Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 8, 1, 77–85(1992)

UN METODO MEJORADO DE SEGUNDO ORDEN PARA LA SIMULACION DE FLUJO VISCOELASTICO CON ELEMENTOS FINITOS CUADRILATERALES

V. RUAS*,**
y
J.H. CARNEIRO DE ARAUJO*

*Dpto. de Informática,
Pontifícia Universidade Católica,
22453 Rio de Janeiro, Brasil.

**Laboratoire de Modélisation en Mécanique,
UPMC, URA 229/CNRS,
75252 Paris 05.

RESUMEN

Utilizando el método de los elementos finitos, se desarrollan métodos de segundo orden basados en cuadriláteros que puedan ser utilizados en la simulación numérica de flujo viscoelástico. Este desarrollo se logra gracias a la reducción en el número de los grados de libertad, debido a la elección correcta de "tensores de burbuja" así como a la de un contexto funcional adecuado.

SUMMARY

A convenient choice of "bubble tensors" together with a suitable functional framework lead to a significant reduction of the number of degree of freedom necessary to construct second order three-field finite element methods based on quadrilaterals, suitable for the numerical simulation of viscoelastic flow.

INTRODUCCION

La solución numérica de gran cantidad de problemas industriales relacionados con el flujo de polímeros fundidos, así como otro tipo de fluidos que presentan comportamiento no-newtoniano, es un tema complejo. Una de las principales dificultades está asociada al hecho de que en la mayoría de los casos, el flujo de tales líquidos presenta un grado de elasticidad significativo. De esta manera, cualquier modelado de diferentes procesos de interés práctico que sea realista, debe estar basado en la teoría de la viscoelasticidad.

Aunque la elección del modelo viscoelástico más adecuado entre todos los posibles está todavía sujeto a extensa investigación en el área de la reología, queda aún mucho

Recibido: Abril 1991

 ISSN 0213–1315

camino por recorrer para obtener, a partir de la discretización de un modelo, resultados numéricos significativos. Al respecto, los especialistas en métodos numéricos aplicados a este tipo de problemas, se han dedicado a la búsqueda de métodos que sean aplicables a modelos viscoelásticos simples, tales como el de Maxwell o el de Oldroyd, con el objetivo de que puedan ser utilizados en modelos más complejos. Es preciso recordar que cualquier buen método de discretización en este área, debe ser capaz de producir buenas aproximaciones en la velocidad ($\mathbf{u}$), presión (p) y en el tensor de tensiones (σ) del fluido, puesto que estas tres variables están íntimamente acopladas en cualquier modelo viscoelástico auténtico.

En lo concerniente al método de elementos finitos, dos miembros de uno de los grupos más experimentados en el área de la viscoelasticidad computacional encabezado por el Prof. M. Crochet de la Universidad Católica de Louvain-la-Neuve en Bélgica, propusieron[3] un método de segundo orden de elementos finitos de tres campos ($\mathbf{u}-p-\sigma$), que les permitió un considerable avance en sus actividades de investigación y desarrollo. De hecho, en ese mismo artículo y en otros que siguieron, demostraron a través de muchos ejemplos que los flujos que contienen un alto grado de elasticidad podían ser representados satisfactoriamente por una solución numérica utilizando ese método.

Poco después, Fortin y Pierre[4] formalmente justificaron lo anticipado anteriormente, demostrando que el método de Crochet y Marchal era óptimamente convergente en el caso límite de sistemas de Stokes estacionarios de tres campos. Puesto que este último caso es precisamente el que tratamos en este artículo, hacemos seguidamente un breve recordatorio, suponiendo para simplificar, que la velocidad se anula en el contorno Γ del dominio del flujo, denotado por Ω

$$\begin{cases} -\ \mathbf{div}\ \sigma + \mathbf{grad}\ p = \mathbf{f} \\ \sigma = 2\eta\ \ \varepsilon(\mathbf{u}) \quad \text{en} \quad \Omega \\ \text{div}\ \mathbf{u} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

donde $\mathbf{f}$ son las fuerzas másicas dadas, η representa la viscosidad aparente del fluido, y $\varepsilon(\mathbf{u})$ es el tensor velocidad de deformación.

