

MÉTODOS DE CONTINUACIÓN PARA EL TRAZADO DE CURVAS DE EQUILIBRIO PRIMARIAS Y SECUNDARIAS EN ANÁLISIS DE MECANISMOS

ALBERTO CARDONA
y
ALFREDO HUESPE

*INTEC, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
Tel.: + 54-42-559174 Fax: + 54-42-550944*

RESUMEN

Describimos un método para el trazado de trayectorias de equilibrio en sistemas multicuerpos flexibles. Permite posicionarse en forma precisa en puntos límite y de bifurcación simples. El sistema de ecuaciones aumentado propuesto para ubicar los puntos singulares logra una tasa de convergencia cuadrática en ambos casos. Se muestran ejemplos de ilustración.

CONTINUATION METHODS FOR TRACING THE NONLINEAR EQUILIBRIUM PATH IN FLEXIBLE MULTI-BODY SYSTEMS

SUMMARY

We describe a methodology for tracing the nonlinear equilibrium path in flexible multibody systems. It allows to position accurately turning and simple bifurcation points. The augmented systems of equations proposed to position the singular points, give full quadratic convergence rate in both cases. Several examples illustrating the approach are presented.

INTRODUCCIÓN

Analizamos el problema de determinar el conjunto de puntos $\{(\mathbf{q}, \rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\}$ tal que

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \rho) = \mathbf{0} \quad (1)$$

donde $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal algebraica. Esta ecuación puede ser vista como una función implícita que entrega la respuesta \mathbf{q} de sistemas discretos físicos no lineales frente a variaciones del parámetro de control ρ . Estos puntos pueden caracterizar, por ejemplo, los estados de equilibrio de una estructura mecánica.

Recibido: Febrero 1997

La solución (\mathbf{q}, ρ) a la ecuación no lineal (1) es una variedad unidimensional en \mathbb{R}^{n+1} que puede ser descripta por el mapeo

$$\hat{\mathbf{g}}(s) = \mathbf{g}(\mathbf{q}(s), \rho(s)) = \mathbf{0}; \quad s \in \mathbb{R} \quad (2)$$

donde el nuevo parámetro s recibe usualmente el significado de una longitud de arco¹.

Sea (\mathbf{q}^o, ρ^o) (punto *crítico* o *singular*) en donde $\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{g}$ es singular. Nos restringiremos a casos en los que la dimensión del espacio nulo $\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{g}^o$ es uno, o sea $N(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{g}^o) = \text{span}(\phi_1)$. Pueden presentarse entonces dos alternativas:

1. $\nabla_{\rho}\mathbf{g} \notin R(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{g})$: estos puntos son llamados *puntos límite*.
2. $\nabla_{\rho}\mathbf{g} \in R(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{g})$: esta condición se caracteriza también por ser $\phi_1^T \nabla_{\rho}\mathbf{g} = 0$, con ϕ_1^T vector de base del espacio nulo de $(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{g})^T$. Estos puntos se llaman *puntos de bifurcación*.

Numerosos autores han tratado este problema, prestando una atención particular al análisis de puntos de bifurcación. Podemos mencionar los trabajos de Allman², Wriggers *et al.*³ y Eriksson⁴ dentro de la literatura de ingeniería. El tema ha recibido gran atención en la literatura de análisis numérico: mencionamos los trabajos de Moore *et al.*⁵, Decker *et al.*⁶ y de Fink *et al.*⁷ entre muchos otros.

DETERMINACIÓN PRECISA DE PUNTOS SINGULARES

Supongamos que estamos trazando la trayectoria de equilibrio sobre el camino fundamental, y que detectamos un cambio de signo del $\det(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{g})$ en el punto (\mathbf{q}_n, ρ_n) . Llamaremos $\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{g} = \mathbf{K}$ y $\nabla_{\rho}\mathbf{g} = -\mathbf{g}_{ext}$. Asumiremos por simplicidad que \mathbf{K} es simétrica. Luego, podemos determinar exactamente un punto límite resolviendo el siguiente sistema aumentado de ecuaciones algebraicas no lineales (SPL)

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \phi_1, \rho) = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \rho) \\ \mathbf{K}\phi_1 \\ \ell(\phi_1) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3)$$

donde la función $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es $\ell(\phi_1) = \|\phi_1\|^2 - 1$.

Este sistema de ecuaciones puede usarse para determinar la solución solamente en el caso en que el punto singular sea punto límite⁵. En un punto de bifurcación, el sistema (3) es singular. Para eliminar la singularidad, aumentamos nuevamente el sistema añadiendo una ecuación y una nueva incógnita γ (SPB)

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \phi_1, \rho, \gamma) = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \rho) + \gamma\mathbf{e}_i \\ \mathbf{K}\phi_1 \\ \mathbf{e}_i^T \phi_1 - 1 \\ -\mathbf{g}_{ext}^T \phi_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4)$$

en donde adoptamos $\ell(\phi_1) = \mathbf{e}_i \phi_1 - 1$, y \mathbf{e}_i es el vector i -ésimo de la base canónica en \mathbb{R}^n . La componente i es elegida de forma que corresponda con aquella que posee el mayor valor absoluto en ϕ_1 .

