Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 12,4, 467–495(1996)

UN MÉTODO GENERAL PARA LA SÍNTESIS DE POSICIÓN DE MECANISMOS CON PARES INFERIORES Y SUPERIORES (I): SÍNTESIS DE POSICIÓN DE MECANISMOS PLANOS

J.A. ALBA*
M. DOBLARÉ**
y
L. GRACIA*

* *Departamento de Ingeniería Mecánica*
Universidad de la Rioja, España
** *Departamento de Ingeniería Mecánica*
Universidad de Zaragoza, España

RESUMEN

Se presenta en este artículo un procedimiento general para la síntesis óptima de mecanismos de topología conocida, cuyo objetivo es la determinación de las dimensiones de los eslabones que lo componen que mejor cumplan, desde un punto de vista global, el paso por unos puntos de precisión dados. El método considera como función objetivo la energía de deformación virtual asociada a los eslabones considerados como elementos flexibles, necesaria para deformar el mecanismo desde los puntos de paso reales del mismo a los propuestos. Las variables de diseño son las *coordenadas naturales* del mecanismo en cada punto de síntesis y las longitudes de los eslabones. Ello permite ponderar de forma inmediata los distintos puntos de síntesis, así como el cambio de longitud de cada eslabón. Además de las restricciones topológicas es posible incluir exigencias cinemáticas sobre la velocidad, aceleración o sobreaceleración, todas ellas incluidas de forma general en el procedimiento de cálculo que utiliza como método de solución una secuencia de problemas cuadráticos con definición analítica de la función objetivo, restricciones y sus gradientes, mientras que se realiza el cálculo por diferencias finitas de los hessianos. El método es completamente general, habiéndose programado un conjunto importante de las restricciones más habituales en la cinemática de mecanismos, siendo posible la extensión inmediata a otro tipo de pares y restricciones. En este primer artículo se presentan las generalidades del método y el problema de posición en el plano, mientras que en el siguiente se incluyen la extensión a la síntesis cinemática y al espacio. Finalmente, en este artículo se incorporan una serie de ejemplos representativos de las posibilidades del método que permiten contrastar la potencia y generalidad del mismo.

Recibido: Julio 1996

©Universitat Politècnica de Catalunya (España) ISSN 0213–1315

SUMMARY

A general procedure for the optimal synthesis of mechanisms with known topology is presented in this paper. The main goal of this technique is the computation of the lengths of the different elements of the mechanism which minimize, from a global point of view, the error between the actual path of one of the points of the mechanism and another certain path predefined by a variable number of synthesis points. The proposed method considers as objective function the virtual strain energy associated to the elements of the mechanism considered as flexible, needed to deform the mechanism from the actual path points to the proposed synthesis ones. The design variables are the all the *natural coordinates* of the mechanism together with the element lengths. This allows to weight each of the synthesis points and the variability of the each of the element lengths. Besides the constraints defining the mechanism topology it is also possible to include in the formulation kinematical constraints on the velocity, acceleration and jerk. All of these constraints are included in the formulation and solved by an optimization method which uses a sequence of quadratical problems with an analytical definition of the objective function, the constraints and their respective gradients, while their hessians are computed by finite differences. The method is general in the sense that it is possible to include any other kind of constraint in a very easy way, allowing user routines to be included, although the most usual constraints in planar mechanisms have been included in the resulting code. In this first paper, a general overview of the method is presented for the planar case, while in forthcoming ones the extension to kinematic and spatial synthesis will be presented. Finally a relevant number of representative examples are also discussed in this work in order to contrast the possibilities of the method.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años el problema de síntesis óptima de mecanismos ha sufrido importantes avances motivados en gran medida por el desarrollo exponencional de las prestaciones computacionales junto a mejoras sucesivas en las metodologías de optimización[1-4]. Ello ha permitido aplicar distintas técnicas de programación matemática a esta síntesis de mecanismos, tanto en lo que se refiere a optimización dimensional como topológica[5,6].

Sin embargo, la mayoría de los procedimientos publicados están particularizados a cierta clase de problemas, o bien la definición del problema deja ocultos gran parte de aspectos físicos fundamentales en el diseño y que constituyen una ayuda esencial para el diseñador haciéndolos inútiles o difícilmente aplicables en la práctica cotidiana.

En el método expuesto en este artículo se trata de resolver estos inconvenientes articulando un procedimiento que aporta grandes ventajas al problema de síntesis óptima de mecanismos. Así:

- Incorpora de manera escalonada e independiente cualquier restricción topológica del mecanismo, junto a posiciones geométricas o dimensionales que definen de forma completa el problema a resolver.
- Permite tratar de forma similar pares inferiores y superiores no distinguiendo de hecho entre ellos y facilitando al diseñador una terminología de restricciones cercana a la que él habitualmente utiliza.

- Incorpora la posibilidad, no habitual, de imponer al diseño restricciones de tipo cinemático, tales como condiciones sobre la velocidad, aceleración y sobreaceleración de los puntos y en las direcciones deseadas. Además el tratamiento de estas restricciones es también totalmente análogo a las anteriormente citadas.
- El planteamiento es aplicable a mecanismos planos o espaciales de cadena abierta o cerrada.
- Utiliza como coordenadas básicas las *coordenadas naturales* de García de Jalón[7–9] que permiten un tratamiento muy simple de la mayoría de las restricciones, así como una representación geométrica inmediata de los movimientos y posiciones del mecanismo.
- El método es completamente general y cercano a la práctica del diseñador con lo que su utilización es muy directa y ciertamente robusta en los casos en los que, como es habitual, el diseño inicial en cuanto a topología y dimensiones está cercano a los resultados esperables.

El proceso de cálculo se articula en dos etapas bien diferenciadas, siguiendo a Avilés *et al.*[9], Navalpotro[10] y Vallejo[11]: *Síntesis local y síntesis global.* El objetivo de la primera es la obtención de un vector inicial de iteración suficientemente bueno para el comienzo del proceso real de optimización que se plantea en la denominada síntesis global. Para ello se resuelve un problema auxiliar de optimización en cada punto de síntesis. Con él se trata de calcular la posición del mecanismo que, partiendo de unas longitudes dadas, mejor cumple la síntesis en cada punto de precisión. En este primer caso se consideran como variables de diseño las coordenadas naturales del mecanismo y como función objetivo la misma (pero restringida a un único punto de síntesis) que en el proceso de síntesis global. Por el contrario, en este último se resuelve el problema de minimización en todos los puntos de síntesis simultáneamente, añadiendo como nuevas variables de diseño las dimensiones del mecanismo. Con ello se obtiene el mecanismo buscado que mejor se adapta a todas las precisiones impuestas. En ambos casos la topología del mecanismo queda controlada por el número necesario de restricciones topológicas.

La *función objetivo* utilizada en ambos casos es la empleada anteriormente en 9–11. Se define como la *energía potencial de deformación* de barras del mecanismo consideradas como elementos flexibles necesaria para alcanzar desde una posición dada, compatible con las dimensiones del mismo, el punto de precisión considerado. En el caso de la síntesis local, y como se ha indicado, las dimensiones del mecanismo son fijas y la minimización de la función anterior da como resultado la posición posible del mecanismo más próxima (en el sentido de la función objetivo, es decir, de la menor energía de deformación posible) al punto de síntesis considerado. La solución del mecanismo "deformado", es decir, en la posición que pasa por el punto de síntesis con menor energía de deformación, es la utilizada como vector inicial de iteración en la síntesis global. El interés de la función objetivo anterior radica en su carácter escalar que la hace muy simple de trabajar, en poseer una interpretación física evidente y, por tanto, aprovechable para el diseñador experto para la interpretación de los resultados, y finalmente, la posibilidad de considerar efectos de ponderación de forma muy simple y física (por ejemplo a través de los parámetros elásticos del material de cada barra

se puede ponderar la importancia del cambio de longitud de cada barra en el diseño: una barra más rígida supondrá una menor posibilidad de cambio de su longitud en el mecanismo, ponderándose más por tanto su deformación en la energía potencial total del mecanismo). En el segundo proceso de síntesis global la función objetivo es la misma, pero ahora se suman todas las energías de deformación (ponderadas si así se desea) para cada uno de los puntos de síntesis, aprovechándose de nuevo todas las ventajas anteriormente indicadas, mientras que las longitudes de las barras se incorporan ahora como nuevas variables de diseño.

En cuanto a las restricciones se han considerado las típicas que definen la estructura y topología de los mecanismos más comunes, así como también se ha incluido la posibilidad de restricciones cinemáticas. Es de resaltar que la inclusión de nuevas restricciones es inmediata, disponiéndose de subrutinas de usuario para que éste pueda incorporar sus propias restricciones. Así se permite imponer condiciones directas sobre las variables de diseño (coordenadas naturales del mecanismo en cada punto de síntesis y dimensiones de los elementos que lo componen) mediante bandas que definen los límites inferior y superior de variación de cada variable. Con ellas podemos acotar la precisión de la solución obtenida delimitando el espacio de trabajo de cada variable. Así mismo permiten "flexibilizar" en la medida que el diseñador considere necesario el cumplimiento de alguno o algunos de los puntos de precisión, trabajándose entonces no tanto con puntos de síntesis, sino con *regiones de síntesis*, aportando una mayor adaptabilidad a la solución, especialmente cuando se imponen restricciones cinemáticas. Por otra parte, esta circunstancia no sólo no entra en oposición con la precisión del diseño, sino que, muy al contrario, lo más habitual en trabajar con trayectorias o puntos singulares con un cierto margen de precisión que, en este caso, es conveniente incluir en la definición del mecanismo para conseguir los efectos apuntados.

