

# OBTENCIÓN DE LAS SOLUCIONES PERIÓDICAS DE UN OSCILADOR NO LINEAL MEDIANTE UN MÉTODO RÁPIDO DE GALERKIN

JUAN PEÑA MIRALLES\*  
PEDRO JOSÉ JIMÉNEZ OLIVO\*  
GUMERSINDO VERDÚ MARTÍN\*\*

y

JOSÉ LUIS MUÑOZ-COBO GONZÁLEZ\*\*

\* *Departamento de Matemática Aplicada*

\*\* *Departamento de Ingeniería Química y Nuclear  
Universidad Politécnica de Valencia, Apartado 22012  
Camino de Vera, s/n, 46022 Valencia  
Tel.: + 34-6-387 7635 Fax: + 34-6-387 7639  
E-mail: jpnnya@mat.upv.es*

## RESUMEN

Este artículo está enfocado a la determinación de las soluciones periódicas de los osciladores no lineales así como al análisis cualitativo de su estabilidad. Estos osciladores están modelizados por la ecuación diferencial

$$\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) + \sum_{j=1}^3 a_j x^j = g(t)$$

siendo  $g(t)$  una fuerza  $T$ -periódica.

En este trabajo desarrollamos un algoritmo basado en el método de Galerkin que utiliza la transformada rápida de Fourier (FFT) para calcular las soluciones periódicas de la ecuación anterior. Además, incluimos un algoritmo combinado en un apéndice, con convergencia rápida, para resolver las ecuaciones algebraicas no lineales obtenidas por dicho método.

Finalmente, validamos esta metodología aplicando el algoritmo para obtener las soluciones periódicas de un oscilador de Duffing con comportamiento caótico.

## A FAST GALERKIN METHOD TO OBTAIN THE PERIODIC OSCILLATION OF A NON-LINEAR OSCILATOR

### SUMMARY

This paper is focused to the determination of the harmonic solutions of the non linear oscillators modelled by the following differential equation

$$\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) + \sum_{j=1}^3 a_j x^j = g(t)$$

being  $g(t)$  a  $T$ -periodic driving force.

Recibido: Febrero 1994

In this work we develop an algorithm based on the Galerkin method, using the Fast Fourier Transform (FFT) to calculate the harmonic solutions of previous equation. Furthermore, we include a combined algorithm with fast convergence to solve the non linear algebraic equations obtained in the Galerkin Fast Algorithm.

Finally, we validate this methodology applying the algorithm to obtain the harmonic solutions of a Duffing oscillator with a chaotic behavior.

## INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que los sistemas dinámicos deterministas no lineales han desempeñado un papel fundamental en el estudio de los fenómenos naturales. No obstante, ha sido en las últimas décadas cuando su investigación emerge con mayor intensidad debido, básicamente, al gran aumento habido en la capacidad de computación.

Así se ha demostrado que muchos sistemas físicos, sin estar sometidos a excitaciones aleatorias, pueden manifestar un comportamiento desordenado e imprevisible, denominado caótico. Recientemente, las investigaciones en este campo también se han extendido al estudio de los reactores nucleares para tratar de explicar el funcionamiento anómalo de sus componentes estructurales internos. Como ya se sabe, las vibraciones de estos componentes, tales como los elementos combustibles y las barras de control, responden a modelos descritos por osciladores no lineales sometidos a fuerzas periódicas deterministas y a fuerzas aleatorias.

El trabajo que presentamos se enmarca en este contexto; en concreto, nos vamos a centrar en el estudio de una clase de osciladores no lineales perturbados periódicamente que tienen como caso particular a los osciladores de Duffing<sup>1,2,3</sup> y cuyo modelo matemático viene dado por la ecuación diferencial ordinaria

$$\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) + f[x(t)] = g(t) \quad (1)$$

siendo  $g(t)$  una fuerza  $T$ -periódica y  $f[x(t)] = \sum_{j=1}^3 a_j x^j$  la característica no lineal del oscilador.

Una vez que el sistema dinámico oscilatorio se ha formulado mediante una ecuación diferencial, un objetivo de su estudio consiste en realizar el llamado análisis cuantitativo, es decir, la determinación de soluciones u órbitas periódicas. En este punto surge una primera dificultad, ya que en general no es posible hallar las expresiones exactas correspondientes a dichas soluciones particulares. De ahí la necesidad de desarrollar métodos analíticos y numéricos aproximados. Otro objetivo es la realización de un análisis cualitativo de aspectos relacionados con la estabilidad de dichas soluciones.

En consecuencia, el presente trabajo está enfocado al desarrollo de métodos analíticos y numéricos aproximados para efectuar un análisis de las soluciones periódicas aproximadas de sistemas dinámicos no lineales cuyo interés viene motivado principalmente por el hecho de poder determinar soluciones periódicas más complejas que las consideradas hasta ahora y al mismo tiempo reducir el trabajo computacional. Aunque en la actualidad hay una gran variedad de métodos numéricos para la obtención

de soluciones aproximadas de sistemas dinámicos no lineales, nosotros desarrollamos un algoritmo basado en el de Galerkin<sup>4,5,6,7</sup>.

La idea básica de este método consiste en expresar la solución buscada mediante un desarrollo en serie cuyos términos son unas funciones características que satisfacen las condiciones impuestas al problema. A partir de la ecuación diferencial del sistema dinámico se obtienen las ecuaciones algebraicas no lineales que deben satisfacer los coeficientes de la serie. La resolución de estos sistemas requiere la utilización de un algoritmo apropiado, o sea, que presente la forma más conveniente para su computación y que produzca una convergencia rápida.

