

EVALUACION DE INTEGRALES SINGULARES Y CUASISINGULARES EN EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO BIDIMENSIONAL MEDIANTE TRANSFORMACIONES NO LINEALES

E. ALARCON*
M. DOBLARE**
y
J. SANZ-SERNA***

**Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales, E.T.S.I.I.U.P. Madrid.*

***Departamento de Ingeniería Mecánica, E.T.S.I.I., Universidad de Zaragoza.*

****Dpto. de Matemática Aplicada y Computación, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid.*

RESUMEN

Se presentan en este trabajo distintos métodos, basados en transformaciones de coordenadas no-lineales, para la evaluación de las integrales singulares y cuasisingulares que aparecen en el Método Directo de los Elementos de Contorno. Se detecta un error inherente a algunas de las transformaciones propuestas y finalmente se sugieren dos nuevas transformaciones que mejoran las actualmente disponibles.

SUMMARY

We discuss several methods, based on nonlinear coordinate transformations, for the evaluation of the singular and quasisingular integrals that appear in the Direct Boundary Element Method. An intrinsic error of some of these methods is detected. Two new transformations are suggested which improve on those currently available.

INTRODUCCION

Uno de los aspectos esenciales para la aplicación del Método de los Elementos de Contorno (M.E.C.) en su versión "directa" lo constituye el cálculo preciso de las integrales que aparecen en los coeficientes del sistema de ecuaciones resultado de la discretización del problema. Este cálculo exigió desde el principio la utilización de técnicas especiales, debido a las singularidades inherentes al integrando (débilmente singulares o singularidades en el sentido de Cauchy).

Recibido: Diciembre 1989

En el caso de discretizarse con elementos rectos con aproximación constante o lineal, es posible realizar estas integraciones analíticamente^{1,2}. Sin embargo, la extensión a elementos curvos es, en general, inviable. Otras muchas técnicas semianalíticas, como la suma y resta de la singularidad esencial, pueden utilizarse con una precisión aceptable. Naturalmente, en este caso es necesario conocer el coeficiente de la singularidad para cualquier tipo de problema e interpolación, lo que exige un esfuerzo analítico inicial, y sobre todo la necesidad de incorporar programaciones diferentes para cada tipo de problema perdiendo sistematización^{3,4,5}.

Otra alternativa sería utilizar cuadraturas ad hoc³, o técnicas particulares, siendo posible por ejemplo obtener ciertos elementos singulares mediante la consideración de casos especiales (potencial constante en teoría del potencial o desplazamientos como sólido rígido en elasticidad). De nuevo nos encontramos con dificultades que surgen de la necesidad de utilizar distintos tipos de cuadraturas en un mismo programa, y a veces la imposibilidad o dificultad (caso axisimétrico) de encontrar o programar dichos estados especiales de "deformación". Esta alternativa ha sido la más utilizada.

Es de resaltar que la necesidad de este tipo de técnicas se ha hecho aún más imperiosa debido al salto cualitativo que han supuesto las técnicas de elementos de contorno adaptables^{6,7,8}, que imponen funciones de aproximación de alto grado y un gran número de nudos situados en el interior de los elementos.

Finalmente, sería deseable la extensión de estas técnicas a situaciones cuasisingulares como las que se producen cuando el punto de colocación está muy próximo al intervalo de integración, lo que ocurre en los casos de elementos contiguos con longitudes muy distintas, en el cálculo de variables en puntos internos próximos al contorno y sobre todo en la versión p-adaptable donde los puntos de colocación pueden ubicarse muy próximos a los extremos. La deseable completa libertad en la discretización hace necesario pues el plantearse también este problema como uno de los más interesantes a resolver.

Por consiguiente, parece necesario buscar una cuadratura suficientemente robusta capaz de acometer de forma precisa y eficiente la integración de los términos singulares de diversos tipos que aparecen en la formulación del M.E.C., como los correspondientes a las situaciones apuntadas anteriormente. En realidad, existen cuadraturas especialmente indicadas para la integración de distintos tipos de integrando singular ($\ln(r)$, $1/r$, ...) ^{9,10}; sin embargo, sería necesario incluir gran cantidad de fórmulas de este tipo ya que en las más precisas de ellas los pesos y abscisas dependen de la posición de la singularidad en el interior del intervalo, que es variable en la versión p-adaptable. Además la dificultad de expresar ciertos integrandos (caso axisimétrico) en la forma estandarizada para estas integrales (independientemente de que su singularidad asintótica sea conocida) hace aún menos deseable la utilización de estas fórmulas.

La última posibilidad consiste en utilizar cuadraturas estándar y transformaciones no lineales del intervalo de integración que conduzcan a integrandos mejor condicionados o regulares. Varias de ellas han sido ya propuestas^{11,12,13}, siendo el objetivo de este trabajo demostrar el por qué de su funcionamiento en algunos casos y la presentación de una propuesta consistente.

TRANSFORMACIONES NO LINEALES EN EL CALCULO DE INTEGRALES SINGULARES BIDIMENSIONALES

Al margen de otro tipo de posibilidades para la integración de integrales con singularidad tipo Cauchy, algunas de las cuales se desarrollan en ³, últimamente se han propuesto distintos tipos de transformaciones no lineales en la idea de regularizar el integrando en las proximidades de la singularidad^{11,12,13}.

