

ANÁLISIS DINAMICO DE ESTRUCTURAS UTILIZANDO UNA FORMULACION DE BANDAS FINITAS DE REISSNER-MINDLIN

BENJAMIN SUAREZ
JUAN MIQUEL CANET

y
EUGENIO OÑATE

*Escuela Técnica Superior de Ingenieros de
Caminos, Canales y Puertos
Universidad Técnica de Cataluña
C/Jorge Girona Salgado, 31
08034 Barcelona, España*

RESUMEN

En este artículo se presenta una formulación de Banda Finita basada en la teoría de Reissner-Mindlin para el análisis dinámico de estructuras prismáticas tipo lámina. A lo largo del mismo se dan las expresiones de las matrices y vectores más relevantes, asociadas al elemento-banda de dos nodos que aparecen en la formulación, para varios tipos de estructuras. Se presentan algunos ejemplos que muestran el buen comportamiento del elemento-banda lineal de dos nodos para el análisis de vibraciones libres y forzadas en placas, puentes y láminas de revolución.

SUMMARY

In this paper a finite strip formulation based on Reissner-Mindlin plate theory for dynamic analysis of prismatic shell type structures is presented. Detailed expressions of the relevant strip matrices for a variety of structures using the simple two node linear strip element are given. Examples of the good performance of the linear strip element for free and forced vibration analysis of plates, bridges and axisymmetric shells are presented.

INTRODUCCION

El análisis numérico de estructuras prismáticas, tipo placas, puentes cajón y láminas de revolución, que presentan unas características físico-geométricas constantes a lo largo de una determinada dirección, puede ser extremadamente simplificado usando el Método de la Banda Finita. Esta aproximación combina el método de los Elementos Finitos con desarrollos en serie de Fourier para modelar el comportamiento transversal y longitudinal de la estructura, respectivamente. El Método de la Banda Finita fue desarrollado inicialmente por Cheung^{1,2} para el análisis de placas rectangulares

Recibido: Abril 1988

simplemente apoyadas en sus extremos usando la teoría clásica de placas de Kirchhoff. Posteriormente Cheung^{3,5}, Loo y Cusens^{6,7} y otros⁸ obtuvieron diferentes soluciones, tipo banda, para el análisis estático y dinámico de placas y puentes cajón con condiciones de borde diferentes a las de simplemente apoyadas, pero siempre bajo las hipótesis estructurales de Kirchhoff.

La incorporación, a este tipo de formulación, de las hipótesis estructurales más generales de Reissner-Mindlin fue realizada, en el contexto de análisis estático y dinámico de placas delgadas y gruesas, por Benson y Hinton¹⁰ y Dawe^{12,13} y en el análisis estático de puentes cajón por Oñate¹⁴. Oñate y Suárez extendieron la formulación de Reissner-Mindlin a láminas de revolución y mostraron el excelente comportamiento que presenta el elemento-banda lineal de dos nodos con un solo punto de integración numérica para el análisis estático de placas¹⁵ y de puentes cajón y láminas de revolución¹⁶.

Este artículo puede considerarse como la ampliación del trabajo expuesto en¹⁶ para el análisis dinámico de estructuras prismáticas laminares (que incluyen placas y puentes cajón rectos y con planta circular y láminas de revolución) usando el elemento-banda lineal. Para ello y tras una breve descripción de la teoría básica de Banda Finita para análisis dinámico de estructuras, se describe la teoría general de lámina troncocónica de Reissner-Mindlin mediante su aplicación a puentes cajón con planta circular. Las formulaciones asociadas a puentes cajón con planta recta, placas rectas o circulares y láminas de revolución se obtienen a continuación como un caso particular de la más general descrita anteriormente. En todos los casos se detallan los distintos pasos que son necesarios para obtener de forma explícita, para el elemento tipo banda de dos nodos con integración reducida, las matrices y vectores más relevantes que intervienen en el análisis. Por último se presentan algunos ejemplos de vibraciones libres y forzadas de estructuras del tipo prismáticas laminares que muestran el excelente comportamiento del elemento lineal usado.

ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS USANDO EL MÉTODO DE LA BANDA FINITA

CONCEPTOS BÁSICOS

El método de la Banda Finita se basa en combinar desarrollos en serie de Fourier, de las variables independientes que intervienen en el análisis, en la dirección longitudinal prismática con interpolaciones clásicas por Elementos Finitos de sus amplitudes en la dirección transversal. En una aproximación en desplazamientos¹⁷, el vector de desplazamientos \mathbf{u} puede escribirse como :

$$\mathbf{u} = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \mathbf{S}^l \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i^l \quad (1)$$

donde \mathbf{a}_i^l es el vector de las amplitudes de los desplazamientos nodales del nodo i para

el l -ésimo término del desarrollo armónico, N_i es la matriz clásica de funciones de forma del nodo i , S^l es una matriz de funciones trigonométricas que definen el desarrollo de Fourier utilizado, n es el número total de nodos del elemento y m el número de términos del desarrollo usados en el análisis. Los desarrollos de Fourier deben elegirse de forma que se satisfagan las condiciones de contorno de la estructura. La elección que conduce a la formulación más sencilla corresponde a los bordes extremos simplemente apoyados y es la que se adopta en todos los desarrollos que se presentan a continuación. No quedan excluidas de este tipo de análisis otro tipo de condiciones de contorno a pesar de que involucran desarrollos armónicos más complejos que conducen a un sistema de ecuaciones acoplado para los distintos términos del desarrollo⁵.

Después de realizar las sustituciones adecuadas el vector de deformación puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \hat{S}^l \mathbf{B}_i^l \mathbf{a}_i^l \quad (2)$$

donde \hat{S}^l es una matriz que contiene únicamente funciones trigonométricas y \mathbf{B}_i^l es la matriz de deformación asociada al nodo i del elemento e para el l -ésimo término del desarrollo armónico. Las relaciones tensión-desplazamiento se obtienen a partir de las ecuaciones constitutivas de la elasticidad lineal y de la ecuación (2) como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \hat{S}^l \mathbf{B}_i^l \mathbf{a}_i^l \quad (3)$$

donde \mathbf{D} es la matriz de constantes elásticas del material¹⁸.

