

# UN MÉTODO INTEGRADO DE ACTUALIZACIÓN DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO DATOS PROCEDENTES DEL ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL

J.M HERNÁNDEZ  
J.I. LLORENTE  
M.H. FERNANDES

y  
R. AVILÉS

*Departamento de Ingeniería Mecánica,  
E.T.S.I. Industriales y de Ingenieros de Telecomunicación de Bilbao,  
Universidad del País Vasco, c/Alda. Urquijo s/n, 48013 Bilbao, España,  
Tel: 34-4-4278055, Fax: 34-4-4414041*

## RESUMEN

En este artículo se presenta una técnica completa de actualización de modelos de elementos finitos de acuerdo con los resultados obtenidos con el análisis modal experimental, incidiéndose en la integración del proceso y en la necesidad de calidad de los datos de partida.

## SUMMARY

In this article, a complete updating technique for finite element models on the basis of results from experimental modal analysis is presented, with attention focused on the integration of the process and on the necessity for quality in the basic data.

## INTRODUCCIÓN

La utilización del método de los Elementos Finitos (M.E.F.) se encuentra en la actualidad ampliamente extendida para la resolución de problemas mecánicos, tanto estáticos como dinámicos. En el caso de los problemas dinámicos, existen todavía inconvenientes que no tienen una fácil solución: la modelización de las uniones, la inclusión del amortiguamiento, la elección de la densidad adecuada de mallado, la precisión en el valor de los parámetros de diseño—espesores, secciones transversales, módulo de elasticidad, densidad, etc.— son aspectos que determinan grandemente la calidad del modelo de elementos finitos, y en consecuencia la fiabilidad de los resultados que se pueden alcanzar con él.

Resulta, entonces, de gran interés, para cada caso concreto, comprobar si el modelo de E.F. es válido, es decir, si se ajusta a la realidad, y si no es así, mejorarlo o actualizarlo. Este proceso se realiza en varias etapas. En primer lugar se construye un

Recibido: Diciembre 1994

prototipo del sistema mecánico modelizado y se calculan sus características dinámicas; a continuación, se estudia la correlación entre frecuencias y modos de vibración obtenidos numérica y experimentalmente. Esta correlación será la que proporcionará una primera indicación sobre la validez del modelo de E.F. Es importante destacar aquí la necesidad de haber realizado un correcto análisis modal experimental, que genere unas frecuencias experimentales aceptables, y de disponer de un modelo de E.F. cuya densidad de mallado sea adecuada<sup>14</sup>, para obtener unas frecuencias naturales con el mínimo error. Si el modelo no fuera válido, el siguiente paso consistiría en determinar cuáles son las zonas de error, y en consecuencia, decidir qué variables de diseño han sido introducidas de forma incorrecta. Para realizar esta estimación se utilizan técnicas de localización de errores.

Finalmente, la última etapa consiste en actualizar el modelo en las zonas inidicadas por la técnica de localización. La actualización se realiza por medio de una aproximación en serie de Taylor de primer orden del valor de las variables de diseño que la localización de errores ha indicado que pueden estar introducidas o estimadas erróneamente. Para ello, partiendo de los valores iniciales, mediante un proceso iterativo basado en el cálculo de las sensibilidades de los valores propios se actualizan estas variables elegidas de forma que el modelo de E.F. final represente la mejor aproximación a los valores reales del sistema, obtenidos experimentalmente.

En este artículo se incide en la importancia de todas las fases del proceso: correlación, expansión, localización de errores y actualización<sup>15</sup>. Asimismo, se presta especial atención a la calidad de los datos, poniendo especial énfasis en la correcta determinación de las frecuencias naturales. En la Figura 1

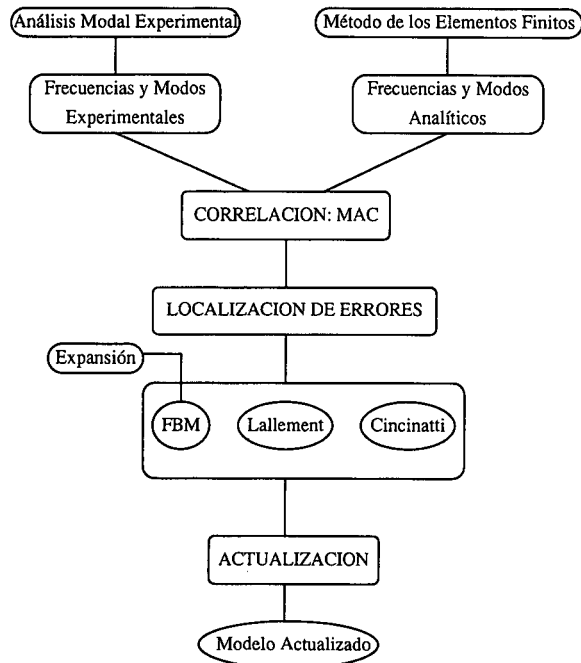


Figura 1. Esquema de proceso de actualización implementado.

se muestra en forma esquemática el proceso que se sigue<sup>16</sup>, cada una de estas etapas se explican detalladamente en los apartados posteriores.

En la Figura 1, MAC corresponde a las siglas de Modal Assurance Criterion y FBM a Force Balance Method.

### PRIMERA FASE: CORRELACIÓN

Los criterios que a continuación se desarrollan tratan de calcular la correlación existente entre los resultados analíticos y experimentales por medio de la comparación de los vectores que representan los modos de vibración. Así, se puede establecer que si dos vectores representan el mismo modo de vibración, ambos vectores deberían ser proporcionales entre sí. Basándose en esta idea, se define el factor de escala modal (modal scale factor – MSF) entre dos vectores, uno analítico  $\{\Psi\}_{\text{an}}$  y otro experimental  $\{\Psi\}_{\text{exp}}$  como<sup>1</sup>

$$\text{MSF} \left( \frac{\{\Psi\}_{\text{an}}}{\{\Psi\}_{\text{exp}}} \right) = \frac{\{\Psi\}_{\text{an}}^T [\mathbf{W}] \{\Psi\}_{\text{exp}}}{\{\Psi\}_{\text{exp}}^T [\mathbf{W}] \{\Psi\}_{\text{exp}}} \quad (1)$$

y de aquí un coeficiente de correlación, el criterio de confianza modal (modal assurance criterion – MAC) como

$$\text{MAC} (\{\Psi\}_{\text{an}}, \{\Psi\}_{\text{exp}}) = \frac{(\{\Psi\}_{\text{an}}^T [\mathbf{W}] \{\Psi\}_{\text{exp}})^2}{(\{\Psi\}_{\text{an}}^T [\mathbf{W}] \{\Psi\}_{\text{an}}) \cdot (\{\Psi\}_{\text{exp}}^T [\mathbf{W}] \{\Psi\}_{\text{exp}})} \quad (2)$$

donde  $[\mathbf{W}]$  es una matriz constituida por coeficientes de ponderación.