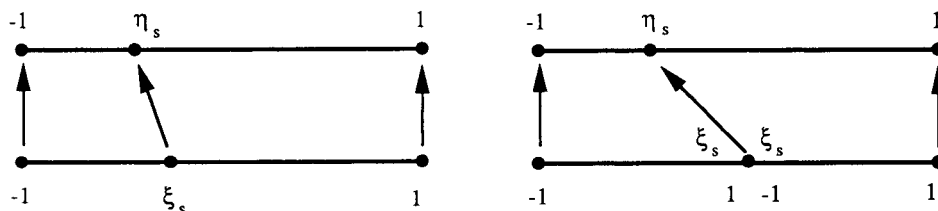
Las tres realizan una transformación del espacio de integración (η) en otro espacio de integración (ξ) sobre el que se integra.

Según los autores, las transformaciones tienen los siguientes objetivos:

- Agrupar los puntos de integración en torno a la singularidad (η_s), para así evaluar mejor las contribuciones mayores de la integral.
- Aproximar el jacobiano a cero en puntos próximos al punto singular (η_s).
- Obtener variaciones suaves del jacobiano en el entorno del punto singular (η_s).

Analicemos dichas transformaciones, para lo cual definamos un espacio de integración (η) en un intervalo $(-1, 1)$ y un punto singular η_s , dentro de este intervalo.

Los dos últimos tipos de transformación^{12,13} exigen subdividir el intervalo de integración numérica $(-1, 1)$ en dos subintervalos de integración dados por $(-1, \eta_s)$ y $(\eta_s, 1)$ y definir en cada uno de estos subintervalos una transformación a otro intervalo de integración, de forma que ξ varía entre $(-1, 1)$ cuando η lo hace en distintos intervalos. En la Figura 1 se muestran las dos transformaciones indicadas.



a) Transformación de Telles. b) Transformaciones de Cerrolaza y Alcantud.

Figura 1. Transformaciones no lineales.

Con estas condiciones se definen las transformaciones de los subespacios de integración (ξ) a (η) de la forma:

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d && \text{para las transformaciones (11) y (12)} \\ \eta(\xi) &= a\xi + b.tg[\phi(\xi)] + c && \text{para la transformación (13)} \end{aligned}$$

con

$$\phi(\xi) = n \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (\xi S + 1)$$

(1)

y

$S = +1$, si la integración es por la derecha de η_s .

$S = -1$, si la integración es por la izquierda de η_s .

Las condiciones de contorno que se imponen a cada una de las transformaciones están definidas por:

CUBICA (11)	BICUBICA (12)	BITANGENTE (13)
$\eta(\xi = S) = S$	$\eta(\xi = S) = S$	$\eta(\xi = S) = S$
$\eta(\xi = -S) = \eta_s$	$\eta(\xi = -S) = \eta_s$	$\eta(\xi = -S) = \eta_s$
$\left(\frac{\partial \eta(\xi)}{\partial \xi}\right)_{\xi=-S} = 0$	$\left(\frac{\partial \eta(\xi)}{\partial \xi}\right)_{\xi=-S} = 0$	$\eta(\xi = -S\xi_a) = \eta_s + S\varepsilon$
$\left(\frac{\partial^2 \eta(\xi)}{\partial \xi^2}\right)_{\xi=-S} = 0$	$\eta(\xi = -S\xi_a) = \eta_s + S\varepsilon$	(2)

con ξ_a la abscisa de Gauss de mayor valor absoluto.

Por otro lado, se define el valor de ε como la distancia al punto η_s a la que se desea quede después de la transformación el punto de integración más próximo a η_s , tanto por la izquierda como por la derecha.

El efecto que se pretende conseguir con esta condición es que, al integrar singularidades del tipo $(1/r)$, la suma de los valores de la integral por la izquierda y por la derecha para el primer punto de integración (que son los puntos de mayor valor de la integral y de más difícil precisión), tienda a anularse. En definitiva simular la simetría implícita en la definición de valor principal de Cauchy.

Si se representa gráficamente el efecto conseguido por los tipos de transformación aquí definidos, se tiene la Figura 2.

Como se observa, todas las transformaciones tienden a acercar los puntos de integración al punto singular η_s y las transformaciones del tipo cúbica y bicúbica hacen que el valor de la derivada de $\eta(\xi)$ sea igual a cero en el punto η_s .

Por otra parte, la transformación cúbica exigirá que en el punto η_s la derivada segunda sea igual a cero, con lo que se asegura que el punto η_s sea siempre un punto de inflexión, aprovechando así otra ventaja de esta transformación, y es que el jacobiano es aproximadamente constante en las proximidades de η_s .

En la transformación tipo (13) no se ha utilizado la condición de que la derivada sea igual a cero en η_s , pero si se impone un valor de ε lo suficientemente pequeño se obtiene un valor de dicha derivada próximo a cero en el entorno de η_s . Tanto en la transformación bicúbica como bitangente se han conseguido buenos resultados con valores de ε del orden de

$$\varepsilon = \frac{1 - |\xi_a|}{R} \quad \text{con } R = 100 \quad \text{a } R = 1000 \quad (3)$$

aunque las variaciones de R para el caso de la transformación bitangente no son tan decisivas como en el caso de la bicúbica.

