

INTERPOLACION MINIMO-CUADRATICA DE SUPERFICIES A PARTIR DE DATOS IRREGULARMENTE DISTRIBUIDOS

MARIO AYMERICH
FERMIN NAVARRINA

y

MANUEL CASTELEIRO
*Escuela Técnica Superior de Ingenieros
de Caminos, Canales y Puertos.
Universitat Politècnica de Catalunya.*

RESUMEN

La interpolación de superficies a partir de datos irregularmente distribuidos se ha basado normalmente en algoritmos tales que la superficie obtenida pasa por todos los puntos base de interpolación. Sin embargo, cuando dichos datos son experimentales, su grado de fiabilidad no tiene por qué ser el mismo para todos ellos, y por tanto las condiciones impuestas por tales algoritmos pueden ser innecesarias e incluso inconvenientes. En este trabajo se presenta un método para la obtención de superficies suaves que subsana este problema, y cuyo criterio de aproximación es el de mínimos cuadrados. La continuidad de segundo orden de la superficie queda garantizada al utilizar para su generación el producto tensorial de dos bases de splines cúbicas. Se examinan diversos ejemplos y se presentan posibles líneas de futuro desarrollo.

SUMMARY

Surface interpolation from irregularly distributed data points is usually based on algorithms which produce surfaces containing all data points. Experimental measurements have different levels of reliability and, therefore, the constraints imposed by such algorithms may be unnecessary and even misleading. A method to obtain smooth surfaces through least squares criteria is presented. Second order continuity is guaranteed by the use of the tensor product of two cubic spline bases in the generation process. Several examples are discussed and some of the possible fields of future research are outlined.

INTRODUCCION

La interpolación y aproximación de superficies son problemas complejos que surgen en muchas aplicaciones del cálculo numérico. En general, el objetivo de la interpolación o aproximación consiste en obtener la expresión matemática de una superficie en el espacio tridimensional que verifique una serie de condicionamientos impuestos, y que se amolde en mayor o menor grado a un conjunto de puntos base conocidos. La expresión matemática ha de ser adecuadamente tratable en el contexto de la aplicación específica en cuyo desarrollo se plantea la interpolación. Existen algoritmos y técnicas eficientes para aproximar superficies a partir de una malla regular de puntos, pero no así en el caso de datos irregularmente distribuidos, y mucho menos

si a la superficie buscada se le exige un orden de continuidad superior a uno.

En el caso que nos ocupa, abordamos el problema de aproximar superficies con grado de continuidad dos a un conjunto de puntos irregularmente distribuidos en una región finita del espacio. Dada la naturaleza de la formulación propuesta, es inmediato extender el rango de aplicación con requerimientos de continuidad superiores.

El método analizado formula la superficie interpoladora como un spline bicúbico en una malla rectangular de nodos irregularmente espaciados. Los elementos de la base de splines bidimensionales, se obtienen directamente a partir del producto tensorial de las dos bases de splines cúbicos con derivada segunda continua, en las direcciones de los ejes de la malla. La base de splines bicúbicos es por esta razón de clase C^2 . Los coeficientes que definen la superficie interpoladora como combinación lineal de los elementos de la base, se calculan de forma que minimicen el error cuadrático de la superficie respecto al conjunto de datos. La eficacia del método se ha contrastado mediante una función de prueba con la del algoritmo de Akima¹, para interpolación de superficies de continuidad uno sobre puntos irregularmente distribuidos. Este algoritmo, a diferencia del propuesto, genera interpolaciones puras sobre el conjunto de datos. A pesar de que el método analizado en el presente artículo proporciona, en principio, aproximaciones y no interpolaciones puras, el resultado obtenido es de mayor calidad, y el orden de continuidad mayor. Finalmente se han generado superficies a partir de datos obtenidos en casos reales, comprobándose la versatilidad y eficacia del método propuesto.

HIPOTESIS BASICAS

En adelante aceptaremos los siguientes requisitos:

1. La región de interpolación es rectangular.
2. Los datos de entrada son las tres coordenadas cartesianas de los puntos base. Estos se encontrarán en general distribuidos de forma irregular dentro de la región de interpolación.
3. La superficie interpoladora habrá de ser expresable mediante una función $Z(X,Y)$ unívoca para todo par de coordenadas (X,Y) en su región de definición.
4. La función $Z(X,Y)$ ha de poseer, al menos, continuidad de segundo orden.
5. El algoritmo debe proporcionar una expresión racional que permita calcular el valor de la función $Z(X,Y)$ en todos los puntos de la región de interpolación.
6. La superficie interpolada ha de proporcionar una aproximación "ADECUADA", y "EFICIENTE" y ha de cumplir el requisito de "SUAVIDAD", entendiendo estos términos en sentido amplio.

En un contexto más general, algunos de estos requerimientos podrían alterarse. No hay formalmente ningún inconveniente en que el contorno de la región de interpolación no sea rectangular, la continuidad de la superficie sea de orden mayor o menor, o la ecuación de la superficie se obtenga en un sistema de coordenadas no cartesiano.