Hemos de mencionar el alto costo asociado al cálculo del flujo viscoelástico debido a la presencia de fuertes no linealidades. Debido al hecho de que la mayoría de los potenciales usuarios de los programas de elementos finitos para la simulación de flujo de polímeros fundidos y otros análisis relacionados, no pueden afrontar estos altos costos, los autores iniciaron estas investigaciones con el fin de proponer métodos optimizados de tres campos. En este contexto, optimizar significa obtener estimaciones del error global del mismo orden que los errores individuales de interpolación para cada una de las tres variables en los espacios correspondientes y al menor costo posible en términos del número de grados de libertad utilizados.

Como una base sobre la cual apoyamos nuestros argumentos, recordemos a continuación la llamada ley corrotacional de Maxwell, que sin duda se encuentra entre las más simples para la descripción del comportamiento viscoelástico en un flujo fluido

$$\sigma + \lambda \frac{\mathcal{D}\sigma}{\mathcal{D}t} = 2\eta\varepsilon(\mathbf{u}) \tag{2}$$

donde λ es el tiempo de relajación del material y $\frac{\mathcal{D}\cdot}{\mathcal{D}t}$ denota la llamada derivada del tensor de Jaumann (ver [1]) cuya expresión es

$$\frac{\mathcal{D}\sigma}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \textbf{ grad })\sigma - \frac{1}{2}(\omega\sigma - \sigma\omega) \tag{3}$$

donde $\omega = \textbf{grad } \mathbf{u} - (\textbf{grad } \mathbf{u})^T$

En (3) los dos primeros términos están asociados al transporte de una cantidad física, y los dos restantes con productos tensoriales asociados con la rotación de los ejes de coordenadas, cuyo movimiento es inducido por el flujo mismo. Nótese que el sistema (1) corresponde al caso en donde $\lambda = 0$.

Ahora bien, para el caso en donde la técnica elegida para resolver la ecuación constitutiva permite el uso de un tensor de tensiones discontinuo, tal como en el bien conocido esquema de Lesaint y Raviart, Fortin y Fortin propusieron en la referencia [5] un método óptimo de segundo orden de elementos finitos de tres campos basado en cuadriláteros.

En este artículo presentamos el caso más utilizado por la mayoría de los especialistas cuando el tensor de tensiones es continuo. Más específicamente, tomando como base el espacio de elementos finitos en velocidades utilizado por Crochet y Marchal y el de presión utilizado en la referencia [5], se indica cómo construir el espacio de tensiones con el objeto de reducir significativamente el número de grados de libertad, pero manteniendo sin cambios las propiedades de aproximación global del método mixto. Puntualizamos en particular que, al menos en el caso de mallas rectangulares, es posible reducir a menos de un tercio el número de grados de libertad. Las principales bases teóricas necesarias para establecer nuestros resultados se dan en la referencia [6]. Por esta razón los autores refieren al lector a ese trabajo para los detalles concernientes a los antecedentes funcionales utilizados en lo que sigue.

RESUMEN DEL CONTEXTO FUNCIONAL

La formulación variacional natural del sistema (1) es

$$\begin{cases} \text{Hallar } \ (\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\sigma}) \ \in \mathbf{V} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{T} \ \text{ tal que} \\ -\int_\Omega \sigma \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) + \int_\Omega p \text{ div } \mathbf{v} = -\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ \frac{1}{2\eta}\int_\Omega \sigma \cdot \tau - \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \tau = 0 & \forall \tau \in \mathbf{T} \\ \int_\Omega q \text{ div } \mathbf{u} = 0 & \forall q \in \mathbf{Q} \end{cases} \tag{4}$$

donde refiriéndonos a la referencia [1] para la notación, se expresa:

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad \text{dotado de la norma} \quad |\mathbf{v}|_1 = \left[\int_\Omega |\mathbf{grad}\ \mathbf{v}|^2\right]^{1/2}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}_0^2(\Omega) = \{q/q \in L^2(\Omega), \quad \int_\Omega q = 0\} \quad \text{dotado de la norma } \|q\|_0 = \left[\int_\Omega q^2\right]^{1/2}$$

