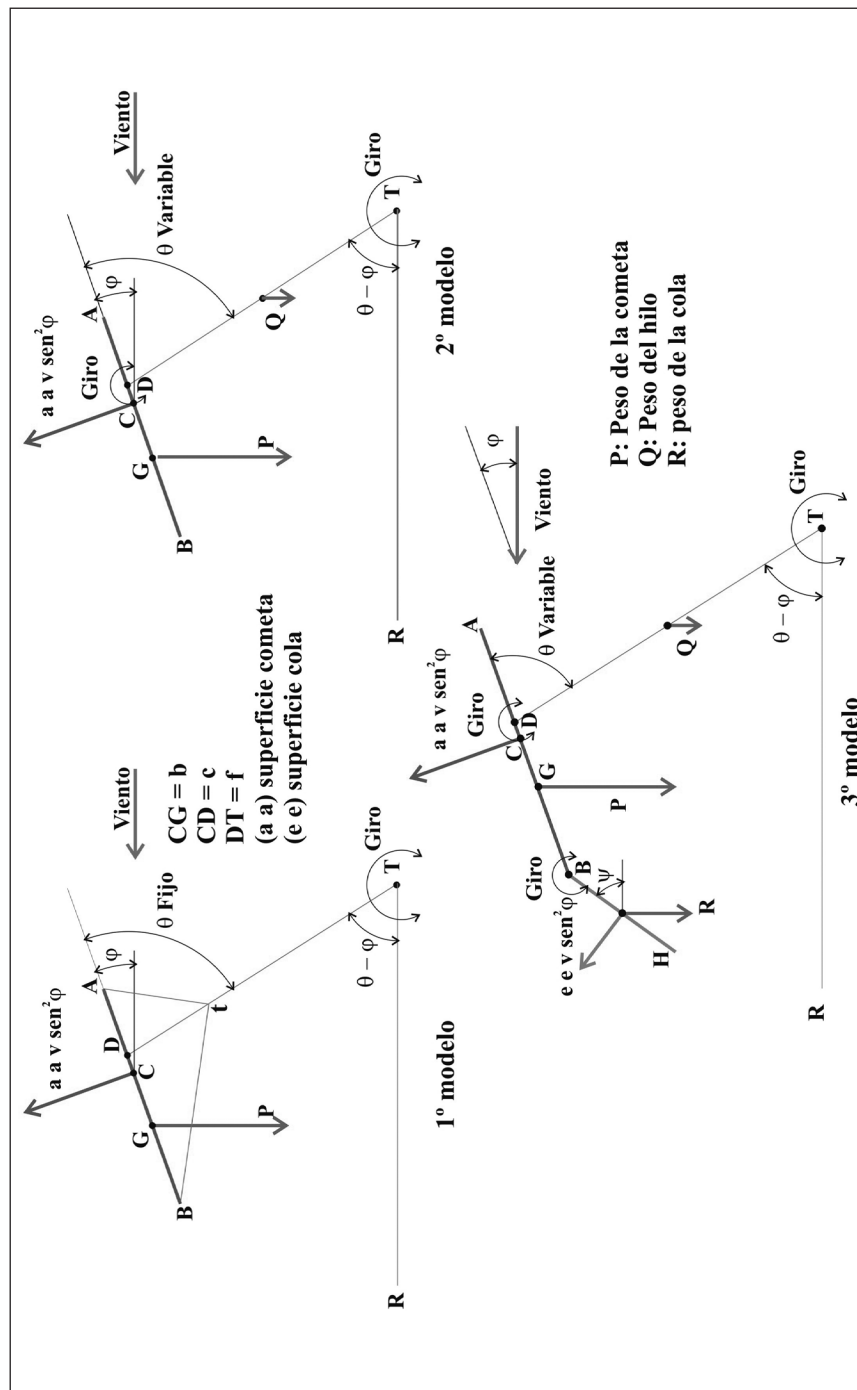


Figura 3. Los tres modelos para la cometa empleados por J.A. Euler.