El proceso de solución en un punto singular es iniciado como si éste se tratara de un punto límite. Si en cambio encontramos un punto de bifurcación, el sistema de ecuaciones a resolver es cambiado de la ecuación (3) a la ecuación (4). Esta situación es detectada evaluando

$$\frac{\mathbf{g}_{ext}^T \boldsymbol{\phi}_1}{\|\mathbf{g}_{ext}\| \|\boldsymbol{\phi}_1\|} \leq \epsilon_{orth} \quad (5)$$

donde ϵ_{orth} es una tolerancia definida por el usuario.

Describimos a continuación el procedimiento seguido para resolver el sistema SPB; en un punto límite, la solución es obtenida siguiendo consideraciones similares.

Usamos el esquema de Newton para resolver (4). El sistema lineal a resolver en cada iteración es el siguiente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & -\mathbf{g}_{ext} & \mathbf{e}_i \\ \nabla_q(\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_1) & \mathbf{K} & \nabla_\rho(\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_i^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{g}_{ext}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \boldsymbol{\phi}_1 \\ \Delta \rho \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_g \\ \mathbf{r}_\phi \\ r_m \\ r_o \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Asumimos que $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \rho) = \mathbf{g}_{int}(\mathbf{q}) - \rho \mathbf{g}_{ext}$, o sea que las fuerzas externas son conservativas; luego:

$$\nabla_\rho(\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_1) = \mathbf{0} \quad (7)$$

Para resolver (6), usamos un esquema similar al *algoritmo de borde (bordering algorithm)*⁸, factorizando en cada iteración sólo la matriz tangente \mathbf{K} . Sin embargo, debemos tener en cuenta que esta matriz se hace singular en el punto crítico. Para evitar la singularidad, transformamos el sistema mediante el añadido de un término de penalidad siguiendo una técnica similar a la propuesta por Felippa⁹

Sea $\hat{\mathbf{K}}$ definida por

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + p \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T \quad (8)$$

donde p es un valor medio de rigidez. La solución a la ecuación (6) puede expresarse por la combinación lineal

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \boldsymbol{\phi}_1 \\ \Delta \rho \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \boldsymbol{\phi}_1 \\ \Delta \rho \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix}^{(0)} + \sigma_1 \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \boldsymbol{\phi}_1 \\ \Delta \rho \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix}^{(1)} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

donde los vectores $\{ \}^{(0)}$, $\{ \}^{(1)}$ se obtienen más abajo. Primero, calculamos

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0 &= -\hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_g & \mathbf{j}_0 &= -\hat{\mathbf{K}}^{-1} (\mathbf{r}_\phi + \mathbf{B}\mathbf{h}_0) \\ \mathbf{h}_1 &= -\hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{g}_{ext} & \mathbf{j}_1 &= -\hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 &= -\hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{e}_i & \mathbf{j}_2 &= -\hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{h}_2 \end{aligned} \quad (10)$$

donde $\mathbf{B}\mathbf{h}_i = \nabla_q(\mathbf{K}\phi_1)\mathbf{h}_i$. Nótese que las operaciones mencionadas implican una única factorización de $\hat{\mathbf{K}}$ y seis retrosubstituciones. Los vectores $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{j}_0, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ se usan en los cálculos siguientes

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i^T \mathbf{j}_1 & \mathbf{e}_i^T \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{g}_{ext}^T \mathbf{j}_1 & \mathbf{g}_{ext}^T \mathbf{j}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\rho^{(0)} \\ \Delta\gamma^{(0)} \end{Bmatrix} &= - \begin{Bmatrix} r_m + \mathbf{e}_i^T \mathbf{j}_0 \\ r_o + \mathbf{g}_{ext}^T \mathbf{j}_0 \end{Bmatrix} \\ \Delta\mathbf{q}^{(0)} &= \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_1 \Delta\rho^{(0)} + \mathbf{h}_2 \Delta\gamma^{(0)} \\ \Delta\phi_1^{(0)} &= \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_1 \Delta\rho^{(0)} + \mathbf{j}_2 \Delta\gamma^{(0)} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i^T \mathbf{j}_1 & \mathbf{e}_i^T \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{g}_{ext}^T \mathbf{j}_1 & \mathbf{g}_{ext}^T \mathbf{j}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\rho^{(1)} \\ \Delta\gamma^{(1)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_i^T \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{g}_{ext}^T \mathbf{h}_2 \end{Bmatrix} \\ \Delta\mathbf{q}^{(1)} &= \mathbf{h}_1 \Delta\rho^{(1)} + \mathbf{h}_2 \Delta\gamma^{(1)} \\ \Delta\phi_1^{(1)} &= -\mathbf{h}_2 + \mathbf{j}_1 \Delta\rho^{(1)} + \mathbf{j}_2 \Delta\gamma^{(1)} \\ \begin{bmatrix} 1/p & -\mathbf{e}_i^T \Delta\mathbf{q}^{(1)} \\ 0 & 1/p - \mathbf{e}_i^T \Delta\phi_1^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_i^T \Delta\mathbf{q}^{(0)} \\ \mathbf{e}_i^T \Delta\phi_1^{(0)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

Posteriormente, los valores calculados se reemplazan en la ecuación (9).

