Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 13,1, 15–31(1997)

ANÁLISIS NUMÉRICO DE DOS PROBLEMAS ESTACIONARIOS DE STEFAN A DOS FASES CON ENERGÍA INTERNA

MARÍA CRISTINA SANZIEL

Promar (Conicet – Universidad Nacional de Rosario)
Instituto de Matemática "Beppo Levi"
Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina
Tel: + 54-41-264006 Fax: + 54-41-264008
E-mail: sanziel@eva.fceia.unr.edu.ar

RESUMEN

Se estudia el problema de la distribución estacionaria de temperatura en un cuerpo o un recipiente con un fluido, sometido a la acción de una energía interna g. Se supone que el cuerpo es un dominio poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con una frontera suficientemente regular $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, siendo Γ_1 y Γ_2 porciones de la frontera de interior disjunto y medida $(n-1)$ dimensional positiva. Considerando una temperatura de cambio de fase de 0^{o}C para el material que ocupa el dominio Ω, se mantiene un flujo de calor q sobre Γ_2 y se analizan dos situaciones diferentes sobre la frontera restante:

1. Mantener la porción de frontera Γ_1 a temperatura $b > 0$.
2. Que el flujo sobre Γ_1 verifique una ley de tipo Fourier.

En [7] y [8] se realizó el análisis numérico del problema para el caso $g = 0$, en las situaciones 1 y 2 respectivamente. En el presente trabajo se generalizan esos resultados para el caso de una energía interna g no nula.

NUMERICAL ANALYSIS OF TWO STEADY–STATE TWO–PHASE STEFAN PROBLEMS WITH INTERNAL ENERGY

SUMMARY

We study the problem of the steady temperature distribution of a body or a container with a fluid, which is submited to an internal energy g. We assume the body to be a bounded polygonal domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, with a sufficiently regular boundary $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 and Γ_2 being disjoint portions of $\partial\Omega$ of positive $(n-1)$ dimensional measure. Assuming a phase-change temperature of 0^{o}C for the material occupying Ω we mantain a heat flux q on Γ_2 and we analize two different situations on the rest of the boundary:

1. Keep Γ_1 at the temperature $b > 0$.
2. The flux on Γ_1 verifies a Fourier's type law.

In [7] and [8] it was made the numerical analysis of the problem for the case $g = 0$, in both situations 1 and 2 respectively. In the presente work we generalize those results for the case of an internal energy g different from zero.

Recibido: Junio 1995

 ISSN 0213–1315

INTRODUCCIÓN

Los procesos con cambio de fase están presentes en numerosos y variados problemas de la ingeniería. Aparecen en la industria siderúrgica (colada continua del acero), frigorífica (congelación y descongelación de alimentos), metalúrgica (solidificación de aleaciones binarias, soldaduras de metales), plástica (solidificación de diversos productos), en tecnología nuclear (prevención de accidentes por fusión de material radiactivo), en Ingeniería Civil (solidificación de suelos húmedos), en aprovechamiento de energía solar, etc.

En el presente trabajo se estudiarán dos problemas estacionarios de conducción del calor y sus correspondientes análisis numéricos en un material Ω que ocupa un dominio poligonal acotado en $\mathbb{R}^n$, con frontera regular $\Gamma = \partial\Omega$. El material es sometido a una fuente de energía interna g y se supone una temperatura de cambio de fase 0^oC.

La frontera está compuesta de dos porciones de interiores disjuntos, Γ_1 y Γ_2, de medida $(n-1)$ dimensional positiva. En la porción de frontera Γ_2 se mantiene un flujo de calor q mientras que sobre Γ_1 se considerarán dos situaciones diferentes:

(P_a) se aplica una temperatura $b > 0$.
(P_b) el flujo de calor verifica una ley de tipo Fourier.

Interesa obtener condiciones suficientes (y/o necesarias) para los datos a fin de garantizar un cambio de fase.

Si se indica con θ la temperatura y se define la función u a través de la transformación de Duvaut[3,6]

$$u = k_2\theta^+ - k_1\theta^- \quad \text{en } \Omega \tag{1}$$

el problema (P_a) puede enunciarse formalmente del modo siguiente

$$-\Delta u = g \quad \text{en } \Omega \tag{2}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = q \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma_1} = B \tag{4}$$

donde $k_i > 0$ es la conductividad térmica de la fase i ($i = 1$ fase sólida, $i = 2$ fase líquida) y $B = k_2 b$.