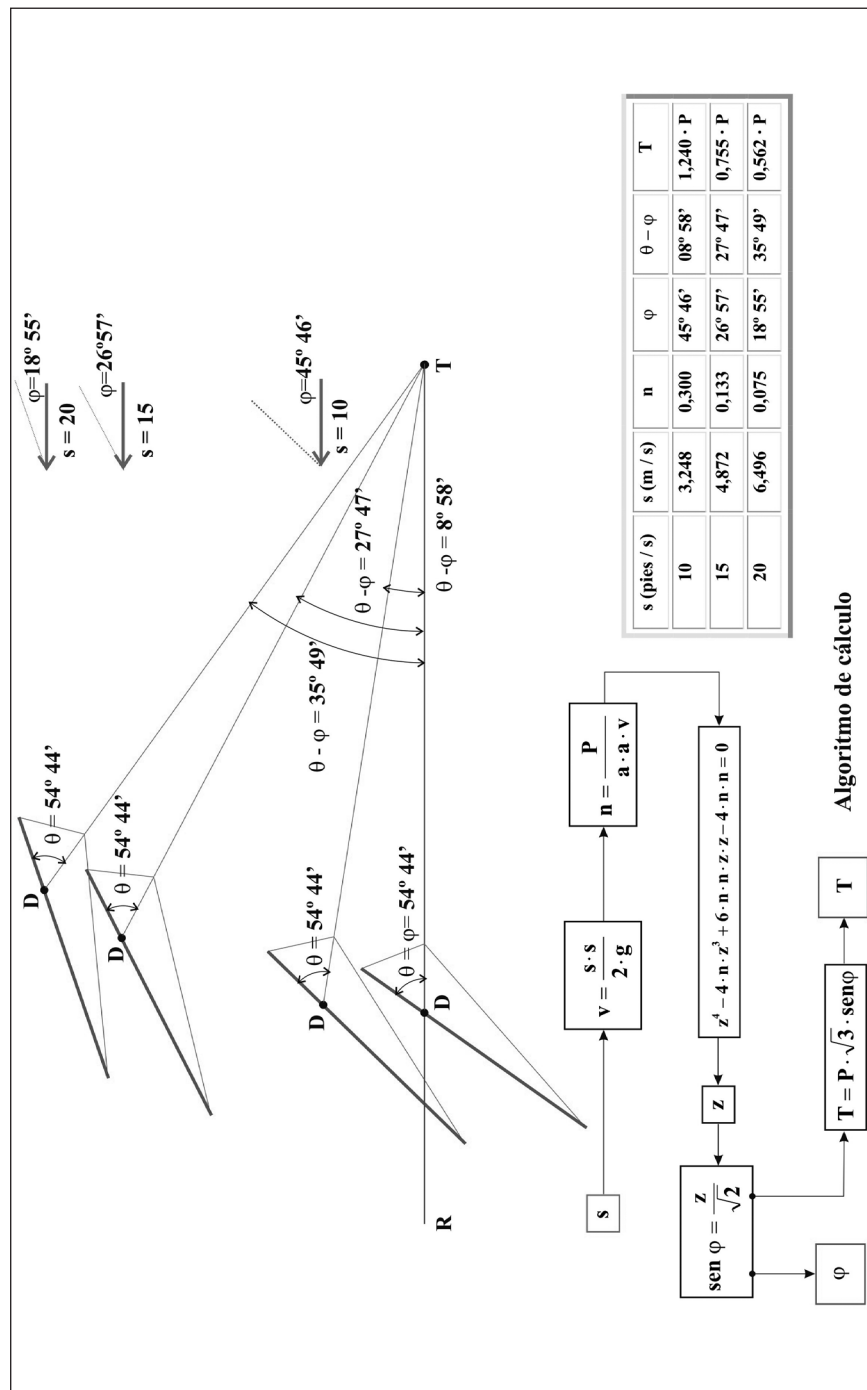


Figura 4. Aplicación práctica del primer modelo para la cometa.