DETERMINACIÓN DE LAS TANGENTES AL CAMINO EN EL PUNTO SINGULAR

El vector tangente a la curva $\hat{\mathbf{g}}(s)$, denotado por $(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\rho}) = (\frac{d\mathbf{q}}{ds}, \frac{d\rho}{ds})$, y sus derivadas de orden superior $(\ddot{\mathbf{q}}, \ddot{\rho}), \dots$, pueden obtenerse resolviendo los sistemas de ecuaciones siguientes (los cuales se obtienen por diferenciaciones sucesivas de la ecuación (2))

$$\begin{aligned} \nabla_q \mathbf{g} \dot{\mathbf{q}} + \nabla_\rho \mathbf{g} \dot{\rho} &= \mathbf{0} \\ \nabla_q \mathbf{g} \ddot{\mathbf{q}} + \nabla_\rho \mathbf{g} \ddot{\rho} &= -\dot{\mathbf{q}} \nabla_{qq} \mathbf{g} \dot{\mathbf{q}} - 2\dot{\rho} \nabla_{q\rho} \mathbf{g} \dot{\mathbf{q}} - \nabla_{\rho\rho} \mathbf{g} \dot{\rho}^2 \\ \nabla_q \mathbf{g} \dddot{\mathbf{q}} + \nabla_\rho \mathbf{g} \dddot{\rho} &= \dots \end{aligned} \quad (12)$$

La determinación correcta del vector $(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\rho})$ juega un rol fundamental para el éxito del esquema numérico. Este se basa en un algoritmo predictor-corrector con un paso de Euler hacia adelante como predictor¹. Si $\nabla_q \mathbf{g}$ es no-singular en el punto considerado, el vector tangente puede evaluarse directamente a partir de la ecuación (12), resultando

$$(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\rho}) = \left(-(\nabla_q \mathbf{g})^{-1} \nabla_\rho \mathbf{g} \dot{\rho}, \dot{\rho} \right) \quad (13)$$

En los puntos (\mathbf{q}^o, ρ^o) donde $\nabla_q \mathbf{g}$ es singular, pueden presentarse dos alternativas:

1. En un punto límite, el único vector tangente resulta

$$(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\rho}) = (\zeta \phi_1, 0) \quad (14)$$

donde ζ es un escalar arbitrario.

2. En un punto de bifurcación, el vector tangente puede escribirse como

$$(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\rho}) = (\eta \boldsymbol{\phi}_0 + \zeta \boldsymbol{\phi}_1, \eta) \quad (15)$$

siendo $\boldsymbol{\phi}_0$ la solución única de

$$\begin{aligned} \nabla_q \mathbf{g} \boldsymbol{\phi}_0 &= -\nabla_\rho \mathbf{g} \\ \boldsymbol{\phi}_1^T \boldsymbol{\phi}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Destacamos que el sistema (16) está sobredeterminado. Para calcular $\boldsymbol{\phi}_0$, usamos en cambio el siguiente sistema aumentado

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\phi}_0 + \gamma \mathbf{e}_i &= \mathbf{g}_{ext} \\ \boldsymbol{\phi}_1^T \boldsymbol{\phi}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

donde $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + p \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T$ y donde $\gamma = -p \mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\phi}_0$.

La solución a este problema puede expresarse en la forma

$$\boldsymbol{\phi}_0 = \hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{g}_{ext} - \frac{\boldsymbol{\phi}_1^T \hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{g}_{ext}}{\boldsymbol{\phi}_1^T \hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{e}_i} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{e}_i = -\mathbf{h}_1 + \frac{\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{h}_1}{\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{h}_2} \mathbf{h}_2 \quad (18)$$

donde $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ fueron calculados en la ecuación (10).

Los coeficientes indeterminados η, ζ en un punto de bifurcación, pueden determinarse a partir de la condición de compatibilidad (12) que asegura la existencia de $(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\rho})$, i.e.

$$\dot{\mathbf{q}} \nabla_{qq} \mathbf{g} \dot{\mathbf{q}} + 2\dot{\rho} \nabla_{q\rho} \mathbf{g} \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\rho\rho} \mathbf{g} \dot{\rho}^2 + \nabla_\rho \mathbf{g} \dot{\rho} \in R(\nabla_q \mathbf{g}) \quad (19)$$

En forma equivalente, pediremos

$$\boldsymbol{\phi}_1^T \left(\dot{\mathbf{q}} \nabla_{qq} \mathbf{g} \dot{\mathbf{q}} + 2\dot{\rho} \nabla_{q\rho} \mathbf{g} \dot{\mathbf{q}} + \nabla_{\rho\rho} \mathbf{g} \dot{\rho}^2 \right) = 0 \quad (20)$$