Sustituyendo las expresiones (1)-(3) en la ecuación del Teorema de los Trabajos Virtuales, en la que se incluyen los términos asociados a las fuerzas de inercia adecuadamente desarrolladas en serie de Fourier con las mismas características que las usadas para el campo de desplazamientos⁵, y después de algunas manipulaciones clásicas, puede obtenerse la ecuación matricial de equilibrio dinámico sin amortiguamiento siguiente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (4)$$

donde \mathbf{M} y \mathbf{K} son respectivamente las matrices de masa y rigidez de la estructura y $\ddot{\mathbf{a}}$, \mathbf{a} y \mathbf{f} son los vectores de amplitudes de la aceleración, desplazamientos y fuerzas respectivamente. Si las condiciones de borde de la estructura son las de extremos simplemente apoyados esta ecuación debido a la ortogonalidad de las series de Fourier usadas⁵ puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M^{11} & & & 0 \\ & M^{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M^{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{a}^1 \\ \ddot{a}^2 \\ \vdots \\ \ddot{a}^m \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} K^{11} & & & 0 \\ & K^{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k^{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^m \end{Bmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

estando el sistema de ecuaciones resultante desacoplado para cada término del desarrollo armónico. Esta circunstancia permite escribir para el l -ésimo armónico:

$$M^{ll} \ddot{a}^l + K^{ll} a^l = f \quad (6)$$

donde, en general, las matrices asociadas a un elemento tienen la siguiente forma¹⁷

$$K_{ij}^{ll} = \frac{b}{2} \int_a^e [B_i^l]^T D B_j^l ds \quad (7)$$

$$M_{ij}^{ll} = \frac{b}{2} \int_a^e N_i^T P N_j ds \quad (8)$$

$$f_i^l = \frac{b}{2} \int_a^e N_i^T b^l ds + \frac{b}{2} \int_a^e N_i^T t^l ds \quad (9)$$

En estas ecuaciones b es la longitud de la estructura en la dirección prismática, a^e es el ancho de la banda (véase Figura 1), b^l y t^l son respectivamente las amplitudes de las fuerzas de volumen y uniformemente distribuidas¹⁸ que actúan sobre la estructura, P es una matriz que depende exclusivamente de la densidad del material y del espesor de la estructura y B_i^l y D son las matrices de deformación y de constantes elásticas definidas en las ecuaciones (2) y (3) respectivamente. Estas matrices y vectores serán presentadas con detalle para cada tipología estructural diferente estudiada en las secciones siguientes.

Vibraciones Libres

Tomando $f^l = 0$ y suponiendo una solución de la forma $a^l = \phi^l \exp(\omega^l t)$ en la ecuación (6) obtenemos la clásica ecuación de autovalores que resuelve el problema de vibraciones libres

$$(K^{ll} - (\omega^l)^2 M^{ll}) \phi^l = 0 \quad (10)$$

a partir de la que pueden calcularse las frecuencias naturales ω^l y los correspondientes modos de vibración ϕ para cada término del desarrollo armónico.

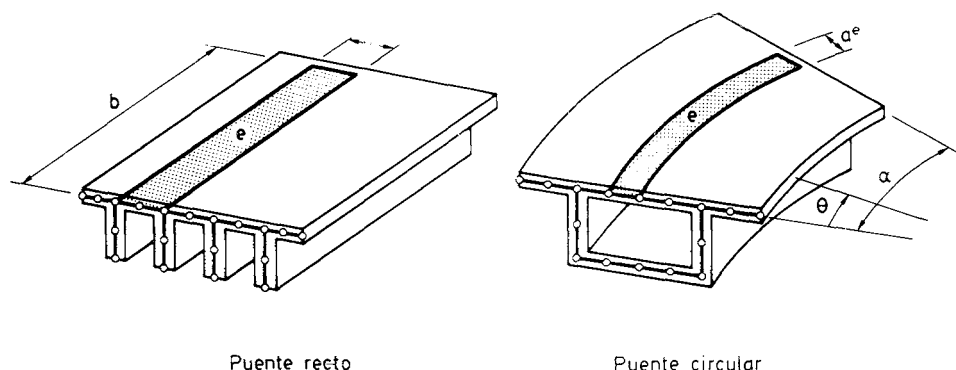


Figura 1. Discretización de banda finita para puentes cajón rectos y circulares

Vibraciones Forzadas

La ecuación (6) puede resolverse por los procedimientos clásicos. En particular si usamos el método de descomposición modal¹⁷, el vector \mathbf{a}^l puede expresarse como

$$\mathbf{a}^l = \sum_{j=1}^{N_m} y_j^l \boldsymbol{\phi}_j^l \quad (11)$$

donde $\boldsymbol{\phi}_j^l$ es j-ésimo vector propio de la matriz \mathbf{K}^{ll} , y_j^l es su correspondiente amplitud modal y N_m es el número de valores propios elegido.

La ecuación (6) puede escribirse usando (13), (5) y (17) como

$$\ddot{y}_j^l + (\omega_j^l)^2 y_j^l = \bar{f}_j^l \quad (12)$$

donde ω_j^l es la frecuencia natural asociada al modo $\boldsymbol{\phi}_j^l$ y

$$\bar{f}_j^l = \frac{[\boldsymbol{\phi}_j^l]^T \mathbf{f}^l}{[\boldsymbol{\phi}_j^l]^T \mathbf{M}^{ll} \boldsymbol{\phi}_j^l} \quad (13)$$

La resolución de la ecuación (12) usando las técnicas standar¹⁷ nos permite encontrar las amplitudes y_j^l y posteriormente obtener el campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones en cada punto sin más que combinar la ecuación (11) con las (1)-(3).

PUNTES CAJON CON PLANTA CIRCULAR

Consideraremos en primer lugar el análisis dinámico de puentes cajón con planta circular (vease Figura 1). En la formulación que a continuación se presenta se utiliza la teoría de Reissner-Mindlin de láminas troncocónicas cuyos detalles más significativos pueden encontrarse en la referencia¹⁶. El campo local de desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}$ puede expresarse para cada banda como:

$$\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0, \theta_s, \theta_t]^T = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^k \mathbf{S}^l \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{a}}_i^l \tag{14}$$

donde k es el número de nodos de la banda, m es el número de términos del desarrollo armónico utilizados, \bar{u}_0 , \bar{v}_0 y \bar{w}_0 son los desplazamientos locales de la superficie media de la estructura y θ_s y θ_t son los giros locales del vector normal a la superficie media (véase Figura 2).