Otro tipo de restricciones se imponen sobre la posición de los distintos puntos fijos del mecanismo, son similares a las anteriores y sobre ellas puede hacerse los mismos comentarios que sobre el resto de variables de posición. Obviamente, la única salvedad estriba en el hecho de que la movilidad permitida ha de ser a nivel de síntesis global, pero la posición de los puntos fijos ha de ser la la misma en todos los puntos de síntesis. Ello se traduce en que en los procesos de síntesis local los puntos fijos no podrán moverse, ya que ello implicaría la posibilidad de movimiento del mecanismo sin deformación para posicionarse exactamente en el punto de síntesis, lo que no tiene sentido. Además en el proceso de síntesis global se ha de asegurar que los puntos fijos tienen las mismas coordenadas finales en todos los puntos de síntesis, debiendo incluirse esta condición como restricción al diseño.

Finalmente, el resto de restricciones dependen del tipo de mecanismo y se agrupan, en general, en un conjunto de restricciones no-lineales que se definen de forma analítica entre las distintas variables del problema. Un estudio detallado de las mismas para el caso plano se presenta a continuación.

El procedimiento de solución utilizado para la resolución del problema de optimización, y que ha dado un buen índice de convergencia y una robustez suficiente, es de una *serie de problemas cuadráticos (SPQ)*[1,2,4] para el que hay que definir tanto la función objetivo y las restricciones como sus gradientes y hessianos. Para resolverlo se ha utilizado la subrutina EO4VDF de la librería NAG[12], que determina el hessiano

por diferencias finitas, mientras que hay que proveerle de las expresiones analíticas de las distintas funciones y sus gradientes.

A continuación se explican los elementos anteriores para el caso plano, mientras que para el caso tridimensional se detalla en un artículo posterior[13].

SÍNTESIS DE POSICIÓN EN EL PLANO

Variables de diseño

A continuación se particulariza para el caso de mecanismos planos lo expuesto en la Introducción. En primer lugar se ha de definir el mecanismo; para ello se definen los nudos y barras (obsérvese que se sigue una nomenclatura similar a la utilizada en análisis estructural al analizar mediante el Método de Elementos Finitos[14]), entendiendo por los primeros los puntos necesarios para, utilizando las ecuaciones de restricción adecuadas, definir la posición del mecanismo en cada instante, y por las segundas los segmentos que, uniendo los nudos, definen de forma completa la topología del mecanismo y deben incluirse en la definición de la función objetivo. Serán por tanto los elementos que pueden estar sometidos a deformación en los procesos de síntesis (Figura 1).

Para los primeros se define el rango de variación de sus coordenadas que serán variables de diseño tanto en los procedimientos de síntesis local como en el global, mientras que para las segundas se define la banda de posible variación de sus longitudes que serán también variables de diseño, pero tan sólo en el proceso de síntesis global, así como el módulo elástico del "material ficticio" útil para ponderar en la función objetivo final la "rigidez" de cambio de la longitud impuesta respecto de las demás.

También es necesario definir cuáles de los nudos son puntos fijos para poder establecer adecuadamente las restricciones correspondientes ya indicadas y los puntos de síntesis con las bandas de variación permitidas (precisión requerida en los mismos) de sus coordenadas. Asimismo es posible indicar distintos coeficientes de ponderación para cada uno de ellos.

En resumen, las variables de diseño del problema son:

- *Síntesis local*: Coordenadas de los nudos (excepto las correspondientes a los puntos fijos que se consideran como datos) para el mecanismo activo correspondiente al punto de síntesis considerado.
- *Síntesis global*: Coordenadas de todos los nudos (incluyendo las de los puntos fijos si se les permite una cierta variación de sus coordenadas) para todos los mecanismos activos correspondientes a todos los puntos de síntesis más las longitudes de las barras del mecanismo.

Restricciones

El siguiente paso es la definición de las restricciones consideradas, que para la síntesis de posición de mecanismos planos y además de las ya citadas correspondientes a puntos fijos, que suponen la constancia de sus coordenadas en cada punto de síntesis, se han considerado las siguientes: situación de triángulo constante, colinealidad de tres puntos, orientación constante entre dos barras, par superior engranaje-engranaje, par superior engranaje-cremallera, restricciones sobre la velocidad y restricciones sobre la

aceleración. Estas dos últimas son restricciones de posición planteadas de forma general en la referencia 17.

Igualdad de las coordenadas de los puntos fijos

En el caso de que se permita una banda de variación de las coordenadas de los puntos fijos del mecanismo se ha de imponer que las coordenadas finales de éstos sean iguales para todos los mecanismos activos (correspondientes a cada punto de síntesis) del problema. Ello se plantea con restricciones de la forma

$$x_j[PF_l(i)] = x_j[PF_l(k)] \quad j = 1,2; \quad i = 1,\ldots,PS; \quad k = 1,\ldots,PS; \quad l = 1,\ldots,PF \tag{1}$$

con PS el número de puntos de síntesis y PF el número de puntos fijos.

Relación constante entre coordenadas

Se establece esta restricción en casos como el presentado en la Figura 2.

- Posición del mecanismo

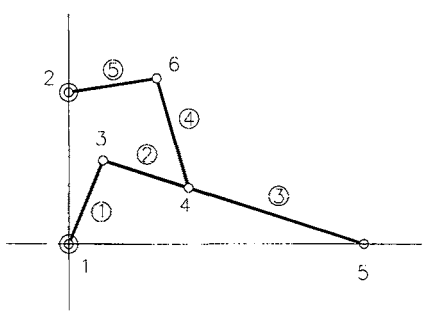


Figura 1. Modelo de un mecanismo

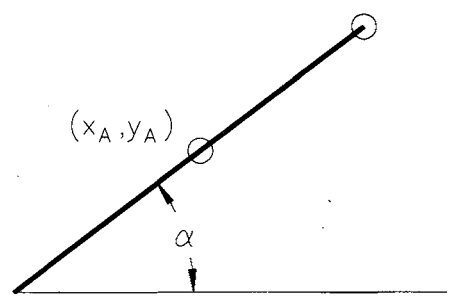


Figura 2. Relación constante entre coordenadas

Su expresión analítica viene dada por

$$h(x_A, y_A) = y_A - \tan(\alpha)x_A = 0 \tag{2}$$

y los gradientes por

$$\frac{\partial h}{\partial x_A} = -\tan(\alpha), \qquad \frac{\partial h}{\partial y_A} = 1 \tag{3}$$

Esta restricción se contemplará tanto en Síntesis Local como en Síntesis Global.

Coseno del ángulo de signo constante

Aparece la necesidad de aplicar esta restricción cuando se ha de controlar la ubicación relativa de tres puntos. Se impone mediante el producto escalar, transformándolo a coseno del ángulo que forman

$$h_3 = \frac{\vec{r}_{BA} \bullet \vec{r}_{CA}}{L_{AB} L_{AC}} \tag{4a}$$

o en términos de coordenadas

$$h_3 = \frac{x_{BA} x_{CA} + y_{BA} y_{CA}}{L_{AB} L_{AC}} \tag{4b}$$

$$\begin{aligned} &x_{BA} = x_B - x_A \quad y_{BA} = y_B - y_A \quad x_{CA} = x_C - x_A \quad y_{CA} = y_C - y_A \\ &L_{AB} = \sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2} \qquad L_{AC} = \sqrt{x_{AC}^2 + y_{AC}^2} \end{aligned} \tag{4c}$$

Las bandas se impondrán según los casos entre 0 y 1 o entre -1 y 0. La expresión de los gradientes de esta función viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_3}{\partial x(A)} &= \frac{(-x_{CA} - x_{BA})(L_{AB} L_{AC}) - (x_{BA} x_{CA} + y_{BA} y_{CA}) \left[\frac{\partial L_{AB}}{\partial x(A)} L_{AC} + L_{AB} \frac{\partial L_{AC}}{\partial x(A)} \right]}{(L_{AB} L_{AC})^2} \\ \frac{\partial h_3}{\partial y(A)} &= \frac{(-y_{CA} - y_{BA})(L_{AB} L_{AC}) - (x_{BA} x_{CA} + y_{BA} y_{CA}) \left[\frac{\partial L_{AB}}{\partial y(A)} L_{AC} + L_{AB} \frac{\partial L_{AC}}{\partial y(A)} \right]}{(L_{AB} L_{AC})^2} \end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_3}{\partial x(B)} &= \frac{x_{CA}(L_{AB} L_{AC}) - (x_{BA} x_{CA} + y_{BA} y_{CA}) \frac{\partial L_{AB}}{\partial x(B)} L_{AC}}{(L_{AB} L_{AC})^2} \\ \frac{\partial h_3}{\partial y(B)} &= \frac{y_{CA}(L_{AB} L_{AC}) - (x_{BA} x_{CA} + y_{BA} y_{CA}) \frac{\partial L_{AB}}{\partial y(B) L_{AC}}}{(L_{AB} L_{AC})^2} \end{aligned} \tag{5b}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_3}{\partial x(C)} &= \frac{x_{BA}(L_{AB} L_{AC}) - (x_{BA} x_{CA} + y_{BA} y_{CA}) L_{AB} \frac{\partial L_{AC}}{\partial x(C)}}{(L_{AB} L_{AC})^2} \\ \frac{\partial h_3}{\partial y(C)} &= \frac{y_{BA}(L_{AB} L_{AC}) - (x_{BA} x_{CA} + y_{BA} y_{CA}) L_{AB} \frac{\partial L_{AC}}{\partial y(C)}}{(L_{AB} L_{AC})^2} \end{aligned} \tag{5c}$$