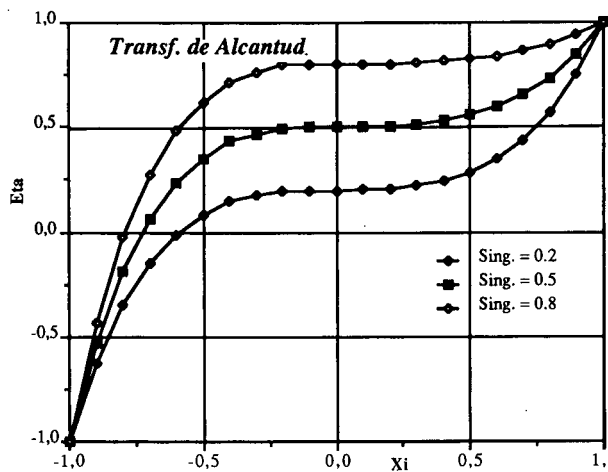
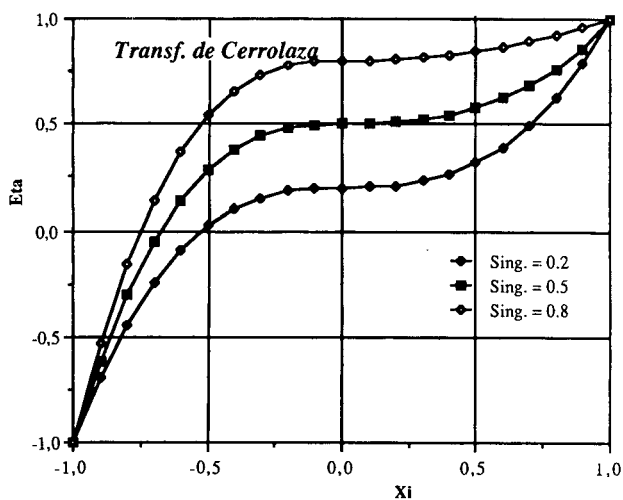
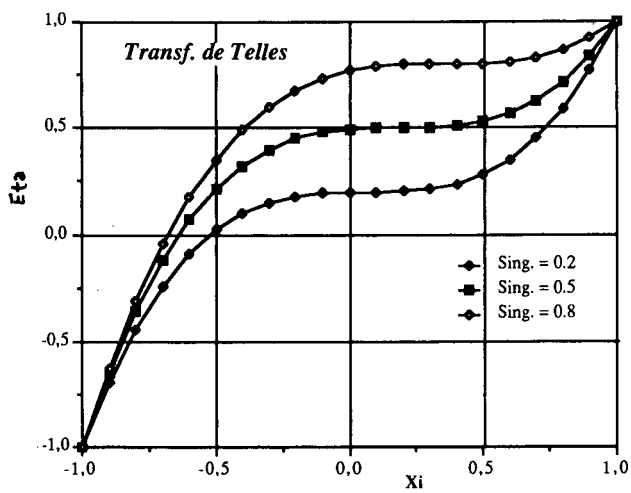


Figura 2. Diferentes transformaciones no lineales.

APLICACION DE TRANSFORMACIONES NO LINEALES A INTEGRALES DE TIPO LOGARITMICO Y $1/r$

En el caso de una singularidad de tipo logarítmico, el integrando puede siempre expresarse como

$$I = a \cdot \ln r + I_r \quad (4)$$

con I_r una función regular y a el coeficiente de la singularidad intrínseca del integrando. Si se realiza esta descomposición, lo que se consigue sin más que conocer el coeficiente de la singularidad a , la evaluación numérica de la integral es simple ya que I_r se integra mediante una fórmula estándar de Gauss-Legendre y el término logarítmico, bien analíticamente, bien numéricamente mediante una cuadratura tipo Berthold-Zaborowski¹⁰. El problema, como se indicó, es la evaluación del coeficiente a .

Una alternativa consiste en utilizar una cuadratura de Gauss-Legendre y una transformación no lineal que mantenga el intervalo de integración y que dé lugar a jacobiano nulo en la singularidad. Efectivamente, consideremos una transformación cualquiera, tal que su desarrollo de Taylor alrededor de la singularidad pueda expresarse como

$$\eta(\xi) = \eta_s + A_1(\xi - \xi_s)^2 + A_2(\xi - \xi_s)^3 + \dots \quad (5)$$

de forma que el intervalo de η coincida con el de Gauss-Legendre $(-1, 1)$. Con ello, el integrando en ξ será

$$I(\xi) = a \cdot \ln r(\xi) \cdot 2A_1(\xi - \xi_s) + \dots + I_r(\xi) \cdot 2A_1(\xi - \xi_s) + \dots \quad (6)$$

Esta integral naturalmente es regular, ya que el término logarítmico está multiplicado por un factor potencial que se hace nulo en el mismo punto que r .

Es necesario ahora hacer la salvedad de que el integrando se ha modificado ligeramente, al incluir el jacobiano de la transformación $\eta(\xi)$. Sin embargo, el término I_r sigue siendo regular si bien quizás sea necesario un número de puntos de Gauss algo superior para conseguir una precisión similar a la obtenida en la I_r inicial.

Naturalmente, los razonamientos anteriores explican el por qué del buen funcionamiento de todas las transformaciones anteriores ya que todas ellas o bien obligan a un jacobiano nulo en la singularidad (Telles y Cerrolaza) o bien lo consiguen muy aproximadamente con la condición de ε bajos (Alcantud).