Los valores del MAC oscilan entre 0 y 1. Un valor de cero indicaría que no existe ninguna relación de proporcionalidad entre ambos vectores. Por lo tanto, se puede decir que representan modos de vibración diferentes. Por el contrario, un valor de uno indicaría una proporcionalidad perfecta entre ambos vectores.

La introducción de la matriz  $[\mathbf{W}]$  permite ponderar los valores del MAC y MSF mediante la matriz de masa o la de rigidez; estas diferentes posibilidades pueden proporcionar un mayor conocimiento de la falta de correlación entre vectores y en consecuencia entre modelos.

A la hora de llevar a cabo el cálculo del MAC surge un problema fundamental, que es la diferencia de tamaño existente entre el modelo experimental y el modelo de E.F. En efecto, es bien conocido que los modelos analíticos necesitan de un elevado número de grados de libertad para conducir a frecuencias naturales correctas<sup>14</sup>. Por otra parte, los modelos experimentales no precisan de tantos grados de libertad para determinar adecuadamente las frecuencias, y además, no resulta fácilmente realizable la medición de los grados de libertad de rotación. Por lo tanto, para evaluar el MAC es necesario compatibilizar de alguna forma el diferente número de grados de libertad de ambos modelos, lo cual se puede realizar mediante condensación o mediante expansión, siendo ésta la técnica más indicada a emplear.

No obstante, la expansión no es una técnica "limpia" y puede distorsionar los resultados si el método a emplear no es el adecuado o si la relación gdl exper./gdl analíticos es inferior a 1/3, lo cual es muy habitual, tal como demostró Gysin<sup>12</sup>.

Por ello, el criterio empleado en los ejemplos realizados en este trabajo ha consistido en evaluar el MAC tomando como modos de vibración del modelo E.F. únicamente los grados de libertad coincidentes en los dos modelos. Probablemente, los resultados obtenidos hayan sido menos espectaculares puesto que difícilmente se podía llegar a una correlación del 0.99. No obstante, de esta forma no se han añadido distorsiones al proceso.

### EXPANSIÓN DE MODOS DE VIBRACIÓN EXPERIMENTALES A LOS GRADOS DE LIBERTAD NO MEDIDOS

A pesar de haber podido evitar la expansión en el paso correspondiente a la correlación, no ocurre lo mismo para la localización de errores. En efecto, en algún caso, es preciso realizar una expansión de modos experimentales a los grados de libertad no medidos.

La técnica de expansión está totalmente relacionada con las técnicas de condensación. Ésta se puede formular bajo la hipótesis de que existen  $n_2$  grados de libertad "esclavos"  $\{x_2\}$  que se pueden expresar en función  $n_1$  grados de libertad "maestros"  $\{x_1\}$ . Es decir, se podría escribir que  $\{x_2\} = [L]\{x_1\}$ , en donde  $[L]$  es una matriz de dimensiones  $n_2 \times n_1$ , cuya expresión concreta depende del tipo de condensación empleado. Por tanto,

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{x_1\} \\ \{x_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [I] \\ [L] \end{Bmatrix} \cdot \{x_1\} = [T] \cdot \{x_1\} \quad (3)$$

en donde  $[I]$  es la matriz identidad.

La matriz de transformación  $[T]$  (o su equivalente, la matriz  $[L]$ ) se determinan bajo diferentes hipótesis sobre el comportamiento dinámico de la estructura. Una vez determinada la matriz de transformación  $[T]$ , se puede ya utilizar fácilmente para realizar también la expansión de modos experimentales. En este trabajo se ha empleado, fundamentalmente, el Método de las Coordenadas Modales (MCM) propuesto por Lipkens<sup>4</sup>, aunque también se realizaron pruebas con el método IRS<sup>10</sup> que condujeron a resultados más desfavorables. De esta forma se confirmaron las afirmaciones de Gysin<sup>13</sup> según las cuales, el método MCM es uno de los pocos que minimiza el "ruido" en el proceso de expansión.

En dicho método la matriz de transformación  $[T]$  se puede definir como

$$[\Psi_1]_{\text{exp}} = [\Psi_1]_{\text{an}} \cdot [T] \quad (4)$$

es decir, la matriz modal experimental se considera una combinación lineal de la correspondiente matriz modal calculada mediante el MEF. Entonces, se puede obtener

$$[T_{LS}] = [\Psi_1]_{\text{an}}^+ \cdot [\Psi_1]_{\text{exp}} \quad (5)$$

Esta matriz de transformación, de dimensiones  $m_{an} \times m_{exp}$  es una matriz aproximada mediante mínimos cuadrados a  $[T]$ , a través de una pseudo-inversión, y se utiliza para completar los vectores modales experimentales.

## SEGUNDA FASE: LOCALIZACIÓN DE ERRORES

La experiencia ha demostrado que la actualización de modelos, por sí sola, es difícilmente realizable por el número de parámetros de diseño que se introducirán en la función objetivo. En efecto, se podrían producir modificaciones en variables que nada tienen que ver con el error real en el modelo numérico. Por ello es imprescindible realizar un proceso de búsqueda del error.

La localización de errores dominantes va a conducir, en primer lugar, a un proceso de actualización basado en aquellas regiones en donde se produce mayor error. Además, va a ayudar a reducir el grado de indeterminación en el problema de actualización, ya que se van a seleccionar aquellos parámetros que son más sensibles en las zonas de error dominante o peor modelizadas. Este aspecto es fundamental a la hora de asegurar la convergencia del proceso. Es necesario hacer notar, y más tarde se demostrará, que si la localización de errores no es buena, va a ser muy difícil obtener un modelo correctamente actualizado. Por lo tanto, se ha decidido implementar varios métodos de localización de errores, para confirmar los resultados. Fue, por tanto, necesario realizar una extensa búsqueda y comprobación de métodos, optándose finalmente por los siguientes:

### Método FBM (Force Balance Method)

Fue el primero de los métodos de localización que presentaba cierta fiabilidad. Presentado por Fissette<sup>7</sup> se definía un vector de error  $\{E\}$  según

$$\left( [K] - \omega_{j_{exp}}^2 \cdot [M] \right) \cdot \{\Psi_j\}_{exp} = \{E_j\} \quad (6)$$

Este vector de error indicaría las regiones en las que se encuentran los errores dominantes. Además, es claro diferir, a partir de la expresión anterior que, únicamente con el cálculo del vector de error  $\{E_j\}$  para un modo, se puede determinar con claridad dónde se encuentra el error dominante.