Seno del ángulo de signo constante

Aparece la necesidad de aplicar esta restricción cuando queremos asegurar orientación constante. Se impone a través del producto vectorial

$$\vec{r}_{BA} \times \vec{r}_{CA} = 0 \tag{6}$$

transformándolo al seno del ángulo que forman

$$h_4 = \frac{\vec{r}_{BA} \times \vec{r}_{CA}}{L_{AB} L_{AC}} \tag{7}$$

Los gradientes de esta función vienen dados por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_4}{\partial x(A)} &= \frac{(-y_{CA} + y_{BA})(L_{AB}L_{AC}) - (x_{BA}y_{CA} - x_{CA}y_{BA})\left[\frac{\partial L_{AB}}{\partial x(A)} L_{AC} + L_{AB}\frac{\partial L_{AC}}{\partial x(A)}\right]}{(L_{AB}L_{AC})^2} \\
\frac{\partial h_4}{\partial y(A)} &= \frac{(-x_{BA} + x_{CA})(L_{AB}L_{AC}) - (x_{BA}y_{CA} - x_{CA}y_{BA})\left[\frac{\partial L_{AB}}{\partial y(A)} L_{AC} + L_{AB}\frac{\partial L_{AC}}{\partial y(A)}\right]}{(L_{AB}L_{AC})^2}
\end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_4}{\partial x(B)} &= \frac{y_{CA}(L_{AB}L_{AC}) - (x_{BA}y_{CA} - x_{CA}y_{BA})\frac{\partial L_{AB}}{\partial x(B)} L_{AC}}{(L_{AB}L_{AC})^2} \\
\frac{\partial h_4}{\partial y(B)} &= \frac{-x_{CA}(L_{AB}L_{AC}) - (x_{BA}y_{CA} - x_{CA}y_{BA})\frac{\partial L_{AB}}{\partial y(B)} L_{AC}}{(L_{AB}L_{AC})^2}
\end{aligned} \tag{8b}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_4}{\partial x(C)} &= \frac{-y_{BA}(L_{AB}L_{AC}) - (x_{BA}y_{CA} - x_{CA}y_{BA}) L_{AB}\frac{\partial L_{AC}}{\partial x(C)}}{(L_{AB}L_{AC})^2} \\
\frac{\partial h_4}{\partial y(C)} &= \frac{x_{BA}(L_{AB}L_{AC}) - (x_{BA}y_{CA} - x_{CA}y_{BA}) L_{AB}\frac{\partial L_{AC}}{\partial y(C)}}{(L_{AB}L_{AC})^2}
\end{aligned} \tag{8c}$$

Colinealidad de tres puntos

Cuando hayamos de imponer colinealidad será preciso recurrir a las restricciones que se han comentado anteriormente y en base a ellas establecer (por ejemplo en el caso de la Figura 3)

$$h_3 = \frac{\vec{r}_{53} \bullet \vec{r}_{43}}{L_{35}L_{34}} > 1 \qquad h_3 = \frac{\vec{r}_{35} \bullet \vec{r}_{45}}{L_{53}L_{54}} > 1 \qquad h_4 = \frac{\vec{r}_{53} \times \vec{r}_{43}}{L_{35}L_{34}} = 0 \tag{9}$$

Estas ecuaciones aseguran la colinealidad de los tres puntos y la permanencia del central entre los dos extremos.

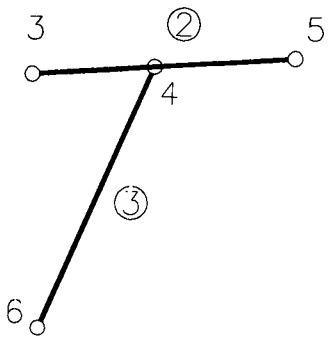


Figura 3. Restricción de colinealidad

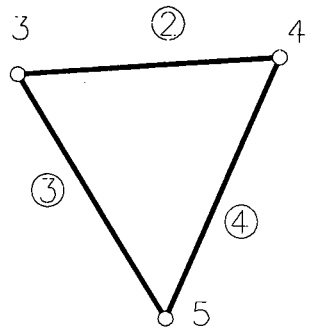


Figura 4. Modelización para controlar el triángulo

Triángulo

Se impone haciendo constante el signo del seno y de los cosenos que, por ejemplo, para la Figura 4 queda

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\vec{r}_{53} \times \vec{r}_{43}}{L_2 L_3} < 0 \qquad \cos(\alpha) = \frac{\vec{r}_{53} \bullet \vec{r}_{43}}{L_2 L_3} > 0 \qquad \cos(\beta) = \frac{\vec{r}_{35} \bullet \vec{r}_{45}}{L_3 L_4} > 0 \tag{10}$$

Par superior engranaje-engranaje

Cuando el contacto entre dos eslabones se produce mediante un par superior tipo engranajes, la situación es la mostrada en la Figura 5.

Se plantea que el arco descrito por el punto A_1 en el eslabón 1 desde la posición inicial A_{10} ha de ser igual al descrito por el punto A_2 en el eslabón 2 desde el punto inicial A_{20}. Por tanto, además de la ecuación que iguala ambos arcos, se ha de definir el punto de origen de referencia, es decir, la posición de ambos en un instante determinado. En síntesis (igual que en análisis) equivale a definir unos ángulos origen, lo que presupone una posición de referencia conocida.

La ecuación de restricción correspondiente es, haciendo siempre referencia a la Figura 5,

$$h_5 = [\theta_{A1} - (\theta_{A1})_0]L_1 + [\theta_{A2} - (\theta_{A2})_0]L_2 = 0 \tag{11a}$$

con

$$\begin{aligned} \theta_{A1} &= \arctan \frac{y_{A1} - y_{01}}{x_{A1} - x_{01}} \qquad \theta_{A2} = \arctan \frac{y_{A2} - y_{02}}{x_{A2} - x_{02}} \\ L_1 &= \sqrt{(x_{A1} - x_{01})^2 + (y_{A1} - y_{01})^2} \qquad L_2 = \sqrt{(x_{A2} - x_{02})^2 + (y_{A2} - y_{02})^2} \end{aligned} \tag{11b}$$

Los gradientes respecto a las variables de diseño dependientes del primer engranaje son

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1}{\partial x_{A1}} &= \frac{1}{2}\left[(x_{A1}-x_{01})^2+(y_{A1}-y_{01})^2\right]^{-\frac{1}{2}} 2(x_{A1}-x_{01})\\ \frac{\partial L_1}{\partial y_{A1}} &= \frac{1}{2}\left[(x_{A1}-x_{01})^2+(y_{A1}-y_{01})^2\right]^{-\frac{1}{2}} 2(y_{A1}-y_{01})\end{aligned} \tag{12a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1}{\partial x_{01}} &= \frac{1}{2}\left[(x_{A1}-x_{01})^2+(y_{A1}-y_{01})^2\right]^{-\frac{1}{2}} 2(x_{A1}-x_{01})(-1)\\ \frac{\partial L_1}{\partial y_{01}} &= \frac{1}{2}\left[(x_{A1}-x_{01})^2+(y_{A1}-y_{01})^2\right]^{-\frac{1}{2}} 2(y_{A1}-y_{01})(-1)\end{aligned} \tag{12b}$$

$$\frac{\partial \theta_{A1}}{\partial x_{A1}} = \frac{1}{1+\left(\frac{y_{A1}-y_{01}}{x_{A1}-x_{01}}\right)^2}\frac{-(y_{A1}-y_{01})}{(x_{A1}-x_{01})^2} \qquad \frac{\partial \theta_{A1}}{\partial y_{A1}} = \frac{1}{1+\left(\frac{y_{A1}-y_{01}}{x_{A1}-x_{01}}\right)^2}\frac{1}{(x_{A1}-x_{01})} \tag{12c}$$

$$\frac{\partial \theta_{A1}}{\partial x_{01}} = \frac{1}{1+\left(\frac{y_{A1}-y_{01}}{x_{A1}-x_{01}}\right)^2}\frac{(y_{A1}-y_{01})}{(x_{A1}-x_{01})^2} \qquad \frac{\partial \theta_{A1}}{\partial y_{01}} = \frac{1}{1+\left(\frac{y_{A1}-y_{01}}{x_{A1}-x_{01}}\right)^2}\frac{-1}{(x_{A1}-x_{01})} \tag{12d}$$

mientras que los correspondientes al segundo son similares.