Por otro lado, para obtener información sobre el comportamiento del sistema es necesario realizar un análisis cualitativo de las soluciones periódicas. Esto puede hacerse bajo dos aspectos: local y global.

El análisis local estudia las condiciones de estabilidad y los detalles de las bifurcaciones como posibles rutas a los movimientos caóticos y a los atractores extraños<sup>8,9</sup>. Además existe una conexión estrecha entre las teorías locales y la teoría clásica de bifurcaciones de las soluciones de equilibrio, tal y como demuestran Iooss y Joseph<sup>10</sup> o Chow y Hale<sup>11</sup>.

El otro aspecto consiste en estudiar la estructura de los atractores extraños, lo cual esencialmente es una cuestión de la que se encarga el análisis global<sup>12,113,14</sup>.

Con el fin de realizar un análisis cualitativo de los osciladores objeto de nuestro estudio, vamos a deducir condiciones que nos permitan determinar si una solución periódica se hace inestable. Dichas condiciones las obtendremos a partir de la teoría clásica de Floquet y su aplicación a ecuaciones variacionales del tipo Hill<sup>1</sup>.

Como caso de aplicación del algoritmo desarrollado nos hemos fijado en el caso particular de los osciladores del tipo Duffing, que presentan ciertos comportamientos que no son posibles en el caso general, como es por ejemplo la ruptura de la simetría. Este es un problema que no está suficientemente estudiado y sobre el cual existen interpretaciones confusas, como las dadas por Miles<sup>2</sup>.

Es nuestro intento esclarecer esta cuestión. Utilizando el método de Galerkin desarrollado, estudiaremos las condiciones para que dicha ruptura ocurra y su posible contribución al comportamiento caótico del oscilador.

## UN MÉTODO RÁPIDO DE GALERKIN

El método de Galerkin es un método aproximado que a menudo se aplica para resolver las ecuaciones diferenciales e integrales numéricamente.

La idea básica consiste en buscar una solución a estas ecuaciones en términos de una serie de funciones características que satisfagan las condiciones de contorno que les hemos impuesto. Este procedimiento da lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas que tiene que satisfacer los coeficientes de la serie.

Tal como ha puntualizado Newland<sup>15</sup> tanto el método de Ritz como la primera aproximación de Krylov-Bogoliubov son casos especiales del método de Galerkin. También, tal como Leipholz<sup>16,17</sup> ha demostrado rigurosamente, el método del balance armónico (equivalente a la primera aproximación de Krylov-Bogoliubov) es simplemente un caso especial del método de Galerkin.

El algoritmo que vamos a desarrollar se entronca dentro de la familia de los métodos de balance armónico y tiene dos objetivos principales: uno - reducir el trabajo computacional que conlleva el método de Galerkin y otro - realizar las modificaciones necesarias para que se pueda determinar cualquier tipo de solución periódica.

Para resolver la ecuación (1), elegimos como funciones características

$$\left\{ 1, \operatorname{sen} \frac{n\omega t}{p}, \cos \frac{n\omega t}{p} \right\}, \quad p \geq 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

donde  $\omega$  es la frecuencia asociada a la fuerza  $T$ -periódica. De esta forma elegimos como aproximación de orden  $m$ , para una solución periódica de dicha ecuación, la siguiente expresión

$$x_m(t) = s_1 + \sum_{n=1}^m \left( s_{2n} \operatorname{sen} \frac{n\omega t}{p} + s_{2n+1} \cos \frac{n\omega t}{p} \right) \quad (2)$$

donde  $p$  indica el orden del subarmónico por el que se comienza la aproximación y el vector dado por  $\vec{s} = (s_1, \dots, s_{2m}, s_{2m+1})$ , representa el conjunto de coeficientes a determinar.

Este problema, aunque de forma más sencilla, fue investigado por Urabe<sup>4,5</sup>, siendo su resultado principal que si la aproximación de Galerkin cumple ciertas condiciones, existe una aproximación  $\vec{s} = \vec{s}_m$ , que converge uniformemente, cuando  $m \rightarrow \infty$  a la solución exacta.

Evidentemente, cuando  $p = 1$  se tiene el desarrollo en armónicos. Por lo tanto, haciendo  $\frac{\omega}{p} = \nu$ , podemos reescribir (2) como

$$x_m(t) = s_1 + \sum_{n=1}^m (s_{2n} \operatorname{sen} n\nu t + s_{2n+1} \cos n\nu t) \quad (3)$$

siendo ahora el período asociado a la solución aproximada  $T' = \frac{2\pi}{\nu} = pT$ .

En particular, si  $g(t) = b_0 + b_1 \cos \omega t + b_2 \operatorname{sen} \omega t$ , sustituyendo (3) en la ecuación (1), integrando en el período, y por identificación de coeficientes obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{T'} \int_0^{T'} f[x_m(t)] dt - b_0 &= 0 \\ \frac{2}{T'} \int_0^{T'} f[x_m(t)] \operatorname{sen}(n\nu t) dt - (n\nu s_{2n} + k s_{2n+1}) n\nu - b_2 \delta_{n,p} &= 0 \\ \frac{2}{T'} \int_0^{T'} f[x_m(t)] \cos(n\nu t) dt + (k s_{2n} - n\nu s_{2n+1}) n\nu - b_1 \delta_{n,p} &= 0 \\ (n = 1, 2, 3, \dots, m) \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\delta_{n,p}$  es la delta de Kronecker. Este sistema está constituido por  $2m+1$  ecuaciones, a partir de las cuales determinamos las  $2m+1$  incógnitas dadas por las coordenadas del vector  $\vec{s}$ . Hay que indicar que este sistema de ecuaciones manifiesta un comportamiento no lineal debido a los términos integrales.