En la misma forma que en el caso logarítmico, un integrando con singularidad tipo Cauchy puede escribirse siempre como

$$I = \frac{a}{r} + I_r \quad (7)$$

con I_r regular y a el valor de la característica de la integral en el punto singular ($r = 0$). De nuevo ello se consigue sin más que sumar y restar a/r al integrando. Vamos pues a centrarnos en el cálculo de la integral de $1/r$ o mejor aún de la integral

$$I = \int_{-1}^1 \frac{d\eta}{\eta - \eta_s} \quad \text{con } -1 < \eta_s < 1 \quad (8)$$

donde ya se ha incorporado la transformación de r al intervalo $(-1, 1)$ y se supone que el jacobiano de la transformación ha sido tratado, de tal forma que se incluye en el valor de la característica.

Consideremos ahora una doble transformación no lineal a cada lado de la singularidad (al estilo de las de Cerrolaza y Alcantud), en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_1(\xi) = \eta_s + a_1(\xi - 1) + b_1(\xi - 1)^2 + c_1(\xi - 1)^3 + \dots \\ \eta_2 &= \eta_2(\xi) = \eta_s + a_2(\xi + 1) + b_2(\xi + 1)^2 + c_2(\xi + 1)^3 + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Incorporando estas transformaciones a la evaluación de (8) y utilizando la definición de valor principal de Cauchy de dicha integral, ésta quedará

$$I = \int_{-1}^{\eta_s - \epsilon} \frac{d\eta}{\eta - \eta_s} + \int_{\eta_s + \epsilon}^1 \frac{d\eta}{\eta - \eta_s} = \int_{-1}^{\eta_1^{-1}(\eta_s - \epsilon)} \frac{\eta_1'(\xi)d\xi}{\eta_1(\xi) - \eta_s} + \int_{\eta_2^{-1}(\eta_s + \epsilon)}^1 \frac{\eta_2'(\xi)d\xi}{\eta_2(\xi) - \eta_s} \quad (10)$$

Sustituyendo (9) en (10) ésta queda

$$I = \int_{-1}^{\eta_1^{-1}(\eta_s - \epsilon)} \frac{(a_1 + 2b_1(\xi - 1) + \dots)d\xi}{a_1(\xi - 1) + b_1(\xi - 1)^2 + \dots} + \int_{\eta_2^{-1}(\eta_s + \epsilon)}^1 \frac{(a_2 + 2b_2(\xi + 1) + \dots)d\xi}{a_2(\xi + 1) + b_2(\xi + 1)^2 + \dots} \quad (11)$$

Pero esta integral puede disponerse en la forma

$$I = \int_{-1}^{\eta_1^{-1}(\eta_s - \epsilon)} \frac{d\xi}{\xi - 1} + \int_{\eta_2^{-1}(\eta_s + \epsilon)}^1 \frac{d\xi}{\xi + 1} + I_r = I_s + I_r \quad (12)$$

con I_r de nuevo una integral regular. Si ahora se realiza la integración numérica de I_s con intervalo de ξ entre $(-1, 1)$ el resultado (en el caso de utilizar el mismo número de puntos de Gauss) es nulo debido a la simetría de ambas integrales. Sin embargo, el valor analítico de la suma de ambas es de forma inmediata

$$I_s = 1/n \frac{|\eta_1^{-1}(\eta_s - \epsilon) - 1|}{|\eta_2^{-1}(\eta_s + \epsilon) + 1|} \quad (13)$$

Si ahora calculamos el valor del límite del resultado anterior cuando $\epsilon \rightarrow 0$ es inmediato obtener el resultado siguiente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_s = \ln \left| \frac{a_2}{a_1} \right| \quad (14)$$

es decir, el logaritmo neperiano del módulo del cociente entre los coeficientes del término dominante (cuando $\varepsilon \rightarrow 0$). Si por ejemplo $a_i = 0$ el límite anterior quedaría en función del logaritmo del módulo del cociente de los términos b_i y así sucesivamente. Con ello es claro que el valor analítico de I_s coincidirá con el valor numérico tan sólo cuando los coeficientes de los términos dominantes de ambas transformaciones coincidan. En caso contrario, existirá un error en el cálculo de la integral debido a la no inclusión del término (14).

Las transformaciones de (11), (12) y (13) presentan errores de formulación para la integración de la integral $1/(\eta - \eta_s)$. Sin embargo los autores^{12,13} incluyen para algunas de estas integrales unos resultados con una precisión más que aceptable. Se ha de concluir de lo anterior que en este caso el término $\ln |a_2/a_1|$ ha de ser pequeño.

En el caso de la transformación de Telles la transformación puede expresarse también como $\eta(\xi) = \eta_s + A(\xi - \xi_s)^3$ con

$$A = \frac{1}{1 + 3\xi_s^3} \quad \text{y} \quad \xi_s = \eta^{-1}(\eta_s)$$

de forma que ξ_s se obtiene invirtiendo la relación $\eta_s = \frac{\xi_s(3+\xi_s^2)}{1+3\xi_s^3}$

Con esta transformación la integral singular queda como

$$I = \int_{-1}^1 \frac{d\eta}{\eta - \eta_s} = \int_{-1}^1 \frac{3A(\xi - \xi_s)^2}{A(\xi - \xi_s)^3} d\xi = 3 \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi - \xi_s} \quad (15)$$

de forma que no se ha conseguido nada con esta transformación respecto a una integración de Gauss-Legendre, salvo que ξ_s sea nulo y se integre con un número par de puntos, pero al venir ξ_s impuesto por la posición de η_s no es posible conseguir esta situación salvo en el caso trivial de $\eta_s = 0$ que implica $\xi_s = 0$. Ello explica por qué no se consiguen resultados mejores con esta transformación que con la regla usual de Gauss-Legendre.