Llevando estas expresiones a la función restricción engranaje-engranaje se tiene

$$\frac{\partial h_5}{\partial x_{A1}} = \frac{\partial \theta_{A1}}{\partial x_{A1}}L_1 + [\theta_{A1}-(\theta_{A1})_0]\frac{\partial L_1}{\partial x_{A1}} \qquad \frac{\partial h_5}{\partial y_{A1}} = \frac{\partial \theta_{A1}}{\partial y_{A1}}L_1 + [\theta_{A1}-(\theta_{A1})_0]\frac{\partial L_1}{\partial y_{A1}} \tag{13a}$$

$$\frac{\partial h_5}{\partial x_{01}} = \frac{\partial \theta_{A1}}{\partial x_{01}}L_1 + [\theta_{A1}-(\theta_{A1})_0]\frac{\partial L_1}{\partial x_{01}} \qquad \frac{\partial h_5}{\partial y_{01}} = \frac{\partial \theta_{A1}}{\partial y_{01}}L_1 + [\theta_{A1}-(\theta_{A1})_0]\frac{\partial L_1}{\partial y_{01}} \tag{13b}$$

$$\frac{\partial h_5}{\partial x_{A2}} = \frac{\partial \theta_{A2}}{\partial x_{A2}}L_2 + [\theta_{A2}-(\theta_{A2})_0]\frac{\partial L_2}{\partial x_{A2}} \qquad \frac{\partial h_5}{\partial y_{A2}} = \frac{\partial \theta_{A2}}{\partial y_{A2}}L_2 + [\theta_{A2}-(\theta_{A2})_0]\frac{\partial L_2}{\partial y_{A2}} \tag{13c}$$

$$\frac{\partial h_5}{\partial x_{02}} = \frac{\partial \theta_{A2}}{\partial x_{02}}L_2 + [\theta_{A2}-(\theta_{A2})_0]\frac{\partial L_2}{\partial x_{02}} \qquad \frac{\partial h_5}{\partial y_{02}} = \frac{\partial \theta_{A2}}{\partial x_{02}}L_2 + [\theta_{A2}-(\theta_{A2})_0]\frac{\partial L_2}{\partial y_{02}} \tag{13d}$$

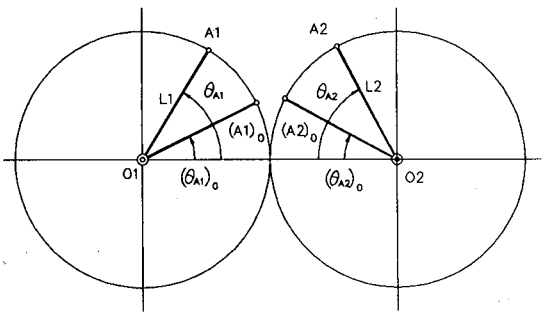


Figura 5. Restricción par superior engranaje-engranaje

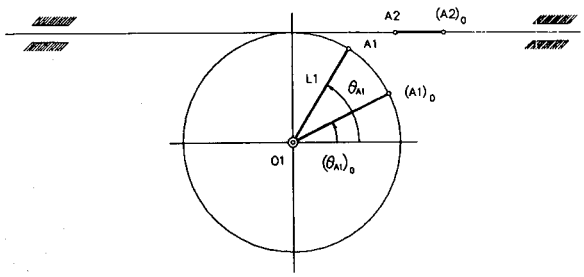


Figura 6. Restricción par superior engranaje-cremallera

Par engranaje-cremallera

En este caso se plantea que el arco descrito por el punto A en el eslabón 1 desde la posición de contacto tangencial ha de ser igual al desplazamiento del punto A en el eslabón 2 (Figura 6)

Análogamente al caso anterior tenemos como ecuación de restricción

$$h_6 = [\theta_{A1} - (\theta_{A1})_0]L_1 - \sqrt{[x_{A2} - (x_{A2})_0]^2 + [y_{A2} - (y_{A2})_0]^2} = 0 \qquad (14a)$$

con

$$[\theta_{A1}] = \arctan \frac{y_{A1} - y_{01}}{x_{A1} - x_{01}} \qquad (14b)$$

Los gradientes respecto las variables de diseño dependientes del engranaje son idénticos a los obtenidos para la restricción engranaje-engranaje anterior y los derivados de la cremallera son similares a los obtenidos para la expresión de la longitud desarrollados también anteriormente.

Suma de radios igual a distancia entre centros

Obsérvese que en las restricciones anteriores se puede conseguir el cumplimiento de restricción tanto con el giro de la barra que modeliza el engranaje como con la variación de sus longitudes. Ello obliga a imponer una nueva restricción para el total control del par engranaje-engranaje o engranaje-cremallera.

Para el par engranaje-engranaje se enuncia en los siguientes términos: *La suma de las longitudes de las barras ha de ser igual a la distancia entre centros.*

La ecuación de restricción será

$$L_1 + L_2 = d_{01\ 02} \qquad (15a)$$

$$L_1 = \sqrt{(x_{A1} - x_{01})^2 + (y_{A1} - y_{01})^2} \quad L_1 = \sqrt{(x_{A2} - x_{02})^2 + (y_{A2} - y_{02})^2}$$
$$d_{01\ 02} = \sqrt{(x_{02} - x_{01})^2 + (y_{02} - y_{01})^2} \qquad (15b)$$

que da lugar a expresiones de derivadas conocidas y planteadas anteriormente.

En el par engranaje-cremallera se ha de asegurar que la longitud de la barra que modeliza el engranaje sea igual a la distancia de su centro a la cremallera. Para una cremallera horizontal como la de la Figura 6 se tiene

$$L_1^2 = (y_{0_1} - y_{A_2})^2 \qquad L_1 = \sqrt{(x_{A1} - x_{01})^2 + (y_{A1} - y_{01})^2} \tag{16}$$

Además de las anteriores, el programa dispone de la posibilidad de definir restricciones de usuario sin más que programar la rutina de cálculo de la propia restricción y sus gradientes respecto a las distancias variables de diseño.

Función objetivo

En cuanto a la función objetivo, y como se explicó en la Introducción, se define para el proceso de síntesis local la siguiente

$$V + \sum_{i=1}^{m} E_i (l_1 - L_i)^2 \tag{17}$$

con E_i los módulos elásticos ficticios de cada barra i, l_i la longitud final de la barra i para llegar al punto de síntesis, L_i la longitud inicial de la barra i y m el número de barras del mecanismo susceptibles de deformarse (con longitud no impuesta "a priori").

Es de resaltar que ha de fijarse un vector de iteración inicial para las coordenadas de los nudos los más cercanos posible a la posición final esperada más próxima al punto de síntesis (en el sentido de la energía de deformación). Para ello, un análisis inicial del mecanismo es esencial, siendo posible realizarlo, o bien con un programa de análisis específico, o bien con el mismo programa de síntesis local sin más que definir como restricción adicional a las topológicas, la posición de los grados de libertad básicos del mecanismo a lo largo de un intervalo de tiempo suficiente y eliminando las condiciones de síntesis.

También es interesante remarcar de nuevo que los puntos fijos no se consideran como variables de diseño en la síntesis local y no son activas las restricciones cinemáticas.

Como solución se obtiene la parte del vector inicial del proceso de síntesis global relativa a la posición de cada nudo en cada mecanismo activo asociado a cada punto de síntesis, siendo obvio que esta solución depende de las longitudes iniciales que se le de a cada una de las barras y de la posición inicial que se adopte para el mecanismo en la iteración inicial. De cualquier forma, y tal como se ha comprobado, salvo valores muy lejanos a los óptimos, el resultado final obtenido es bastante independiente de estos valores, si bien los vectores obtenidos en la síntesis afectan de forma importante a la rapidez de convergencia.

El verdadero problema de síntesis se resuelve en la síntesis global, disponiéndose de un vector inicial de dimensión

$$\dim(\vec{x}) = 2 \times \text{NUDOS} \times \text{PS} + \text{BARRAS}$$

que corresponden a las variables de diseño de las coordenadas de cada nudo en tantos mecanismos como puntos de síntesis se consideran más las longitudes de cada una de las barras.

La función objetivo que se plantea en la síntesis global es la anterior expandida a todos los puntos de síntesis, incorporando ahora como variables de diseño también las longitudes

$$V = \sum_{k=1}^{PS} w_k \sum_{i=1}^{m} E_i (l_{i,k} - L_i)^2 \tag{18}$$

con w_k los coeficientes de ponderación de cada punto de síntesis k.

Sobre estas variables de diseño se imponen todas las restricciones que actuaron en la síntesis local, expandiéndolas adecuadamente, es decir, afectando a aquellas variables en síntesis global que representan los nudos del mecanismo "montado" en cada punto de síntesis para el proceso de minimización global.

Al contener el vecor de diseño todas las coordenadas de los puntos en todos los puntos de síntesis, poseemos información implícita del comportamiento cinemático de la configuración geométrica que definen los nudos del mecanismo para cada posición de síntesis en cada punto del proceso de optimización.

Para cada punto de síntesis se genera entonces un *mecanismo activo I* que cumple la síntesis de tipo, pero cuyas dimensiones no coinciden con la solución del problema (salvo que estemos en la solución exacta). Como de los *mecanismos activos I* que se van formando en la síntesis global se conoce la relación analítica que determina la velocidad, aceleración etc. de todos los puntos en función de la posición de sus nudos y del valor de las variables cinemáticas del GDL del mecanismo, se dispone de todos los valores cinemáticos y de sus gradientes en función de las variables de diseño y, por tanto, se pueden establecer funciones de restricción sobre los valores cinemáticos de los *mecanismos activos I*, lo que permite controlar velocidades, aceleraciones etc. en fase de diseño, incorporando a las restricciones no lineales que impone la geometría del sistema las variables cinemáticas deseadas.