El algoritmo que hemos desarrollado se fundamenta en la siguiente propiedad de las transformadas discretas de Fourier: “la transformada discreta de Fourier de una serie temporal, correspondiente a los valores que toma una solución periódica de (1) en puntos igualmente distribuidos en el intervalo  $[0, T']$ , nos proporciona los coeficientes del desarrollo de Fourier de dicha solución.

Por lo tanto, este algoritmo lo podemos resumir en los siguientes puntos

1. Estimar el valor inicial  $\vec{s}^0$  para el vector de coeficientes  $\vec{s}$  en la expresión (2).
2. Seleccionar  $2m_e$  puntos equidistantes  $t_i, (i = 1, 2, \dots, 2m_e)$  en el intervalo  $[0, T']$ . Como sabemos, sólo se utiliza la primera mitad de los coeficientes evaluados mediante la transformada de Fourier. Por ello, tomaremos  $m_e \geq 2m$ , siendo  $m$  el orden de la aproximación. En los casos de aplicación se ha tomado el valor de 32 para  $m_e$ .
3. Evaluar  $\vec{x}_m^k(t_i)$ , a partir de  $\vec{s}^k$ , aplicando la transformada inversa discreta de Fourier a la siguiente sucesión de números complejos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(X_1^k) &= 2\pi s_1^k T' & \operatorname{Im}(X_1^k) &= 0 \\
 \operatorname{Re}(X_{n+1}^k) &= \frac{s_{2n+1}^k T'}{2} & \operatorname{Im}(X_{n+1}^k) &= -\frac{s_{2n}^k T'}{2} \\
 \operatorname{Re}(X_{m_e+1}^k) &= 0 & \operatorname{Im}(X_{m_e+1}^k) &= 0 \\
 \operatorname{Re}(X_{2m_e-n+1}^k) &= \operatorname{Re}(X_{n+1}^k) & \operatorname{Im}(X_{2m_e-n+1}^k) &= -\operatorname{Im}(X_{n+1}^k)
 \end{aligned} \tag{5}$$

$(n = 1, 2, 3, \dots, m_e - 1)$

donde  $k$  denota el número de iteración y  $X$  la transformada discreta de Fourier de  $x_m(t)$ .

4. Una vez obtenidos los valores de  $x_m^k(t_i)$ , se calcula el valor de  $f[x(t)]$  en los  $2m_e$  puntos seleccionados del intervalo  $[0, T']$

$$f_i^k = \sum_{j=1}^3 a_j x_m^k(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, 2m_e \tag{6}$$

5. Calcular los coeficientes de Fourier al vector  $\vec{f}$  hallado en el paso anterior. Para ello, aplicando la transformada discreta de Fourier se hallan los valores complejos  $F_i^k (i = 1, 2, \dots, 2m_e)$ , con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{Re}(F_1^k)}{T'} &= \frac{1}{T'} \int_0^{T'} f[x_m(t)] dt \\
 \frac{\operatorname{Re}(F_{i+1}^k)}{T'} &= \frac{2}{T'} \int_0^{T'} f[x_m(t)] \cos(i\nu t) dt \\
 \frac{2\operatorname{Im}(F_{i+1}^k)}{T'} &= -\frac{2}{T'} \int_0^{T'} f[x_m(t)] \operatorname{sen}(i\nu t) dt
 \end{aligned} \tag{7}$$

$(i = 1, 2, 3, \dots, 2m_e)$

6. Resolver el sistema algebraico no lineal (4). Sustituyendo las expresiones anteriores (7) en (4), se llega a un sistema de  $2m + 1$  ecuaciones algebraicas no lineales. Resolviendo dicho sistema, se obtienen los  $2m + 1$  coeficientes que determinan la solución periódica aproximada expresada en (3). La resolución se ha realizado utilizando un algoritmo combinado<sup>18,19,20,21,22</sup> basado en un método de Newton-Raphson con paso restringido junto con un método de continuación corregido con un algoritmo de Levenberg-Marquardt en el caso de que la matriz jacobiana sea singular. Este algoritmo se desarrolla en un apéndice al final de este trabajo<sup>23,24,25</sup>.
7. Estudio de la convergencia de la solución. Una vez obtenido el vector solución se analiza la convergencia del mismo y en el caso de que no converja, se vuelve al punto 3. El criterio de convergencia depende del error relativo entre dos iteraciones consecutivas, pero si alguno de los elementos del vector solución son ceros, entonces el error relativo no puede ni debe usarse. Por ello calculamos el vector de errores elemento a elemento y establecemos el criterio de que la norma de dicho vector sea menor o igual que la tolerancia que se especifique para cada caso concreto.

Si la solución converge, a continuación se estudia la estabilidad de la misma, tal como se desarrolla en el punto siguiente.

Hay que indicar que como Transformada Discreta de Fourier hemos elegido la Transformada Rápida de Fourier (FFT) con el objeto de acelerar los cálculos.

### ANÁLISIS CUALITATIVO: ESTABILIDAD

Una solución periódica obtenida por el método desarrollado anteriormente meramente representa un estado periódico y su existencia real dependerá de cómo evolucione temporalmente al variar ligeramente las condiciones iniciales. Este problema está relacionado con las propiedades cualitativas de las soluciones tales como su estabilidad. De aquí la importancia de esta cuestión cuyo estudio vamos a realizar basándonos en el tratamiento que Hayashi<sup>1</sup> hace de la teoría de Floquet. Una ecuación variacional de importancia en este estudio, que resulta de aplicar dicha teoría, es la ecuación variacional de Hill y a partir de ella obtendremos las condiciones de estabilidad para las soluciones periódicas.