En cambio, en el caso de la integración bicúbica se tiene que el cociente de los coeficientes de los términos dominantes (cuadráticos en este caso al incluir la condición de jacobiano nulo en η_s) viene dado por

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{(1 - \eta_s)(1 - \xi_a)^3 - 8\varepsilon}{(1 + \eta_s)(1 - \xi_a)^3 - 8\varepsilon} \quad (16)$$

de tal forma que cuando ξ_a tiende a 1, lo que se consigue muy rápidamente al incrementar el orden de la cuadratura de Gauss-Legendre utilizada, el cociente tiende a un valor de módulo unidad. Ello explica que para cuadraturas de alto orden se consigan resultados muy buenos, a pesar del error en la formulación, ya que el término a añadir $\ln |b_2/b_1|$ tiende a ser nulo. También explica el por qué para ε creciente se consigue antes este efecto, si bien si se incrementa sustancialmente el valor de ε se compensa esta ventaja por el hecho de que la parte regular de la integral, consecuencia

de la transformación, se integra mucho peor al distorsionarse mucho la función de transformación.

En cuanto a la integración bitangente, si se realiza un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto η_s de la transformación correspondiente, los términos dominantes son lineales al no incluirse la condición de jacobiano nulo. En este caso, el cociente entre estos términos viene dado por

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\epsilon \operatorname{tg} n \frac{\pi}{2} + (\xi_a - 1)(1 - \eta_s) \operatorname{tg} n \frac{\pi}{2} + (1 - \eta_s) \operatorname{tg} [n \frac{\pi}{4} (\xi_a - 1)]}{-\epsilon \operatorname{tg} n \frac{\pi}{2} + (\xi_a - 1)(1 + \eta_s) \operatorname{tg} n \frac{\pi}{2} + (1 + \eta_s) \operatorname{tg} [n \frac{\pi}{4} (\xi_a - 1)]} \quad (17)$$

con el mismo efecto que en el caso anterior, si bien ahora puede aumentarse mucho más el valor de ϵ obteniéndose cocientes de módulo mucho más próximos a 1, sin que se distorsione tanto el jacobiano. Finalmente, también se explica que para valores de n más cercanos a la unidad se consiga que los términos $\epsilon \operatorname{tg} n \pi / 2$ sean mucho mayores y con ello una cuadratura más precisa.

TRANSFORMACIONES PROPUESTAS

De todo lo anterior, buscamos una transformación no lineal general que cumpla los requisitos siguientes: 1) jacobiano nulo para tratar satisfactoriamente integrandos con singularidad logarítmica; 2) transformaciones sobre doble intervalo con el mismo valor de los coeficientes dominantes; 3) se integre en ambos intervalos con una misma cuadratura para que se anule numéricamente las diferencias de los términos singulares cuyo resultado analítico es el cociente (14); 4) no posea una gran distorsión, de forma que se consiga una precisión suficiente en el cálculo de los términos regulares.

Naturalmente podemos pensar en este momento ¿por qué no utilizar una única transformación para todo el intervalo en vez de una doble transformación?. La respuesta es que esto es posible siempre que $\xi_s = 0$ y se integre con una cuadratura simétrica, de forma que el resultado numérico de la integral I_s en (12) sea nulo, como de hecho lo es el resultado analítico al ser ahora los términos dominantes obviamente nulos por ser una única transformación.

Pensemos, por ejemplo en una única transformación cúbica que cumpla las condiciones anteriores 1) - 3). La única transformación de esta forma viene dada por $\eta(\xi) = \eta_s(1 - \xi^2) + \xi^3$, que sin embargo produce una importante distorsión en las proximidades de la singularidad (véase Figura 3a) debido a que presenta un extremo en esa zona. Ello implica unos resultados muy malos por no cumplir la condición 4) de las expuestas. Una alternativa sería utilizar una transformación de orden 4 con un término libre que tienda a cumplir dicha condición 4). De las distintas alternativas probadas la transformación

$$\eta(\xi) = \eta_s(1 - \xi^4) + \xi^3 \quad (18)$$

ha demostrado un muy buen comportamiento aún en los casos con $\eta_s > 0.75$ para los que se produce un máximo en el interior del intervalo (véase Figura 3b).