El desarrollo del método incluye las siguientes fases:

1. Definir una malla plana rectangular, no necesariamente equiespaciada, en el plano XY sobre la que se realizará la interpolación.
2. Calcular una base de splines cúbicos con derivada segunda continua en cada una de las direcciones principales de la malla, que identificamos con los ejes X e Y del plano de la misma.
3. Obtener la base de splines bicúbicos de la superficie como producto tensorial de las dos bases anteriores.
4. Formular la superficie interpoladora como combinación lineal de los elementos de la base.
5. Expresar el error cuadrático de la superficie respecto al conjunto de datos en función de los coeficientes de la combinación lineal.
6. Imponer la minimización del error cuadrático, y resolver el sistema de ecuaciones planteado.

FORMULACION MATEMATICA

Definición de la función de interpolación

Expresamos el problema empleando la notación siguiente:

1. Sea N_p el número de datos.
2. Sea $\{(X_i, Y_i, Z_i), i = 1, N_p\}$, el conjunto de datos, dado por las tres coordenadas cartesianas de cada elemento referido a una base ortogonal.
3. Consideramos la malla rectangular en que se efectúa la interpolación definida por el usuario, o generada automáticamente a partir del conjunto de datos, como formada por N_x filas en la dirección del eje X, y N_y columnas en la dirección del eje Y.
4. Sea $N_n = N_x \cdot N_y$ el número de nodos de la malla.
5. Sea XM_j la coordenada X de la fila j de la malla.
6. Sea YM_k la coordenada Y de la columna k de la malla.
7. Sea $\{F_{jk}, j = 1, N_x; k = 1, N_y\}$, el conjunto de valores de la función interpoladora en los nodos de la malla correspondientes a las filas j-ésimas y a las columnas k-ésimas.

Una vez conocidos, los valores F_{jk} permitirán definir completamente la función de interpolación.

Para ello, introducimos las bases de splines siguientes:

1. Sea $\{CX_i(X), i = 1, N_x\}$, la base de splines cúbicos con segunda derivada continua, definida sobre la sucesión de coordenadas $\{XM_j, j = 1, N_x\}$, que verifica:

$$CX_i(XM_j) = \delta(i, j) \quad (1)$$

siendo $\delta(i, j)$ la delta de Kronecker.

2. Sea $\{CY_i(Y), i = 1, N_y\}$, la base de splines cúbicos con segunda derivada continua, definida sobre la sucesión de coordenadas $\{YM_j, j = 1, N_y\}$, que verifica:

$$CY_i(YM_j) = \delta(i, j) \quad (2)$$

siendo $\delta(i, j)$ la delta de Kronecker.

Las dos bases de splines tienen dos grados de libertad en cada uno de sus elementos. En lo que sigue en este estudio supondremos nula la curvatura en los puntos extremos, originando splines naturales, dado que ello minimiza la curvatura total. No obstante, en una aplicación específica podría ser conveniente, e incluso necesario, introducir otro tipo de condiciones de contorno, (derivadas o curvaturas dadas, splines periódicos, etc.), lo que puede realizarse sin dificultad.

Empleando el producto tensorial de ambas bases, definimos la función interpoladora en los términos siguientes:

$$Z(X, Y) = \sum_{j=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_y} F_{jk} \cdot CX_j(X) \cdot CY_k(Y) \quad (3)$$

Es inmediato comprobar a partir de la definición dada, que se verifica:

$$Z(XM_a, YM_b) = F_{ab} \quad (4)$$

identificándose por tanto F_{jk} con el valor de la función de interpolación en el nodo correspondiente de la malla.

Minimización del error cuadrático

Habiendo definido la forma general de la función de interpolación, es inmediato establecer que el error cuadrático cometido al interpolar, supuestos unos parámetros F_{jk} , puede expresarse en la forma:

$$E = \sum_{i=1}^{N_p} [Z_i - Z(X_i, Y_i)]^2 \quad (5)$$

El error cuadrático mínimo se obtendrá para la familia de parámetros que verifiquen el sistema de ecuaciones definido en la forma:

$$\frac{\partial E}{\partial F_{ab}} = 0, \quad \begin{matrix} a = 1, N_x \\ b = 1, N_y \end{matrix} \quad (6)$$

Desarrollando la expresión anterior, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{N_p} [Z_i - Z(X_i, Y_i)] \cdot \partial Z(X_i, Y_i) \partial F_{ab} = 0, \quad \begin{matrix} a = 1, N_x \\ b = 1, N_y \end{matrix} \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{N_p} Z(X_i, Y_i) \cdot \frac{\partial Z(X_i, Y_i)}{\partial F_{ab}} = \sum_{i=1}^{N_p} Z_i \cdot \frac{\partial Z(X_i, Y_i)}{\partial F_{ab}} \quad \begin{matrix} a = 1, N_x \\ b = 1, N_y \end{matrix} \quad (8)$$