Con el fin de facilitar su estudio, en primer lugar vamos a transformar la característica no lineal en otra simétrica y a deducir las ecuaciones variacionales que la determinan.

Ya que este estudio lo vamos a centrar en los osciladores de Duffing, el coeficiente  $a_3$  del término no lineal de la ecuación (1) es distinto de cero, por lo que realizamos el cambio de función

$$X(t) = x(t) + \frac{a_2}{3a_3}$$

transformándose la ecuación (1) en

$$\ddot{X}(t) + k\dot{X}(t) + c_1X(t) + a_3X^3(t) = B_0 + b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t \quad (8)$$

siendo

$$c_1 = \frac{3a_1a_3 - a_2^2}{3a_3}, \quad B_0 = \frac{a_2(9a_1a_3 - 2a_2^2)}{27a_3^2} + b_0$$

que, como puede observarse, tiene la característica no lineal simétrica.

A la ecuación anterior la llamamos ecuación fundamental del oscilador (1).

El estudio de la estabilidad de las soluciones periódicas de (8) lo haremos aplicando la teoría de Floquet, tal como ya hemos indicado anteriormente. Para ello supongamos que  $X(t)$  es una solución periódica de la ecuación (8) y sea  $\xi(t)$  una pequeña variación de dicha solución. La sustitución de  $X(t) + \xi(t)$  en (8) nos conduce a la ecuación variacional

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + k\frac{d\xi}{dt} + (c_1 + 3a_3X^2)\xi = 0 \quad (9)$$

Haciendo en esta ecuación el cambio de función  $\xi(t) = e^{-\frac{kt}{2}}\eta(t)$  se tiene

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \left(c_1 - \frac{k^2}{4} + 3a_3X^2\right)\eta = 0 \quad (10)$$

que es una ecuación diferencial lineal donde el coeficiente  $X^2$  es una función periódica de  $t$  y, por lo tanto desarrollable en serie de Fourier. Sustituyendo dicho desarrollo en (10), ésta se puede expresar en la forma

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \left[\vartheta_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n \cos(n\omega t - \varepsilon_n)\right]\eta = 0 \quad (11)$$

donde los parámetros  $\vartheta_0, \vartheta_i, \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots$  son conocidos.

Por otra parte

$$\vartheta_n \cos(n\omega t - \varepsilon_n) = \vartheta_n \sin \varepsilon_n \sin(n\omega t) + \vartheta_n \cos \varepsilon_n \cos(n\omega t) = \vartheta_{ns} \sin(n\omega t) + \vartheta_{nc} \cos(n\omega t)$$

en donde

$$\vartheta_{ns} = \vartheta_n \sin(\varepsilon_n), \quad \vartheta_{nc} = \vartheta_n \cos(\varepsilon_n)$$

Por lo tanto, la ecuación (11) se convierte en

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \left[\vartheta_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_{ns} \sin(n\omega t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_{nc} \cos(n\omega t)\right]\eta = 0 \quad (12)$$

que es una ecuación de Hill generalizada. En este caso una solución particular para la  $n$ -ésima región relacionada con el  $n$ -armónico de la oscilación fundamental viene dada por

$$\eta(t) = e^{\mu t} \sin\left(\frac{n\omega t}{2} - \sigma\right) \quad (13)$$

donde  $\mu$  es el llamado exponente característico (dependiente de los parámetros anteriores) y  $\sigma$  es un nuevo parámetro a determinar.

A la vista de esta solución se puede observar que en dicha región es posible excitar el armónico de orden  $n/2$  de la oscilación fundamental en función del exponente característico.

Sustituyendo (13) en (11) y aplicando balance armónico, se obtiene para el exponente característico

$$\mu^2 + - \left[ \vartheta_0 + \left( \frac{n\omega}{2} \right)^2 \right] + \sqrt{(n\omega)^2 \vartheta_0 + \vartheta_n^2} \quad (14)$$

y por tanto

$$\mu = \pm \sqrt{- \left[ \vartheta_0 + \left( \frac{n\omega}{2} \right)^2 \right] + \sqrt{(n\omega)^2 \vartheta_0 + \vartheta_n^2}} \quad (15)$$

Sustituyendo (13) en el cambio de función de  $\xi(t)$  a  $\eta(t)$ , se obtiene

$$\xi(t) = e^{-\frac{k}{2}t} \eta(t) = e^{-\frac{k}{2}t} e^{\mu t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\omega t}{2} - \sigma \right) = e^{(-\frac{k}{2} + \mu)t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\omega t}{2} - \sigma \right)$$

Por lo tanto, para que la correspondiente solución sea estable se tiene que cumplir que

$$\operatorname{Re} \left( -\frac{k}{2} \pm \mu \right) < 0$$

y se pueden presentar dos casos:

(i) Si  $\mu$  es imaginario, entonces

$$\operatorname{Re} \left( -\frac{k}{2} \pm \mu \right) = \operatorname{Re} \left( -\frac{k}{2} \right) = -\frac{k}{2} < 0$$

y como  $k$  es mayor que cero, se cumple que la solución siempre será estable.