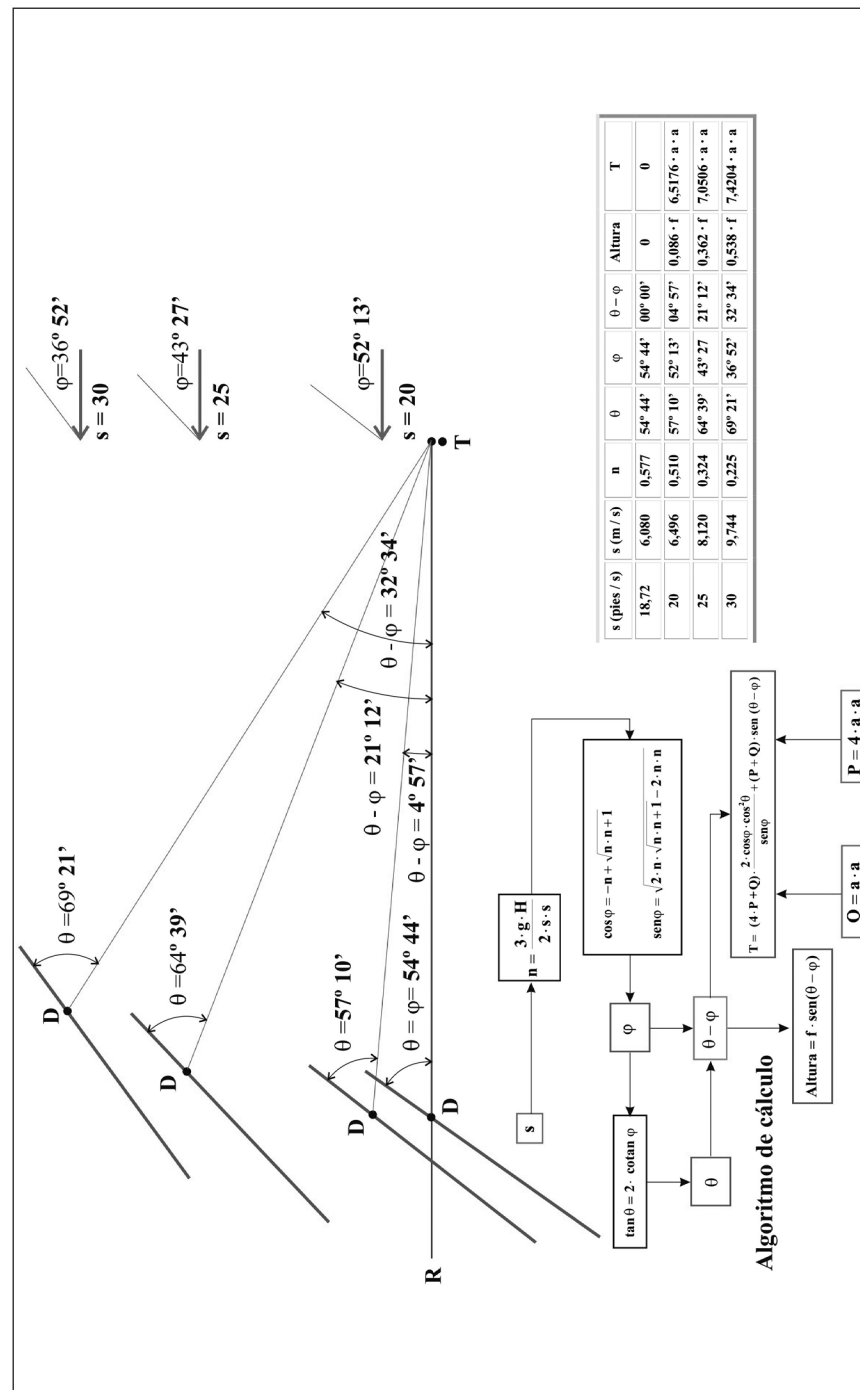


Figura 5. Aplicación práctica del segundo modelo para la cometa.