EJEMPLOS

En los siguientes apartados se recogen algunos ejemplos que presentan los resultados obtenidos con este método en el problema de síntesis de posición. En cada uno de ellos se recoge el planteamiento del problema y se muestran los resultados.

En el procedimiento completo implementado se obtienen gráficos con la evolución de la función objetivo que permiten deducir el comportamiento del algoritmo de optimización utilizado en el proceso de cálculo.

Las salidas gráficas e impresas completas disponibles en el software desarrollado incluyen:

- la representación gráfica de los distintos mecanismos y sus posiciones en cada punto de síntesis,
- la representación gráfica de la evolución de la función objetivo,
- la representación gráfica de las trayectorias de los mecanismos inicial y final.

En cuanto a listados se dispone de:

- la modelización del mecanismo con las coordenadas de nudos, conectividades de barras, puntos fijos etc.,
- definición de la síntesis, es decir, las coordenadas de los puntos de síntesis y sus valores de ponderación,
- valores de la posición, velocidad y aceleración de todos los *mecanismos activos I* al final del proceso.

Disponer de estos últimos valores de los *mecanismos activos I* al finalizar el cálculo en síntesis de posición es muy importante para actuar de forma coherente en la imposición de síntesis cinemática.

Ejemplo 1. Mecanismo de cuatro barras

Se trata de plantear un problema de síntesis exacta y de comprobar cómo lo resuelve el procedimiento desarrollado. Sea el mecanismo de cuatro barras + díada de la Figura 7 con 5 nudos, 5 barras y 2 puntos fijos. La conectividad de las barras y la longitud solución de las mismas se muestra en la Tabla I.

Barra	Origen	Final	Longitud
1	1	3	4.000000
2	3	4	14.000000
3	3	5	15.000000
4	4	5	15.000000
5	2	4	6.000000

Tabla I. Topología del mecanismo

Se imponen las restricciones necesarias para conservar el triángulo en su posición, que pueden expresarse como

$$-1.00 < \text{sen}\ (34 - 35) < 0.00$$
$$0.00 < \cos\ (34 - 35) < 1.00$$
$$0.00 < \cos\ (43 - 45) < 1.00$$

A la vista de los resultados del análisis del mecanismo solución conocido se plantea su obtención desde otras longitudes, imponiéndole que cumpla los puntos de precisión incluidos en la Tabla II, que se corresponden con valores exactos del mecanismo analizado. Se recogen también en la Tabla III los resultados de la función objetivo obtenidos partiendo de distintas longitudes iniciales. Es obvio que éstas configuran el vector inicial de la búsqueda y que definen por lo tanto la región de atracción de mínimos locales en que se sitúa el proceso, es decir, detectamos varios mínimos locales y el global. En la Tabla III se resumen las longitudes de las que se ha partido así como los valores obtenidos para la función objetivo (en negrita los mínimos globales obtenidos).

Este barrido aleatorio de longitudes aporta una valiosa información sobre las posibles soluciones, indicando la precisión alcanzable en cada mínimo local. Este caso de no disponer de una orientación previa sobre el orden de magnitud de las longitudes de la barra se considera este proceso como un primer paso muy adecuado. Por otra parte, su costo es mínimo en lo que se refiere a la preparación de datos y el esfuerzo computacional no excesivamente elevado.

DEFINICIÓN DE LA SÍNTESIS		
PS	X	Y
1	13.265770	-10.019700
2	9.628700	-8.930700
3	7.757700	-8.838100
4	4.283400	-11.171100
5	6.413600	-12.612500
6	11.026300	-11.900400
7	14.978300	-10.341000

Tabla II. Puntos de la síntesis

LONGITUDES INICIALES Y FUNCIONES OBJETIVO OBTENIDAS						
CASO	BARRA 1	BARRA 2	BARRA 3	BARRA 4	BARRA 5	FUN. OBJETIVO
1	5.80	18.84	12.92	16.93	10.05	0.11125785D+00
2	3.00	15.00	12.00	12.00	7.00	0.56383776D+00
3	3.00	15.00	12.00	12.00	8.00	0.73077150D-01
4	3.00	15.00	12.00	12.00	9.00	0.79822798D+00
5	3.00	15.00	12.00	12.00	10.00	0.11125785D+00
6	4.00	15.00	15.00	15.00	5.00	0.72921761D-10
7	4.00	15.00	15.00	15.00	6.00	0.72921760D-10
8	4.00	15.00	15.00	15.00	7.00	0.29455572D+00
9	4.00	15.00	15.00	15.00	8.00	0.29455572D+00
10	4.00	15.00	15.00	15.00	9.00	0.69999987D+00
11	5.00	14.00	16.00	16.00	5.00	0.24823123D+00
12	5.00	14.00	16.00	16.00	6.00	0.24823123D+00
13	5.00	14.00	16.00	16.00	7.00	0.28355876D-04
14	5.00	14.00	16.00	16.00	8.00	0.72921764D-11
15	5.00	14.00	16.00	16.00	9.00	0.42955934D+00

Tabla III. Barrido aleatorio del mecanismo

Elegimos el caso 13 y obtenemos los resultados relativos a la síntesis de posición planteada, aumentando la precisión de la búsqueda. De entre todas las salidas

disponibles la Figura 8 muestra la evolución de la función objetivo, mientras que la Figura 9 reproduce a modo de ejemplo para el punto de síntesis 3, los siguientes gráficos:

- posición del mecanismo de partida desde la que se ha obtenido menor f.o. en síntesis local (línea más fina),
- posición del mecanismo resultante en síntesis local, inicial en síntesis global (línea intermedia),
- posición del mecanismo solución en síntesis global (línea más gruesa).

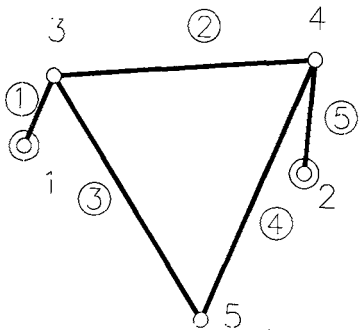


Figura 7. Mecanismo de cuatro barras + díada

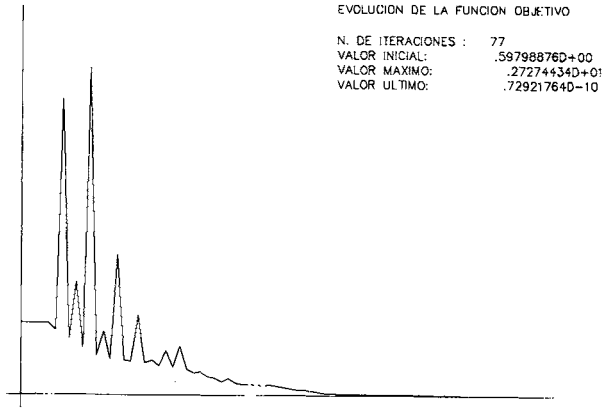


Figura 8. Evolución de la función objetivo

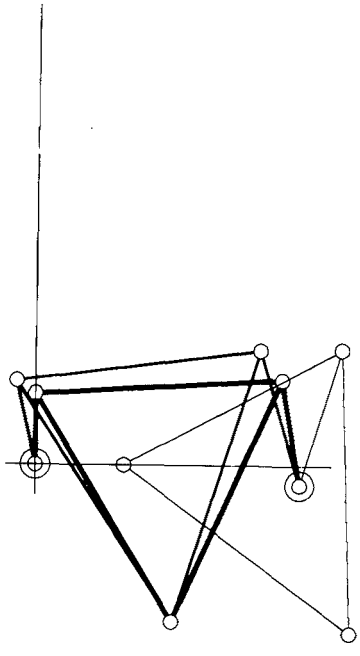


Figura 9. Evolución de las distintas posiciones al punto 3 en el proceso de síntesis

El resultado se corresponde de forma exacta con las longitudes solución conocidas.

En un artículo posterior[15] se incorporan a este ejemplo restricciones de velocidad y aceleración, añadiendo opciones diversas como dar movilidad a los puntos fijos.

Ejemplo 2. Mecanismo de línea recta

Se trata en este ejemplo de realizar una síntesis de posición en un mecanismo de solución conocida. Sea un mecanismo de línea recta del tipo indicado en la Figura 10 que ha de trazar una trayectoria vertical.

Como se observa es un mecanismo de Peaucillier, que según la bibliografía clásica[16] ha de cumplir

$$L_2 = L_3 \qquad L_4 = L_5 = L_6 = L_7 \tag{19}$$

La síntesis se define mediante los puntos de precisión en la Tabla IV.

DEFINICIÓN DE LA SÍNTESIS				
PS	X(3)	Y(3)	X(5)	Y(5)
1	3.865052	-3.171966	8.500000	-4.830377
2	4.409606	-2.356984	8.500000	-3.381574
3	4.903926	-0.975452	8.500000	-1.329634
4	4.975924	0.490086	8.500000	0.663212
5	4.784702	1.451423	8.500000	2.002536
6	4.157348	2.7778510	8.500000	4.095180

Tabla IV. Definición de los puntos de la síntesis

Se parte para ello de un mecanismo cuyas dimensiones son las indicadas en la Tabla V, llegándose finalmente a las longitudes indicadas en la misma tabla.