(ii) Si  $\mu$  es real, entonces la condición de estabilidad  $\operatorname{Re} \left( -\frac{k}{2} \pm \mu \right) < 0$  se puede expresar como  $\left( \frac{k}{2} \right)^2 > \mu^2$ . Sustituyendo la expresión (14) en la anterior condición, se obtiene

$$\frac{k^2}{4} + \left[ \vartheta_0 + \left( \frac{n\omega}{2} \right)^2 \right] > \sqrt{(n\omega)^2 \vartheta_0 + \vartheta_n^2}$$

de donde, elevando a cuadrado y agrupando términos, tendremos las siguientes condiciones de estabilidad para la solución periódica  $X(t)$  en la  $n$ -ésima región

$$\left[ \vartheta_0 - \left( \frac{n\omega}{2} \right)^2 \right]^2 + \left[ \vartheta_0 + \left( \frac{n\omega}{2} \right)^2 \right] \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{16} > \vartheta_n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Seguidamente, como ejemplo del método, desarrollamos las condiciones de estabilidad para una solución subarmónica de orden  $1/2$ . El mismo procedimiento se seguiría para obtener las condiciones de estabilidad de cualquier otro subarmónico o supraarmónico.



**Solución subarmónica de orden 1/2**

La solución subarmónica de orden 1/2 para el oscilador asimétrico (8) viene dada por

$$X(t) = z + m_1 \operatorname{sen} \omega t + n_1 \cos \omega t + m_{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\omega t}{2} \right) + n_{\frac{1}{2}} \cos \left( \frac{\omega t}{2} \right) \quad (17)$$

que tiene la misma estructura que (2) y en la que hemos cambiado la notación para facilitar un mejor seguimiento del método.

El estudio de la estabilidad lo hacemos siguiendo los pasos ya descritos anteriormente. En primer lugar, sustituimos la solución (17) en la ecuación variacional (10), con lo cual se tiene

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \left[ \vartheta_0 + 2 \sum_{n=1}^4 \vartheta_n \cos \left( \frac{n\omega t}{2} - \varepsilon_n \right) \right] \eta = 0 \quad (18)$$

siendo

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= c_1 - \frac{k^2}{4} + \frac{3a_3}{2}(R_1 + R_{\frac{1}{2}} + 2Z) \\ \vartheta_{1s} &= \frac{3a_3}{2}(m_1 n_{\frac{1}{2}} - m_{\frac{1}{2}} n_1 + 2m_{\frac{1}{2}} z) \\ \vartheta_{1c} &= \frac{3a_3}{2}(m_1 m_{\frac{1}{2}} + n_1 n_{\frac{1}{2}} + 2n_{\frac{1}{2}} z) \\ \vartheta_{2s} &= \frac{3a_3}{2}(2zm_1 + m_{\frac{1}{2}} n_{\frac{1}{2}}) & \vartheta_{2c} &= \frac{3a_3}{4}(n_{\frac{1}{2}}^2 - m_{\frac{1}{2}}^2 + 4n_1 z) \\ \vartheta_{3s} &= \frac{3a_3}{2}(m_1 n_{\frac{1}{2}} + m_{\frac{1}{2}} n_1) & \vartheta_{3c} &= \frac{3a_3}{2}(n_{\frac{1}{2}} n_1 - m_{\frac{1}{2}} m_1) \\ \vartheta_{4s} &= \frac{3a_3}{2} m_1 n_1 & \vartheta_{4c} &= \frac{3a_3}{4}(n_1^2 - m_1^2) \\ \vartheta_n^2 &= \vartheta_{ns}^2 + \vartheta_{nc}^2 & \varepsilon_n &= \arctan \left( \frac{\vartheta_{ns}}{\vartheta_{nc}} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

( $n = 1, 2, 3, 4$ )

con

$$R_1 = m_1^2 + n_1^2 \quad R_{\frac{1}{2}} = m_{\frac{1}{2}}^2 + n_{\frac{1}{2}}^2 \quad Z = z^2$$

En este caso las condiciones de estabilidad (16) se expresan de la forma

$$\left[ \vartheta_0 - \left( \frac{n\omega}{4} \right)^2 \right]^2 + \left[ \vartheta_0 + \left( \frac{n\omega}{4} \right)^2 \right] \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{16} > \vartheta_n^2 \quad 1 \leq n \leq 4 \quad (20)$$

donde sustituyendo las expresiones (19) y operando, se obtienen las condiciones particulares

$$\begin{aligned}
 n = 1: & \left[ R_1 + R_{\frac{1}{2}} + 2Z - \frac{\omega^2 - 16c_1}{24a_3} \right]^2 - \frac{4\vartheta_1^2}{9a_3^2} + \frac{K^2}{36} > 0 \\
 n = 2: & \left[ R_1 + R_{\frac{1}{2}} + 2Z - \frac{\omega^2 - 4c_1}{6a_3} \right]^2 - \frac{4\vartheta_2^2}{9a_3^2} + \frac{K^2}{9} > 0 \\
 n = 3: & \left[ R_1 + R_{\frac{1}{2}} + 2Z - \frac{9\omega^2 - 16c_1}{24a_3} \right]^2 - R_1 R_{\frac{1}{2}} + \frac{K^2}{4} > 0 \\
 n = 4: & \left[ R_1 + R_{\frac{1}{2}} + 2Z - \frac{2(\omega^2 - c_1)}{3a_3} \right]^2 - \frac{R_1^2}{4} + \frac{4K^2}{9} > 0
 \end{aligned} \tag{21}$$

siendo  $K = \frac{k\omega}{a_3}$ .

Como ya sabemos, si no se verifica la condición para la  $n$ -región ( $n = 1, 2, 3, 4$ ), entonces la solución (17) es inestable y en dicha región se excita otra solución de frecuencia  $\frac{n\omega}{2}$ .