Una mejora de este método fue sugerida posteriormente<sup>11</sup>. En ella se proponía, en lugar de un estudio modo a modo, calcular una media del error para el conjunto de los modos. De esta forma, quedaba enormemente disminuida la posibilidad de que una incorrecta o reducida selección de modos diera lugar a una estimación inadecuada de las zonas de error dominante.

Como se observa de la expresión (6), se emplean las matrices de masa y de rigidez del modelo numérico, y las frecuencias y modos de vibración experimentales. Lógicamente, existe una incompatibilidad en el número de grados de libertad que hay que solventar. Es aquí donde estriba la debilidad de este método, pues es necesario llevar a cabo la expansión de los modos experimentales a los grados de libertad no medidos, con la consiguiente distorsión. Además, existe otro peligro importante, que es la propia utilización de los modos experimentales. Diferentes estudios<sup>8</sup> han concluido que en la

estimación de las componentes de los modos de vibración experimentales pueden existir errores de hasta el 10%. Evidentemente, no se puede pretender encontrar errores en un modelo partiendo de unos datos que ya son erróneos. De ahí la necesidad de emplear más métodos de localización de errores, en forma paralela, para poder acotar lo mejor posible dicho error.

### Métodos Basados en el Análisis de Sensibilidad

Existen distintos métodos de localización de errores basados en el análisis de sensibilidad. Han sido dos, Lallement<sup>5</sup> y Wei<sup>6</sup>, los empleados en este trabajo. El primero de ellos, que brevemente se expone a continuación, al que se va a denominar Método de Lallement considera que las matrices elementales del modelo actualizado  $[\mathbf{M}_{iup}]^{\text{exp}}$  y  $[\mathbf{K}_{iup}]^{\text{exp}}$  se pueden expresar como sigue

$$[\mathbf{M}_{iup}]^{\text{exp}} = \mathbf{m}_i \cdot [\mathbf{M}_i]^{\text{exp}} ; [\mathbf{K}_{iup}]^{\text{exp}} = \mathbf{k}_i \cdot [\mathbf{K}_i]^{\text{exp}} \quad (7)$$

en donde  $\mathbf{m}_i$  y  $\mathbf{k}_i$  son los indicadores de error para cada elemento. De aquí se puede escribir

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{1} + \Delta\mathbf{m}_i ; \mathbf{k}_i = \mathbf{1} + \Delta\mathbf{k}_i \quad (8)$$

Además, los modos de vibración experimentales se pueden expresar como expansión en serie de Taylor según

$$\{\Psi_i\}_{\text{exp}} = \{\Psi_i\}_{\text{an}} + \sum_{i=1}^e \frac{\partial\{\Psi_i\}_{\text{an}}}{\partial\mathbf{k}_i} \cdot \Delta\mathbf{k}_i + \sum_{i=1}^e \frac{\partial\{\Psi_i\}_{\text{an}}}{\partial\mathbf{m}_i} \cdot \Delta\mathbf{m}_i \quad (9)$$

y análogamente las frecuencias experimentales como

$$\{\omega^2\}_{\text{exp}} = \{\omega^2\}_{\text{an}} + \sum_{i=1}^e \frac{\partial\{\omega^2\}_{\text{an}}}{\partial\mathbf{k}_i} \cdot \Delta\mathbf{k}_i + \sum_{i=1}^e \frac{\partial\{\omega^2\}_{\text{an}}}{\partial\mathbf{m}_i} \cdot \Delta\mathbf{m}_i \quad (10)$$

Agrupando (9) y (10) y expresando en forma matricial se obtendría

$$\{\Delta\mathbf{y}\} = [\mathbf{S}] \cdot \{\Delta\mathbf{p}\} \quad (11)$$

en donde  $\{\Delta\mathbf{y}\}$  es el vector formado por las diferencias entre frecuencias y modos de vibración analíticos y experimentales;  $[\mathbf{S}]$  es la matriz de sensibilidad y  $\{\Delta\mathbf{p}\}$  es el vector formado por las variaciones  $\Delta\mathbf{m}_i$  y  $\Delta\mathbf{k}_i$ . Resolviendo esta ecuación mediante mínimos cuadrados se obtienen los valores de  $\{\Delta\mathbf{p}\}$ .

Aunque éste sería el proceso teórico, según Lallement, nuestra experiencia demuestra que no es recomendable emplear los modos de vibración experimentales<sup>16</sup>, por lo que únicamente se han utilizado las frecuencias en la expresión (11).

El segundo método empleado, que se va a denominar Método de Cincinatti<sup>1</sup>, es muy similar al anterior, pero en este caso se sustituye  $\Delta\mathbf{m}_i$  y  $\Delta\mathbf{k}_i$  por una variación en los parámetros físicos que forman parte del modelo de E.F., como el módulo de elasticidad, la densidad, el espesor, etc. De nuevo quedaría la expresión

$$\{\Delta \mathbf{y}\} = [\mathbf{S}] \cdot \{\Delta \mathbf{p}\} \quad (12)$$

en donde, en este caso,  $[\mathbf{S}]$  es la matriz de sensibilidades respecto a las variables de diseño. También, en este método, se han empleado sólo las frecuencias de vibración.

El inconveniente fundamental de ambas técnicas es que pueden distorsionar los resultados considerablemente. En efecto, se está suponiendo que las zonas de error son precisamente aquellas más sensibles a la variación de las frecuencias y de los modos. Pero esto no es totalmente cierto. Aunque la variación de un parámetro de diseño específico produzca un cambio apreciable en una frecuencia natural, ello no quiere decir que sea este parámetro el que se encuentre erróneamente modelizado<sup>16</sup>.

### TERCERA FASE: ACTUALIZACIÓN

Mediante el estudio de la correlación entre resultados analíticos y experimentales se ha podido verificar si los modelos con los que se está trabajando conducen a las mismas características dinámicas. Posteriormente se ha llevado a cabo la búsqueda de las zonas de error para lo cual se ha empleado una combinación de métodos: FBM, Lallement y Cincinnati. Se está, entonces, en disposición de realizar la actualización del modelo de E.F.