BARRA	LONGITUD INICIAL	LONGITUD FINAL
1	5.000000	5.000000
2	10.000000	12.865798
3	14.000000	12.044742
4	5.000000	5.525284
5	2.500000	3.174246
6	6.500000	5.525284
7	3.500000	3.174244

Tabla V. Solución del mecanismo

El alejamiento del comportamiento del mecanismo inicial de la sínesis pretendida se constata en la Figura 11.

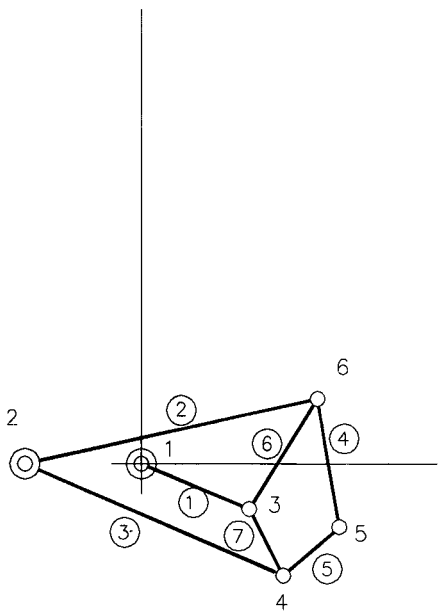


Figura 10. Mecanismo del Peaucillier

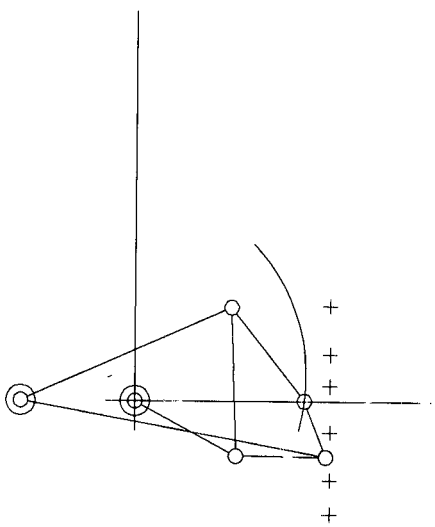


Figura 11. Trayectoria del mecanismo de partida y puntos de síntesis pretendidos

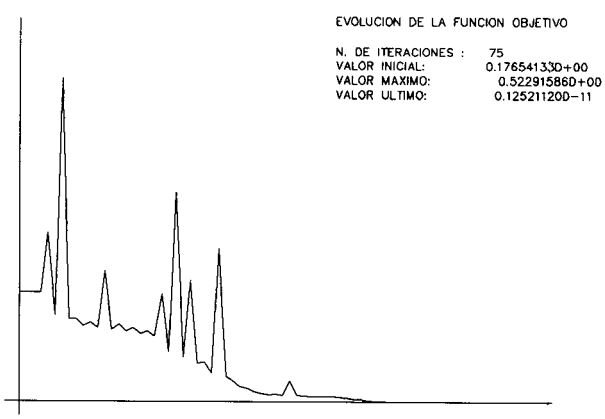


Figura 12. Evolución de la función objetivo

Se observa un hecho interesante y es que las condiciones contenidas en la bibliografía clásica no son del todo ciertas, siendo un caso particular de las condiciones generales, obtenidas en este trabajo, que se pueden enunciar así

$$L_4 = L_6 \qquad L_5 = L_7 \qquad L_2^2 - L_3^2 = L_4^2 - L_5^2 \qquad L_2 > L_3 \text{ y } L_4 > L_5 \tag{20}$$

Como muestra del proceso de cálculo se representa en la Figura 13 la posición de los distintos mecanismos en el punto 3 de la síntesis, mientras que en la Figura 14 se constata el perfecto cumplimiento de la síntesis para la solución obtenida.

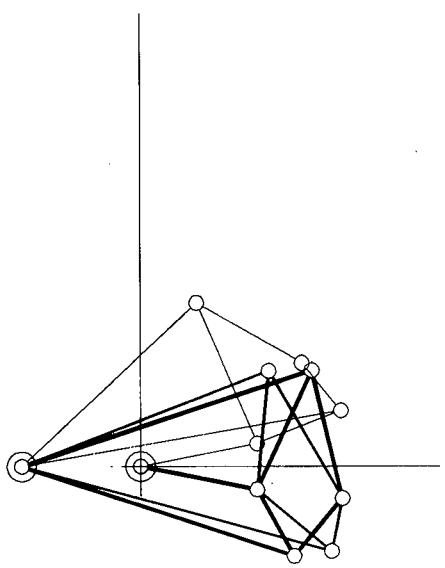


Figura 13. Evolución del proceso para el punto 3 de la síntesis en el Ejemplo 2

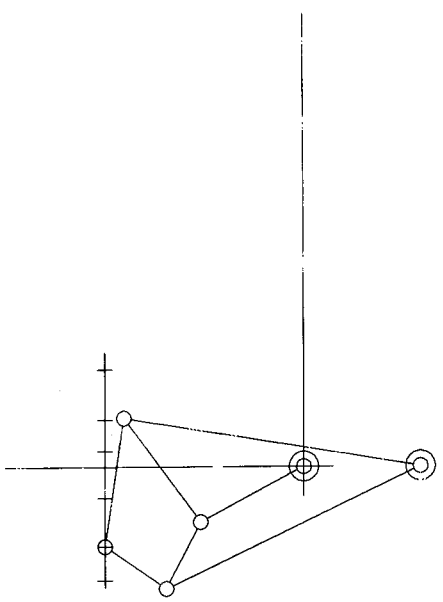


Figura 14. Trayectoria del mecanismo solución

Ejemplo 3. Mecanismo transportador de cajas

En el siguiente ejemplo se pretende conseguir un determinado proceso: situada una caja en un punto inicial, se trata de recogerla en él y entregarla en una zona dada. Se define de esta forma la síntesis de posición mediante regiones útiles.

El mecanismo elegido es él de la Figura 15 y la sínteis se define mediante los puntos recogidos en la Tabla VI. Las longitudes iniciales y finales son las indicadas en la Tabla VII de este ejemplo, mientras que la función objetivo obtenida es de 0.13991084D-16, lo que no es de extrañar dado que las restricciones impuestas aseguran la existencia de al menos un mecanismo que cumple la síntesis exacta, como puede observarse en la Figura 16 para el mecanismo solución.

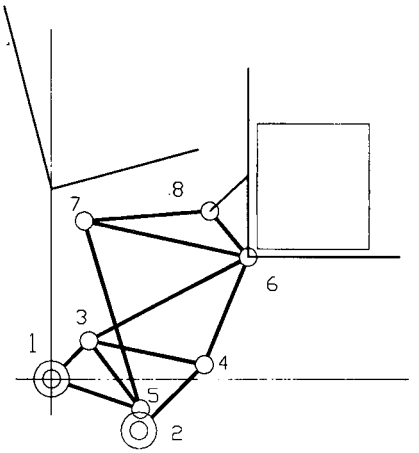


Figura 15. Mecanismo transportador de cajas

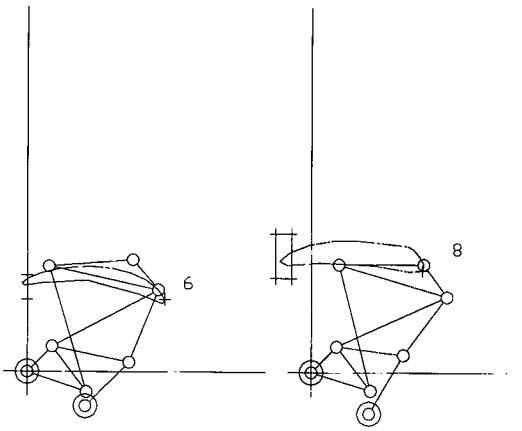


Figura 16. Trayectoria de los puntos 6 y 8

DEFINICIÓN DE LA SÍNTESIS DE POSICIÓN			
COORD.	BANDAS	POSICIÓN 1	POSICIÓN 2
x(3)	B. INFERIOR	8.31491600	-1.00000000
	B. SUPERIOR	8.31491600	1.00000000
y(3)	B. INFERIOR	3.44415100	-10.00000000
	B. SUPERIOR	3.44415100	-8.00000000
x(6)	B. INFERIOR	35.00000000	0.00000000
	B. SUPERIOR	35.00000000	0.00000000
y(6)	B. INFERIOR	18.00000000	18.00000000
	B. SUPERIOR	18.00000000	24.00000000
x(8)	B. INFERIOR	28.00000000	-9.00000000
	B. SUPERIOR	28.00000000	-5.00000000
y(8)	B. INFERIOR	25.14142800	23.14142800
	B. SUPERIOR	25.14142800	34.14142800

Tabla VI. Definición de los puntos de la síntesis

LONGITUDES		
BARRA	LONGITUD INICIAL	LONGITUD FINAL
1	9.000000	9.00000
2	16.000000	15.909841
3	14.000000	14.321545
4	36.000000	30.396816
5	19.000000	19.936299
6	22.000000	19.468617
7	18.000000	15.537028
8	33.000000	32.719895
9	28.000000	28.360886
10	22.000000	21.329476
11	10.000000	10.000000

Tabla VII. Solución de la síntesis

En artículos posteriores se impondrán a este mecanismo restricciones de velocidad en los puntos de recogida y de entrega.