Para el problema (P_b) la condición (4) se cambia por

$$-\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = \alpha(u - B) \tag{4'}$$

siendo α el coeficiente de transferencia de calor de la pared Γ_1.

Se recuerdan a continuación las formulaciones variacionales de los problemas anteriores. Sean

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \, \nabla v \, dx \quad , \quad L(v) = \int_\Omega gv \, dx - q \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma \; (= L_{qg}(v))$$

$$a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv \, d\gamma \quad , \quad L_\alpha(v) = L(v) + \alpha B \int_{\Gamma_1} v \, d\gamma$$

$$V = H^1(\Omega), \qquad V_0 = \{v \in V : v|_{\Gamma_1} = 0\}$$

$$K = \{v \in V : v|_{\Gamma_1} = B\} (= K_B)$$

entonces la única solución $u = u_{B_{qg}}$ de (2 - 3 - 4) se caracteriza por [5,6]

$$a(u,v) = L(v) \; , \; \forall v \in V_0, \; u \in K_B \tag{5}$$

mientras que la única solución $u_\alpha = u_{\alpha Bqg}$ de (2 - 3 - 4') se caracteriza por

$$a_\alpha(u_\alpha, v) = L_\alpha(v) \; , \; \forall v \in V, \; u \in V \tag{6}$$

La solución u también puede caracterizarse por el siguiente problema de mínimo

$$J(u) \leq J(v) \; \forall v \in K_B, \qquad u \in K_B \tag{7}$$

donde $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$.

En las secciones siguientes se recordarán los resultados obtenidos en [4] para el problema (P_a) y en [1] para el problema (P_b) y, siguiendo las ideas desarrolladas en [7,8] para el caso particular $g = 0$, se realizará el análisis numérico de los mismos en función de un parámetro h de elementos finitos.

EL PROBLEMA (P_a)

Por linealidad la única solución u_{Bqg} de (5) puede expresarse por

$$u_{B_{qg}} = B - qu_1 + u_g \quad \text{en } \Omega \tag{8}$$

donde u_1 y u_g están definidas respectivamente por

$$u_1 \in V_0 \; , \; a(u_1, v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma \; , \; \forall v \in V_0 \tag{9}$$

$$u_g \in V_0 \; , \; a(u_g, v) = \int_\Omega gv \, dx \; , \; \forall v \in V_0 \tag{10}$$

Observación 1

En el caso que g sea contante en Ω resulta

$$u_{B_{qg}} = B - q\, u_1 + g\, u_2 \quad \text{en } \Omega \tag{11}$$

donde

$$u_2 \in V_0 \,,\; a(u_2, v) = \int_\Omega v\, dx \,,\; \forall v \in V_0 \tag{12}$$

En [4] se obtuvieron condiciones suficientes para el problema continuo (5) a fin de tener un problema estacionario de Stefan a dos fases:

Teorema 2

i) $u_{B_{qg}}$ es de signo no constante en Ω (hay dos fases presentes) para todo q tal que $q > Q_0(B)$, donde

$$Q_0(B) = \frac{c_g}{c_1} + q_0(B) \tag{13}$$

$$c_g = a(u_g, u_1) = \int_\Omega g u_1\, dx = \int_{\Gamma_2} u_g\, d\gamma \tag{14}$$

$$c_1 = a(u_1, u_1) = \int_{\Gamma_2} u_1\, d\gamma > 0 \tag{15}$$

$$q_0(B) = \frac{B|\Gamma_2|}{c_1} > 0 \tag{16}$$

(u_1 y u_g fueron definidas en (9) y (10) respectivamente).

ii) $u_{B_{qg}}$ es de signo no-constante en Ω para toda g tal que $g < G_0(B)$, donde

$$G_0(B) = q\frac{c_{12}}{c_2} - g_0(B), \tag{17}$$

$$c_{12} = a(u_1, u_2) = \int_\Omega u_1\, dx = \int_{\Gamma_2} u_2\, d\gamma \tag{18}$$

$$c_2 = a(u_2, u_2) = \int_\Omega u_2\, dx > 0 \tag{19}$$

$$g_0(B) = \frac{B|\Omega|}{c_2} > 0 \tag{20}$$

(u_1 y u_2 fueron definidas en (9) y (12) respectivamente).