$\mathbf{T} = \{\{\tau_{ij}\}/\tau_{ij} = \tau_{ij} \quad , \quad \tau_{ij} \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i,j \leq 2\}$, dotado de la norma

$$\|\tau\|_0 = \left[\sum_{i,j=1}^{2} \|\tau_{ij}\|_0^2\right]^{1/2} .$$

Dada una familia cuadrilateral $\{\mathcal{T}_h\}_h$ de mallas de elementos finitos de Ω, y respetando las reglas usuales de compatibilidad y regularidad en donde el parámetro h expresa el máximo de los elementos de $\mathcal{T}_h$, entonces se asocian con $\mathcal{T}_h$ los tres subespacios $\mathbf{V}_h$, $\mathbf{Q}_h$, y $\mathbf{T}_h$ de $\mathbf{V}$, $\mathbf{Q}$, y $\mathbf{T}$ respectivamente, así la secuencia del problema aproximado se define por:

$$\begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\sigma}_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{Q}_h \times \mathbf{T}_h \text{ tal que} & \\ -\int_\Omega \sigma_h \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) + \int_\Omega p_h \text{ div } \mathbf{v} = -\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \\ \dfrac{1}{2\eta}\int_\Omega \sigma_h \cdot \tau - \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}_h) \cdot \tau = 0 & \forall \tau \in \mathbf{T}_h \\ \int_\Omega q \text{ div } \mathbf{u}_h = 0 & \forall q \in \mathbf{Q}_h \end{cases} \tag{5}$$

Trabajaremos con los espacios $\mathbf{V}_h$ y $\mathbf{Q}_h$ que satisfagan la bien conocida condición de estabilidad, necesaria para la buena implementación del problema (5), así,

$$\exists\ \beta_1 > 0 \quad \text{tal que} \quad \inf_{\substack{q \in Q_h \\ q \neq 0}} \ \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\int_\Omega q \text{ div } \mathbf{v}}{\|q\|_0 |\mathbf{v}|_1} \geq \beta_1 \tag{6}$$

donde además β_1 es independiente de h. De acuerdo con la referencia [6], la cota de error

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_1^2 + \|p - p_h\|_0^2 + \|\sigma - \sigma_h\|_0^2 \leq C \left[\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_1^2 + \inf_{q \in \mathbf{Q}_h} \|p - q\|_0^2 + \inf_{\tau \in \mathbf{T}_h} \|\sigma - \tau_h\|_0^2\right] \tag{7}$$

se verifica para la constante C independiente de h, si se cumple la siguiente condición de compatibilidad entre los espacios $\mathbf{Q}_h$, $\mathbf{V}_h$ y $\mathbf{T}_h$

$$\exists\ \beta_2 > o \quad \text{independiente de} \quad h \text{ tal que} \quad \inf_{\substack{\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{U}}_h \\ \mathbf{v} \neq 0}} \ \sup_{\substack{\tau \in T_h \\ \tau \neq 0}} \frac{\int_\Omega \tau \cdot \varepsilon(\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_1 \|\tau\|_0} \geq \beta_2 \tag{8}$$

donde $\widetilde{\mathbf{U}}_h$ es cualquier espacio que contiene $\mathbf{U}_h$ definido por:

$$\mathbf{U}_h = \left\{ \mathbf{v}/\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \quad \int_\Omega q \text{ div } \quad \mathbf{v} = 0 \quad \forall q \in Q_h \right\}$$

Al igual que en la referencia [6], utilizaremos el siguiente resultado adaptado de Fortin[4], a saber:

Proposición 1: Si $\forall \tau \in \mathbf{T} \quad \exists \quad \tau_h \in \mathbf{T}_h$ tal que

$$\int_\Omega \tau_h \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) = \int_\Omega \tau \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \widetilde{\mathbf{U}}_h \tag{9}$$

y

$$||\tau_h||_0 \leq C||\tau||_0 \qquad \text{para una constante } C \text{ independiente de } h \tag{10}$$

entonces (8) es satisfecha.

TENSOR DE TENSIONES PARA RECTANGULOS

Supongamos que $\mathcal{T}_h$ esté compuesto por rectángulos. Supongamos asimismo que a y b expresan las longitudes de los dos lados que definen un rectángulo $R \in \mathcal{T}_h$ suponiendo que sean paralelos a los dos ejes cartesianos Ox_1 y Ox_2 respectivamente. Expresemos $r = b/a$ y sea $\mathcal{F}_R$ la transformación afín biunívoca del cuadrado de referencia $\hat{R} = (-1, +1) \times (-1, +1)$ del plano $\hat{O}\hat{x}_1\hat{x}_2$ sobre R.