Ejemplo 4. Mecanismo con trayectoria en escuadra

En el siguiente ejemplo se ha elegido un mecanismo de cuatro barras con prolongación recta lateral de acoplador y se pretende sintetizar un mecanismo que se aproxime a una trayectoria en escuadra. La definición de la trayectoria se representa en la Figura 17 y se define mediante los 8 puntos de precisión explicitados en la Tabla VIII.

DEFINICIÓN DE LA SÍNTESIS		
PS	X	Y
1	9.500000	-3.00000
2	9.500000	-2.50000
3	9.500000	-2.00000
4	9.500000	-1.50000
5	10.000000	-1.30000
6	11.000000	-1.30000
7	11.500000	-1.30000
8	12.000000	-1.30000

Tabla VIII. Definición de los puntos de la síntesis

A todos los puntos se les da el mismo peso en la síntesis. El mecanismo elegido se representa en la Figura 18.

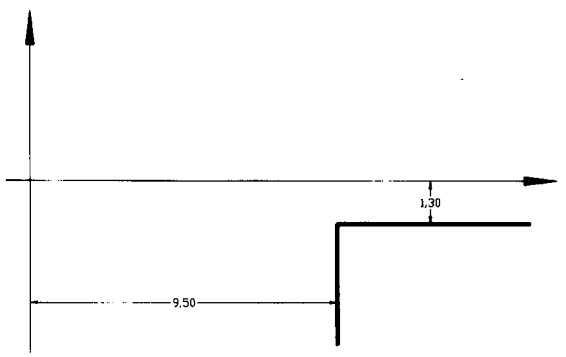


Figura 17. Definición de la trayectoria pretendida

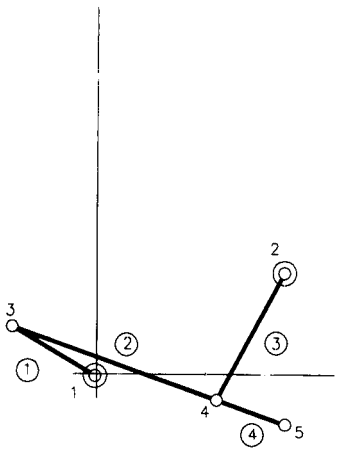


Figura 18. Ejemplo 4. Mecanismo de cuatro barras con prolongación recta del acoplador

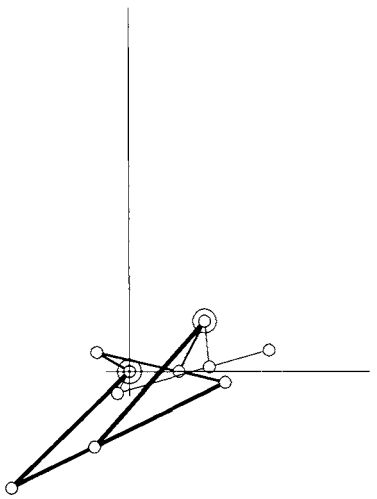
Con los parámetros anteriores se desarrolla el primer caso. El proceso de las longitudes en el cálculo se recoge en la Tabla IX.

LONGITUDES		
BARRA	LONGITUD INICIAL	LONGITUD FINAL
1	3.000000	19.862157
2	11.500000	11.096192
3	5.500000	20.000000
4	7.500000	17.534427

Tabla IX. Solución de la síntesis

La función objetivo alcanza un valor alto de 0.67309798D-02 a pesar de cumplirse los puntos de síntesis buscados. Ello es debido a que el mecanismo solución es dimensionalmente muy distinto del mecanismo de partida, tal como se observa en la Tabla IX. El hecho es que converge a un mecanismo que cumple la síntesis deseada desde una configuración distinta a la supuesta. Esta circunstancia, que se da en este ejemplo, certifica el interés de la representación gráfica mostrada en la Figura 19. La razón de que la barra converja a un valor tan exacto como 20.0000 se debe a que en la definición de diseño se impuso este valor a las longitudes como banda superior.

Finalmente, la evolución de la función objetivo se recoge en la Figura 20 detectándose con claridad el momento del proceso en que éste ha derivado a otras dimensiones del mecanismo.



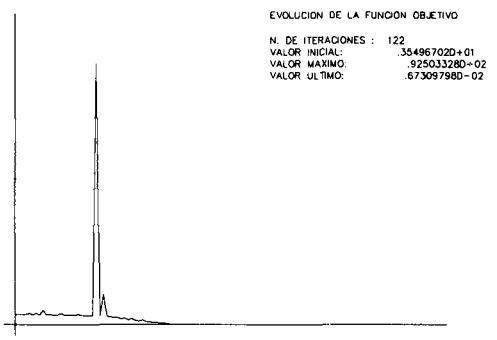


Figura 19. Evolución del proceso para el punto 7 de la síntesis

Figura 20. Evolución de la función objetivo

Si ahora se permite la movilidad de los puntos fijos, tal como se define en las bandas de la Tabla X

MOVILIDAD DE LOS PUNTOS FIJOS		
COORD.	BANDAS	
x(1)	B. INFERIOR	-1.00000000
	B. SUPERIOR	1.00000000
y(1)	B. INFERIOR	-0.10000000
	B. SUPERIOR	1.00000000
x(2)	B. INFERIOR	8.00000000
	B. SUPERIOR	10.00000000
y(2)	B. INFERIOR	5.00000000
	B. SUPERIOR	7.00000000

Tabla X. Definición de los puntos fijos

se obtiene la solución de la tabla XI. Teniéndose como coordenadas finales para los puntos fijos la tabla XII.

LONGITUDES		
BARRA	LONGITUD INICIAL	LONGITUD FINAL
1	3.000000	4.855260
2	11.500000	10.900182
3	5.500000	7.183782
4	7.500000	3.642284

Tabla XI. Solución de la síntesis

COORDENADAS DE LOS PUNTOS FIJOS		
NUDO	X	Y
1	-0.091395	-0.100000
2	9.470558	5.000000

Tabla XII. Solución de la síntesis (puntos fijos)

Se observa la mejor adecuación de este mecanismo a la trayectoria y la gran diferencia con la solución anterior, produciéndose una ligera reducción de la función objetivo que pasa a ser de 0.47667945D-02.

MOVILIDAD DE LOS PUNTOS FIJOS		
COORD	BANDAS	
x(1)	B. INFERIOR	-4.00000000
	B. SUPERIOR	4.00000000
y(1)	B. INFERIOR	-4.00000000
	B. SUPERIOR	4.00000000
x(2)	B. INFERIOR	3.00000000
	B. SUPERIOR	9.00000000
y(2)	B. INFERIOR	3.00000000
	B. SUPERIOR	9.00000000

Tabla XIII. Definición de los puntos fijos

Si finalmente se amplia la movilidad de los puntos fijos y se parte de unas longitudes iniciales distintas, según se muestra en las Tablas XIII y XIV, se obtiene de nuevo una mejor adecuación a la síntesis buscada una reducción de la función objetivo que ahora es de 0.15775766D-02 y una nueva posición de los puntos fijos que también se muestran a continuación.

LONGITUDES		
BARRA	LONGITUD INICIAL	LONGITUD FINAL
1	2.000000	4.274709
2	14.000000	9.505093
3	7.000000	5.697861
4	8.000000	4.275503

Tabla XIV. Solución de la síntesis

COORDENADAS DE LOS PUNTOS FIJOS		
NUDO	X	Y
1	-0.057981	-1.626555
2	8.1984130	3.000000

Tabla XV. Solución de la síntesis (puntos fijos)

Ejemplo 5. Síntesis en mecanismo con par superior engranaje-engranaje

En este ejemplo se selecciona un mecanismo que involucra todas las restricciones incorporadas hasta este momento al método de síntesis en estudio. Su esquema se representa en la Figura 21, apareciendo como nuevas la restricción relativa al par engranaje-engranaje y la que conserva igual la distancia entre centros y la suma de los radios de los engranajes.

Se pretende conseguir una síntesis de generación de función entre los puntos 3 y 9, definida por los valores de la Tabla XVI.

DEFINICIÓN DE LA SÍNTESIS				
PS	X(3)	Y(3)	X(9)	Y(9)
1	3.695520	1.530730	-28.50000	3.000000
2	1.530730	3.695520	-29.50000	4.900000
3	-1.530730	3.695520	-31.70000	8.100000
4	-4.000000	0.001000	-33.50000	11.200000
5	-2.828430	-2.828430	-33.00000	6.400000
6	0.001000	-4.000000	-31.10000	1.600000
7	3.695520	-1.530730	-29.00000	1.200000

Tabla XVI. Definición de los puntos de la síntesis

Las longitudes iniciales y finales del proceso se dan en la Tabla XVII, mientras que en la Figura 22 aparecen las posiciones de los dos mecanismos activos solución de la síntesis local en los puntos de síntesis 3 y 4 y en la Figura 23 se observa la evolución de la función objetivo que acaba siendo de 0.29658947D-01.