Desarrollo matemático

De la expresión (3) se deduce:

$$\frac{\partial Z(X_i, Y_i)}{\partial F_{ab}} = CX_a(X_i) \cdot CY_b(Y_i) \quad (9)$$

Y sustituyendo (3) y (9) en el sistema de ecuaciones (8) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_p} \left[\sum_{j=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_y} F_{jk} \cdot CX_j(X_i) \cdot CY_k(Y_i) \right] \cdot CX_a(X_i) \cdot CY_b(Y_i) = \\ = \sum_{i=1}^{N_p} Z_i \cdot CX_a(X_i) \cdot CY_b(Y_i), \quad \begin{matrix} a = 1, N_x \\ b = 1, N_y \end{matrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Alterando el orden de los sumatorios, el sistema anterior puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_y} \left[\sum_{i=1}^{N_p} [CX_j(X_i) \cdot CY_k(Y_i) \cdot CX_a(X_i) \cdot CY_b(Y_i)] \right] \cdot F_{jk} = \\ = \sum_{i=1}^{N_p} Z_i \cdot CX_a(X_i) \cdot CY_b(Y_i), \quad \begin{matrix} a = 1, N_x \\ b = 1, N_y \end{matrix} \end{aligned} \quad (11)$$

Definiendo los tensores y matrices siguientes,

$$M_{abjk} = \sum_{i=1}^{N_p} [CX_a(X_i) \cdot CY_b(Y_i) \cdot CX_j(X_i) \cdot CY_k(Y_i)] \quad (12)$$

$$A_{ab} = \sum_{i=1}^{N_p} Z_i \cdot CX_a(X_i) \cdot CY_b(Y_i), \quad \begin{matrix} a = 1, N_x \\ b = 1, N_y \\ j = 1, N_x \\ k = 1, N_y \end{matrix} \quad (13)$$

podemos sustituir su valor en el sistema (11), obteniendo una expresión sencilla del mismo, en la forma:

$$\sum_{j=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_y} M_{abjk} \cdot F_{jk} = A_{ab}, \quad \begin{array}{l} a = 1, N_x \\ b = 1, N_y \end{array} \quad (14)$$

El sistema anterior, está formado por $N_x \cdot N_y$ ecuaciones lineales, con $N_x \cdot N_y$ incógnitas, F_{jk} . Para tratarlo en la forma habitual es necesario definir las matrices y vectores siguientes:

$$S_{gh} = M_{abjk} \quad (15)$$

$$V_h = F_{jk} \quad (16)$$

$$B_g = A_{ab} \quad (17)$$

donde,

$$g = a + N_x \cdot (b-1)$$

$$h = j + N_x \cdot (k-1)$$

Introduciendo esta notación en el sistema (14), este puede expresarse como un sistema lineal de N_n ecuaciones con N_n incógnitas en la forma:

$$\sum_{h=1}^{N_n} S_{gh} \cdot V_h = B_g \quad \begin{array}{l} g = 1, N_n \\ N_n = N_x \cdot N_y \end{array} \quad (18)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtienen los coeficientes F_{jk} buscados, con lo cual desde un punto de vista formal queda resuelto el problema de la interpolación.

Condiciones de existencia

Dado que el sistema de ecuaciones definido por la expresión (18) es lineal y de matriz cuadrada, sólo será posible asegurar la existencia y unicidad de la solución en el caso de que su determinante sea no nulo. El análisis del determinante es complejo, pero podemos obtener conclusiones válidas analizando los datos de entrada.

De esta forma podemos establecer los siguientes puntos:

1. Dado que disponemos de N_n parámetros para modelar la superficie interpoladora, podemos asegurar en principio que para definir la superficie de forma unívoca será necesario introducir cuanto menos N_n datos. Esta condición es necesaria pero no suficiente.
2. Dado que la superficie interpolada dentro de cada rectángulo elemental de la malla es una bicúbica definida por 16 parámetros, para que la interpolación pase por todos los datos, es condición necesaria pero no suficiente que dentro de cada rectángulo elemental pueda interpolarse una bicúbica. Estas consideraciones se complican al introducir los requisitos de continuidad entre rectángulos elementales. No obstante se puede afirmar que en general para que una tal interpolación

exista, el número de datos ha de ser dentro de cada rectángulo elemental igual o inferior a 16.

3. Si el número de datos es superior al producto de las dimensiones de la malla, N_n , existirá en general una sólo superficie de la forma dada que minimice el error cuadrático. La veracidad de este hecho dependerá de los datos y sólo podrá demostrarse totalmente a través de un análisis del determinante del sistema, análisis que dado el orden de la matriz y la complejidad de su formulación es de gran dificultad.
4. Si el número de datos iguala al producto de las dimensiones de la malla, N_n , existirá en general una sólo superficie de la forma dada que minimice el error cuadrático. Dependiendo de cuestiones de mayor dificultad de análisis como las relativas a la existencia de bicúbicas en cada rectángulo elemental, dada la distribución de los datos y los requerimientos de continuidad en la malla, esta única solución podría ser una interpolación sobre todos los puntos dados.
5. Si el número de datos es menor que el producto de las dimensiones de la malla, N_n , existirá en general un número infinito de superficies de la forma dada que pasen por todos ellos. De forma análoga al caso anterior, la distribución de los datos en los rectángulos elementales, introduce variantes de difícil análisis.