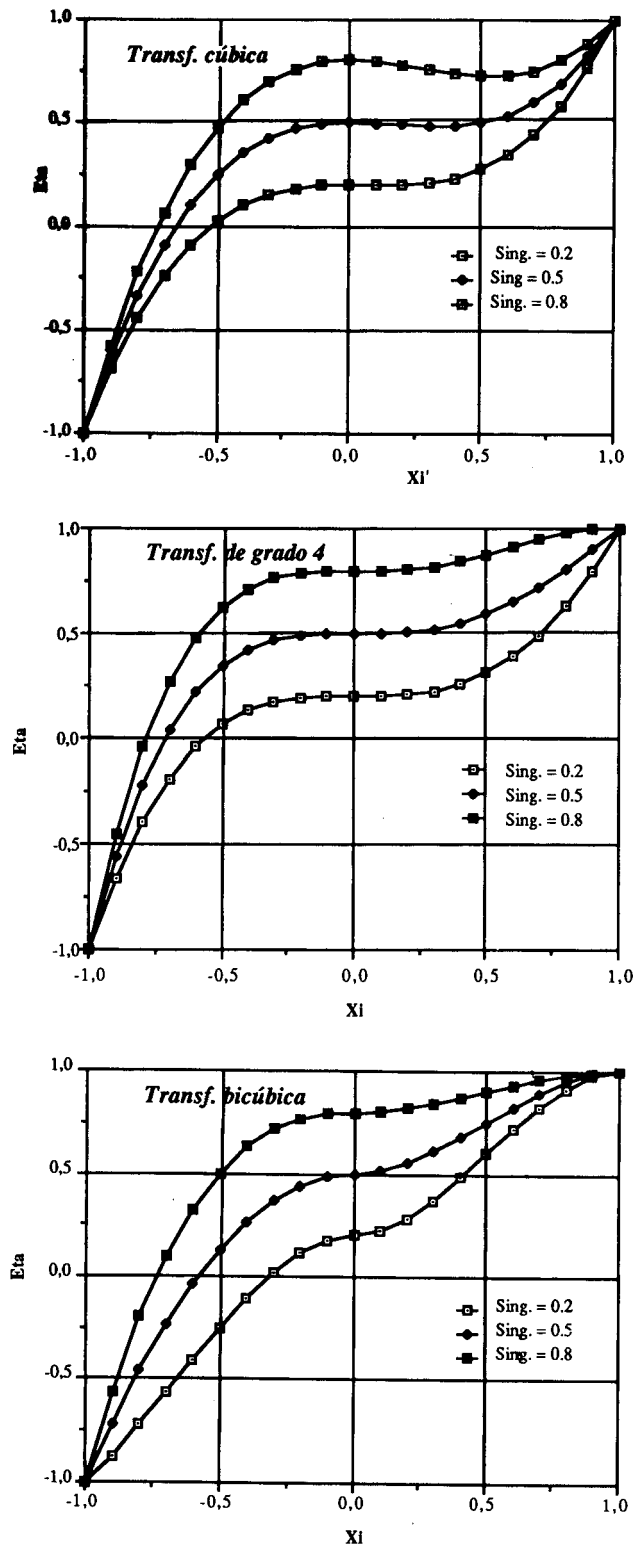


Figura 3. Transformaciones propuestas.

Una situación alternativa consistiría en utilizar una doble transformación cúbica, en la línea de las transformaciones (12) y (13), pero con el término dominante igual para ambas, es decir transformaciones del tipo

$$\begin{aligned}\eta_1(\xi) &= \eta_s + B(\xi - 1)^2 + C(\xi - 1)^3 \\ \eta_2(\xi) &= \eta_s + B(\xi + 1)^2 + D(\xi + 1)^3\end{aligned}\quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (19)$$

Si incluimos las condiciones de contorno para η_1 y η_2 se pueden obtener C y D en función de B , teniéndose

$$\begin{aligned}\eta_1(\xi) &= \eta_s + \frac{1 + \eta_s}{8}(\xi - 1)^3 - \frac{B}{2}(\xi - 1)^2(1 + \xi) \\ \eta_2(\xi) &= \eta_s + \frac{1 - \eta_s}{8}(1 + \xi)^3 - \frac{B}{2}(1 + \xi)^2(\xi - 1)\end{aligned}\quad (20)$$

Si de nuevo queremos que η_1 y η_2 sean crecientes sería inmediato demostrar que ha de cumplirse que

$$B \geq 0 \quad \text{y} \quad B \leq \frac{3}{4}[1 - |\eta_s|] \quad (21)$$

Se han obtenido resultados precisos con $B = \frac{3}{4}[1 - |\eta_s|]$. Dicha transformación se muestra en la Figura 3c.

RESULTADOS

En la Figura 4a se muestran los resultados obtenidos con distintas transformaciones para una singularidad de tipo logarítmico con 8 evaluaciones (4 puntos de Gauss para transformaciones bicúbicas y bitangentes y 8 para el resto).

De lo anterior se observa que para la integral del tipo logarítmico se obtienen buenos resultados con cualquier tipo de transformación, pero podemos apreciar una mayor estabilidad de las transformaciones bicúbicas quizás debido al menor grado del jacobiano que incluyen en la transformación.

En idéntica forma se muestra en las Figuras 4b y 4c los resultados correspondientes a las mismas transformaciones (exceptuando la de Telles que da lugar a errores hasta 2 y 3 órdenes de magnitud superiores) para una singularidad de tipo $1/r$. Como era de esperar de lo anteriormente expuesto, existe un error apreciable para las transformaciones de Cerrolaza y Alcantud, que se resuelve con las dos transformaciones aquí propuestas, de las cuales la transformación única de 4º grado parece conducir a resultados ligeramente mejores. Es de resaltar la gran precisión conseguida con tan solo 8 evaluaciones, con errores máximos del 0,1 %, que se reducen al 0,0002 % cuando se utilizan 16 evaluaciones.