En este apartado se va a presentar un método de actualización de modelos basado en la corrección de las variables de diseño que definen el modelo de E.F. y que han sido detectadas en los pasos previos como erróneas. Como se sabe, estas variables son: el módulo de elasticidad, la densidad, el espesor, el área de las secciones transversales, los momentos de inercia, etc. La idea consiste en corregir el valor de estas variables de diseño de forma que tomen el valor que hace que la diferencia entre las frecuencias calculadas mediante el MEF y las estimadas mediante el análisis modal experimental, sea mínima. El proceso ha de ser necesariamente iterativo, por varias razones, entre las que se podrían destacar las siguientes:

- siempre van a existir errores en la estimación experimental de los parámetros modales del sistema mecánico, y
- la aproximación en serie de Taylor de primer orden que se realizará para la actualización no permite variar demasiado las variables de diseño, para que dicha aproximación no pierda validez.

Sea entonces  $nvd$  el número de parámetros independientes de diseño elegido para la actualización  $\{\mathbf{p}\}$  y  $m_{exp}$  el número de frecuencias experimentales. Considerando las frecuencias naturales actualizadas como un desarrollo en serie de Taylor de primer orden de las frecuencias del modelo de elementos finitos, se puede escribir

$$\omega_{i_{up}}^2 = \omega_{i_{an}}^2 + \frac{\partial \omega_{i_{an}}^2}{\partial p_1} \cdot \Delta p_1 + \frac{\partial \omega_{i_{an}}^2}{\partial p_2} \cdot \Delta p_2 + \dots + \frac{\partial \omega_{i_{an}}^2}{\partial p_n} \cdot \Delta p_n = \omega_{i_{an}}^2 + \sum_{j=1}^{nvd} \frac{\partial \omega_{i_{an}}^2}{\partial p_j} \cdot \Delta p_j \quad (13)$$

Como lo que se pretende es que el modelo actualizado presente unas frecuencias naturales lo más similares posible a las experimentales, expresando matemáticamente esta afirmación se tiene la siguiente función a minimizar

$$\text{OBJ} = \sum_{i=1}^{m_{\text{exp}}} (\omega_{i_{\text{exp}}}^2 - \omega_{i_{\text{up}}}^2)^2 \quad (14)$$

o bien, en forma adimensional

$$\text{OBJ} = \sum_{i=1}^{m_{\text{exp}}} \left( \frac{\omega_{i_{\text{exp}}}^2 - \omega_{i_{\text{up}}}^2}{\omega_{i_{\text{exp}}}^2} \right)^2 \quad (15)$$

o sustituyendo la ecuación (13) se obtiene

$$\text{OBJ} = \sum_{i=1}^{m_{\text{exp}}} \left( \frac{\omega_{i_{\text{exp}}}^2 - \omega_{i_{\text{an}}}^2}{\omega_{i_{\text{exp}}}^2} - \frac{1}{\omega_{i_{\text{exp}}}^2} \sum_{j=1}^{n_{\text{vd}}} \frac{\partial \omega_{i_{\text{an}}}^2}{\partial p_j} \cdot \Delta p_j \right)^2 \quad (16)$$

Por lo tanto, el problema a resolver se convierte en un problema matemático de minimización de funciones que se ha solucionado empleando diferentes rutinas comerciales (DOT, 1989<sup>2</sup> y NAG, 1986<sup>3</sup>). La experiencia ha demostrado que el método más adecuado para resolver este problema es la técnica BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) implementada en las subrutinas DOT<sup>2</sup>.

Además, se han introducido una serie de mejoras prácticas para la resolución de este problema de minimización. Así, en cada paso iterativo sólo se permite una variación del  $\pm 5\%$  en los parámetros de diseño elegidos para la actualización, con lo cual se quieren evitar posibles inestabilidades y asegurar la validez del desarrollo en serie de la expresión (13).

Otro aspecto que se ha introducido a la hora de definir el problema es lo que se conoce en la bibliografía como "design variable linking" que no es otra cosa que la agrupación de las propiedades de los elementos. En efecto, como se requiere un modelo de E.F. con un número elevado de elementos, para poder obtener así unas frecuencias naturales lo más correctas posible, puede ocurrir que el número de variables de diseño elementales que la localización de errores indica que se deben modificar sea demasiado elevado, por lo que es necesario agruparlas para que la rutina de minimización conduzca a resultados aceptables.

Además, cabe indicar que se ha introducido la eliminación de variables de diseño conforme se produce la convergencia de las mismas. En este sentido se ha propuesto como criterio de convergencia un valor de la variación relativa entre iteraciones consecutivas inferior al 0,5%, tal como se expresa en la siguiente ecuación

$$\left\| \frac{p_{i+1} - p_i}{p_i} \right\| \leq 0.5\% \quad (17)$$

Por último, indicar que se han implementado como posibles variables de diseño a actualizar las siguientes: módulo de elasticidad, densidad, sección transversal



(cuadrada, circular y tubular), espesor y masas concentradas. Además, es interesante recordar que debido a la forma en que se crean las matrices de masa y de rigidez del modelo, y posteriormente sus matrices de sensibilidad, no es necesario calcular estas matrices en cada paso iterativo para las siguientes variables de diseño: módulo de elasticidad, densidad, espesor y masas concentradas.

### EJEMPLO: CUADRO DE BICICLETA

De entre todos los ejemplos realizados se ha escogido como más representativo el de un cuadro de bicicleta. Se trata de actualizar su modelo de elementos finitos con las siguientes características. El material es acero, con módulo de elasticidad  $E = 2.1E + 06 \text{ kg/cm}^2$  y de densidad uniforme de valor  $7800 \text{ kg/m}^3$ . Las secciones del cuadro son tubulares, en su mayor parte; ahora bien, el espesor es en muchas de ellas desconocido, puesto que no se poseen datos de fabricación. Es decir, se trata de un modelo incompleto y cuya modelización no es muy fiable.

El modelo de elementos finitos de partida se realizó en base a 61 elementos tipo viga de 6 grados de libertad por nudo, de tal forma que el número total de grados de libertad era 348, al no existir ninguna condición de ligadura. La Figura 2 muestra dicho modelo.