Recordamos que $\hat{Q}_2$ expresa el espacio de polinomios de grado menor o igual a dos en cada variable $\hat{x}_i$, $\quad i = 1, 2$. Al hacer esto, introducimos el siguiente espacio auxiliar:

$$\mathbf{W}_h = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2) \text{ tal que } \mathbf{v}_{/R} = \hat{\mathbf{v}} \circ \mathcal{F}_R^{-1} \text{ con } \hat{\mathbf{v}} \in \hat{\mathbf{Q}}_2, \quad \forall R \in \mathcal{T}_h\}$$

Al igual que en la referencia [5], tomaremos $\mathbf{V}_h = \mathbf{W}_h \cap \mathbf{C}^0(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Sin embargo, para hacer posible una mejora del espacio para el tensor de tensiones, trabajaremos con el espacio $Q_h = \widetilde{Q}_h \cap L_0^2(\Omega)$, donde $\widetilde{Q}_h = \{q/q_{/R} \in P_1 \quad \forall R \in \mathcal{T}_h\}$, siendo P_1 el espacio de funciones afines sobre R. Es sabido que este par $(\mathbf{V}_h, \mathbf{Q}_h)$ satisface la condición (6), (ver [5]).

Definiremos el espacio $\mathbf{T}_h$ como la suma directa de T_h^1 de tensores simétricos continuos cuya restricción a cada elemento de $\mathcal{T}_h$ pertenece a Q_1 (lineal con respecto a x_1 y x_2 por separado) con otro tensor simétrico del espacio $\mathbf{T}_h$ que se anula en el contorno de cada elemento $R \in \mathcal{T}_h$ que se especificará más adelante. A continuación definimos nuestro espacio $\widetilde{\mathbf{U}}_h$ como:

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \{\mathbf{v}/\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h \quad \text{y} \quad \int_R \zeta \text{ div } \mathbf{v} = 0 \quad \forall \zeta \in P_1 \text{ y } \forall R \in \tau_h\}$$

La inclusión de $\mathbf{U}_h \subset \widetilde{\mathbf{U}}_h$ se basa en el hecho que $\mathbf{V}_h$ es un subespacio de $\mathbf{W}_h$.

Teniendo en cuenta otra vez la referencia [4], se hace notar que para satisfacer (9) es suficiente con definir un tensor $\tilde{\tau}_h$ que pertenezca al espacio $\mathbf{T}_h$, de tal manera que para cada tensor $\tilde{\tau} \in \mathbf{T}$ tengamos

$$\int_R \tilde{\tau}_h \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) = \int_R \tilde{\tau} \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \widetilde{\mathbf{U}}_h \quad \text{y} \quad \forall R \in \mathcal{T}_h \tag{11}$$

Por el cambio de variables en las integrales arriba mencionadas (11) se puede ver que es equivalente a afirmar que para cada tensor simétrico $\hat{\tau}$, cuyos componentes pertenecen a $L^2(\hat{R})$, es posible asociar otro tensor $\hat{\tau}_h$ que pertenece a cierto espacio $\hat{\mathbf{T}}$ de tensores definidos en el cuadrado de referencia y que se anula en el contorno de R, por lo que

$$\int_{\hat{R}} \hat{\tau}_h \cdot \hat{\varepsilon} = \int_{\hat{R}} \hat{\tau} \cdot \hat{\varepsilon} \qquad \forall \hat{\varepsilon} \in \hat{E} \tag{12}$$

donde $\hat{E}$ es el espacio generado por los tensores de la forma $\varepsilon(\mathbf{v}) \circ \mathcal{F}_R$ para $\mathbf{v} \in \widetilde{\mathbf{U}}_h$ En el caso en estudio, después de un cálculo directo utilizando las funciones de base del espacio Q_2 (i.e., el espacio análogo a $\hat{Q}_2$ para las variables x_1 y $x_2, i = 1,2$) $\hat{E}$ se encontró que está generado por el siguiente conjunto de doce tensores linealmente independientes:

$$\hat{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \hat{\varepsilon}_7 = \begin{bmatrix} 2\hat{x}_1\hat{x}_2 & r\hat{x}_1^2/2 \\ r\hat{x}_1^2/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & 0 \\ 0 & -\hat{x}_1 \end{bmatrix} \qquad \hat{\varepsilon}_8 = \begin{bmatrix} \hat{x}_1^2 - 1/3 & 2r\hat{x}_1\hat{x}_2 \\ 2r\hat{x}_1\hat{x}_1 & r^2(\hat{x}_1^2 - 1/3) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 & 0 \\ 0 & -\hat{x}_2 \end{bmatrix} \qquad \hat{\varepsilon}_9 = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 - 3\hat{x}_1\hat{x}_2^2 & -3r^2\hat{x}_1^2\hat{x}_2/2 \\ -3r^2\hat{x}_1^2\hat{x}_2/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\varepsilon}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\varepsilon}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{x}_2^2/2 \\ \hat{x}_2^2/2 & 2r\hat{x}_1\hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\varepsilon}_5 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{x}_1 \\ \hat{x}_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\varepsilon}_{11} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2^2 & 0 \\ 0 & -r^2\hat{x}_1^2 + (r^2 - 1)/3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\varepsilon}_6 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\varepsilon}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -3\hat{x}_1\hat{x}_2^2/2 \\ -3\hat{x}_1\hat{x}_2^2/2 & r(\hat{x}_2 - 3\hat{x}_1^2\hat{x}_2) \end{bmatrix}$$