Tal como hemos indicado, utilizando este procedimiento se han establecido las condiciones de estabilidad para cualquier tipo de soluciones periódicas (armónicas, subarmónicas y supraarmónicas) que se han implementando en el algoritmo final desarrollado.

## APLICACIONES

La aplicación la hemos realizado a un oscilador de Duffing regido por la ecuación

$$\ddot{x}(t) + 0,4\dot{x}(t) + x - x^3 = b_2 \text{sen}(0,65t)$$

siendo  $b_2$  el parámetro a variar.

Este oscilador lo hemos elegido porque se corresponde con el estudiado por Miles<sup>2</sup> y porque manifiesta una gran complejidad en su comportamiento. Además, su elección se debe a que su estudio lo hemos también realizado intensivamente utilizando métodos analíticos, en concreto el método de Melnikov con extensión a órbitas heteroclínicas, con lo que tenemos una forma para poder contrastar y validar el algoritmo desarrollado<sup>25</sup>.

En el rango de amplitudes  $b_2$  de la fuerza externa entre 0,16 y 0,27 hemos identificado claramente tres soluciones armónicas simétricas, dos estables y una inestable, cinco subarmónicas de orden 1/2, una de orden 1/3, dos de orden 1/4 y diversas soluciones armónicas asimétricas, a las cuales se ha hecho una valoración de estabilidad a partir de las ecuaciones de Hill.

Los resultados obtenidos para las órbitas armónicas han sido los siguientes (Figura 1): la órbita armónica, denominada solución 1, es simétrica y estable en el

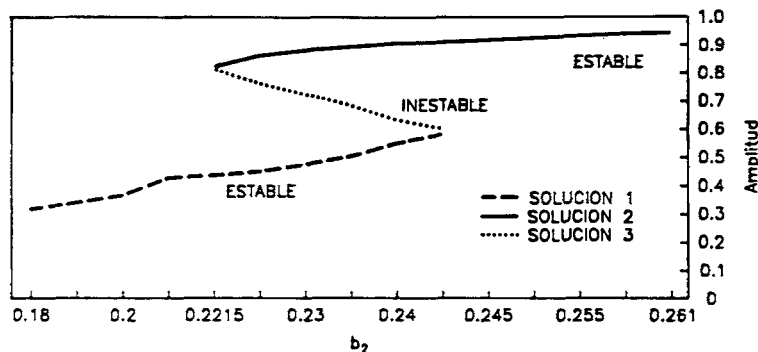


Figura 1. Soluciones armónicas obtenidas mediante el algoritmo rápido de Galerkin del oscilador regido por la ecuación  $\ddot{x}(t) + 0,4\dot{x}(t) + x - x^3 = b_2 \text{sen}(0,65t)$

intervalo de amplitudes 0,18 y 0,2418. Puede apreciarse que corresponde a una solución de pequeña amplitud, pero creciente con la intensidad de la fuerza de excitación.

En  $b_2 = 0,2418$  esta solución desaparece al colapsarse con la solución simétrica inestable. Este valor coincide con el inicio de una transición al caos predicho por el método de Melnikov tal como hemos referenciado en nuestros trabajos anteriores<sup>25</sup>.

La órbita armónica, llamada solución 2, sólo aparece en el intervalo 0,2215 y 0,2615, siendo también estable. La solución mantiene su estabilidad hasta el valor  $b_2 = 0,2516$ , que coincide con el predicho mediante el criterio de Melnikov para la aparición de caos. La amplitud de esta solución crece con la intensidad de la fuerza de excitación. Por debajo de 0,2215 desaparece al colapsarse con la órbita armónica inestable 3, provocando la ruptura de la simetría de esta solución<sup>3</sup>.

La órbita armónica, denominada solución 3, es inestable y sólo aparece en el rango de amplitud 0,2215 y 0,2418. Como ya hemos dicho, por debajo de 0,2215 se colapsa con la solución 2, dando lugar a la ruptura de la simetría, y por encima de 0,2418 se colapsa con la solución 1, iniciando de esta forma la transición al caos mediante rutas de Melnikov. La amplitud de la solución disminuye con  $b_2$ .

Hay que destacar que por encima de  $b_2 = 0,2418$  desaparecen las soluciones armónicas 1 y 3 quedando tan sólo la solución 2. Esto en esencia está de acuerdo con lo obtenido aplicando el método de Melnikov, pero además el valor de la amplitud de la solución 2 coincide con el de la órbita armónica de frecuencia  $\omega = 0,65$ , correspondiente al sistema hamiltoniano no perturbado. Esto confirma tanto la validez del método de Melnikov como la del algoritmo desarrollado basado en un método rápido de Galerkin para interpretar la transición hacia los movimientos caóticos<sup>25</sup> para valores de  $b_2$  superiores a 0,2418.

Una explicación física a lo sucedido sería que al aumentar  $b_2$  por encima de 0,2215, una solución armónica simétrica estable aumenta en amplitud, mientras que la otra disminuye, hasta que llega un instante en que intersecta con la órbita armónica correspondiente al sistema hamiltoniano no perturbado. Si la intensidad sigue aumentando, la amplitud de la solución armónica también aumenta e intersecta con órbita subarmónica de orden 1/2 del sistema no perturbado, dando lugar a una

bifurcación y generándose dos nuevas soluciones subarmónicas asimétricas de orden  $1/2$ . Si aun siguiéramos aumentando  $b_2$ , la órbita interseca con las subarmónicas de orden  $1/3, 1/4, \dots 1/p \dots$  (ruta de Melnikov) del sistema no perturbado y por último, con la órbita heteroclínica, lo cual provoca el caos.