Observación 3

En caso en que g sea constante en Ω, $c_g = gc_{12}$, donde c_{12} fue definida en (18).

A fin de generalizar los resultados presentados en [7], donde se consideró el análisis numérico del problema (P_a) con energía interna $g = 0$, se realiza una triangulación regular τ_h, del dominio poligonal Ω con triángulos de Lagrange de tipo 1, constituida por elementos finitos afín equivalentes de clase C^0, siendo $h > 0$ un parámetro que tiende a cero. Se puede tomar h igual al lado de mayor longitud de los triángulos $T \in \tau_h$ y aproximar V_0 por[2]

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega})/v_h|_T \in P_1(T),\ \forall T \in \tau_h, v_h|_{\Gamma_1} = 0\} \tag{21}$$

donde P_1 es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 1. Si con τ_h se designa el correspondiente operador de interpolación lineal, se sabe que existe una constante $C_0 > 0$ (independiente del parámetro h) tal que

$$\| v - \pi_h v \|_V \leq C_o h^{r-1} \| v \|_{r,\Omega} \ , \ \forall v \in H^r(\Omega) \ , \quad \text{con } 1 < r \leq 2 \tag{22}$$

Se considera el siguiente problema variacional aproximado, correspondiente al problema variacional continuo (5)

$$a(u_h, v_h) = L(v_h),\ \forall l v_h \in V_h \ , \ u_h \in K_h = B + V_h \tag{23}$$

y se obtienen los siguientes resultados:

Lema 4

Se tiene

$$\lim_{h \to 0^+} \| u_h - u \|_V = 0 \tag{24}$$

donde u es la única solución de la ecuación variacional (5).

Demostración

Dado que $|\Gamma_1| > 0$, la forma bilineal a es coercitiva en V_0, es decir[6]

$$\exists \nu > 0/a(v,v) = \| v \|_{V_0}^2 \geq \nu \| v \|_V^2 \ , \ \forall v \in V_0 \tag{25}$$

y en consecuencia $\| \ . \ \|_{V_0}$ y $\| \ . \ \|_V$ son dos normas equivalentes en V_0. Se sigue un método similar al desarrollado en [2]. □

Corolario 5

Definiendo

$$\theta_h = \frac{1}{k_2}u_h^+ - \frac{1}{k_1}u_h^- \in V_h \ , \ \theta = \frac{1}{k_2}u^+ - \frac{1}{k_1}u^- \in V \tag{26}$$

se tiene

$$\lim_{h\to 0^+} \| \theta_h - \theta \|_H = 0 \tag{27}$$

donde $H = L^2(\Omega)$.

Demostración

La prueba similar a la realizada en [7] □

A continuación se enuncia una propiedad de monotonía de la solución del problema (23) en función de los datos $B(o\ b)$, q y g[4]:

Lema 6

Si $u_h = u_{hBqg}$ es la única solución del problema (23) para datos $B(= k_2 b)$, q y g entonces se tiene:

i) si $B_1 \leq B_2$ (o $b_1 \leq b_2$) sobre Γ_1, $q_2 \leq q_1$ sobre Γ_2, y $g_1 \leq g_2$ en Ω, entonces $u_{h1} = u_{hB_1q_1g_1} \leq u_{hB_2q_2g_2} = u_{h_2}$ en $\overline{\Omega}$.

ii) si alguna de las desigualdades para B_i, q_i o g_i es estricta, también lo será la desigualdad para u_{hi}.

Se considera para $B > 0$ fija, la única solución u_h de (23). Es fácil probar que

$$\int_\Omega g u_h^- dx + a(u_h^-, u_h^-) = q \int_{\Gamma_2} u_h^- d\gamma \tag{28}$$

y este resultado lleva inmediatamente al siguiente[4]:

Lema 7

La única solución u_h de (23) para B y q fijos y positivos y $g \in L^2(\Omega)$, no negativa verifica

$$u_h^- \neq 0 \text{ en } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad u_h^- 0 \text{ sobre } \Gamma_2 \tag{29}$$

Observación 8

En otras palabras, si $g \geq 0$ en Ω, se producirá un cambio de fase en Ω si y sólo si u_h asume valores negativos sobre Γ_2.