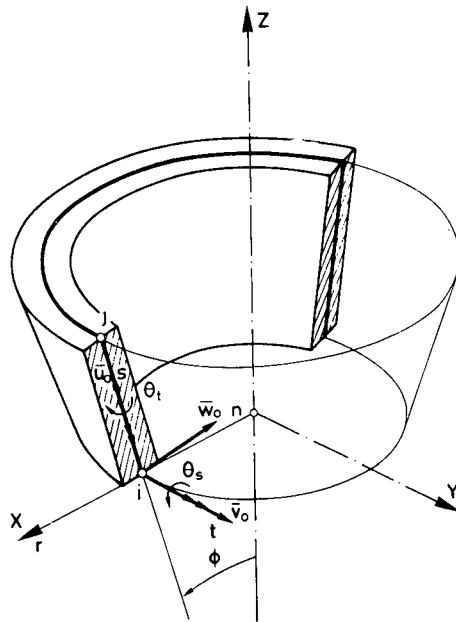


Figura 2. Convenio de signos para los desplazamientos en una lámina troncocónica

$$\mathbf{N}_i = N_i \mathbf{I}_5 \quad , \quad \mathbf{S}^l = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^l & & & & \\ & \mathbf{C}^l & & & \\ & & \mathbf{S}^l & & \\ & & & \mathbf{S}^l & \\ & & & & \mathbf{C}^l \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_i^l = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{0i}^l \\ \bar{v}_{0i}^l \\ \bar{w}_{0i}^l \\ \theta_{si}^l \\ \theta_{ti}^l \end{Bmatrix} \tag{15}$$

donde \mathbf{I}_5 es la matriz unidad de orden 5×5 $\mathbf{S}_l = \sin \left(\frac{l\pi}{\alpha} \theta \right)$ $\mathbf{C}_l = \cos \left(\frac{l\pi}{\alpha} \theta \right)$ y α es el ángulo del sector circular del desarrollo en planta del puente (véase Figura 1). Puede comprobarse con facilidad que las funciones armónicas elegidas satisfacen las condiciones de contorno de extremos, $\theta = 0$ y $\theta = \alpha$, simplemente apoyados con la sección rigidizada en su plano.

Campo de Deformaciones

El vector de deformaciones locales generalizadas puede escribirse según¹⁶ como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_b \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \end{Bmatrix} = \sum_{l=i}^m \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} \mathbf{S}_m^l & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_b^l & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_s^l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{mi}^l \\ \mathbf{B}_{bi}^l \\ \mathbf{B}_{si}^l \end{Bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_i^l = \sum_{l=1}^m \sum_{i=l}^k \hat{\mathbf{S}}^l \mathbf{B}_i^l \bar{\mathbf{a}}_i^l \quad (16)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_m$, $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ son los vectores de deformaciones generalizadas de membrana, flexión y cortante respectivamente. Las expresiones de las matrices y vectores que aparecen en la ecuación (16) se muestran en la Figura 3 donde ϕ es el ángulo que forma la banda con el eje global z .

Relaciones tensión-deformación

La relación entre las tensiones y deformaciones locales generalizadas puede escribirse en la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{N}_r, \mathbf{N}_s, \mathbf{N}_{st}, \mathbf{M}_s, \mathbf{M}_{st}, \mathbf{Q}_s, \mathbf{Q}_t]^T = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (17)$$

donde \mathbf{D} es la matriz de constantes elásticas que para un material isótropo puede escribirse

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & & 0 \\ & \mathbf{D}_b & \\ 0 & & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \quad (18)$$

con

$$\mathbf{D}_m = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_b = \frac{t^2}{12} \mathbf{D}_m \quad \mathbf{D}_s = \frac{Et\beta}{1(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde E , ν y t son el módulo de Young, coeficiente de Poisson y espesor respectivamente y β es el coeficiente necesario para tener en cuenta de forma correcta la energía de deformación por cortante ($\simeq \frac{5}{6}$ para placas rectangulares). Los convenios de signos para las tensiones resultantes pueden verse en la Figura 4.

Matriz de Rigidez y Vector de Cargas

Utilizando el principio de los Trabajos Virtuales^{5,16,17} se obtiene el sistema dinámico desacoplado para cada término del desarrollo armónico de la ecuación (6) con

$$\bar{\mathbf{K}}_{ij}^{ll} = \frac{\alpha}{2} \int_{a^e} [\mathbf{B}_i^l]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^l r ds \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{ij}^{ll} = \frac{\alpha}{2} \int_{a^e} \mathbf{M}_i^T \mathbf{P} \mathbf{N}_j r ds \quad (21)$$

$$\epsilon_m = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial s} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_0}{r} \sin \phi - \frac{\bar{v}_0}{r} \cos \phi \\ \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \theta} - \frac{\bar{v}_0}{r} \sin \phi \end{array} \right\} ; \epsilon_b = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_s}{\partial s} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_s}{\partial \theta} + \frac{\theta_s}{r} \sin \phi \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_s}{\partial \theta} - \frac{\theta_s}{r} \sin \phi - \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial s} \end{array} \right\}$$

$$; \epsilon_s = \left\{ \begin{array}{l} \theta_s + \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial s} \\ \theta_s + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_0}{r} \cos \phi \end{array} \right\}$$

$$\epsilon = \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_m \\ \epsilon_b \\ \epsilon_s \end{array} \right\} = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^k \hat{S}^l \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_{mi}^l \\ \mathbf{B}_{bi}^l \\ \mathbf{B}_{si}^l \end{array} \right\} \mathbf{a}_i^l$$