Finalmente, en las Figuras 5a y 5b se representan los resultados correspondientes a la utilización de la transformación de 4º grado propuesta para la integración de los mismos integrandos aludidos, pero cuando el punto de colocación se encuentra a una

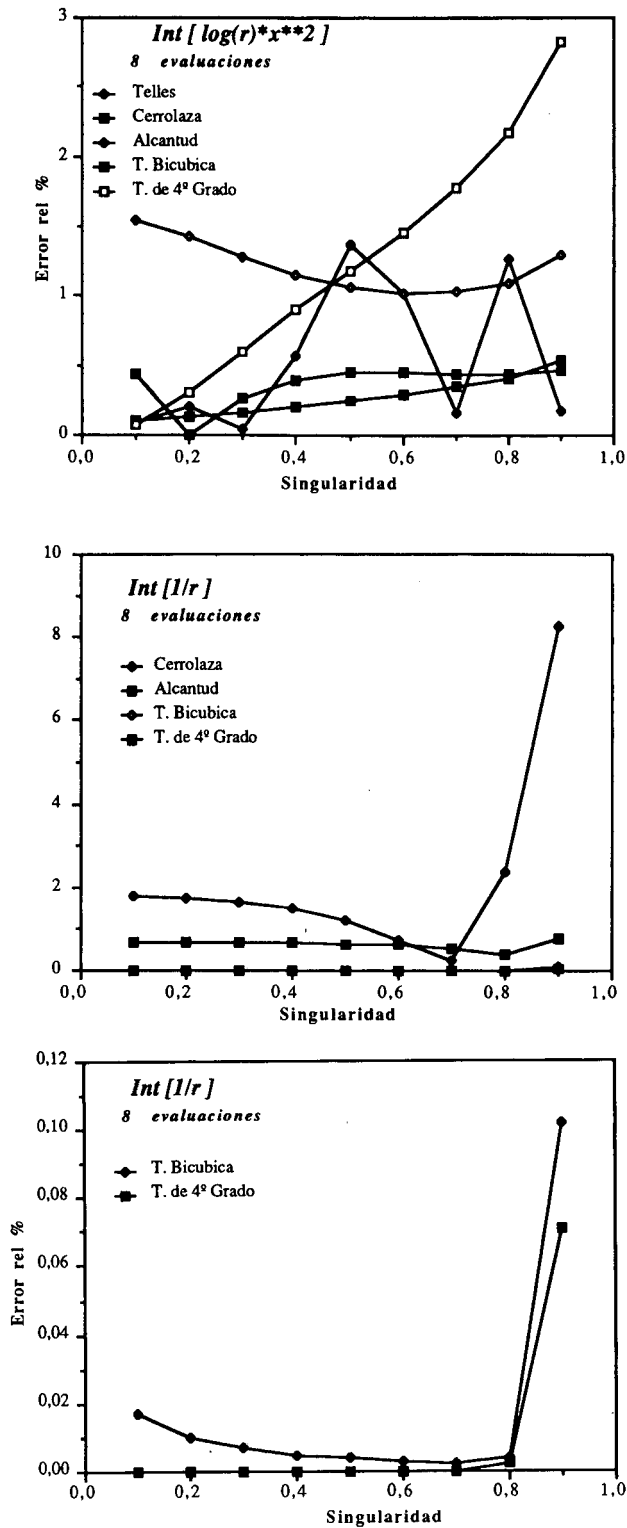


Figura 4. Integraciones singulares.

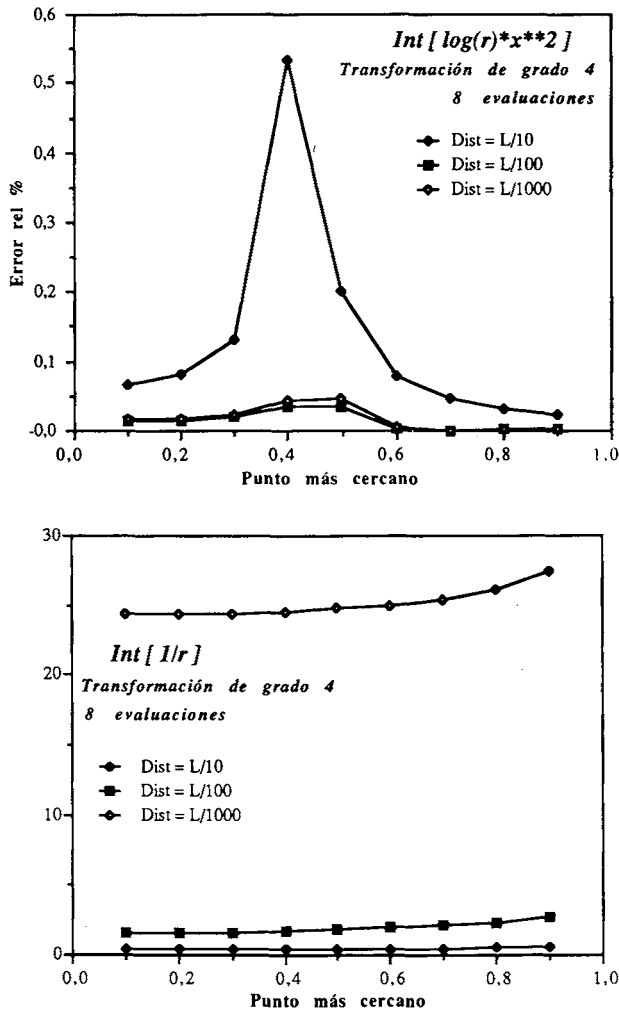


Figura 5. Integraciones cuasisingulares.

cierta distancia del intervalo de integración, es decir para integrales cuasisingulares. Los resultados vuelven a ser de gran precisión, y naturalmente no tan dependientes de la posición de la singularidad respecto de los extremos del intervalo y sí de la distancia de dicho punto al elemento sobre el que se integra. De cualquier forma, con tan sólo 8 evaluaciones, se consiguen errores del orden del 2 % para distancias del orden de 1 % de la longitud del intervalo. Con una mejora en el orden de la cuadratura (16 evaluaciones) se consiguen errores del 0,4 % para la misma situación.