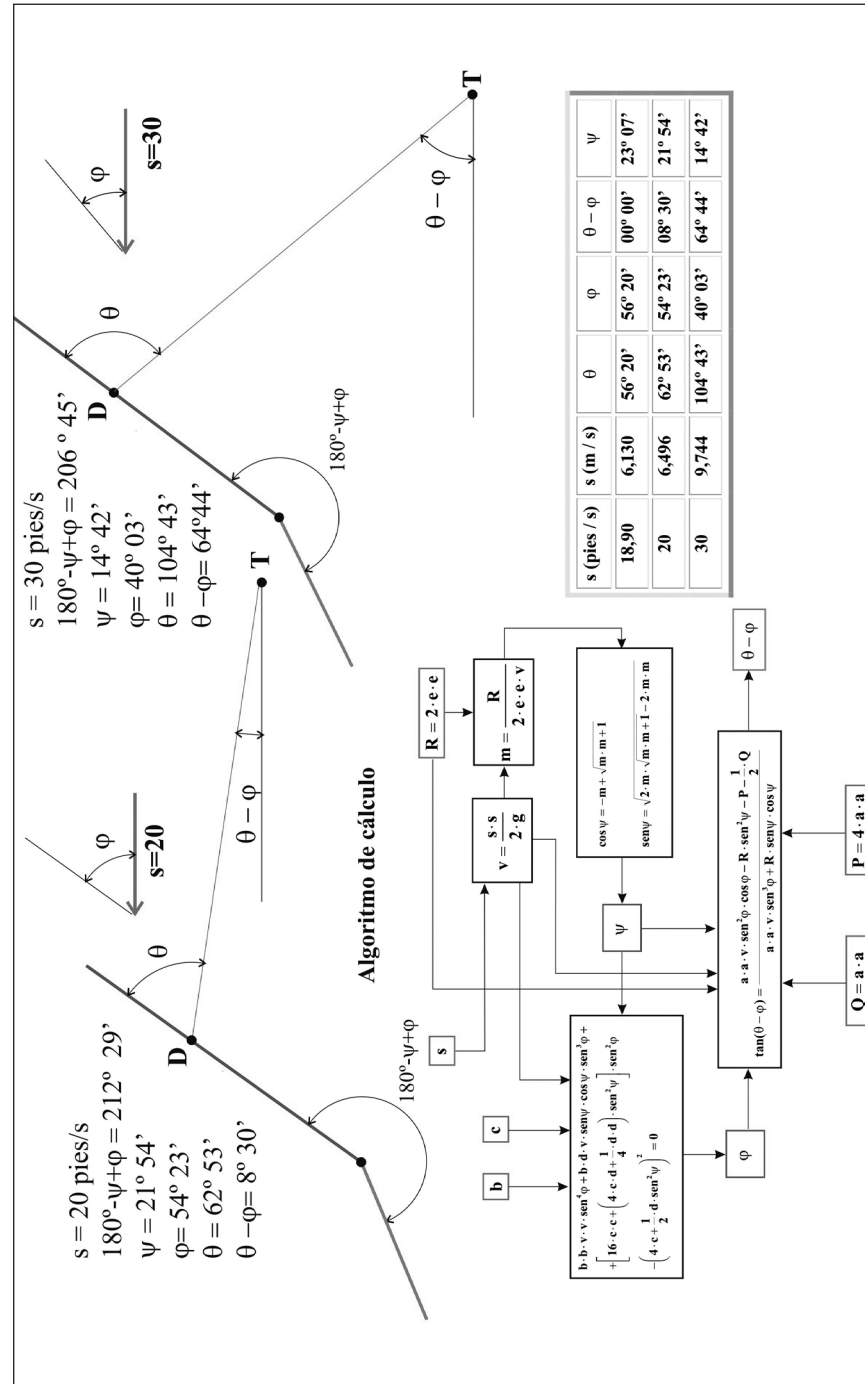


Figura 6. Aplicación práctica del tercer modelo para la cometa.

EL NÚMERO *e* EN LOS TEXTOS MATEMÁTICOS ESPAÑOLES DEL SIGLO XVIII

Juan Navarro Loidi
jnavarrolo@euskalnet.net

1.- Introducción.

La constante que ahora llamamos *e* (2,7182818...) comenzó a figurar veladamente en los razonamientos matemáticos a comienzos del siglo XVII¹. El número *e* se puede definir como la base de los logaritmos llamados neperianos², que introdujo John Napier (conocido como Neper) (1550-1617) en sus obras *Logarithmorum canonicis descriptio* (1614) y *Mirifici logarithmorum* (1618), aunque en la definición de logaritmo que se da en esos libros no se menciona el número *e*:

“El logaritmo de un seno dado es el número que aumenta aritméticamente con la misma velocidad a la que el seno ha comenzado a disminuir desde el seno dado proporcionalmente a su longitud”³.

Esta definición pone en correspondencia un número *x*, cuyo valor disminuye con una aceleración proporcional a su magnitud ($\frac{d^2x}{dt^2} = kx$), con otro *y*, su logaritmo, que crece uniformemente ($\frac{dy}{dt} = k'$). Esta relación, junto con las condiciones iniciales propuestas por el autor, equivalen a dar para el logaritmo de Neper de un número *x* (NepLog*x*):

$$\text{NepLog } x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}$$

¹ Sobre la historia del número *e* se puede ampliar en MAOR (2006).

² Sobre la historia de los logaritmos se puede ampliar en NAUX (1966-1971).

³ “The Logarithme therefore of any sine is a number very neerely expressing the line, which increased equally in the meane time, whiles the line of the whole sine decreased proportionally into that sine, both motions being equal-timed, and the beginning equally swift” (NAPIER, 1616: 4-5)]. La traducción al castellano es mía.