$$\mathbf{B}_{mi}^l = \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{N_i}{r} \sin \phi & -\frac{N_i}{r} \gamma & -\frac{N_i}{r} \cos \phi & 0 & 0 \\ \frac{N_i}{r} \gamma & \frac{\partial N_i}{\partial s} - \frac{N_i}{r} \sin \phi & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}_{bi}^l = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N_i}{r} \sin \phi & -\frac{N_i}{r} \gamma \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\cos \phi}{r} & 0 & \frac{N_i}{r} \gamma & \frac{\partial N_i}{\partial s} - \frac{N_i}{r} \sin \phi \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}_{si}^l = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial s} & N_i & 0 \\ 0 & \frac{N_i}{r} \cos \phi & \frac{N_i}{r} \gamma & 0 & N_i \end{array} \right]$$

$$\hat{S}^l = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{S}_m^l & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_s^l \end{array} \right] \quad \mathbf{S}_m^l = \mathbf{S}_b^l = \left[\begin{array}{cc} S^l & 0 \\ 0 & C^l \end{array} \right] \quad \mathbf{S}_s^l = \left[\begin{array}{cc} S^l & 0 \\ 0 & C^l \end{array} \right]$$

$$S^l = \sin \gamma \theta \quad , \quad C^l = \cos \gamma \theta \quad \text{with} \quad \gamma = \frac{l\pi}{\alpha}$$

Figura 3. Vectores y matrices de deformación para una banda troncocónica

y

$$\mathbf{f}_i^l = \frac{\alpha}{2} \int_{a^e} N_i \mathbf{b}^l r ds + \frac{\alpha}{2} \int_{a^e} N_i \mathbf{t}^l r ds \quad (22)$$

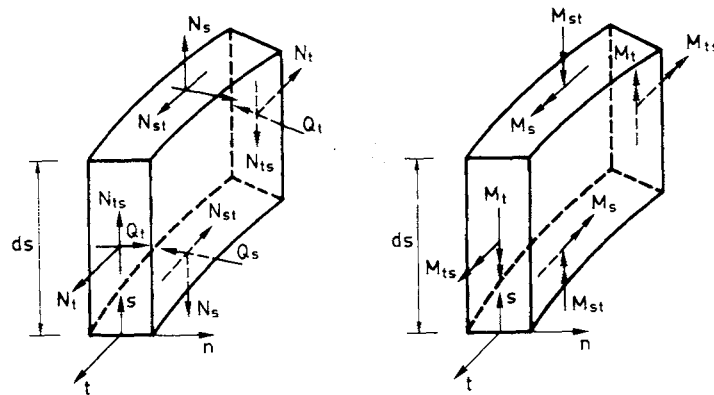


Figura 4. Convenio de signos de los esfuerzos generalizados en una lámina troncocónica

donde r es la distancia radial (véase Figura 2) y todos los vectores y matrices ya han sido definidos anteriormente excepto

$$\mathbf{P} = \rho t \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & \\ & 0 & \frac{t^2}{12} & \\ & & & \frac{t^2}{12} \end{bmatrix} \quad (23)$$

en la que ρ es la densidad del material. Las amplitudes \mathbf{b}^l y t^l se obtienen, en los ejes globales, directamente en la forma usual usando la fórmula de Euler⁵. Para una carga uniformemente distribuida de intensidad $t(\theta)$ tenemos

$$t^l = \frac{\int_{y_1}^{y_2} t \mathbf{S}^l d\theta}{\int_0^\alpha [\mathbf{S}^l]^2 d\theta} \quad (24)$$

donde \mathbf{S}^l es la matriz trigonométrica dada por la ecuación (16) y y_1 e y_2 son los límites de la posición de la carga a lo largo de la dirección prismática. La expresión de f_i^l para los diferentes tipos de carga puede deducirse fácilmente a partir de las ecuaciones (14) y (24). El lector puede encontrar más detalles sobre este aspecto en las referencias^{5,7,16}.

La barra en las matrices $\bar{\mathbf{K}}^{ll}$ y $\bar{\mathbf{M}}^{ll}$ significa que están expresadas en los ejes (s, t, n) locales de la banda (véase Figura 2). El proceso de ensamblaje de las distintas bandas precisa de su transformación a los ejes globales (X, Y, Z) en la forma matricial clásica¹⁷.

$$\mathbf{K}_{ij}^{ll} = \mathbf{T}^{(e)} \bar{\mathbf{K}}_{ij}^{ll} [\mathbf{T}^{(e)}]^T = \frac{\alpha}{2} \int_{a^e} [\hat{\mathbf{B}}_i^l]^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}}_j^l r ds \quad (25)$$

con

$$\hat{\mathbf{B}}_i = \mathbf{B}_i^l [\mathbf{T}^{(e)}]^T \quad (26)$$

y

$$\mathbf{M}_{ij}^{ll} = \mathbf{T}^{(e)} \overline{\mathbf{M}}_{ij}^{ll} [\mathbf{T}^{(e)}]^T = \overline{\mathbf{M}}_{ij}^{ll} \quad (27)$$

donde $\mathbf{T}^{(e)}$ es la matriz de transformación de ejes locales a globales

$$\mathbf{a}_i^{(l)} = \mathbf{T}^{(e)} \overline{\mathbf{a}}_i^{(l)} \quad \text{y} \quad \mathbf{f}_i^l = \mathbf{T}^{(e)} \overline{\mathbf{f}}_i^l \quad (28)$$

siendo los vectores globales de fuerzas y desplazamientos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^l &= [u_{0i}^l, v_{0i}^l, w_{0i}^l, \theta_{xi}^l, \theta_{yi}^l, \theta_{zi}^l]^T \\ \mathbf{f}_i^l &= [U_{0i}^l, V_{0i}^l, W_{0i}^l, M_{xi}^l, M_{yi}^l, M_{zi}^l]^T \end{aligned} \quad (29)$$

y

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} S & 0 & -C & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ C & 0 & S & & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & 0 & & 0 & S & \\ & & & 0 & -C & \end{bmatrix} \quad (30)$$

con $S = \sin \phi^{(e)}$ y $C = \cos \phi^{(e)}$

La transformación general de la matriz de rigidez y de masa desde los ejes locales a globales involucra un sexto giro global θ_z^l . Esta circunstancia puede dar problemas cuando se intenta realizar el ensamblaje de elementos coplanares (elementos que están situados en un mismo plano) ya que la inclusión del sexto grado de libertad no es estrictamente necesario y por lo tanto produce la singularidad de las matrices globales. Este problema ha sido resuelto en este trabajo siguiendo el siguiente esquema. Para los nodos coplanares los grados de libertad de giro se ensamblan directamente en el sistema coordinado local mientras que los desplazamientos se transforman y ensamblan en el sistema global. Esto implica trabajar con cinco y seis grados de libertad para elementos coplanares y no coplanares respectivamente lo que dificulta el algoritmo utilizado para resolver el sistema de ecuaciones resultante. El uso de cualquier otro procedimiento estándar para eliminar la singularidad provocada por la coplanaridad, no es adecuado en problemas dinámicos ya que añaden una rigidez rotacional plana ficticia en los nodos coplanares que puede dar lugar a modos de vibración espureos que pueden perturbar la solución^{5,7}.