Por otra parte, para los valores de  $b_2$  inferiores a 0,2215 solamente queda una órbita armónica simétrica y otra asimétrica, consecuencia del colapso de las otras dos órbitas armónicas. La solución asimétrica, en principio es inestable, luego se vuelve estable y posteriormente retorna a la inestabilidad excitando subarmónicas de orden  $1/2$  y por último, desaparece dando lugar a dos nuevas soluciones subarmónicas de orden  $1/2$ . La comprobación de las sucesivas bifurcaciones a órbitas subarmónicas que van doblando el período mediante argumentos de estabilidad queda abierta a una próxima ampliación de este trabajo.

En cuanto a los resultados obtenidos para órbitas subarmónicas cabe comentar que a partir de  $b_2 = 0,257$  aparecen dos órbitas subarmónicas de orden  $1/2$  estables casi idénticas y de gran amplitud. Este valor coincide prácticamente con el dado por el criterio de Melnikov para la existencia de dichas órbitas.

Por otra parte, la órbita subarmónica de orden  $1/3$  que hemos encontrado, aparece en el intervalo 0,24 y 0,26 y es estable. El valor de su amplitud superior a 1 obliga a pensar que se ha excitado una órbita subarmónica de amplitud superior a la heteroclínica del sistema hamiltoniano no perturbado. También se ha encontrado otra órbita de orden  $1/4$  con una amplitud mayor que la unidad y se le pueden hacer los mismos comentarios que con la órbita subarmónica de orden  $1/3$ . Además de estas soluciones se han encontrado otras cuya existencia se da en un rango de  $b_2$  muy pequeño, y por ello no las hemos referenciado.

Por último, hemos constatado la transición de la ruptura de simetría. En  $b_2 = 0,2215$  desaparecen dos órbitas armónicas simétricas; una estable y la otra inestable, dando origen a una solución armónica asimétrica en el intervalo 0,21 y 0,2215.

Hay que resaltar que en  $b_2 = 0,22$  la órbita asimétrica es estable, pero en 0,218 se hace inestable en la región 1, lo que provoca una excitación de dos nuevas órbitas subarmónicas de período  $2T$ . Esto anuncia el inicio de la cascada de bifurcaciones subarmónicas que van doblando el período, como ruta al movimiento caótico.

## CONCLUSIONES

Resumiendo, en este trabajo hemos desarrollado un método numérico para obtener las soluciones periódicas, incluso más complejas que las consideradas hasta ahora de los sistemas dinámicos no lineales.

El método se ha optimizado con vistas a reducir el trabajo computacional. Para ello hemos implementado un método de resolución de ecuaciones no lineales basado en un método de continuación.

También con el fin de realizar un análisis cualitativo de los osciladores, objeto de nuestro estudio, hemos deducido condiciones que nos permiten determinar si las soluciones son inestables a partir de la teoría clásica de Floquet y de las ecuaciones variacionales de Hill.

Como caso de aplicación hemos elegido un oscilador estudiado por Miles que presenta un comportamiento muy complejo debido a la ruptura de la simetría.

Con el método de Galerkin desarrollado hemos obtenido todas las posibles soluciones de dicho oscilador y sus condiciones de estabilidad que han sido corroboradas y contrastadas por otros métodos analíticos como el de Melnikov.

## APÉNDICE

### Método para la resolución de ecuaciones algebraicas no lineales

El método que hemos desarrollado resuelve un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales con restricciones en los valores de las incógnitas. Como núcleo fundamental del algoritmo empleado se ha utilizado un método de continuación.

Se parte de un sistema de ecuaciones de la forma

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (A.1)$$

y de un punto inicial  $\vec{x}_0$ . Se construye la sucesión de problemas no lineales

$$\vec{G}(\vec{x}, k) = \vec{0} \quad (A.2)$$

con  $k = N - i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  y siendo

$$\vec{G}(\vec{x}, k) = \vec{F}(\vec{x}) - \frac{k}{N} \vec{F}(\vec{x}_{i-1})$$

El proceso de resolución de los sistemas (A.2) se esquematiza por etapas del modo siguiente:

**Etapas  $i = 0$**  - Se toma  $k = N$ , con lo que  $\vec{x} = \vec{x}_0$  es una solución trivial del sistema.

**Etapas  $i = 1$**  - Se toma  $k = N - 1$  y se utiliza la solución de la etapa anterior  $\vec{x}_0$  como punto inicial en la resolución del problema.

$$\vec{G}(\vec{x}, N - 1) = \vec{F}(\vec{x}) - \frac{N - 1}{N} \vec{F}(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

La solución obtenida para este problema la denotamos por  $\vec{x}_1$ .

**Etapas  $i$ -ésima** - Se toma  $k = N - i$  y se utiliza la solución de la etapa anterior  $\vec{x}_{i-1}$  como punto inicial en la resolución del problema.

$$\vec{G}(\vec{x}, N - i) = \vec{F}(\vec{x}) - \frac{N - i}{N} \vec{F}(\vec{x}_{i-1}) = \vec{0}$$

La solución obtenida para este problema la denotamos por  $\vec{x}_i$ .

De este modo se sigue el proceso hasta llegar al valor  $k = 0$  ( $i = N$ ), donde el problema no lineal a resolver coincide con el problema de partida (A.1).

Inicialmente,  $N$  es el número entero indeterminado que indica el número de problemas no lineales a resolver en el método de continuación y se elegirá mayor o menor

en cada problema concreto, dependiendo de lo alejada que esté la solución inicial  $\vec{x}_0$  de la solución del problema (A.1). En los problemas que se han resuelto se han utilizado valores de  $N$  comprendidos entre 5 y 10. (Hemos de destacar que al aumentar  $N$ , aumenta el radio de convergencia del método, pero a su vez aumenta el número de problemas no lineales a resolver con el consecuente aumento del coste computacional).