Sustituyendo el vector tangente indeterminado (15) en la ecuación (20), esta condición deriva en la ecuación de bifurcación algebraica (EBA) dada por Decker *et al.*⁶

$$a\zeta^2 + 2b\zeta\eta + c\eta^2 = 0 \quad (21)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \boldsymbol{\phi}_1^T (\nabla_q (\mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_1) \boldsymbol{\phi}_1) \\ b &= \boldsymbol{\phi}_1^T (\nabla_q (\mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_1) \boldsymbol{\phi}_0 + \nabla_q \mathbf{g}_{ext} \boldsymbol{\phi}_1) \\ c &= \boldsymbol{\phi}_1^T (\nabla_q (\mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_0) \boldsymbol{\phi}_0 + 2\nabla_q \mathbf{g}_{ext} \boldsymbol{\phi}_0 + \nabla_\rho \mathbf{g}_{ext}) \end{aligned} \quad (22)$$

La ecuación (21) posee a lo sumo dos soluciones independientes, asociadas a las tangentes a los dos caminos de equilibrio que se intersectan. Distinguiremos dos casos

1. $a = 0$ (*bifurcación simétrica o en horquilla*): en este caso, las dos soluciones a la ecuación (21) pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 0 & \zeta_1 &= t & (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\rho})_1 &= (\boldsymbol{\phi}_1, 0) t \\ \eta_2 &= bt & \zeta_2 &= -ct/2 & (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\rho})_2 &= (b\boldsymbol{\phi}_0 - c/2\boldsymbol{\phi}_1, b) t \end{aligned} \quad (23)$$

2. $a \neq 0$ (*bifurcación asimétrica*): ahora, la solución a la ecuación (21) puede expresarse en la forma

$$\eta_{1,2} = a t \quad \zeta_{1,2} = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right) t \quad (24)$$

Los dos vectores tangentes al camino solución en el punto de bifurcación resultan

$$(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\rho})_{1,2} = \left(a\boldsymbol{\phi}_0 + \left(-b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right) \boldsymbol{\phi}_1, a\right) t \quad (25)$$

Las expresiones dadas para los vectores tangentes en el punto de bifurcación contienen un parámetro indeterminado t cuyo valor puede fijarse en forma arbitraria, v.g. por imposición de una restricción de longitud unitaria.

EVALUACIÓN DE TÉRMINOS QUE INVOLUCRAN DERIVADAS DE LA MATRIZ TANGENTE

La evaluación de términos que involucran derivadas de la matriz tangente requiere una consideración especial. Siguiendo la propuesta de Wriggers *et al.*³, el término $\nabla_q(\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_1) \mathbf{h}_i$, donde \mathbf{h}_i es un vector dato, se calcula mediante un esquema de diferencias finitas hacia adelante

$$\nabla_q(\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_1) \mathbf{h}_i = \frac{1}{\varepsilon} [\mathbf{K}(\mathbf{q}^k + \varepsilon\boldsymbol{\phi}_1^k) \mathbf{h}_i - \mathbf{K}(\mathbf{q}^k) \mathbf{h}_i] \quad (26)$$

donde hemos usado la propiedad de simetría de la matriz: $\nabla_q(\mathbf{K}) = \nabla_{qq}(\mathbf{g})$.

Nótese que en la ecuación (10), la evaluación de términos $\mathbf{j}_0, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ necesita la premultiplicación por la matriz $\mathbf{K}(\mathbf{q}^k)$. Para evitar la reevaluación de la rigidez tangente, los cálculos se organizan de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= -\hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{h}_1 = -\hat{\mathbf{K}}^{-1} [\mathbf{K}(\mathbf{q}^k + \varepsilon\boldsymbol{\phi}_1^k) \mathbf{h}_1 - \mathbf{K}(\mathbf{q}^k) \mathbf{h}_1] / \varepsilon \\ &= -[\hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}(\mathbf{q}^k + \varepsilon\boldsymbol{\phi}_1^k) \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_1 + p(\mathbf{e}_i^T \mathbf{h}_1) \mathbf{h}_2] / \varepsilon \end{aligned} \quad (27)$$

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Presentamos varios ejemplos que permiten evaluar la performance del algoritmo, tanto en el caso de puntos límite como de bifurcación. El último de los ejemplos presentados corresponde a un caso de bifurcación asimétrica. En los problemas de vigas usamos modelos de elementos finitos basados en una interpolación lineal de los desplazamientos y las rotaciones¹⁰. Hemos limitado los ejemplos a casos planos, de manera de simplificar algunos aspectos de la formulación (i.e. aspectos relativos a la evaluación de derivadas de la matriz de rigidez). El caso de rotaciones 3D ha sido tratado en el trabajo de Cardona *et al.*¹¹.

El método de continuación usado se describe en Cardona *et al.*¹. Su característica principal es un escalado automático de las incógnitas, permitiendo avanzar en el trazado de la solución aún en cuando existan cambios abruptos en la rigidez estructural.

Estructura de tres barras articuladas

Este problema, inicialmente propuesto por Bergan, fue analizado por Eriksson⁴. Consiste en una estructura simple compuesta por tres barras (Figura 1), en la cual mediante la alteración de ciertos parámetros (i.e. datos geométricos y cargas) se obtienen distintos tipos de respuesta estructural.