CONCLUSIONES

De los resultados anteriores y de los múltiples experimentos numéricos realizados, pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- Todas las transformaciones funcionan bien para singularidades de tipo logarítmico,

si bien sería posible obtener idénticos resultados con una simple transformación cuadrática con jacobiano nulo en la singularidad.

- Para integrales $1/r$ es conveniente en cualquier caso utilizar cuadraturas simétricas.
- Para singularidades tipo $1/r$ la transformación propuesta por Telles no funciona.
- Las transformaciones (12) y (13) presentan resultados análogos, si bien esta última es algo más precisa y más estable, consiguiéndose los mejores resultados para valores de R entre 50 y 100 para esta última y alrededor de 1000 para la primera. En cualquier caso es necesario un número importante de puntos de Gauss (8+8) como mínimo para conseguir precisiones aceptables.
- Para la transformación (13) son mejores los valores de n altos (alrededor de 0.9) pero cuando el número de puntos de integración es muy elevado, estos valores de n tan altos hacen perder precisión para singularidades próximas a los extremos del intervalo, siendo preferible rebajar algo el valor de n .
- Una simple transformación de orden 4 que traslade la singularidad al centro del intervalo, con jacobiano nulo en dicho punto, produce muy buenos resultados, para las singularidades aquí contempladas, con un número de puntos integración bajo (4+4), salvo para singularidades muy próximas al extremo del intervalo (distancias inferiores al 20 estas zonas, aunque incluso en dichas zonas los resultados pueden considerarse aceptables.
- Una alternativa asimismo válida consiste en la utilización de una doble transformación cúbica que mantenga la situación de jacobiano nulo en la singularidad y tal que los términos dominantes de ambas transformaciones en las proximidades del punto singular sean iguales.
- Estas dos últimas transformaciones dan lugar asimismo a resultados muy precisos para integrales cuasisingulares, como las que se presentan en el M.E.C. al integrar desde puntos internos cercanos al contorno.
- Para puntos de colocación situados en extremos de elemento basta considerar los dos elementos adyacentes al mismo como un único intervalo y trabajar sobre ellos con la transformación elegida, entre la coordenada s y la coordenada de integración ξ , para lo que será necesario conseguir la parametrización en s para elementos curvos, lo que puede suponer una cierta dificultad.
- Es posible en definitiva integrar de forma muy precisa el conjunto de integrales que aparecen en el M.E.C. con una única transformación, lo que supone un ahorro importante de tiempo de programación, de detección de errores e incluso de tiempo de ejecución.

REFERENCIAS

1. T.S. Cruse, "Mathematical Foundations of the B.I.E.M. in Solid Mechanics", *Report AFOSR-TR-77-1002 Pratt & Whitney Aircraft Group*, (1977).
2. C.A. Brebbia, J.C. Telles, L.C. Wrobel, "Boundary Element Techniques: Theory and Applications", Springer Verlag, (1984).
3. M. Doblare, "Computational Aspects of the B.E.M.", *Topics in B.E. Research*, Vol. III, pp. 51-131, (Ed. C.A. Brebbia), Springer Verlag, (1987).
4. J.C. Telles, "The Boundary Element Method applied to Inelastic Problems", Springer

- Verlag, (1983).
5. S. Gomez-Lera, J. Dominguez, E. Alarcón, "On the use of a 3-D Fundamental Solution for an Axisymmetric Steady-State Dynamic Problems", *Proc. VII Int. Conf. on B.E.M.*, (Ed. G. Maier y C.A. Brebbia), Springer Verlag, (1985).
 6. E. Rank, "Adaptive Boundary Element Methods", *Proc. IX Int. Conf. on B.E.M.*, (Ed. W.L. Wendland and C.A. Brebbia), Springer Verlag, (1987).
 7. M. Cerrolaza, "Elementos de Contorno p-adaptable: Desarrollo y Aplicaciones en Teoría del Potencial y Elastostática", *Tesis Doctoral*, U.P. Madrid, (1988).
 8. M. Cerrolaza y E. Alarcón, "p-Adaptive Boundary Elements for Three-Dimensional Potential Problems", *Communications in Appl. Num. Meth.*, Vol. 3, pp. 335-345, (1987).
 9. H.R. Kutt, "On the Numerical Integration of Principal Value Integrals by Finite Part Integration", *Numerische Mathematik*, Vol. 24, pp. 205-210, (1975).
 10. V.I. Krylow y A.A. Pal'tsen, "Tables for Numerical Integration of Functions with Logarithmic and Power Singularities", Israel Program for Scientific Translations, Jerusalén, (1974).
 11. J.C. Telles, "A Selfadaptive Coordinate Transformation for the Efficient Evaluation of General Boundary Element Integrals", *Int. J. of Num. Meth. in Eng.*, Vol. 24, pp. 937-959, (1987).
 12. M. Cerrolaza y E. Alarcón, "A Bicubic Transformation for the Numerical Evaluation of the Cauchy Principal Value Integrals in Boundary Elements", *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol. 28, pp. 987-999, (1989).
 13. M. Alcantud, "Una transformación bitangente para la evaluación de las integrales singulares del M.E.C.", Comunicación privada, (1989).