Como en el problema continuo, la única solución u_{hBqg} de (23) puede expresarse como

$$u_{hBqg} = B - qu_{h1} + u_{hg} \text{ en } \Omega \tag{30}$$

donde u_{h1} y u_{hg} están respectivamente definidas por

$$u_{h1} \in V_h \ , \ a(u_{h1}, v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma \ , \ \forall v \in V_h \tag{31}$$

$$u_{hg} \in V_h \ , \ a(u_{hg}, v) = \int_{\Omega} gv \, dx \ , \ \forall v \in V_h \tag{32}$$

Observación 9

En caso en que g sea constante en Ω, resulta

$$u_{hBqg} = B - qu_{h1} + gu_{h2} \text{ en } \Omega \tag{33}$$

donde

$$u_{h2} \in V_h \ , \ a(u_{h2}, v) = \int_{\Omega} v \, dx \ , \ \forall v \in V_h \tag{34}$$

Se definen ahora las funciones reales $F_{hBg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $F_{hBq} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$F_{hBg}(q) = J(u_{hBqg}) = \frac{1}{2} a(u_{hBqg}, u_{hBqg}) - \int_{\Omega} g \, u_{hBqg} \, dx + q \int_{\Gamma_2} u_{hBqg} \, d\gamma \tag{35}$$

Para B fija y positiva y $g \in L^2(\Omega)$, y

$$F_{hBg}(g) = J(u_{hBqg}) = \frac{1}{2} a(u_{hBqg}, u_{hBqg}) - g \int_{\Omega} u_{hBqg} \, dx + q \int_{\Gamma_2} u_{hBqg} \, d\gamma \tag{36}$$

para B y q fijos y positivos. Se deducen las siguientes propiedades[4]:

Teorema 10

Las funciones F_{hBg} y F_{hBq} verifican:

i) $F_{hBg} \in C^1(\mathbb{R})$ con

$$F'_{hBg}(q) = \int_{\Gamma_2} u_{hBqg}\, d\gamma \tag{37}$$

siendo F'_{hBg} una función estrictamente decreciente.

ii) $F_{hBq} \in C^1(\mathbb{R})$ con

$$F'_{hBq}(g) = -\int_{\Omega} u_{hBqg}\, dx \tag{38}$$

siendo F'_{hBq} una función estrictamente decreciente.

Corolario 11

i) Si $q_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $F'_{hB_0g_0}(q_0) < 0$ para un B_0 fijo, positivo y $g_0 \in L^2(\Omega)$ no negativa, entonces la solución u_{hBqg} es de signo constante en Ω (se presentan dos fases) para toda B tal que $0 < B \leq B_0$; $g \in L^2(\Omega)$, $0 \leq g \leq g_0$ y q tal que $q \geq q_0$.

ii) Si $g_1 \in \mathbb{R}$ es tal que $F'_{hB_1q_1}(g_1) > 0$ para B_1 y q_1 fijos y positivos, entonces u_{hBqg} es de signo no constante en Ω para toda B tal que $0 < B \leq B_1$, $q \geq q_1$ y $g \in L^2(\Omega)$ tal que $\sup_{x\in\Omega} g(x) \leq g_1$.

Demostración

Los resultados se derivan del teorema anterior y de los lemas 6 y 7 (este último sólo en el caso i). □

Como se hizo en [4] se define una **función flujo crítico discreto**

$$q_{hc} : \mathbb{R}^+ x L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},\ (B, g) \rightarrow q_{hc}(B, g) \tag{39}$$

tal que

* para cada $B > 0$ y $q \leq q_{hc}(B, g)$, $u_{hBqg} \geq 0$ en Ω (no hay cambio de fase),
* para cada $B > 0$ y $q > q_{hc}(B, g)$, u_{hBqg} es una función de signo no constante en Ω (existen dos fases).