El caso analizado, con $\eta = 1, 2$ y rigidez de las barras $k_{1-3} = k_{2-3} = 1$, $k_{3-4} = 0, 4$, presenta un primer punto de bifurcación en $P = -0, 3333$ y una segunda bifurcación en $P = 0, 3333$.

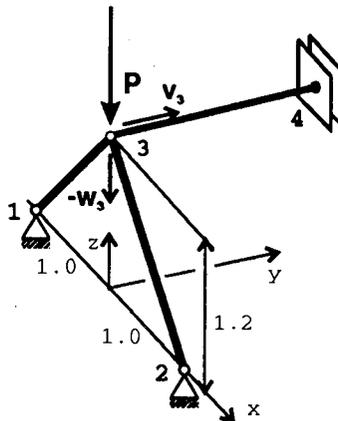


Figura 1. Estructura de tres barras articuladas: descripción geométrica

En la Figura 2 se comparan los caminos de equilibrio obtenidos para la estructura perfecta (caso a) y para el caso imperfecto (caso b). En el último caso, hemos ubicado una carga de perturbación $P_2 = 0, 05$ en el nodo 3, componente y .

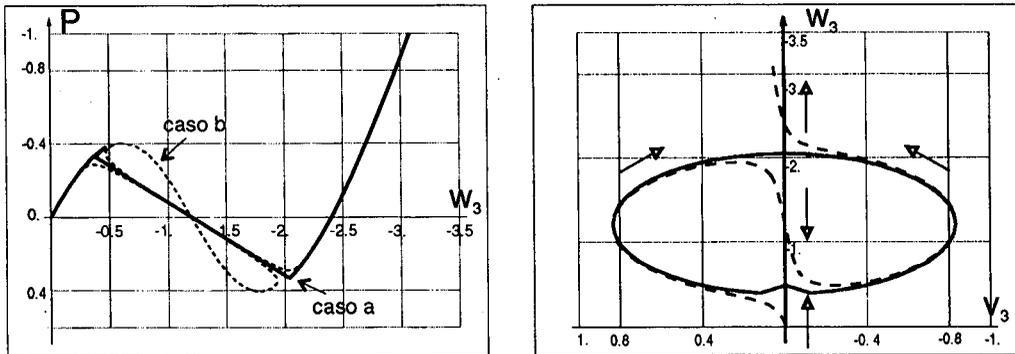


Figura 2. Estructura de tres barras articuladas. Izquierda: curva carga vs. desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga; derecha: curva desplazamiento vertical vs. horizontal en el mismo punto

Pórtico plano

Para modelar este ejemplo propuesto por Eriksson⁴, usamos 8 elementos de viga equiespaciados (Figura 3). De acuerdo a la referencia⁴, pueden obtenerse diferentes puntos límite y de bifurcación en función de dos parámetros: la carga y la altura H . La estructura que analizamos tiene los valores $H = 38,6$, $E = 10^{+5}$, $\nu = 0,3$, $I = 265,74$ y área $84,16$.

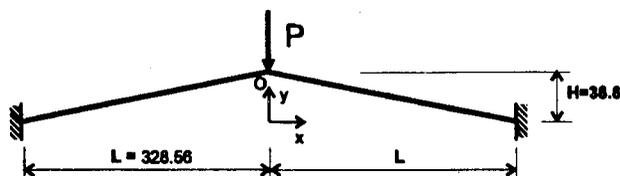


Figura 3. Pórtico plano: descripción geométrica

Al avanzar a lo largo de la trayectoria fundamental, y antes de alcanzar la carga límite, detectamos dos puntos de bifurcación (A y B en la Figura 5) para valores $P = -1244$, $y_0 = 36,68$ y $P = -2540$, $y_0 = 34,09$, respectivamente. Trazamos la trayectoria de equilibrio a lo largo de las ramas secundarias hasta alcanzar nuevamente el camino fundamental en los puntos C y D . La Figura 4 muestra las deformadas calculadas para cada caso. Destacamos que en la referencia⁴, el autor reporta un punto de bifurcación adicional próximo al primer punto límite. Para detectar este punto, debemos disminuir el paso de avance en el método de continuación.

Remarcamos que el algoritmo no fue capaz de detectar la singularidad cuando se pasó sobre los puntos de bifurcación C y D . En el ejemplo, el proceso iterativo

para obtener C y D fue iniciado en forma externa. Los valores calculados fueron $P = 956,5$, $y_o = -12,67$, y $P = 37,65$, $y_o = -23,00$, respectivamente.