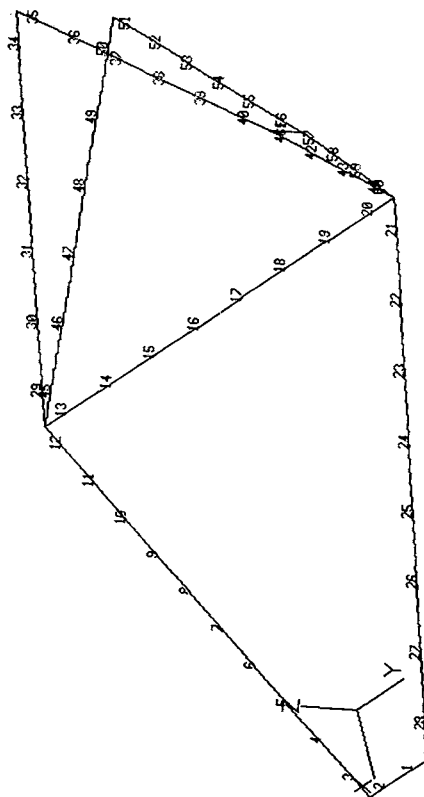


Figura 2. Modelo de Elementos Finitos del cuadro de la bicicleta.

El ensayo experimental se llevó a cabo tomando 29 puntos de medida, colocando acelerómetros en las tres direcciones, tal como indica la Figura 3.

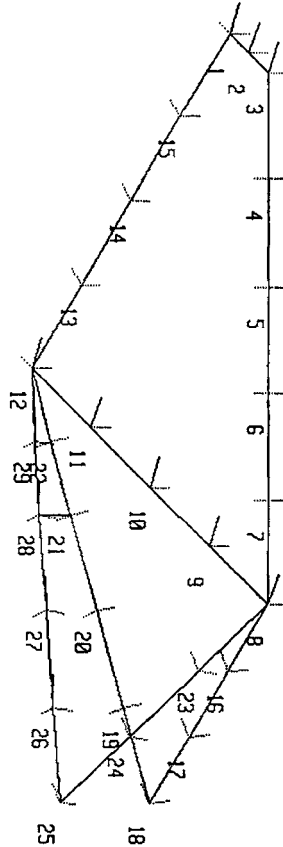


Figura 3. Modelo experimental del cuadro de la bicicleta.

Las frecuencias naturales obtenidas en ambos modelos fueron las siguientes:

Frecuencias experim.	Frecuencias E.F.	Diferencia(Hz)	Diferencia(%)
177.32 Hz	217.71 Hz	40.39 Hz	22.78 %
207.83Hz	227.91 Hz	20.08 Hz	9.66 %
289.99 Hz	305.09 Hz	15.10 Hz	5.21 %
246.05 Hz	310.53 Hz	64.48 Hz	26.21 %
308.92 Hz	344.61 Hz	35.69 Hz	11.55 %
325.51 Hz	351.41 Hz	25.90 Hz	7.96 %

Tabla I. Frecuencias naturales de ambos modelos y su diferencia.

en donde ya se han emparejado de acuerdo al coeficiente de correlación obtenido.

A continuación se realizó el estudio de la localización de errores; en primer lugar, mediante el método FBM, que como se sabe es el más sencillo y rápido. La Figura 4 muestra el resultado de este proceso.

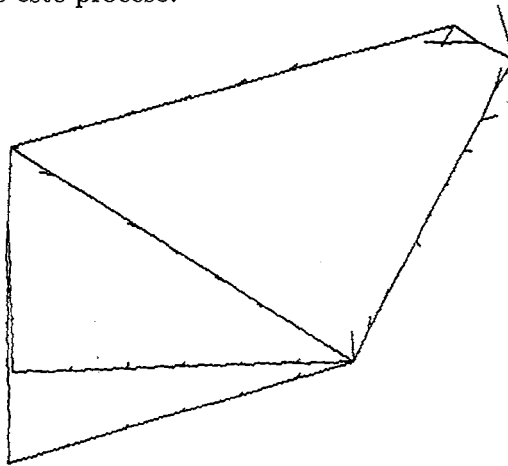


Figura 4. Localización de errores: método FBM.

En la Figura 4 se observa cómo el mayor error se produce en los elementos 1 y 2. Este resultado parecía chocante, teniendo en cuenta el conocimiento geométrico del que se disponía. Precisamente, la zona de los elementos 1 y 2 era conocida perfectamente en lo que se refiere al diámetro y espesor de la sección tubular, además de la falta de incertidumbre en el módulo de elasticidad y en la densidad. Por otra parte, se había constatado que las medidas experimentales realizadas en los puntos de esa zona no eran muy fiables, ya que presentaban mucho ruido y unas coherencias sólo regulares.

Por todo lo dicho se procedió a llevar a cabo la localización de errores mediante los métodos basados en el análisis de sensibilidad. En primer lugar se empleó el método de Lallement para determinar los errores en las matrices elementales de rigidez y de masa. Los resultados se presentan en las Figuras 5 y 6.

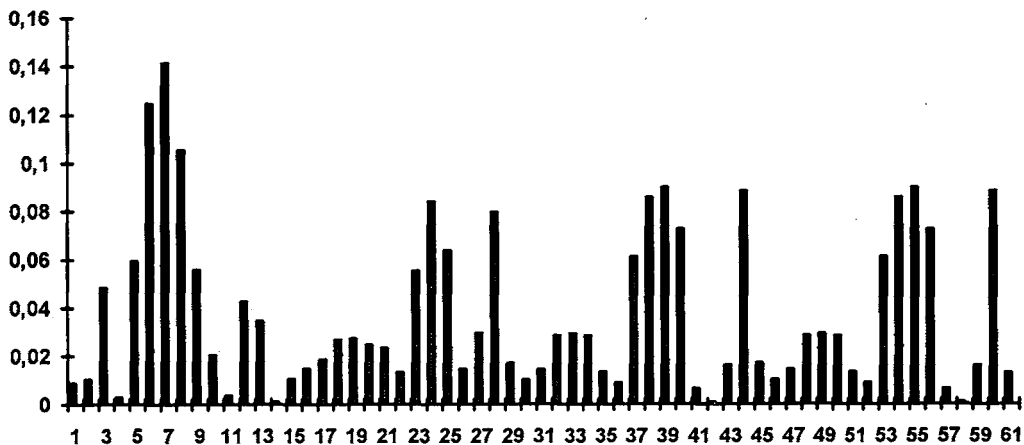


Figura 5. Error en las matrices elementales de rigidez.