Matrices de rigidez y masa para el elemento de dos nodos

Los elementos tipo banda basados en la teoría de Reissner-Mindlin presentan el fenómeno de bloqueo numérico de la solución cuando se aplican en el contexto de espesores delgados (muy pequeños)^{15,17}. Este fenómeno puede evitarse por diferentes procedimientos destacando aquí entre todos, el uso de técnicas especiales de integración

numérica. Oñate y Suárez^{15,16} mostraron que el elemento simple de dos nodos con integración reducida, es decir, evaluando las funciones subintegrales en un solo punto, presenta un excelente comportamiento para el análisis estático de estructuras prismáticas. Además esta técnica permite obtener una expresión explícita de la matriz de rigidez sin más que evaluar el integrando de la ecuación (26) en el punto medio del elemento

$$\mathbf{K}_{ij}^{ll} = \frac{a^e \alpha}{2} \left[\left[\hat{\mathbf{B}}_i^l \right]^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}}_j^l r \right]_{\xi=0} \quad (31)$$

La forma explícita de la matriz de deformación $\hat{\mathbf{B}}_i^l$ de la ecuación (26) en el punto medio del elemento puede obtenerse simplemente tomando $\frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{-1^i}{a^e}$, $N_i = \frac{1}{2}$ y r igual al radio medio del elemento en todas las matrices de la Figura 3.

La evaluación de la matriz de masa concentrada de la ecuación (21) para un elemento lineal de densidad y espesor constante, simplemente necesita de la integración de los términos cuadráticos obtenidos de los productos $N_i N_j$ cuya evaluación en el punto medio del elemento es de $\frac{1}{4}$.

PUENTES CAJON RECTOS

La formulación para puentes cajón rectos puede obtenerse con facilidad a partir de la presentada para puentes cajón con planta circular en las secciones anteriores. En la Figura 1 se muestra una geometría, y la discretización típica de un puente cajón recto. Todas las expresiones para los vectores de desplazamientos, deformaciones y tensiones pueden obtenerse directamente desde sus correspondientes formas para puentes con planta circular simplemente sustituyendo el sistema coordenado curvilíneo local (s, t, n) por el local cartesiano (\bar{x}, y, \bar{z}) , las derivadas $\frac{\partial}{r \partial \theta}$ por $\frac{\partial}{\partial y}$, los términos que llevan $\frac{1}{r}$ por cero y el ángulo del sector circular α por su longitud b . Las expresiones de los vectores \mathbf{u} , $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ y la matriz de deformaciones generalizadas así obtenidas, pueden verse en la Figura 6. Es interesante hacer notar que la matriz de deformación para puentes cajón rectos puede obtenerse directamente a partir de sus correspondientes expresiones circulares sustituyendo en \mathbf{B}_i^l de la Figura 3 el valor γ por $r \frac{t}{b}$ y haciendo r igual a un número grande de forma que los términos $\frac{1}{r}$ puedan ser despreciados.

Las matrices locales de rigidez y de masa para una banda vienen dadas por^{14,16}

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{ij}^{ll} &= \frac{b}{2} \int_a^e \left[\mathbf{B}_i^l \right]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^l d\bar{x} \\ \bar{\mathbf{M}}_{ij}^{ll} &= \frac{b}{2} \int_a^e \mathbf{N}_i^T \mathbf{P} \mathbf{N}_j d\bar{x} \end{aligned} \quad (32)$$

donde \mathbf{N}_i , \mathbf{D} y \mathbf{P} tiene la misma expresión que la dada por las ecuaciones (14), (18) y (21) respectivamente. El vector de fuerzas respecto a los ejes globales tiene la forma siguiente :

$$\mathbf{f}6l_i = \frac{b}{2} \int_{a^e} N_i \mathbf{b}^l d\bar{x} + \frac{b}{2} \int_{a^e} N_i t^l d\bar{x} \quad (33)$$

La transformación de las matrices locales a globales se realiza siguiendo los mismos pasos expuestos para los puentes con planta circular.

$$\mathbf{M}_{ij}^{ll} = \frac{\beta \rho t a^e}{4} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{t^2}{12} & & \\ & & & & \frac{t^2}{12} & \\ & 0 & & & & \frac{t^2}{12} \end{bmatrix}$$

Figura 5. Matriz de masa concentrada para la banda lineal

La utilización del elemento lineal permite explicitar la matriz de rigidez tras evaluarla en un solo punto de integración (sustituyendo α por b y haciendo $r = 1$ en la ecuación (31)). La evaluación de $\hat{\mathbf{B}}_i^l$, dada por la ecuación (26), en $\xi = 0$ puede realizarse para este caso tomando $\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{-1^i}{a^e}$ y $N_i = \frac{1}{2}$ en la matriz de deformación de la Figura 6. La forma completa de la matriz global de masa concentrada para la banda lineal se presenta en la Figura 5.

PLACAS RECTAS Y CIRCULARES

La formulación de banda finita para el análisis de placas puede ser obtenida directamente simplificando la formulación de puentes cajón presentada en las secciones previas sin más que despreciar los efectos de membrana y describir el campo de desplazamientos considerando exclusivamente la flecha vertical w y los giros θ_x y θ_y (véase Figura 7).