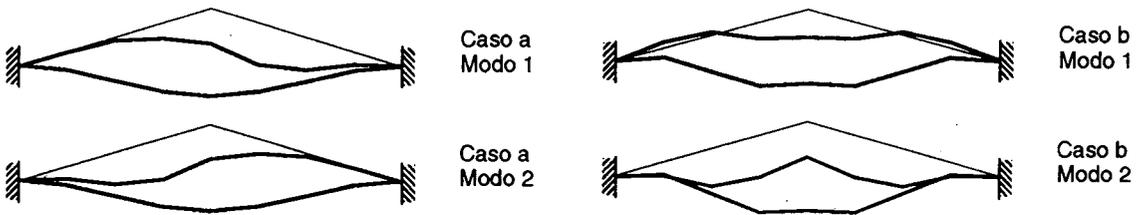


Figura 4. Pórtico plano: modos de bifurcación

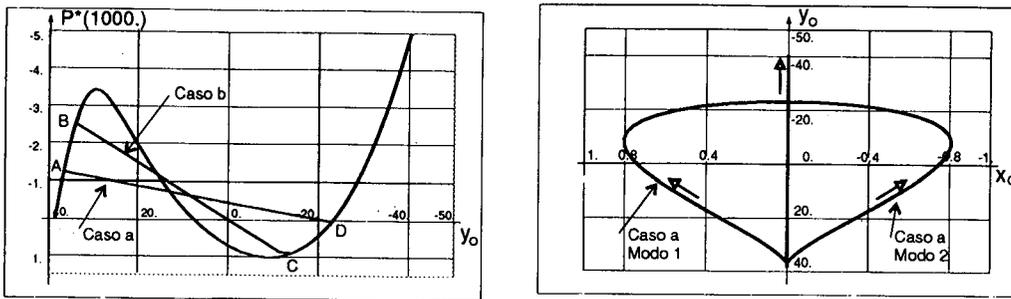


Figura 5. Pórtico plano. Izquierda: curva carga vs. desplazamiento vertical en el punto O ; derecha: curva desplazamientos horizontal vs. vertical en el punto O

En la Tabla I mostramos los coeficientes calculados de la EBA para los puntos A y D y para dos valores diferentes de la tolerancia para convergencia del residuo. A fin de evaluar su confiabilidad, calculamos los coeficientes b y c de dos formas distintas

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \phi_1^T [\mathbf{K}(\mathbf{q}_0 + \varepsilon \phi_1) \phi_0 - \mathbf{K}(\mathbf{q}_0) \phi_0] / \varepsilon \\
 b_2 &= \phi_1^T [\mathbf{K}(\mathbf{q}_0 + \varepsilon \phi_0) \phi_1 - \mathbf{K}(\mathbf{q}_0) \phi_1] / \varepsilon \\
 c_1 &= \phi_1^T [\mathbf{K}(\mathbf{q}_0 + \varepsilon \phi_0) \phi_0 - \mathbf{K}(\mathbf{q}_0) \phi_0] / \varepsilon \\
 c_2 &= \phi_0^T [\mathbf{K}(\mathbf{q}_0 + \varepsilon \phi_1) \phi_0 - \mathbf{K}(\mathbf{q}_0) \phi_0] / \varepsilon
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Debido a la simetría del operador $\nabla_{qq} \mathbf{K}$, deberían verificarse las identidades $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$. Sin embargo, como se observa en la Tabla I, esta igualdad es verificada (aproximadamente) sólo para tolerancias estrictas del residuo en los puntos de bifurcación.

$\ R\ $	a	b_1	b_2	c_1	c_2
1.e-4	4,08e-4	-939,4	-768,3	724,5	-171
1e-10	4,98e-4	-768,3	-768,3	-5,89e-3	2,79e-4

$\ R\ $	a	b_1	b_2	c_1	c_2
1,e-4	-1,60e-4	838,4	839,2	12,6	-0,767
1,e-10	1,76e-4	839,2	839,2	-6,25e-3	2,00e-3

Tabla I. Pórtico plano: coeficientes de la EBA en los puntos A y D

En nuestra implementación hemos considerado que para valores de la relación $a/b < 10^{-5}$, el punto singular es punto de bifurcación simétrica.

En la Figura 6 mostramos la evolución del residuo durante el proceso iterativo al calcular el punto singular D . Remarcamos la mejora sustancial en la tasa de convergencia que se observa luego de verificar la ecuación (5) y cambiar el sistema de ecuaciones a resolver al sistema SPB completo.

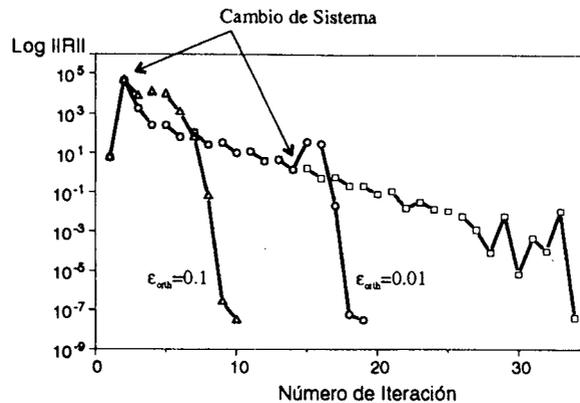


Figura 6. Pórtico plano: evolución de la norma del residuo en el punto de bifurcación D

Columna inclinada a 15°

Este ejemplo¹² fue modelado con 8 elementos finitos de viga (Figura 7). Los valores de los parámetros son $E = 2,1 \times 10^6$, área 1 e inercia $I = 0,0833$. En este caso, la trayectoria de equilibrio presenta dos puntos de bifurcación y dos puntos límite.