Aspectos numéricos del problema

La obtención de la función de interpolación implica la solución de dos procesos numéricamente costosos, la generación del sistema de ecuaciones lineales (18), y su resolución. La matriz del sistema es llena y su orden es igual al número de nodos de la malla.

Por esta razón ha de calcularse y almacenarse un número muy elevado de elementos de la matriz, y no pueden aplicarse esquemas de almacenamiento y resolución de sistemas de ecuaciones en banda. No obstante, estas dificultades se soslayan parcialmente si se tiene en cuenta la doble simetría del tensor (12).

Si en la generación de la matriz se tiene en cuenta esta doble simetría sólo será necesario calcular una fracción de sus componentes. En efecto el tensor (12) posee simetría en los índices 1-3 y 2-4, como puede comprobarse a partir de la expresión de sus componentes. Ello indica que de sus $N_x \cdot N_y \cdot N_x \cdot N_y$ componentes, sólo será necesario calcular $N_x \cdot ((1+N_x)/2) \cdot N_y \cdot ((1+N_y)/2)$, lo cual reduce a algo más del 25% el número de operaciones necesarias. La matriz del sistema expresada en la forma (15) es además una matriz simétrica, formada por $N_y \cdot N_y$ cajas simétricas de orden $N_x \cdot N_x$. Esta particularidad puede ser aprovechada ventajosamente en el proceso de resolución del sistema.

Respecto a los tiempos de cálculo, podemos establecer que:

1. El número de puntos dato sólo influye significativamente en el tiempo de cálculo al ensamblar la matriz del sistema. Puesto que por cada punto sólo se produce una aportación a cada elemento de la matriz, podemos concluir que el tiempo de generación del sistema es proporcional al número de datos.
2. El número de nodos de la malla, igual al producto de sus dimensiones, N_x y N_y , influye significativamente en el ensamblaje del sistema y en el tiempo de cálculo posterior de cada punto interpolado, siendo el tiempo requerido aproximadamente proporcional al cuadrado del número de nodos y al número de nodos, respectiva-

mente, en dichas operaciones. Su influencia en todo caso es especialmente notoria en el tiempo necesario para la resolución del sistema de ecuaciones, dado que éste es aproximadamente proporcional al cubo del número de nodos.

Respecto a la disposición de los datos hemos de considerar dos efectos de distinto signo:

1. Si los datos se encuentran agrupados en una determinada zona de la región de interpolación, dada la técnica empleada para generar el sistema de ecuaciones, los coeficientes relativos a los nodos situados en tal zona serían mayores en valor absoluto que los relativos a zonas con menor número de datos. Ello conduce a sistemas mal condicionados, que introducen inestabilidades numéricas en el problema. El grado de agrupamiento debe considerarse en relación con la mayor o menor definición de la malla analizada localmente.
2. Los bordes de la malla son de por sí las zonas más sensibles a la disposición de los datos, como es frecuente en muchos tipos de interpolación. Sería conveniente por ello realizar un muestreo más abundante en las proximidades de los bordes de la malla.

DISCUSION Y ANALISIS DE RESULTADOS

Contraste del método

Para comprobar la eficacia del algoritmo, hemos utilizado la superficie de prueba siguiente:

$$\begin{aligned} X &= r \cos(2\pi t) \\ Y &= r \sin(2\pi t) \\ Z &= \exp(-r) \cdot \cos(1.5\pi r), \quad 0 < r < 2, \quad 0 < t < 1 \end{aligned}$$

definida en el cuadrado comprendido entre los valores -1 y $+1$ de las coordenadas X e Y .

Para relacionar la eficacia con el número de puntos dato, se han generado grupos de 50, 100, 200 y 500 puntos de la superficie, obtenidos aleatoriamente con distribuciones uniformes de los parámetros r y t . Como es evidente, la distribución de las coordenadas X e Y de los puntos obtenidos no es uniforme en el cuadrado en que está definida la función, sino que la densidad de datos es mayor en la zona central que en la periferia.

Para relacionar la eficacia con las dimensiones de la malla se han realizado interpolaciones con mallas de 3×3 , 5×5 , 7×7 y 10×10 nodos. Se han omitido los casos en que los resultados eran repetitivos (mallas de 3×3 en que el mayor número de datos no aportaba mejora alguna en la interpolación). La experiencia ha demostrado que la interpolación es insatisfactoria cuando el número de datos es inferior al doble del número de nodos.

Como criterio de comparación de la eficacia del método, se han realizado interpolaciones por el método de Akima en todos los casos.