Supongamos que $\hat{\varphi}$ expresa la "función de burbuja" de $\hat{R}$,

$$\hat{\varphi}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1 - \hat{x}_1^2)(1 - \hat{x}_2^2)$$

Definimos $\hat{\mathbf{T}}$ como el espacio generado por los siguientes doce tensores:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\varphi} & 0 \\ 0 & \hat{\varphi} \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}_7 = \begin{bmatrix} \hat{x}_1\hat{x}_2\hat{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} \hat{x}_1\hat{\varphi} & 0 \\ 0 & -\hat{x}_1\hat{\varphi} \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}_8 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{x}_1\hat{x}_2\hat{\varphi} \\ \hat{x}_1\hat{x}_2\hat{\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} \hat{x}_2\hat{\varphi} & 0 \\ 0 & -\hat{x}_2\hat{\varphi} \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}_\gamma = \begin{bmatrix} \hat{x}_1\hat{\varphi} & 0 \\ 0 & \hat{x}_1\hat{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_4 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\varphi} \\ \hat{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{x}_1\hat{x}_2\hat{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_5 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{x}_1\hat{\varphi} \\ \hat{x}_1\hat{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}_{11} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2^2\hat{\varphi} & 0 \\ 0 & -\hat{x}_1^2\hat{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_6 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{x}_2\hat{\varphi} \\ \hat{x}_2\hat{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}_{12} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2\hat{\varphi} & 0 \\ 0 & \hat{x}_2\hat{\varphi} \end{bmatrix}$$

La construcción de $\hat{\tau}_h \in \hat{\mathrm{T}}$ satisfaciendo (12) se reduce a la solución de un sistema lineal,

$$A\boldsymbol{t}_h = \boldsymbol{t}$$

donde $\boldsymbol{t}_h$ es el vector de $\mathbb{R}^{12}$ el cual está compuesto por las componentes de $\hat{\tau}_h$ con respecto a la base $\{\hat{\sigma}_j\}_{j=1}^{12}$, $\boldsymbol{t}$ es el vector de $\mathbb{R}^{12}$ cuya componente i-ésima está dada por $\int_{\hat{R}} \hat{\tau} \cdot \hat{\varepsilon}_i$, y $A = \{a_{ij}\}$ es la matriz 12×12 dada por $a_{ij} = \int_{\hat{R}} \hat{\sigma}_j \cdot \hat{\varepsilon}_i$.

Los únicos valores no nulos de A son:

$$a_{11} = a_{44} = \frac{8}{9}, \quad a_{22} = a_{33} = a_{55} = a_{66} = a_{1,11} = \frac{8}{45}; \quad a_{77} = a_{99} = a_{92} = \frac{8}{225};$$

$$a_{88} = \frac{16r}{225}; \quad a_{10,10} = \frac{8r}{225}; \quad a_{11,11} = \frac{8(r^2+8)}{945}; \quad a_{12,12} = \frac{8r}{225}; \quad a_{8,11} = \frac{8(1-r^2)}{945}$$

$$a_{11,1} = \frac{8(4-r^2)}{135}; \quad a_{12,3} = \frac{-8r}{225}; \quad a_{74} = \frac{8r}{45}; \quad a_{10,4} = \frac{4}{45}; a_{12,5} = \frac{-4}{75}; \quad a_{96} = \frac{-4r}{75}$$

Después de realizar algunas eliminaciones gaussianas simples, se vió que el determinante de A era distinto de cero para cada $r > 0$ y aproximadamente igual a $0.181539 \times 10^{-11} r^3(r^2+1)$. Esto implica no sólo que ese sistema (12) tiene una solución única, sino además que esto mismo sucede para el sistema (11), considerando que $\mathbf{T}$ es el espacio de tensores simétricos cuya restricción a cada $R \in \mathcal{T}_h$ pertenece al espacio generado por $\{\sigma_j^r\}_{j=1}^{12}$ donde $\sigma_j^r = \hat{\sigma}_j \circ \mathcal{F}_R^{-1}$.