El algoritmo mostró un comportamiento robusto para el cálculo del primer punto de bifurcación (A en la Figura 7): el punto de inicio no tuvo mucha influencia en las propiedades de convergencia. Sin embargo, el punto límite D sólo pudo determinarse luego de calcular un punto de inicio muy próximo a la solución. La baja rigidez de la estructura pudo ser la causa para este comportamiento. Nuevamente, el punto

de bifurcación E no pudo ser detectado por monitoreo del cambio de signo del determinante.

Los coeficientes calculados para la EBA en el punto A fueron $a = 1,9e - 2$, $b = -16256$, y $c = 701,62$, con cinco dígitos de precisión.

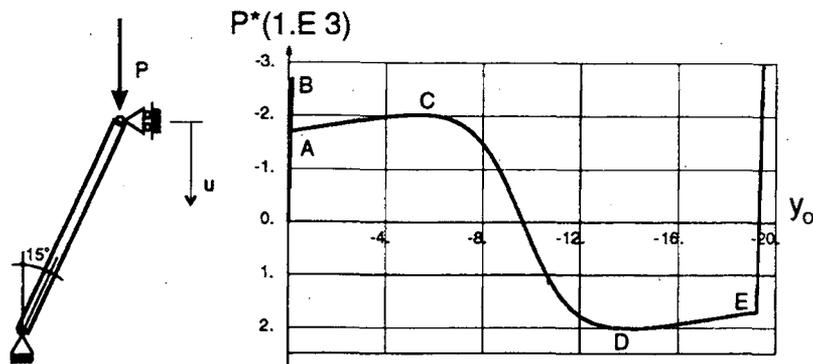


Figura 7. Columna inclinada a 15° . Izquierda: descripción geométrica; derecha: curva carga vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de la carga

Las Figura 8 muestra la evolución de la norma del residuo en el punto límite D y en el punto de bifurcación E . Podemos apreciar el comportamiento fuertemente distinto entre ambos casos. El proceso de solución en el punto E comenzó como si este fuera un punto límite, i.e. resolviendo la ecuación (3). Luego de verificarse la condición de ortogonalidad (5), el sistema de ecuaciones fue cambiado a (4), y se recuperó la tasa de convergencia cuadrática.

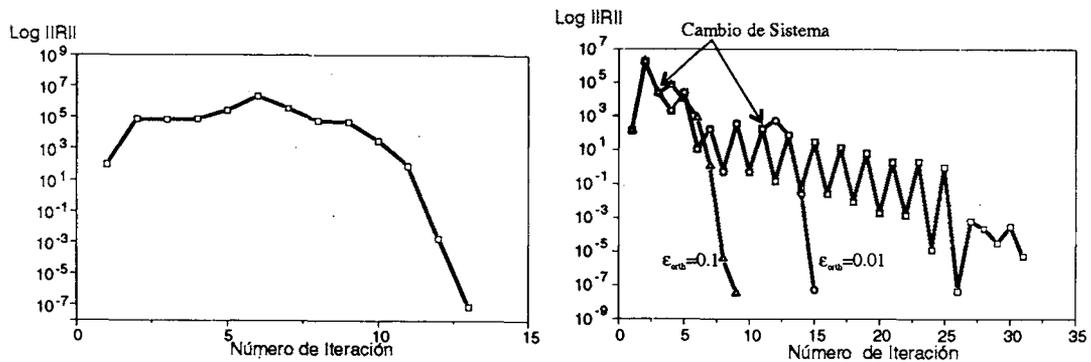


Figura 8. Columna inclinada a 15° . Izquierda: evolución del residuo en el punto límite D ; derecha: evolución de la norma del residuo en el punto de bifurcación E

Un caso de bifurcación asimétrica

El mecanismo flexible simple de la Figura 9 presenta un punto de bifurcación asimétrica. Hemos modelado el miembro vertical usando un elemento rígido. Las restricciones geométricas que describen el cuerpo rígido fueron introducidas mediante multiplicadores de Lagrange.

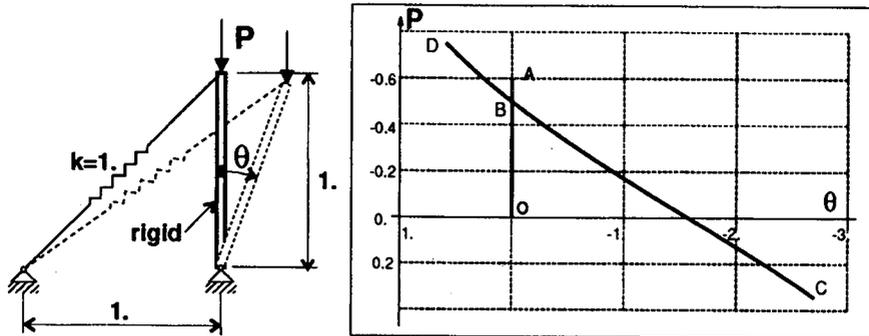


Figura 9. Caso de bifurcación asimétrica. Izquierda: descripción geométrica; derecha: curva carga vs. ángulo de rotación de la barra rígida.