A continuación se presentan los resultados obtenidos:

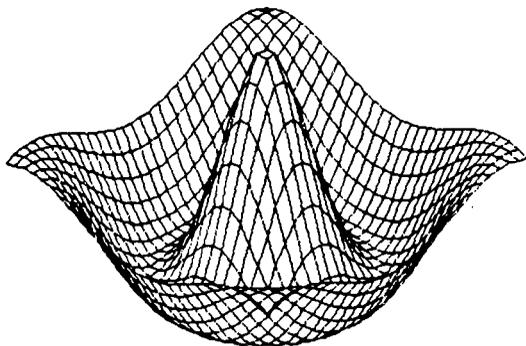


Figura 1.- Superficie de comparación obtenida mediante la función conocida de prueba.

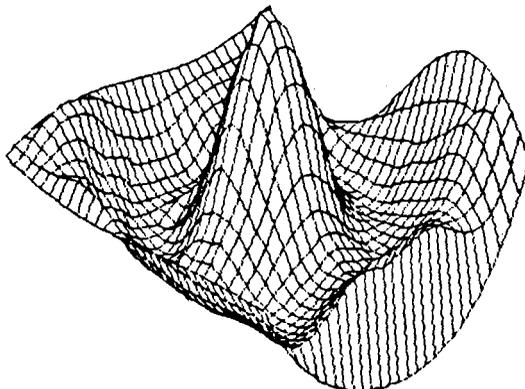


Figura 2.0.- Algoritmo de Akima con 50 datos.

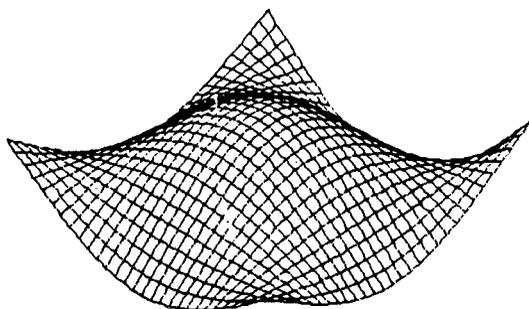


Figura 2.1.- Mínimos cuadrados con 50 datos y malla de 3x3.

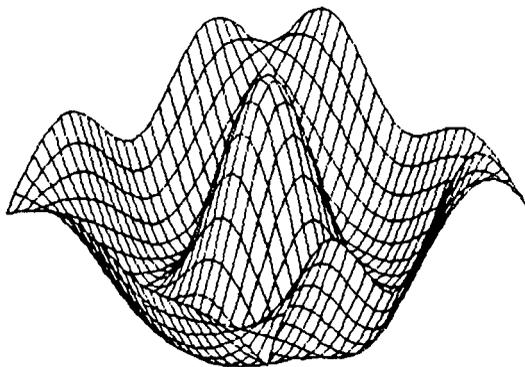


Figura 2.2.- Mínimos cuadrados con 50 datos y malla de 5x5.

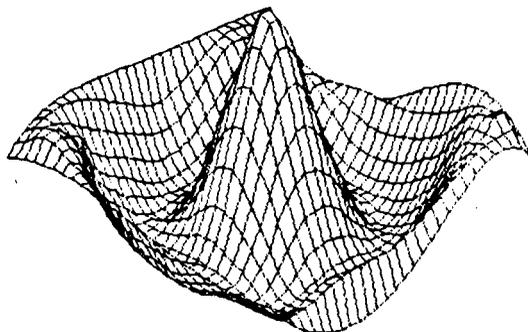


Figura 3.0.- Algoritmo de Akima con 100 datos.

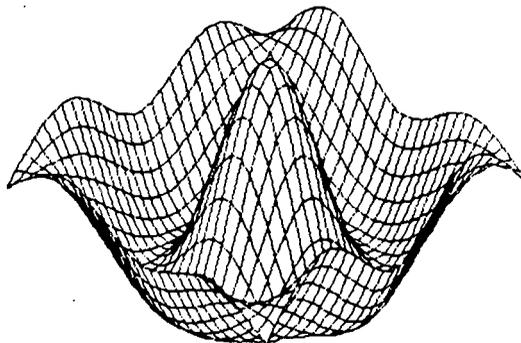


Figura 3.1.- Mínimos cuadrados con 100 datos y malla de 5x5.

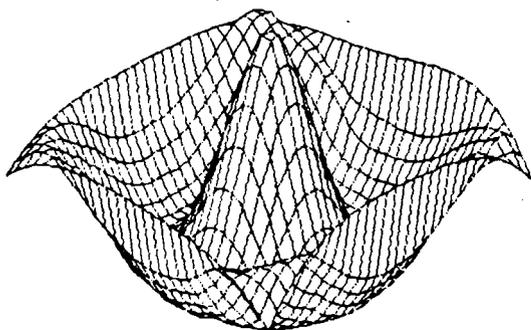


Figura 4.0.— Algoritmo de Akima con 200 datos.