Como ya hemos comentado, gran parte de la eficiencia de este método depende de lo próxima que se encuentre la solución elegida  $\vec{x}_0$  a la solución real del problema.

En cada una de las etapas descritas anteriormente se ha utilizado un método de Newton-Raphson con paso restringido<sup>18</sup>. Por consiguiente, el valor de  $\vec{x}$  para la interacción  $h + 1$  en la etapa  $i$  viene determinado por

$$\vec{x}^{h+1} = \vec{x}^h + \lambda^h \Delta \vec{x}^h \quad (\text{A.3})$$

siendo  $\Delta \vec{x}^h$  el vector corrección obtenido resolviendo el sistema lineal

$$\vec{J}(\vec{x}^h) \Delta(\vec{x}^h) = -\vec{G}(\vec{x}^h, N - 1) \quad (\text{A.4})$$

$J$  es el jacobiano de  $\vec{G}$  evaluado en  $\vec{x}^h$  y  $\lambda^h$  la longitud de paso determinada mediante el siguiente algoritmo

$$\lambda^h = \min(1, \mu) \quad \text{con } \mu = \min \left| \frac{\alpha x_j}{\Delta x_j} \right|$$

$\alpha = 0,99$ , que es una buena elección y  $j$  recorriendo todas las componentes del vector  $\vec{x}$ .

En el caso de que la matriz jacobiana sea singular, se recalculará el vector corrección utilizando una modificación del algoritmo de Levenberg-Marquardt<sup>21</sup>.

## REFERENCIAS

1. C. Hayashi, "Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw Hill, New York, (1964).
2. J. Miles, "Resonance and Symmetry Breaking for a Duffing Oscillator", *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 49, 3, pp. 968-981, (1989).
3. P.J. Jiménez, J. Peña, G. Verdú y J.L. Muñoz-Cobo, "Ruptura de la simetría como ruta al caos en un oscilator de Duffing", *Actas de XII C.E.D.Y.A.*, (1991).
4. M. Urabe, "Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic Systems", *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 20, pp. 120-152, (1965).
5. M. Urabe y A. Reiter, "Numerical Computation of Nonlinear forced Oscillations by Galerkin's Procedure", *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 14, pp. 107-140, (1966).
6. G. Chen, *J. Sound Vib.*, Vol. 112, pp. 503, (1987).
7. T.M. Camerun and J.H. Griffin, "An Alternating Frequency-Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems", *J. Appl. Mech.*, Vol. 56, pp.149-154, (1989).
8. J.E. Marsden y M. McCracken, "The Hopf Bifurcation and Its Applications", Springer-Verlag, Berlin, (1976).
9. J.M.T. Thompson y H.B. Stewart, "Nonlinear Dynamics and Chaos", John Wiley, New York, (1986).

10. G. Iooss and D.D. Joseph, "*Elementary Stability and Bifurcation Theory*", Springer-Verlag, Berlin, (1981).
11. S.N. Chow y J.K. Hale, "*Methods of Bifurcation Theory*", Springer-Verlag, New York, (1982).
12. D.R.J. Chillingworth, "*Differentiable Topology with a View to Applications*", Pitman, Londres, (1976).
13. B.D. Greenspan y P.J. Holmes, "Homoclinic Orbits, Subharmonics and Global Bifurcation in Forced Oscillators", en *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, G. Iooss, G. Barenblatt y D.D. Joseph (Eds.), Pitman, Londres, (1982).
14. B.D. Greenspan y P.J. Holmes, "Repeated Resonance and Homoclinic Orbits in a Periodically Forced Family of Oscillators", *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. **15**, pp. 69-97, (1984).
15. D.E. Newland, "On the Methods of Galerkin, Ritz and Krylov-Bogoliubov in the Theory of Nonlinear Vibrations", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. **7**, pp. 159-172, (1965).
16. H. Leipholz, "*Direct Variational Methods and Eigenvalue Problems in Engineering*", Leyden: Noordhoff International Publishing, pp. 148-156, (1977).
17. H. Leipholz, "*Über die Konvergenz des Verfahrens des harmonischen Balance*", *Regelungstechnik*, Vol. **14**, pp. 176-182.
18. M. Shacham, "Numerical Solution of Constrained Nonlinear Algebraic Equations", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **23**, pp. 1455-1481, (1986).
19. M. Shacham, "Comparing Software for the Solution of Systems of Nonlinear Algebraic Equations Arising in Chemical Engineering", *Comput. Chem. Engng.*, Vol. **9**, pp. 103-112, (1985).
20. M.J.D. Powell, "*Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*", P. Rabionowitz (Ed.), Gordon and Breach, New York, (1970).
21. D.W. Marquardt, "An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters", *J. SIAM*, Vol. **11**, pp. 431-441, (1963).
22. J.J. More, "The Levenberg-Marquardt Algorithm Implementation and Theory", en *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **630**, A. Pold and B. Eckman (Eds.), Springer-Verlag, (1978).
23. J.M. Ortega y W.C. Rheinboldt, "*Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*", Academic Press, New York, (1970).
24. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky y W.T. Vetterling, "*Numerical Recipes*", Cambridge University Press, New York, (1986).
25. P.J. Jiménez Olivo, "Desarrollo de métodos analíticos y numéricos para el estudio de osciladores no lineales perturbados periódicamente", Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, (1992).