Al igual que en la referencia [4], se elige $\tau = \tau - \pi_h^1 \tau$, donde $\tau \in \mathbf{T}$ es cualquier tensor que satisface la inecuación obtenida por (8), sustituyendo $\mathbf{T}_h$ con $\mathbf{T}$ y $\pi_h^1 \tau$ es la proyección L^2 de τ sobre $\mathbf{T}_h$. Al hacer esto y utilizando la misma serie de argumentos que en [6], es decir, el hecho que el determinante de A está inferiormente acotado por una constante independiente de h para cada $R \in \mathcal{T}_h$, implica que tanto (9) y (10) se verifican con $\tau_h = \pi_h^1 \tau + \tilde{\tau}_h$, en donde $\tilde{\tau}_{h/R}$ es la solución de (11) $\forall R \in \mathcal{T}_h$.

Finalmente, de acuerdo a la Proposición 1 y teniendo en cuenta que las mejores aproximaciones de $\mathbf{u}$, p y σ en $\mathbf{V}_h$, $\mathbf{Q}_h$ y $\mathbf{T}_h$ están acotadas superiormente por términos $O(h^2)$ si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^3(\Omega)$ y $p \in H^2(\Omega)$ recordando (7), tenemos que:

Teorema 1 : Si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^3(\Omega)$, $p \in H^2(\Omega)$, $\mathbf{T}_h = \widetilde{\mathbf{T}}_h \oplus \mathbf{T}_h^1$ y $\{\mathcal{T}_h\}_h$ es uniformemente regular en el sentido normal, entonces $\mathbf{u}_h$, p_h σ_h, convergen a $\mathbf{u}$, p, σ respectivamente cuando h tiende a 0 en los espacios correspondientes, a la misma velocidad que el término Ch^2 converge a cero.

CONCLUSIONES

(i) Puesto que existe una aplicación continua dependiente de tres incrementos angulares de un rectángulo dado a un cuadrilátero arbitrario, es razonable esperar que los resultados arriba obtenidos se puedan aplicar al menos para cuadriláteros no muy distorsionados (es decir, si los tres incrementos no son muy grandes), si ambas $\mathbf{T}_h$ y $\mathbf{T}_h^1$ consisten en tensores cuya restricción a cada $R \in \mathcal{T}_h$ son las imágenes de los tensores de $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{Q}}_1$ respectivamente, a través del mapeo de $\mathcal{F}_R$.

(ii) De cualquier manera, es posible extender la aplicación de la técnica arriba desarrollada al caso más general de mallas, tema que trataremos en un próximo artículo.

(iii) Para una malla dada, el número de grados de libertad del espacio $\mathbf{T}_h$ es aproximadamente 5/16 del número total de grados de libertad del espacio Q_1 definido en una submalla cuatro veces más densa que la $\mathcal{T}_h$ utilizado por Crochet y Marchal. Más aún, en nuestro elemento se pueden eliminar fácilmente aproximadamente doce de quince grados de libertad tensoriales del correspondiente sistema lineal a un bajo costo, puesto que están asociados sólo a un elemento.

(iv) El desarrollo numérico del elemento mixto presentado en este artículo se está revisando y los correspondientes resultados serán reportados en un artículo subsecuente.

REFERENCIAS

1. R.A. Adams, "*Sobolev Spaces*", Academic Press, N.Y., (1968).
2. R.C. Armstrong, R. Byron Bird y O. Hassager, "Dynamics of Polymeric Liquids", *Fluid Mechanics*, Vol. **1**, , John Willey and Sons, N.Y., (1976).
3. M. Crochet y J.M. Marchal, "A new Mixed Finite Element for Calculating Viscoelastic Flow", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. **26**, pp. 77–114, (1987).
4. M. Fortin y R. Pierre, "On the Convergence of the Mixed Method of Crochet & Marchal for Viscoelastic Flows", *Comp. Meth. in Appl. Engng.*, Vol. **73**, pp. 341–350, (1988).
5. M. Fortin y A. Fortin, "A New Approach for the FEM Simulation of Viscoelastic Flows", *J. Non-newtonian Fluid Mech.*, Vol. **32**, pp. 295–310, (1989).
6. V. Ruas, "An optimal Three–field Finite Element Approximation of the Stokes System with Continuous Extra Stresses", a aparecer.