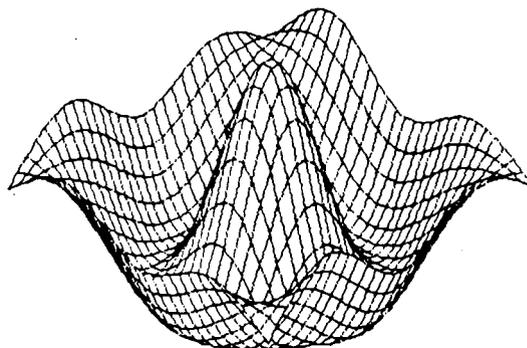


Figura 4.1.— Mínimos cuadrados con 200 datos y malla de 5x5.

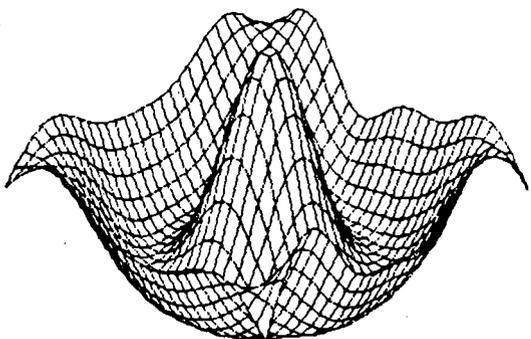


Figura 4.2.— Mínimos cuadrados con 200 datos y malla de 7x7.

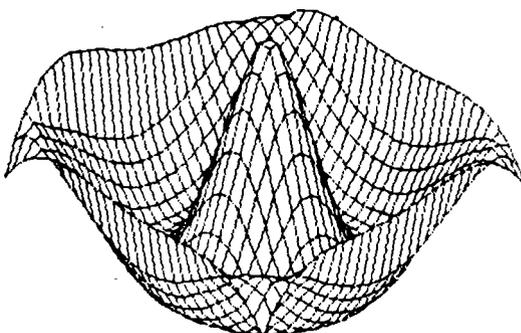


Figura 5.0.— Algoritmo de Akima con 500 datos.

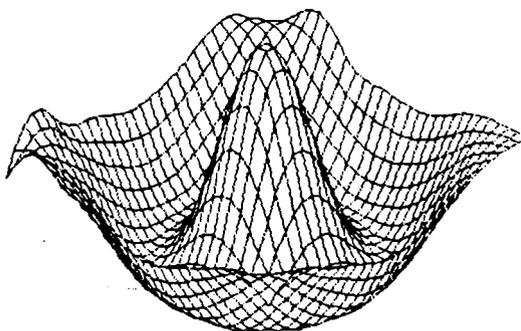


Figura 5.1.— Mínimos cuadrados con 500 datos y malla de 10x10.

Conclusiones parciales

A la vista de los resultados obtenidos, puede afirmarse que:

1. El número máximo de nodos de la malla que da lugar a interpolaciones satisfactorias es del orden de la mitad del número de datos.
2. Cuando el número de nodos de la malla es alto en relación al número de datos, los errores más notorios se producen en los contornos de la malla.
3. Cuando el número de nodos de la malla es bajo en relación al número de datos, la superficie interpoladora no es capaz de simular eficientemente las crestas y los valles de la superficie óptima.
4. Con igual número de datos, la interpolación obtenida por mínimos cuadrados, es de mayor calidad que la obtenida por el algoritmo de Akima, y tiene continuidad de orden dos si bien requiere mayor tiempo de cálculo.
5. En cualquier caso, el muestreo más efectivo parece ser aquél que es ligeramente más denso en las proximidades de los contornos que en el centro de la malla, y el algoritmo sólo funciona adecuadamente en la generación de interpolaciones puras en este supuesto. No obstante el algoritmo de Akima ofrece resultados de mayor calidad en este caso.

Ejemplos de aplicación del algoritmo

Como ejemplos de la aplicación del algoritmo, se han generado las interpolaciones siguientes:

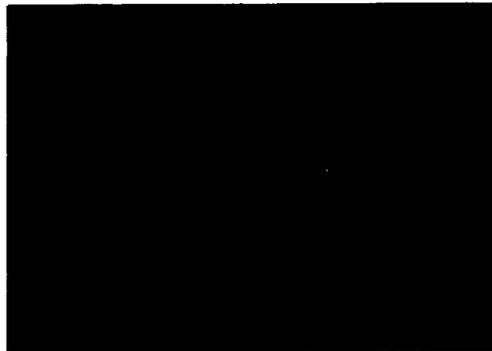


Figura 6.1.— Soporte estadístico de la porosidad y la dispersividad para un ensayo de trazadores con flujo convergente. (251 puntos y malla de 9x9).

El soporte (logaritmo de la función de verosimilitud cambiado de signo) permite estimar los parámetros desconocidos en un problema físico. En este caso, el mínimo representa la porosidad y dispersividad más “verosímiles” en el análisis de un ensayo de trazadores realizado en la formación Culebra (dolomías en Carlsbad, Nuevo México, U.S.A.). La figura es una proyección central de la superficie, representada mediante las líneas coordenadas de porosidad y dispersividad. Obsérvese que la variación de la verosimilitud es más acusada en la dirección de una de las familias de líneas coordenadas (líneas de dispersividad constante).