Entonces las matrices globales de rigidez y de masa y el vector de cargas para el l -ésimo término del desarrollo armónico vienen dadas por las ecuaciones (20)-(22) o (32)-(33) para el caso circular y recto respectivamente con

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} & \mathbf{B}^l &= \left\{ \begin{matrix} \mathbf{B}_b^l \\ \mathbf{B}_s^l \end{matrix} \right\} \\ \mathbf{P} &= \rho t \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \frac{t^2}{12} & \\ 0 & & \frac{t^2}{12} \end{bmatrix} & \mathbf{N}_i &= \begin{bmatrix} N_i & & 0 \\ & N_i & \\ 0 & & N_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

Las expresiones para \mathbf{B}_b^l y \mathbf{B}_s^l para placas rectas y circulares pueden deducirse con facilidad desde las Figuras (6) y (3) respectivamente. La forma explícita de la matriz de rigidez para el elemento lineal mediante integración en un sólo punto puede también

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{v}_0 \\ \bar{w}_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^k \mathbf{S}^l \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{a}}_i^l$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_m \\ \boldsymbol{\epsilon}_b \\ \boldsymbol{\epsilon}_s \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^k \hat{\mathbf{S}}^l \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{m}^l \\ \mathbf{B}_{bl}^l \\ \mathbf{B}_{si}^l \end{Bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_i^l$$

$$\mathbf{B}_{mi}^l = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_i \frac{l\pi}{b} & 0 & 0 & 0 \\ N_i \frac{l\pi}{b} & \frac{\partial N_i}{\partial x} i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{bi}^l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_i \frac{l\pi}{b} \\ 0 & 0 & 0 & N_i \frac{l\pi}{b} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{si}^l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \frac{l\pi}{b} & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_m \\ \boldsymbol{\sigma}_b \\ \boldsymbol{\sigma}_s \end{Bmatrix} \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}$$

Figura 6. Campos locales de desplazamientos y deformaciones y esfuerzos generalizadas en el análisis por Banda Finita de puentes rectos

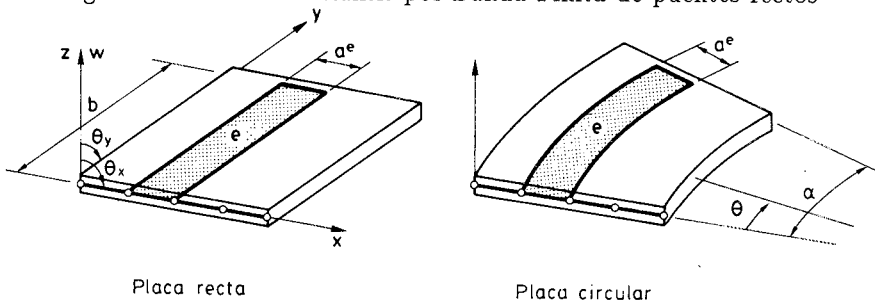


Figura 7. Discretización de Banda Finita en placas rectas y circulares

obtenerse fácilmente¹⁵. La matriz de masa concentrada puede deducirse directamente en la Figura 5 prescindiendo de las filas y columnas adecuadas.

LAMINAS DE REVOLUCION

La formulación para el análisis de láminas de revolución con carga cualquiera (Figura 8) sigue los pasos expuestos para puentes cajón con planta circular. Los campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones tienen idénticas expresiones que las dadas para este caso¹⁶. Sin embargo en los desarrollos de Fourier necesarios para simular el comportamiento circunferencial es usual separar las contribuciones simétricas y antimétricas de la deformación como:

$$\mathbf{u} = \sum_{l=0}^m \sum_{i=l}^K \mathbf{N}_i (\bar{\mathbf{S}}_l \bar{\mathbf{a}}_i^l + \overline{\overline{\mathbf{S}}}_l \overline{\overline{\mathbf{a}}}_i^l) \quad (35)$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{N}_i vienen dadas por las ecuaciones (14) y (15) respectivamente y $\bar{\mathbf{S}}_l$ y $\overline{\overline{\mathbf{S}}}_l$ son los desarrollos de Fourier que contienen los términos simétricos y antimétricos respectivamente del campo de desplazamientos^{16,17}. Es digno de mención que $\overline{\overline{\mathbf{S}}}_l$ coincide con la matriz \mathbf{S}_l de la ecuación (15) con $S_l = \sin l\theta$ y $C_l = \cos l\theta$, y $\bar{\mathbf{S}}_l$ se obtiene a partir de $\overline{\overline{\mathbf{S}}}_l$ intercambiando S_l por C_l y viceversa¹⁷. El plano de simetría o antisimetría viene definido por $\theta = 0$. Debe hacerse notar que el campo de desplazamientos incluye también el término del desarrollo $l = 0$ que tiene un claro significado físico correspondiente a una deformación de revolución.

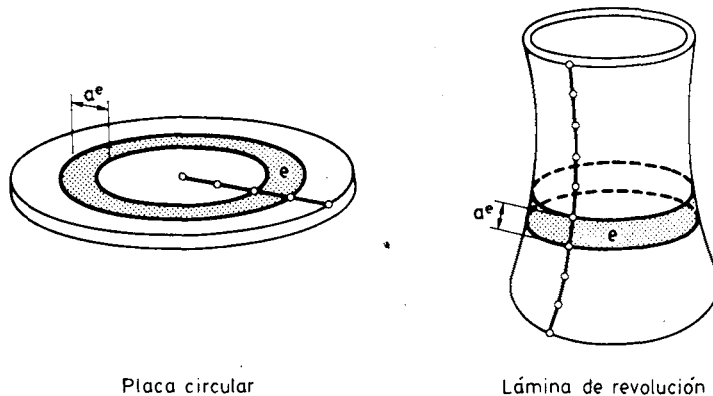


Figura 8. Discretización de Banda Finita en láminas de revolución

Para simplificar el cálculo se pueden evaluar aisladamente las contribuciones simétrica y antimétrica, pudiendo obtener una deformación arbitraria como superposición de ambas componentes.

Las matrices locales de rigidez y de masa y el vector de fuerzas vienen dados por las ecuaciones (20)-(22) con las siguientes puntualizaciones:

- a) El valor de α debe sustituirse en todas las integrales por 2π cuando $l = 0$ y por π cuando $l \neq 0$. Esto se debe a que la longitud de la banda es ahora toda la circunferencia.