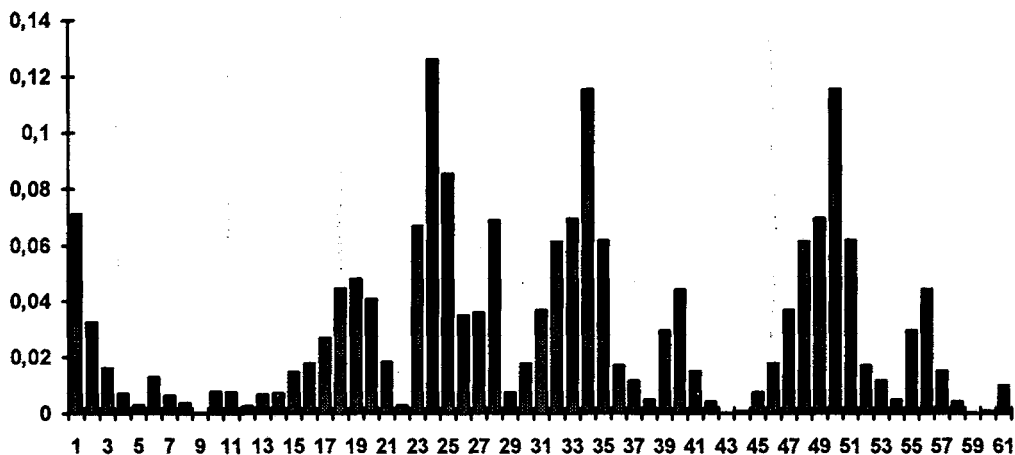


Figura 6. Error en las matrices elementales de masa.

De la observación de la Figura 5 se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- los elementos 28, 44 y 60 presentan un elevado error que se podría deber a la falta de rigidez de la unión, que fue simulada como empotramiento.
- los errores en los elementos 5, 6, 7, 8, 9, 23, 24 y 25 no parecían tener un claro significado físico. De acuerdo a la experiencia propia se consideraron errores computacionales, en el sentido de que la sensibilidad de esos elementos a la disminución del error era elevada, pero no tenía por qué ser que estuvieran mal modelizados.
- en cuanto a los elementos 37, 38, 39, 40, 53, 54, 55 y 56 se consideró que el espesor de los tubos, que afecta lógicamente a su rigidez, podría estar mal determinado, siendo, por tanto, la fuente del error.

De la observación de la Figura 6 se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- los errores localizados en los elementos 1 y 28, que son contiguos entre sí, se podrían deber a la presencia de una masa concentrada que inicialmente no se tuvo en cuenta.
- de nuevo en los elementos 23, 24 y 25, aparecían elevados errores, sin un claro significado físico, por lo que, de la misma forma que para la rigidez, se obviaron.
- en los elementos 32, 33, 34, 35, 48, 49 y 51 se consideró que el espesor de los tubos estaba mal determinado, por lo que también la matriz de masa resultaría afectada.

Para confirmar los aspectos relativos a las zonas tubulares se utilizó el método de Cincinnati, tomando como variable de diseño el espesor de los tubos para todos los elementos. El resultado de esta localización se muestra en la Figura 7.

De la observación de la Figura 7 se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- los errores mayores se producen en los elementos correspondientes a las zonas del cuadro donde el diámetro del tubo era menor, y en los que el espesor era totalmente desconocido.
- el resto de los elementos no recoge este error.

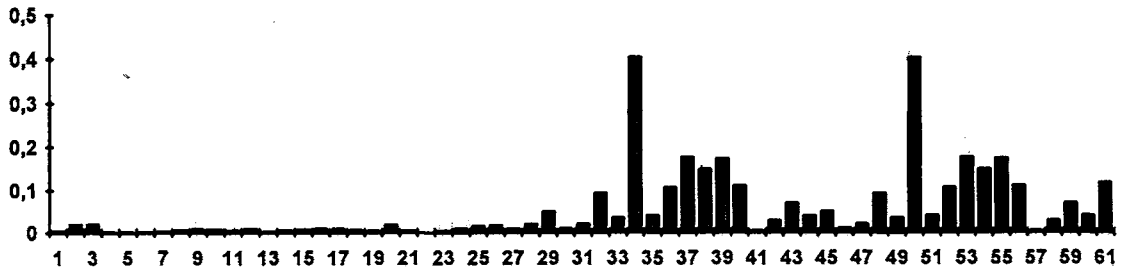


Figura 7. Error en los espesores de cada elemento tubular.

En consecuencia, se tomaron como variables de diseño las siguientes:

- para el módulo de elasticidad, que indicaría que existen uniones de menor rigidez, los elementos 1, 2, 3, 28, 44 y 60, agrupados según indica la siguiente tabla.

Grupo	Elementos
1	1,28
2	2,3
3	44,60

Tabla II. Agrupación de elementos (módulo de elasticidad).

- para la densidad, que podría, en un principio, simular la presencia de masas concentradas, los elementos 1, 2, 3, 12, 13, 20, 21, 28, 29, 34, 35, 44, 45, 50, 51 y 60, agrupados según indica la siguiente tabla.

Grupo	Elementos
1	1,28
2	2,3
3	12,13,29,45
4	20,21,44,60
5	34,35,50,51

Tabla III. Agrupación de elementos (densidad).

- para el espesor tubular, todos los elementos de la zona cuyos espesores eran totalmente desconocidos, agrupados según indica la siguiente tabla.

Grupo	Elementos
1	34,50
2	35,51
3	36,52
4	37,53
5	38 a 44 y 54 a 60
6	61

Tabla IV. Agrupación de elementos (espesor tubular).

Para llevar a cabo la actualización se empleó el método BFGS, con restricciones laterales en cada iteración que sólo permitían una variación de los parámetros de diseño del  $\pm 5\%$ . Las frecuencias actualizadas resultaron las siguientes:

Frec. experim.	Frec. original	Diferencia(%)	Frec. actualizada	Diferencia(%)
177.32 Hz	217.71 Hz	22.78 %	179.62 Hz	1.30 %
207.83 Hz	227.91 Hz	9.66 %	207.64 Hz	-0.09 %
289.99 Hz	305.09 Hz	5.21 %	288.95 Hz	-0.36 %
246.05 Hz	310.53 Hz	26.21 %	240.89 Hz	-2.10 %
308.92 Hz	344.61 Hz	11.55 %	309.80 Hz	0.28 %
325.51 Hz	351.41 Hz	7.96 %	317.30 Hz	-2.52 %

Tabla V. Frecuencias actualizadas y su diferencia con el valor real.