La bifurcación asimétrica implica dificultades adicionales para el método de continuación. Queremos remarcar sobre la habilidad del algoritmo para lograr tasa de convergencia cuadrática aún en este caso (ver Tabla II).

En la Figura 9 vemos la trayectoria de equilibrio determinada mediante dos análisis sucesivos: en el primero, trazamos el camino OBC, en tanto en el segundo recorrimos el camino OBD. La carga de bifurcación calculada es $P_c = 0,5$, la cual coincide con la solución analítica; tanto la carga de bifurcación como los vectores tangentes (que incluye al Multiplicador de Lagrange como d.o.f.) en el punto de bifurcación, fueron calculados con exactitud. Los coeficientes de la EBA son $a = -0,75$, $b = -34,0$ y $c = 592$ (nótese que ahora, claramente, $a \neq 0$). El esquema de Newton para converger al punto de bifurcación se inició en el punto A, para el cual $P = 0,6$ (ver Figura 9).

Iteración	Sist. de ec.	Residuo
1	SPL	2,2e0
2	SPL	3,3e-2
3	SPB	1,6e-0
4	SPB	1,6e-3
5	SPB	1,1e-11

Tabla II. Caso de bifurcación asimétrica: convergencia del residuo cuando se evalúa el punto B

CONCLUSIONES

Hemos presentado un algoritmo para determinar exactamente puntos singulares en la trayectoria de equilibrio en el modelado de mecanismos y estructuras no lineales. Este algoritmo permite evaluar las tangentes exactas a las ramas que se intersectan en el punto singular, permitiendo realizar en forma fácil y efectiva el cambio desde la rama fundamental a la rama secundaria.

El sistema extendido de ecuaciones propuesto para calcular puntos de bifurcación mostró claramente convergencia cuadrática. Hemos verificado que para determinar correctamente los coeficientes de la ecuación de bifurcación algebraica (EBA), y luego las tangentes a las ramas en intersección, debemos asegurar encontrarnos muy cerca del punto exacto de bifurcación. Esta condición no puede alcanzarse cuando se usa el sistema singular de ecuaciones (3), el cual ha sido usado por algunos autores en la literatura.

Se realizaron varias hipótesis simplificativas, razón por la cual necesitamos desarrollar un trabajo adicional para lograr un algoritmo totalmente robusto. La primera hipótesis que adoptamos consistió en suponer puntos de bifurcación aislados. Las estructuras reales muchas veces violan esta condición. Además, el test usado para detectar el paso sobre un punto singular no se mostró efectivo y requiere ser mejorado.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo recibió apoyo económico de *Conicet* dentro del proyecto PID-BID 238 y de *Fundación Antorchas* a través del proyecto A-13218/1-10.

REFERENCIAS

1. A. Cardona y A.E. Huespe, "Continuation Methods for Tracing the Equilibrium Path in Flexible Mechanism Analysis", Technical Report, Grupo de Tecnología Mecánica - INTEC, a ser publicado en *Eng. Comp.*, (1996).
2. D.J. Allman, "Calculation of the Stable Equilibrium Paths of Discrete Conservative Systems with Singular Points", *J. Comp. and Struct.*, Vol. **32**, pp. 1045-1054, (1989).
3. P. Wriggers y J.C. Simo, "A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **30**, pp. 155-176, (1990).
4. A. Eriksson, "Fold Lines for Sensitivity Analyses in Structural Instability", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **114**, pp. 77-101, (1994).
5. G. Moore y A. Spence, "The Calculation of Turning Points of Nonlinear Equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **17**, pp. 567-576, (1980).
6. D.W. Decker y H.B. Keller, "Path Following near Bifurcation", *Comm. Pure and Appl. Math.*, Vol. **34**, pp. 149-175, (1981).
7. J.P. Fink y W.C. Rheinboldt, "A Geometric Framework for the Numerical Study of Singular Points", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **24**, pp. 618-633, (1987).
8. H.B. Keller, "The Bordering Algorithm and Path Following near Singular Points of Higher Nullity", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. **4**, pp. 573-582, (1983).

9. C.A. Felippa, "Traversing Critical Points with Penalty Springs", *Transient/Dynamic Analysis and Constitutive Laws for Engineering Materials*, pp. C2/1-C2/8, Pande and Middleton (Eds), Nijhoff, Dordrecht, (1987).
10. A. Cardona y M. G eradin, "A Beam Finite Element Nonlinear Theory with Finite Rotations", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **26**, pp. 2403-2438, (1988).
11. A. Cardona y A.E. Huespe, "Evaluation of Simple Bifurcation Points and Post-Critical Path in Large Finite Rotation Problems", Technical Report, Grupo de Tecnología Mec nica - INTEC, enviado a *J. Multibody Systems Dynamics.*, (1997).
12. P.X. Bellini y A. Chulya, "An Improved Automatic Incremental Algorithm for the Efficient Solution of Nonlinear Finite Element Equations", *J. Comp. and Struct.*, Vol. **26**, pp. 99-110, (1987).