- b) La matriz de deformación generalizada B_i^l es idéntica a la dada en la Figura 3 con $\gamma = -l$ ó l para los casos de deformación simétrica y antisimétrica respectivamente.

La transformación de las matrices locales al sistema global de referencia sigue los mismos pasos expuestos para puentes cajón con planta circular. También es posible obtener la forma explícita de las matrices de rigidez y de masa para el elemento de dos nodos a partir de la ecuación (31) y la Figura 5 sin más que introducir las puntualizaciones mencionadas anteriormente.

EJEMPLOS

La eficiencia de la formulación presentada así como la aproximación que proporciona el elemento de dos nodos con integración reducida para el análisis estructural dinámico, se comprueba con los ejemplos de vibraciones libres y forzadas que se presentan a continuación.

Ejemplo 1. Vibraciones libres de un puente losa recto con vigas

La geometría y propiedades del material del puente se muestran en la Figura 9. La sección transversal del puente se ha discretizado en 24 bandas. En la Figura 9 se comparan las frecuencias naturales obtenidas con el elemento de dos nodos para los cinco modos más bajos de los tres primeros armónicos con los resultados proporcionados por Cheung⁵ usando una formulación basada en la teoría de láminas delgadas. De la misma forma que en el caso estático¹⁶ la aproximación de los resultados obtenidos en este análisis muestra la eficiencia del elemento lineal con integración reducida para modelar el comportamiento dinámico de láminas delgadas.

Ejemplo 2. Respuesta transitoria dinámica de una placa cuadrada gruesa simplemente apoyada en sus extremos.

La geometría y las propiedades del material de la placa se muestran en la Figura 10. La placa está sometida a una presión uniforme constante de 21.11 Kg/cm^2 . La placa se discretiza en 10 bandas y los resultados obtenidos para la distribución en el tiempo de la flecha en el punto medio de la placa se presentan en la Figura 10. El método propuesto proporciona excelentes resultados en relación con los dados por la referencia¹⁸ que, para comparación, se presentan en la misma figura.

Ejemplo 3. Respuesta transitoria dinámica de una cúpula esférica empotrada

En la Figura 11 se muestran la geometría y propiedades del material de la cúpula. La cúpula está sometida a una presión uniforme constante en el tiempo de 600 p.s.i. y el análisis se ha realizado discretizandola en 10 bandas lineales de revolución. En la Figura 11 se presenta la variación en el tiempo de los resultados obtenidos para los valores de la flecha vertical en el centro de la cúpula utilizando la formulación presentada en este trabajo y su comparación con los proporcionados por Bathe y otros¹⁹, mostrados en la misma figura, es excelente.

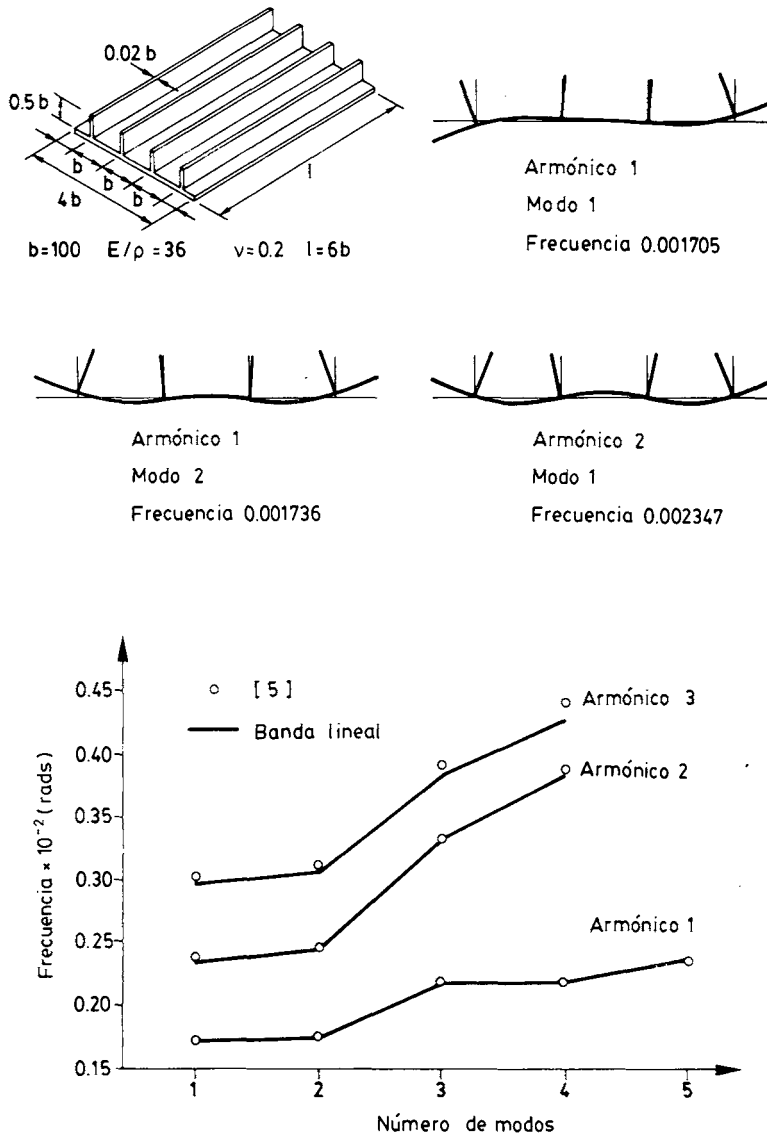


Figura 9. Puente de losas y Vigas. Amplitud y frecuencias nodales para varios términos del desarrollo armónico

CONCLUSIONES

En este artículo se presenta una formulación para el análisis dinámico de estructuras laminares prismáticas delgadas y moderadamente gruesas. En los desarrollos realizados se muestra como las diferentes matrices y vectores para los elementos tipo banda que proporciona la formulación para el análisis de placas, puentes cajón y láminas de revolución pueden obtenerse fácilmente a partir de las expresiones generales asociadas al caso de banda troncocónica. La utilización del elemento lineal con un sólo punto de integración numérica permite obtener una forma explícita simple de todas las matrices y vectores que intervienen haciendo la formulación especialmente atractiva para su uso en