Como se observa de la tabla, a pesar de las incertidumbres del proceso, los valores de las frecuencias naturales se habían acercado considerablemente a los valores reales. No obstante, sólo habían convergido 9 variables de diseño de un total de 14, las cuales se presentan a continuación.

Variable de diseño	Grupo	Elementos	Valor inicial	Valor final
Módulo de elasticidad	2	2,3	2.1E+06	1.08E+06
Módulo de elasticidad	3	44,60	2.1E+06	3.99E+06
Densidad	1	1,28	7800	64740
Densidad	2	2,3	7800	44460
Densidad	5	34,35,50,51	7800	29153
Espesor tubo	1	34,50	0.10	0.647
Espesor tubo	3	36,52	0.10	0.215
Espesor tubo	5	38 a 44 y 54 a 60	0.10	0.233
Espesor tubo	6	61	0.10	0.233

Tabla VI. Valores de las variables de diseño que han convergido tras 50 iteraciones.

Analizando esta tabla se pudieron obtener las siguientes conclusiones:

- la disminución del módulo de elasticidad en el grupo 2 podría representar una unión semirrígida; por otra parte, resultaba extraño el valor tomado por el grupo 3.
- todos los grupos tomados para la densidad que habían convergido, lo habían hecho aumentando su valor; en todos ellos se podía suponer la existencia de masas puntuales.
- en cuanto al espesor tubular, los grupos que habían convergido también presentaban un aumento de su valor a un poco más del doble del inicial, salvo en el grupo 1 que había aumentado considerablemente más.

A la luz de estas observaciones, que conducían a un modelo actualizado carente de sentido físico se creó un nuevo modelo de elementos finitos al que se añadieron masas concentradas en los nudos indicados en la tabla siguiente.

Nudos	Masa concentrada
1	20 gr
2	20 gr
55	10 gr
58	10 gr

Tabla VII. Masas concentradas aplicadas en diferentes nudos del cuadro.

El nuevo modelo resultante presentaba las siguientes frecuencias naturales:

Frec. experim.	Frec. iniciales	Diferencia(%)	Frec. modelo 2	Diferencia(%)	MAC
177.32 Hz	217.71 Hz	22.78 %	196.18 Hz	6.00 %	0.805
207.83 Hz	227.91 Hz	9.66 %	217.88 Hz	4.84 %	0.808
246.05 Hz	310.53 Hz	26.21 %	285.85 Hz	-1.43 %	0.711
289.99 Hz	305.09 Hz	5.21 %	229.58 Hz	-6.69 %	0.829
308.92 Hz	344.61 Hz	11.55 %	323.82 Hz	4.82 %	0.771
325.51 Hz	351.41 Hz	7.96 %	310.42 Hz	-4.64 %	0.826

Tabla VIII. Frecuencias naturales del nuevo modelo, y MAC.

en donde se observa que son considerablemente mejores que en el modelo original. En cuanto al valor MAC, de nuevo se evaluó únicamente tomando en cuenta los grados de libertad experimentales.

Sobre este modelo también se realizó el estudio de la localización de errores; en este caso, se empleó el método de Lallement para las submatrices de masa y de rigidez. El resultado se presenta en las Figuras 8 y 9.

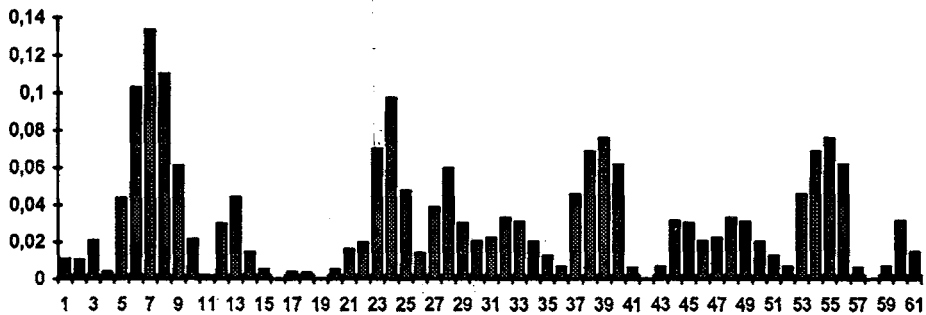


Figura 8. Error en las matrices elementales de rigidez.

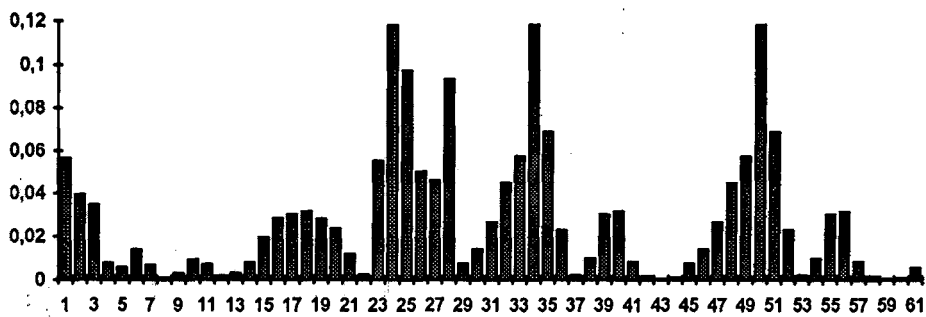


Figura 9. Error en las matrices elementales de masa.

De la observación de la Figura 8 se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- sigue apareciendo error en los elementos 6, 7, 8 y 9, tal como ocurría antes, lo cual no tiene, en principio, una explicación clara. De forma similar ocurre con los elementos 23 y 24.
- el elemento 28 presenta un error que podría deberse a la rigidez de la unión, al igual que en el modelo anterior.
- en los elementos 38, 39, 40, 54, 55 y 56 aparece un error que puede deberse al espesor de los tubos, pero cuyo valor es inferior al del modelo anterior, lo que indica que la corrección realizada ha sido acertada.
- desaparecen los errores en los elementos 44 y 60.
- en general, el nivel de error en cada elemento es inferior al modelo anterior.

Por otra parte, de la observación de la Figura 9 se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- de nuevo aparece error en los elementos 24 y 25, lo cual no tiene un claro significado físico.
- se podría considerar que los errores en los elementos 28, 34, 35, 50 y 51 se deben fundamentalmente a la presencia de masas concentradas que no han sido bien estimadas.
- el error que podría deberse a una inadecuada sección tubular parece subsanado, puesto que aquí no aparecen los mismos elementos que para la matriz de rigidez.