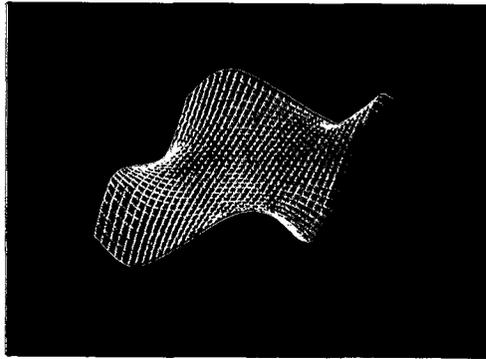


Figura 6.2.— Alabeo por torsión uniforme de una viga cuadrada de directriz recta.(200 puntos y malla de 5x5).

La figura es una perspectiva isométrica de la sección alabeada de una viga recta de sección cuadrada, sometida a un par torsor en sus extremos, libres de coacciones en sentido longitudinal. El alabeo es antimétrico.



Figura 6.3.— Propagación de un colapso circulatorio. (44 puntos y malla de 5x5).

La intensidad de tráfico se define como el número de vehículos que atraviesa una sección de una determinada vía por unidad de tiempo. La superficie se ha generado a partir de los valores medidos de la intensidad de tráfico en diferentes puntos de una vía circulatoria de Barcelona a lo largo de un determinado período de tiempo. La zona plana corresponde a la situación de régimen estable de circulación. La perturbación se debe a una alteración puntual (accidente, obstrucción, peaje, etc.), cuyos efectos se propagan en sentido contrario al flujo de los vehículos. El eje Z representa en esta figura la intensidad de tráfico, y los ejes X e Y longitud y tiempo, respectivamente.

CONCLUSIONES FINALES

1. El algoritmo expuesto permite obtener interpolaciones muy satisfactorias cuando se pretende conseguir una aproximación de calidad razonable a un conjunto de datos irregularmente distribuidos.

2. El algoritmo trabaja con mayor eficacia en el cálculo de aproximaciones por mínimos cuadrados que en el cálculo de interpolaciones puras.
3. El muestreo de los datos condiciona fuertemente la solución y debe ser lo más uniforme posible en la zona central de la malla y algo más denso en las proximidades de los contornos.
4. Es conveniente refinar la malla en las zonas en que se de un agrupamiento de los datos, con objeto de evitar el mal condicionamiento de la matriz del sistema.
5. Es preferible desde el punto de vista del tiempo de cálculo, utilizar mallas gruesas, e interpolar en ellas mallas más finas una vez conocida la expresión de la función interpoladora, que emplear directamente mallas más finas en la interpolación, dada la tasa de crecimiento del tiempo de resolución del sistema, que es proporcional aproximadamente al cubo del número de nodos de la malla.
6. A la luz de todo lo expuesto, el número de nodos de la malla y su distribución, deben ser cuidadosamente seleccionados. La base de splines ha de poder reproducir las oscilaciones de la superficie. Con mallas muy gruesas pueden obtenerse resultados de gran calidad siempre y cuando se de el supuesto anterior. Ver figuras 7.1 y 7.2.

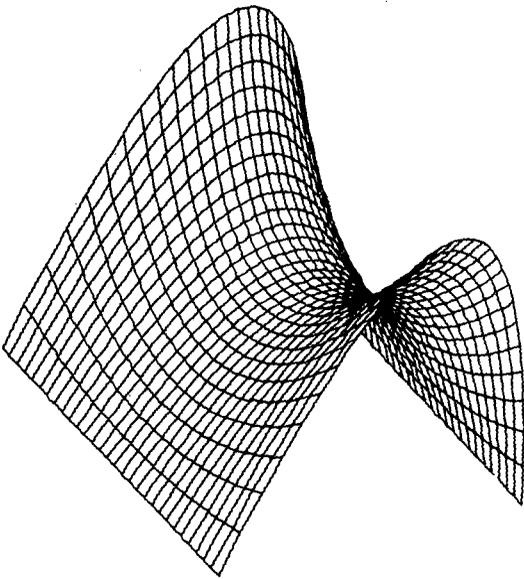


Figura 7.1.— Superficie de doble curvatura obtenida a partir de su ecuación explícita.

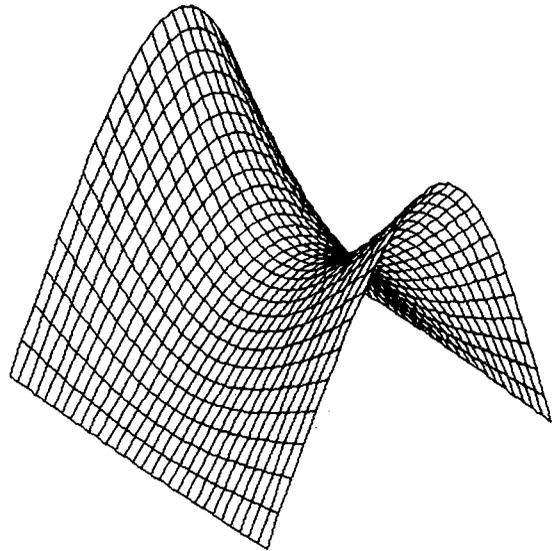


Figura 7.2.— Superficie de doble curvatura obtenida mediante el método expuesto en este artículo con 200 puntos aleatoriamente distribuidos y malla de 3×3 .