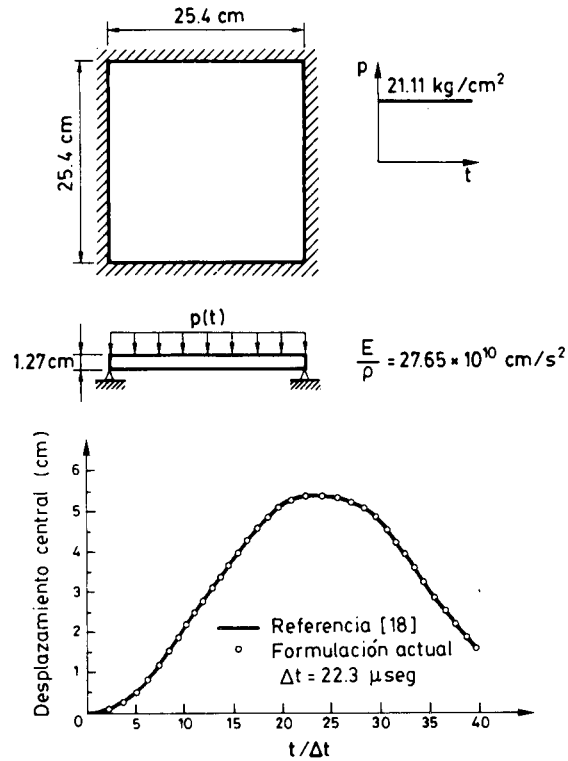


Figura 10. Respuesta dinámica transitoria de una placa gruesa simplemente apoyada en sus cuatro bordes

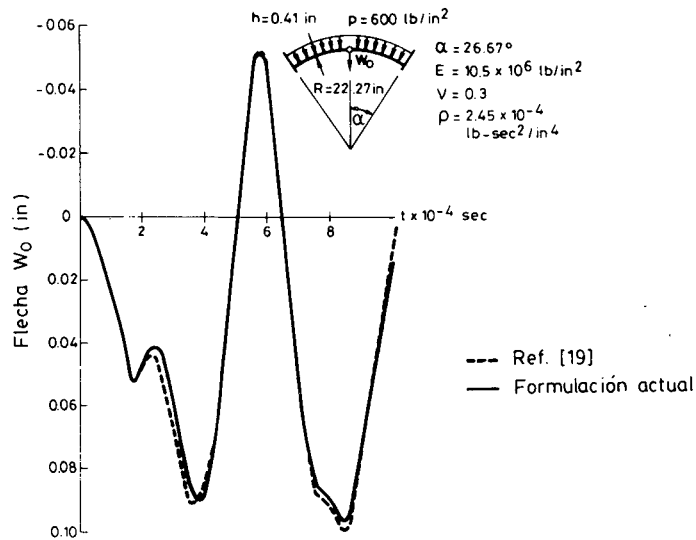


Figura 11. Respuesta dinámica transitoria de una cúpula esférica empotrada

ordenadores personales. Los ejemplos analizados muestran el excelente comportamiento del elemento-banda lineal para el análisis dinámico de vibraciones libres y forzadas.

REFERENCIAS

1. Y. K. Cheung, "Finite strip method of elastic slabs", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, Vol. **94**, pp. 1365-1378, (1968).
2. Y. K. Cheung, "The finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simple supported ends", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, Vol. **40**, pp. 1-7, (1968).
3. Y. K. Cheung, "Analysis of box girder bridges by the finite strip method", *Am. Concr. Ins. Publications. Sp.*, Vol. **16**, pp. 357-378, (1969).
4. Y. K. Cheung, "Folded plate structures by the finite strip method", *Am. Soc. Civ. Eng.*, Vol. **96**, pp. 2963-2979, (1969).
5. Y. K. Cheung, "The finite strip method in structural analysis", Pergamon Press, Oxford, (1969).
6. Y. C. Loo y Y.A.R. Cusens, "A refined finite strip method for the analysis of orthotropic plates", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, Vol. **48**, pp. 85-91, (1970).
7. Y. C. Loo y Y.A.R. Cusens, "The finite strip method in bridge engineering", Viewpoint, (1978).
8. K. J. Willian y A. C. Scordelis, "Analysis of orthotropic folded plates with eccentric stiffness", *Report SESM70-2*, Dept. of Civil Engng. Univ. of California, Berkeley, (1970).
9. E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J. Appl. Mech.*, Vol. **12**, pp. 69-77, (1945).
10. R. D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates", *J. Appl. Mech.*, Vol. **18**, pp. 31-38, (1951).
11. P. R. Benson y E. Hinton, "A thick finite strip for static, free vibration and stability problems", *Int. J. Nun. Meth. Engng.*, Vol. **10**, pp. 665-678, (1976).
12. D. J. Dawe, "Finite strip models for vibration of Mindlin plates", *Journal of Sound and vibration*, Vol. **59**, pp. 441-452, (1978).
13. O. L. Ronfacil y D. J. Dawe, "Vibration analysis of rectangular Mindlin plates by the finite method", *Compt. and Struct.*, Vol. **12**, pp. 833-842, (1980).
14. E. Oñate, "Comparisons of finite strip methods for the analysis of box girder bridges", *M. Sc. Thesis*, Civil Eng. Dept., Univ. College of Swansea, (1976).
15. E. Oñate y B. Suarez, "A comparison of the linear, quadratic and cubic Mindlin strip elements for the analysis of thick and thin plates", *Compt. and Struct.*, Vol. **17**, pp. 427-439, (1983).
16. E. Oñate y B. Suarez, "A unified approach for the analysis of bridges, plates and axisymmetric shells using the linear Mindlin strip element", *Compt. and Struct.*, Vol. **17**, pp. 407-416, (1983).
17. O. C. Zienkiewicz, "The finite element method", Mc. Graw Hill, (1979).
18. S. Saigal y T. Y. Yang, "Nonlinear Dynamic Analysis with a 48 D.O.F. Curved Thin Shell Element", *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, Vol. **21**, No. 6, (1985).
19. K. J. Bathe, E. Ramm y E. L. Wilson, "Finite element formulation for large deformations dynamic analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **9**, pp. 353-386, (1975).