En función de estos resultados se procedió a realizar la actualización de este modelo de elementos finitos. Debido a la enorme influencia que presentaban las masas concentradas a la hora de determinar las frecuencias del modelo, y teniendo en cuenta la incertidumbre que existía en su valor, se tomó dicha variable de diseño para los nudos 1, 2, 55 y 58, que eran aquellos en los que se habían situado inicialmente masas concentradas, agrupados en cuatro grupos, uno por cada nudo.

Para llevar a cabo la actualización se empleó el método BFGS, con restricciones laterales en cada iteración que sólo permitían una variación de los parámetros de diseño del  $\pm 5\%$ . Tras 50 iteraciones, se consideró que el proceso presentaba resultados aceptables, y se cortó. Los valores de las frecuencias actualizadas eran los siguientes:

Frec. experím.	Frec. original	Diferencia(%)	Frec. actualizada	Diferencia(%)
177.32 Hz	217.71 Hz	22.78 %	181.43 Hz	2.32%
207.83 Hz	227.91 Hz	9.66 %	214.08 Hz	3.01 %
246.05 Hz	310.53 Hz	26.21 %	244.10 Hz	-0.79 %
289.99 Hz	305.09 Hz	5.21 %	280.93 Hz	-3.12 %
308.92 Hz	344.61 Hz	11.55 %	294.60 Hz	-4.64 %
325.51 Hz	351.41 Hz	7.96 %	319.31 Hz	-1.90 %

Tabla IX. Frecuencias actualizadas del modelo de elementos finitos.

Como se observa de dicha tabla, las frecuencias se han acercado considerablemente a su valor experimental, en algunos casos hasta valores inferiores al 1%. Además, el orden en el que aparecen las frecuencias analíticas es ahora el mismo que en el modelo experimental, lo que asegura aún más la bondad del modelo actualizado.

En cuanto a los valores que tomaron las masas concentradas, se presentan en la siguiente tabla.

Nudo	Masa
1	1.70 gr.
2	1.70 gr.
55	34.19 gr.
58	17.01 gr.

Tabla X. Valores actualizados de las masas concentradas.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de actualización de modelos de E.F. en base a resultados procedentes del análisis modal experimental. El ejemplo muestra que este proceso proporciona resultados aceptables de tal forma que el modelo numérico resultante responde de una forma más correcta que el modelo original a los modos y frecuencias que el sistema mecánico posee, y que han sido determinados mediante el análisis modal experimental. Es de destacar que el modelo actualizado es un modelo cuyo significado físico se mantiene; es decir, no se ha generado un modelo que responda únicamente a la minimización de una función. A ese paso se ha llegado tras una serie de fases que acotan el problema y que, en definitiva conducen a la adaptación a un modelo físico factible. En la actualidad se está introduciendo la posibilidad de incluir las diferencias entre los modos de vibración dentro de la función objetivo a minimizar, teniendo en cuenta las mejoras que se están produciendo y que se producirán en el futuro en la estimación de los mismos. Además, también se considera que la introducción de la segunda derivada en el desarrollo en serie de Taylor de los parámetros modales puede acelerar la convergencia.

Por último, cabe destacar que, hoy por hoy, es prácticamente imposible automatizar el proceso de actualización si se quiere mantener el sentido físico del modelo. Además, teniendo en cuenta el nivel actual de decisiones que debe tomar el usuario parece, a corto plazo, muy difícil que dicha automatización se pueda conseguir.

## REFERENCIAS

1. R.J. Allemang, "Investigation of Some Multiple Input/Output Frequency Response Experimental Modal Analysis Techniques", *Tesis Doctoral*, Department of Mechanical Engineering, University of Cincinnati, Ohio, EEUU, (1980).
2. P.E. Gill, W. Murray y M.H. Wright, "*Practical Optimization*", Academic Press, Londres, (1981).
3. Numerical Algorithms Group, "The NAG Fortran Workstation Library Handbook", Numerical Algorithms Group Ltd., Oxford, Reino Unido, (1986).
4. J. Lipkens y U. Vandeurzen, "The Use of Smoothing Techniques for Structural Modification Applications", IN Proceedings of the 12th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Bélgica, (1987).
5. G. Lallement, "Localization Techniques", In Proceedings of the Workshop on Structural Safety Evaluation Based on System Identification Approachs, Lambrecht, Alemania, (1988).
6. J.C. Wei, Q. Zhang, R.J. Allemang y M.L. Wei, "Correction of Finite Element Model via Selected Physical Parameters", IN Proceedings of the 13th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Bélgica, (1988).
7. E. Fissette, C. Stavrinidis y S.R. Ibrahim, "Error Location and Updating of Analytical Dynamic Models using a Force Balance Method", IN Proceedings of the International Conference 'Spacecraft Structures and Mechanical Testing', Noordwijk, Holanda, (1988).
8. L. Eckert y B. Caesar, "Influence of Test Data Quality and Completeness on Model Update Results", IN Proceedings of the 14th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Bélgica, (1989).

9. Engineering Design Optimization, "DOT Subroutines", Engineering Design Optimization Inc., Santa Bárbara, California, Estados Unidos, (1989).
10. J.C. O'Callahan, "A procedure for an Improved System (IRS) Model", IN Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada, Estados Unidos, (1989).
11. W. Lubber, "Error Localization Methods and Updating of a Finite Element Model by means of Structural Optimization", IN Proceedings of the 15th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Bélgica, (1990).
12. H. Gysin, "Expansion: the Achilles Heel of FE Model Updating", IN Proceedings of the 15th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Bélgica, (1990).
13. H. Gysin, "Ein Beitrag zur Verbesserung von Finite-Elemente-Modellen anhand Modaler Parameter", *Tesis Doctoral*, Zürich, Suiza, (1992).
14. M.H. Fernandes, J.I. Llorente y J.M. Hernández, "Remeshing based on Energy Criteria in Dynamic Problems", IN Proceedings of the Conference STRUCOME 92, París, Francia, (1992).
15. J.M. Hernández, J.I. Llorente y M.H. Fernandes, "Updating of Finite Element Models by means of Experimental Modal Data: Three-Step Process", IN Proceedings of the Conference STRUCOME 93, París, Francia, (1993).
16. J.M. Hernández, "Modelización de la Correlación por Elementos Finitos con el Análisis Modal Experimental: Métodos de Actualización de Matrices del Modelo", *Tesis Doctoral*, Bilbao, (1994).