Teorema 12

q_{hc} es una función no decreciente, es decir para toda $0 < B_1 \leq B_2$ y para toda g_1, $g_2 \in L^2(\Omega)$, $g_1 \leq g_2$ resulta

$$q_{hc}(B_1, g_1) \leq q_{hc}(B_2, g_2) \tag{40}$$

Demostración

Por el Lema (6), $0 \leq u_{hB_1 q_c(B_1,g_1) g_1} \leq u_{hB_2 q_c(B_1,g_1) g_2}$ en $\overline{\Omega}$ y en consecuencia se tiene la tesis. □

Teorema 13

Sea F_{hBg} definida en (35), entonces

i) $F'_{hBg}(q) < 0 \;\Leftrightarrow\; q > Q_{h0}(B)$ donde

$$Q_{h0}(B) \;=\; q_{h0}(B) \;+\; \frac{c_{hg}}{c_{h1}} \tag{41}$$

$$c_{h1} \;=\; a(u_{h1}, u_{h1}) \;=\; \int_{\Gamma_2} u_{h1}\, d\gamma \;>\; 0 \tag{42}$$

$$c_{hg} \;=\; a(u_{hg}, u_{h1}) \;=\; \int_{\Omega} g u_{h1}\, dx \;=\; \int_{\Gamma_2} u_{hg}\, d\gamma \tag{43}$$

$$q_{h0}(B) \;=\; \frac{B|\Gamma_2|}{c_{h1}} \;>\; 0 \tag{44}$$

(u_{h1} y u_{hg} fueron definidas en (31) y (32) respectivamente).

ii) Si $q > Q_{h0}(B)$ entonces u_{hBqg} es de signo no constante en Ω, $\forall g \in L^2(\Omega)$, $g \geq 0$, $B \in \mathbb{R}^+$.

Demostración

i) Usando (30) - (32) en (35) se obtiene

$$F_{hBg}(q) \;=\; -\frac{1}{2} a(u_{hg}, u_{hg}) \;+\; q a(u_{hg}, u_{h1}) \;-\; \frac{q^2}{2} a(u_{h1}, u_{h1}) \;+\; B[q|\Gamma_2| \;-\; \int_{\Omega} g\, dx]$$

En consecuencia

$$F'_{hBg}(q) \;=\; a(u_{hg}, u_{h1}) \;+\; B|\Gamma_2| \;-\; q a(u_{h1}, u_{h1}) \;=\; c_{hg} \;+\; B|\Gamma_2| \;-\; q c_{h1} \tag{45}$$

y por lo tanto

$$F'_{hBg}(q) \;<\; 0 \;\Leftrightarrow q \;>\; \frac{B|\Gamma_2|}{c_{h1}} \;+\; \frac{c_{hg}}{c_{h1}} \;=\; q_{h0}(B) \;+\; \frac{c_{hg}}{c_{h1}}$$

ii) Es consecuencia de i) y el Lema (7) □

Observación 14

En el caso en que g sea constante, $c_{hg} = gc_{h12}$ con

$$c_{h12} = a(u_{h1}, u_{h2}) = \int_\Omega u_{h1}\, dx = \int_{\Gamma_2} u_{h2}\, d\gamma > 0, (u_{h2} \text{ definida por (34) }) \tag{46}$$

y

$$q_{h0}(B) + \frac{c_{h12}}{c_{h1}} g > q_{hc}(B, g) \ , \ \forall g \geq 0$$

Observación 15

Para el caso $g = 0$ estudiado en [7] se obtuvo que si $q > q_{h0}(B)$ entonces u_h es de signo no constante en Ω.

De manera similar, se considerará a continuación, para B y q fijos, el caso g constante en Ω. Resulta

$$F_{hBq}(g) = -\frac{g^2}{2} a(u_{h2}, u_{h2}) + qg[a(u_{h2}, u_{h1}) + B|\Omega|] + Bq|\Gamma_2| - \frac{1}{2} q^2 \int_{\Gamma_2} u_{h1}\, d\gamma$$

$$F'_{hBq}(g) = -a(u_{h2}, u_{h2})g + qa(u_{h2}, u_{h1}) - B|\Omega| \tag{47}$$

donde u_{h1} y u_{h2} fueron definidas en (31) y (34) respectivamente. Se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 16