LONGITUDES		
BARRA	LONGITUD INICIAL	LONGITUD FINAL
1	4.000000	4.000000
2	6.000000	6.017078
3	2.000000	5.032170
4	8.000000	4.950751
5	22.000000	14.580902
6	24.000000	17.919763
7	14.000000	30.035494
8	20.000000	10.390396
9	15.000000	9.983679

Tabla XVII. Solución de la síntesis

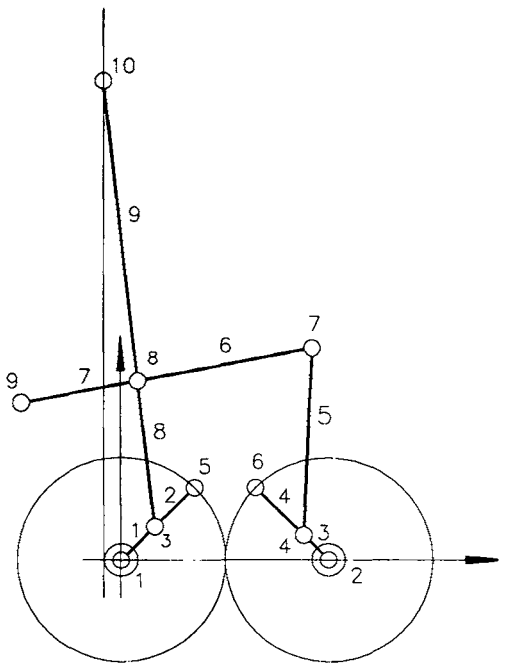


Figura 21. Mecanismo con par superior engranaje-engranaje

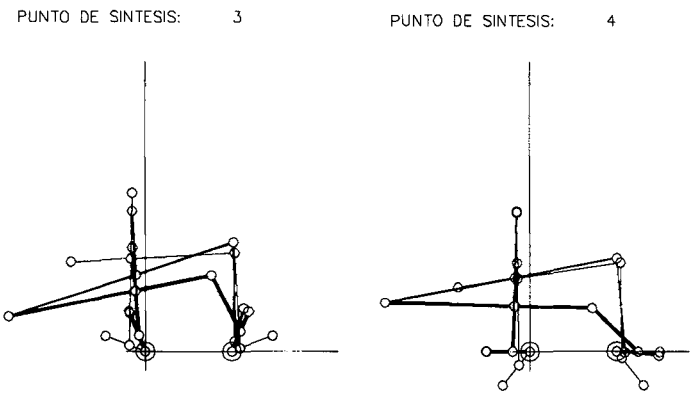


Figura 22. Evolución del proceso en los puntos de la síntesis 3 y 4

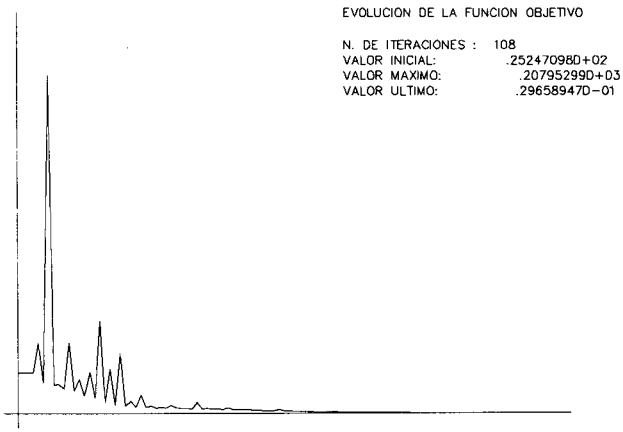


Figura 23. Evolución de la función objetivo

Si ahora permitimos una cierta región de síntesis para el nudo 9 definida mediante las bandas de la Tabla XVIII, se obtienen las siguientes longitudes finales (Tabla XIX)

DEFINICIÓN DE LA SÍNTESIS				
PS	X(9) INFERIOR	X(9) SUPERIOR	Y(9) INFERIOR	Y(9) SUPERIOR
1	-28.60000	-28.40000	2.900000	3.100000
2	-29.60000	-29.40000	4.800000	5.000000
3	-31.80000	-31.60000	8.000000	8.200000
4	-33.60000	-33.40000	11.100000	11.300000
5	-33.10000	-32.90000	6.300000	6.500000
6	-31.20000	-31.00000	1.500000	1.700000
7	-29.10000	-28.90000	1.100000	1.300000

Tabla XVIII. Definición de las bandas de variación de los puntos de la síntesis

LONGITUDES		
BARRA	LONGITUD INICIAL	LONGITUD FINAL
1	4.000000	4.000000
2	6.000000	5.985318
3	2.000000	4.980715
4	8.000000	5.033967
5	22.000000	14.686802
6	24.000000	17.738732
7	14.000000	30.051118
8	20.000000	10.462367
9	15.000000	10.189555

Tabla XIX. Solución de la síntesis

con una función objetivo final de valor 0.31601815-10, es decir, se ha conseguido un mecanismo que pasa por todos los puntos de precisión deseados.

CONCLUSIONES

En este artículo se ha expuesto un método de síntesis óptima que aporta como aspecto fundamental frente a otros previos la elección como variables de diseño de todas las coordenadas naturales del mecanismo en cada punto de síntesis más las longitudes de los eslabones del mecanismo (en general todas las dimensiones del mecanismo deseadas). Ello permite controlar de forma completa el mecanismo sin necesidad de incorporar aproximaciones de los gradientes de la función objetivo y restricciones, ya que éstas pueden tratarse de forma analítica y, por lo tanto, muy simple. El precio es el incremento del número de variables del problema y el costo computacional resultante. De cualquier forma, dada la evolución de los ordenadores, parece que merece la pena pagar ese precio por las contrapartidas de simplicidad, generalidad y robustez.

Efectivamente, el tratamiento simple analítico del problema permite utilizar como método de optimización el de una serie de problemas cuadráticos, que es uno de los más robustos conocidos, sin una complicación apreciable en la programación del problema y sin pérdida de generalidad ya que el usuario puede incorporar de forma inmediata restricciones adicionales con el sólo esfuerzo de obtener el gradiente de dicha restricción respecto de las variables del problema que suele ser muy simple.

Además el hecho de que el vector de diseño incluya todos los parámetros geométricos involucrados en el problema permite controlar el mecanismo completo, incluida su cinemática, siendo inmediato y natural, como se explica en artículos ulteriores la incorporación de restricciones en velocidad y aceleración o la extensión al espacio.

Finalmente, la incorporación de parámetros de ponderación para la "rigidez" de modificación de la longitud de cada barra y para cada punto de síntesis, así como el permitir una cierta movilidad de los puntos fijos o de los puntos de síntesis, permite controlar de forma muy amplia el problema del diseño real que en definitiva es el objetivo principal de este tipo de procesos.

REFERENCIAS

1. J.S. Arora, "*Introduction to Optimum Design*", McGraw Hill, Inc., (1989).
2. Vanderplaats, "*Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications*", McGraw Hill, (1984).
3. S. Hernández, "*Métodos de diseño óptimo de estructuras* ", C.I.C.C. y P. de Aragón, (1990).
4. D.G. Luenberger, "Linear and Nonlinear Programming", Stanford University, USA, (1973).
5. M. Ceccarelli, "Optimal Design and Location of Manipulators", *Proc. of the NATO-Advanced Study Inst. on Computer Aided Design of Rigid and Flexible Mechanical Systems*", Vol. II, pp. 299–310, (1993).

6. J.R. McGarva, "Rapid Research and Selection of Path Generation Mechanisms from a Library", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. **29**, 2, pp.223–235, (1994).
7. J. García de Jalón, M.A. Serna y R. Avilés, "Computer Method for Kinematic Analysis of Lower Pair Mechanisms - I: Velocity and Accelerations", *Mechanism and Machine Theory*, **16**, 5, pp. 543–556, (1981).
8. J. García de Jalón, M.A. Serna y R. Avilés, "Computer Method for Kinematic Analysis of Lower Pair Mechanisms - II: Position Problems", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. **16**, 5, pp. 557–566, (1981).
9. R. Avilés, M.B. Ajhuria y J. García de Jalón, "A Fairly General Method for Optimum Synthesis of Planar Mechanisms", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. **20**, 4, pp. 321–328, (1985).
10. S. Navalpotro, "Un método de síntesis óptima de mecanismos mediante elementos finitos", Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco, (1989).
11. S. Vallejo, "*Optimización de mecanismos planos con cualquier configuración y tipo de síntesis*", Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco, (1993).
12. "*The Numerical Algorithm Group Limited*", NAG Fortran Library, Oxford, (1992).
13. J.A. Alba, M. Doblaré y L. Gracia, "*Un método general para la síntesis de posición de mecanismos con pares inferiores y superiores III. Síntesis de mecanismos espaciales*", por publicar
14. O.C. Zienkiewicz, "*The Finite Element Method*", 4. Ed., McGraw Hill, Vol. I, (1989), Vol. II, (1991).
15. J.A. Alba, M. Doblaré y L. Gracia, "*Un método general para la síntesis de posición de mecanismos con pares inferiores y superiores II. Síntesis con restricciones cinemáticas*", por publicar
16. J.E. Shigley, "*Teoría de Máquinas y Mecanismos*", McGraw Hill, (1983).
17. J.A. Alba, "*Método de síntesis óptima de mecanismos planos y espaciales dotados de pares inferiores y superiores con restricciones de posición y cinemáticas*", Tesis Doctoral, Univesidad de Zaragoza, (1994).