Desarrollo futuro

Los autores consideran imprescindible profundizar en el estudio de varios aspectos derivados de la aplicación del método expuesto. Se avanzan, a título indicativo, los siguientes temas:

1. Generación automática de la malla, óptimamente adaptable a los puntos base, tanto en lo que se refiere a la discretización como a la forma del contorno.
2. Utilización de bases de splines que conduzcan a sistemas de ecuaciones en banda, con objeto de disminuir el costo de almacenamiento en memoria, y el tiempo de cálculo, ya sea reduciendo sencillamente el orden de continuidad requerido, o bien utilizando bases de splines de mayor grado.
3. Análisis de expresiones alternativas al error cuadrático tal como se ha definido, con objeto de introducir efectos de suavizado, etc., y generación de funciones de peso dependientes de la distribución de los datos.
4. Introducción de las diversas condiciones de contorno de la base de splines en la minimización.

La función interpoladora, tal como ha sido planteada, posee curvatura nula en el contorno. Por esta razón no resulta viable reproducir adecuadamente superficies de fuerte curvatura en los extremos. La figura 8.1 representa un casquete esférico obtenido directamente a partir de la ecuación de la superficie esférica. Las figuras 8.2 y 8.3 representan las aproximaciones con mallas de 3×3 y 5×5 respectivamente, obtenidas sobre 200 puntos aleatoriamente muestreados. Obsérvese que el aumento del orden de la malla no introduce mejoras notables en los contornos, de curvatura nula.

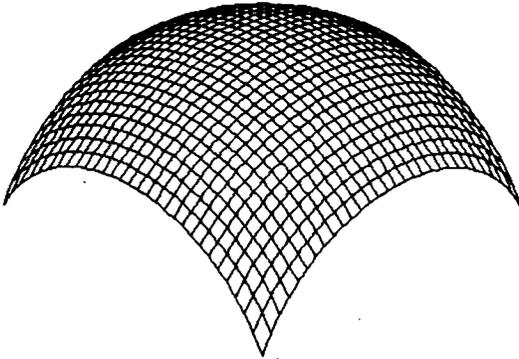


Figura 8.1.— Cúpula esférica obtenida a partir de su ecuación exacta.

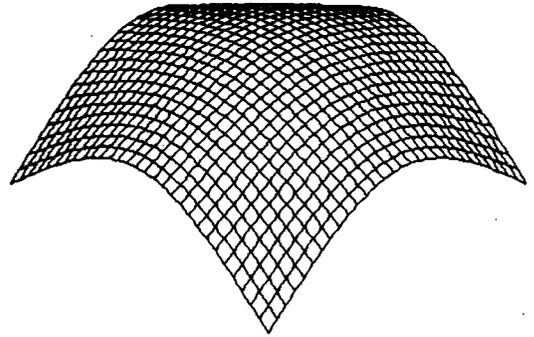


Figura 8.2.— Cúpula esférica obtenida por mínimos cuadrados con 200 datos y malla de 3×3 .

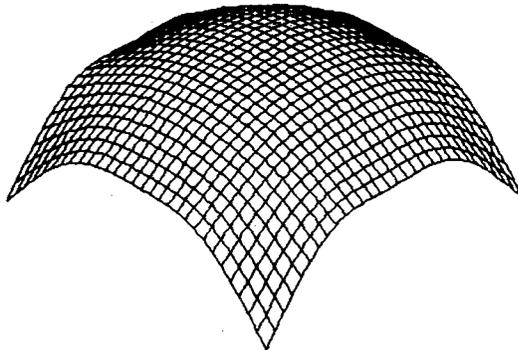


Figura 8.3.— Cúpula esférica obtenida por mínimos cuadrados con 200 datos y malla de 5×5 .

5. Generalización a otros sistemas de coordenadas.
6. Introducción de restricciones en el proceso de obtención de la superficie.
7. Aplicación del método a la interpolación de superficies cerradas, con funciones $Z(X,Y)$ no unívocas, etc.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio fue comenzado a instancias del profesor Dr. D. Pere Brunet, Director del Departamento de Métodos Informáticos de la Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Para la realización de las tareas de cómputo y dibujo se ha hecho uso del ordenador y el equipo gráfico del Centro de Cálculo de la Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de la Universitat Politècnica de Catalunya.

REFERENCIAS

1. H. Akima, A Method of Bivariate Interpolation and Smooth Surface Fitting for Irregularly Distributed Data Points, *ACM Trans. Math Software* 4, 2 (Junio 1978), 148-159.