Sea F_{hBq} definida en (36), entonces:

i) $F'_{hBq}(g) > 0 \Leftrightarrow g < G_{h0}(B)$ donde

$$G_{h0}(B) = q\frac{c_{h12}}{c_{h2}} - g_{h0}(B) \tag{48}$$

$$c_{h2} = a(u_{h2}, u_{h2}) = \int_\Omega u_{h2}\, dx > 0 \tag{49}$$

$$g_{h0}(B) = \frac{B|\Omega|}{c_{h2}} > 0 \tag{50}$$

ii) Si $g < G_{h0}(B)$ entonces u_{hBqg} es de signo constante en Ω.

Observación 17

Es interesante notar que en el teorema anterior no se requiere que ni q ni g sean positivos o no negativos como ocurría en los teoremas previos.

Se establecen a continuación algunas relaciones entre los problemas (5) y (23) en función del parámetro h.

Teorema 18

Las funciones u_1, u_2, u_{h1} y u_{h2} definidas anteriormente, verifican:

i) $a(u_i - u_{ih}, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad i = 1,2$

ii) $\| u_i - u_{ih} \|_V \leq \frac{1}{\nu} \inf_{v_h \in V_h} \| u_i - v_h \|_V \quad i = 1,2$

iii) $\| u_i - u_{ih} \|_V \leq \frac{1}{\nu} C_0 \| u_i \|_{r\Omega}\, h^{r-1} \quad i = 1,2$

Demostración

i) Sigue de las definiciones de las funciones u_i y u_{ih}.

ii) Es consecuencia de la coercividad de la forma bilineal a y de i).

iii) Es consecuencia de ii) y (22). □

Teorema 19

Las constantes c_1, c_2, c_{12}, c_{h1}, c_{h2}, c_{h12}, $q_0(B)$, $q_{h0}(B)$, $g_0(B)$ y $g_{h0}(B)$ definidas anteriormente verifican las desigualdades siguientes:

i) $a(u_1 - u_{h1},\, u_1 - u_{h1}) = c_1 - c_{h1} \geq 0,$

ii) $a(u_2 - u_{h2},\, u_2 - u_{h2}) = c_2 - c_{h2} \geq 0,$

iii) $a(u_1 - u_{h1},\, u_2 - u_{h2}) = c_{12} - c_{h12},$

iv) $q_{h0}(B) \geq q_0(B),$

v) $g_{h0}(B) \geq g_0(B).$

Demostración

Es consecuencia de la definición de las constantes □

Teorema 20

a) Las constantes c_1, c_2, c_{12}, c_{h1}, c_{h2} y c_{h12} verifican las estimaciones siguienes:

i) $0 \leq c_1 - c_{h1} \leq E_1 h^{2(r-1)}$ donde $E_1 = \frac{C_0^2 \|u_1\|_{r\Omega}^2}{\nu^2}$ (51)

ii) $0 \leq c_2 - c_{h2} \leq E_2 h^{2(r-1)}$ donde $E_2 = \frac{C_0^2 \|u_2\|_{r\Omega}^2}{\nu^2}$ (52)

iii) $0 \leq |c_{12} - c_{h12}| \leq E_{12} h^{2(r-1)}$ donde $E_{12} = \frac{C_0^2 \|u_1\|_{r\Omega} \|u_2\|_{r\Omega}}{\nu^2}$ (53)

Demostración

Es consecuencia de los teoremas 18 y 19. □

Teorema 21

Sean $0 < \epsilon < 1$, $h > 0$, $B > 0$, g constante y $Q_0(B)$, $Q_{h0}(B)$, $G_0(B)$ y $G_{h0}(B)$ las constantes anteriormente definidas. Entonces

i)
$$0 \leq |Q_0 - Q_{h0}| \leq \frac{F_1}{c_1(c_1 - E_1 h^{2(r-1)})} h^{2(r-1)} \quad \text{si}$$
$$0 < h < h_{1r}(\epsilon) = \left(\frac{c_1 - \epsilon}{E_1}\right)^{\frac{1}{2(r-1)}} \tag{54}$$

donde $F_1 = (c_{12}|g| + B|\Gamma_2|)E_1 + c_1 E_{12}$

ii)
$$0 \leq |G_0 - G_{h0}| \leq \frac{F_2}{c_2(c_2 - E_2 h^{2(r-1)})} h^{2(r-1)} \quad \text{si}$$
$$0 < h < h_{2r}(\epsilon) = \left(\frac{c_2 - \epsilon}{E_2}\right)^{\frac{1}{2(r-1)}} \tag{55}$$

donde $F_2 = (c_{12} q + B|\Omega|)E_2 + c_2 E_{12}$.

Demostración

i) a partir de (13), (16), (41), (44), (18), (51) y (53) se deduce i).

ii) a partir de (17), (19), (48), (50), (52) y (53) se deduce ii). □

Corolario 22

i) $\lim_{h \to 0} Q_{h0}(B) = Q_0(B)$

ii) $\lim_{h \to 0} G_{h0}(B) = G_0(B)$

EL PROBLEMA (P_b)

El problema (6) fue estudiado en [6]. En [1] se obtuvieron condiciones suficientes para garantizar un cambio de fase:

Teorema 23

Sean c_{12} y c_2 las constantes definidas en (18) y (19) respectivamente. Si

$$g \leq 0, \quad q \geq 0, \quad B \geq 0 \quad \text{son constantes} \tag{56}$$

$$L_\alpha(1) > 0 \tag{57}$$

$$g < G_0(B, q) = \frac{-B|\Omega| + q c_{12}}{c_2} \tag{58}$$

entonces u_α cambia de signo en Ω.

Observación 24

$L_\alpha(1) = g|\Omega| - q|\Gamma_2| + \alpha B|\Gamma_1|$ y en consecuencia la condición (57) es equivalente a

$$g \;>\; g_m \qquad \text{con } g_m = \frac{q|\Gamma_2| - \alpha B|\Gamma_1|}{|\Omega|} \tag{59}$$

Observación 25

Las condiciones (56), (57) y (58) determinan un conjunto convexo

$$S^{(3)} \;=\; \{(g,q,B)/q \;\geq\; 0, B \;>\; 0, g \;\leq\; 0 \text{ y } g_m(\alpha,q,B) \;\leq\; g \;\leq\; G_0(q,B)\}$$

que será no vacío para

$$\alpha \;\geq\; \max(\alpha^*, \tilde{\alpha}) \tag{60}$$

donde $\alpha^* = \frac{q|\Gamma_2|}{B|\Gamma_1|}$ y $\tilde{\alpha} = \alpha^* + \frac{|\Omega|^2}{c_2|\Gamma_1|} - \frac{qc_{12}|\Omega|}{Bc_2|\Gamma_1|}$.

Para realizar el análisis numérico del problema (P_b) se considera, como se hizo para el problema (P_a), una triangulación regular τ_h del dominio poligonal Ω y se aproxima V_0 por [2]

$$W_h \;=\; \{v_h \;\in\; C^0(\overline{\Omega})/v_h|_T \;\in\; P_1(T),\; \forall T \;\in\; \tau_h\}$$

entonces el problema variacional aproximado correspondiente al problema continuo (6) es

$$a_\alpha(u_{h\alpha},\, v_h) \;=\; L_\alpha(v_h)\;,\; \forall v_h \;\in\; W_h,\; u_{h\alpha} \;\in\; W_h \tag{61}$$

Lema 26

Si $g \in L^2(\Omega)$, $q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ y $B \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ entonces existen soluciones únicas de los problemas (6) y (61), las que verifican

$$\lim_{h\to 0^+} \|\, u_{h\alpha} \;-\; u_\alpha \,\|_V \;=\; 0 \tag{62}$$

Demostración

Es similar a la dada en [8]. □

RESUMEN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

A continuación se exhiben en forma de tabla las desigualdades que deben verificarse para que se produzca un cambio de fase para los problemas continuo y discreto:

PROBLEMA CONTINUO[1,4]	**PROBLEMA DISCRETO**
Problema P_a	
$q > \frac{c_g}{c_1} + \frac{B\|\Gamma_2\|}{c_1}$	$q > \frac{c_{hg}}{c_{h1}} + \frac{B\|\Gamma_2\|}{c_{h1}}$
$g < q\frac{c_{12}}{c_2} - \frac{B\|\Omega\|}{c_2}$	$g < q\frac{c_{h12}}{c_{h2}} - \frac{B\|\Omega\|}{c_{h2}}$
Problema P_b	
$\begin{pmatrix} \frac{q\|\Gamma_2\|-\alpha B\|\Gamma_1\|}{\|\Omega\|} \leq g \leq q\frac{c_{12}}{c_2} - \frac{B\|\Omega\|}{c_2} \\ \alpha \geq \max(\frac{q\|\Gamma_2\|}{B\|\Gamma_1\|}, \frac{q\|\Gamma_2\|}{B\|\Gamma_1\|} + \frac{\|\Omega\|^2}{c_2\|\Gamma_1\|} - \frac{qc_{12}\|\Omega\|}{Bc_2\|\Gamma_1\|}) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{q\|\Gamma_2-\alpha B\|\Gamma_1\|}{\|\Omega\|} \leq g \leq q\frac{c_{h12}}{c_{h2}} - \frac{B\|\Omega\|}{c_{h2}} \\ \alpha \geq \max(\frac{q\|\Gamma_2\|}{B\|\Gamma_1\|}, \frac{q\|\Gamma_2\|}{B\|\Gamma_1\|} + \frac{\|\Omega\|^2}{c_{h2}\|\Gamma_1\|} - \frac{qc_{h12}\|\Omega\|}{Bc_{h2}\|\Gamma_1\|}) \end{pmatrix}$

CONCLUSIÓN

Se realizó el análisis numérico de dos problemas estacionarios de conducción del calor en un material Ω que ocupa un dominio poligonal acotado en $\mathbb{R}^n$, con frontera regular $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, sometido a una fuente de energía interna g.

Se supuso aplicado un flujo de calor q en la porción de frontera Γ_2 y sobre Γ_1 dos situaciones diferentes:

(P_a) aplicada una temperatura $b > 0$,

(P_b) que el flujo de calor verifique una ley de tipo Fourier.

Se obtuvieron condiciones suficientes sobre los datos del problema que aseguran un cambio de fase. Esas condiciones se traducen en desigualdades en las que interviene el parámetro de discretización h (de elementos finitos). Cuando dicho parámetro converge a cero, se reencuentran las desigualdades obtenidas para el caso continuo.

AGRADECIMIENTO

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto N° 221 "Aplicaciones de Problemas de Frontera Libre" de CONICET, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

1. L.R. Berrone y G.G. Garguichevich,"On a Steady Stefan Problem for the Poisson Equation with Flux an Fourier's Type Boundary Conditions", *Math. Notae*, Vol. **36**, pp. 49–61, (1992).
2. P.G. Ciarlet,"The Finite Element Method for Elliptic Problems", North Holland, Amsterdam, (1978).
3. G. Duvaut, "Problèmes à frontière libre en thèorie des milleux continus", *Rapport de Recherche*, No. **185**, LABORIA - IRIA, Rocquencourt, (1976).
4. G.G. Garguichevich y D.A. Tarzia, "The Steady-State Two-phase Stefan Problem with an Internal Energy and Some Related Problems", Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, Vol. **XXXIX**, pp. 615–634, (1991).
5. D. Kinderlehrer y G. Stampacchia, "An Introduction to Variational Inequalities and their Applications", Academic Press, New York, (1980).
6. D.A. Tarzia, "Sur le problème de Stefan à deux phases", *C.R. Acad. Sc. Paris*, Vol. **288A**, pp. 941–944, 1979/80, ver también Math. Notae, Vol. **27**, pp. 145–156, (1979/80), Math .Notae, Vol. **27**, pp. 157–173, (1979/1980).
7. D.A. Tarzia, "Numerical Analysis for the Heat Flux in a Mixed Elliptic Problem to Obtain a Discret Steady - State Two - Phase Stefan Problem", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **33**, No. 4, pp. 1257–1265, (1996).
8. D.A. Tarzia, "Numerical Analysis of a Mixed Elliptic Problem with Flux and Convective Boundary Conditions to Obtain a Discrete Solution of Non Constant Sign", *Rapport de Recherche INRIA*, No. **2455**, Rocquencourt, (1995).